

# Информатика и её применения

Том 20    Выпуск 2    Год 2026

## СОДЕРЖАНИЕ

Квадрат Шура–Адамара случайного подкода случайного линейного кода над полем характеристики 2 с большой вероятностью совпадает с квадратом исходного кода

**И. В. Чижов** 2

Алгоритм редукций наименьшей обучающей выборки для фактор-решеток

**Д. В. Виноградов** 25

Декодирование визуальной информации из нейронных сигналов: реконструкция изображений на основе совместного анализа функциональной магнитно-резонансной томографии и электроэнцефалографии

**Д. Д. Дорин, Н. С. Киселев, А. В. Грабовой** 35

Многошаговый адаптивный алгоритм оптимизации с прогнозированием и его применение в задачах оптимального управления динамическими системами

**А. В. Пантелеев, Е. А. Хвошнянская** 50

Фильтрация специальных марковских скачкообразных процессов по дискретизованным наблюдениям

**А. В. Борисов, Ю. Н. Куринов** 63

Асимптотические свойства оценок параметров дигамма-распределения, построенных по выборке со слабо зависимыми компонентами

**А. А. Кудрявцев, О. В. Шестаков** 74

Поиск аномалий в сетевых системах управления

**А. А. Грушо, Н. А. Грушо, М. И. Забежайло, А. А. Зацаринный, В. О. Писковский** 82

Исследование системы  $M/G/1$  с событийно-зависимыми интенсивностями поступления в условиях критической загрузки

**А. К. Берговин, В. Г. Ушаков** 89

Об авторах 96

Правила подготовки рукописей 98

Requirements for manuscripts 101

# КВАДРАТ ШУРА–АДАМАРА СЛУЧАЙНОГО ПОДКОДА СЛУЧАЙНОГО ЛИНЕЙНОГО КОДА НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2 С БОЛЬШОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ СОВПАДАЕТ С КВАДРАТОМ ИСХОДНОГО КОДА

И. В. Чижов<sup>1</sup>

**Аннотация:** Исследуется задача о квадрате Шура–Адамара случайного подкода случайного линейного кода над конечным полем характеристики 2, а именно: для случайно выбранной порождающей  $(k \times n)$ -матрицы  $G$  кода  $C$  и случайно выбранного  $[n, \ell]_q$ -подкода  $C_\lambda \subseteq C$  оценивается вероятность выполнения равенства  $C_\lambda^{\circ 2} = C^{\circ 2}$ . Доказано, что при  $k = \lceil Rn \rceil$ ,  $R \in (0, 1]$ , и при выборе размерности подкода  $\ell$  порядка  $\sqrt{n}$  указанная вероятность с точностью до экспоненциально малой по  $n$  поправки совпадает с единицей сразу для подавляющего большинства матриц  $G$ . Полученный результат дает строгое обоснование экспериментально наблюдаемого свойства, лежащего в основе ряда атак на теоретико-кодовые криптосистемы Мак-Элиса, построенные на подкодах обобщенных кодов Рида–Соломона (ОРС-кодов) и алгеброгеометрических кодов. В качестве технического инструмента в работе устанавливаются точные формулы и оценки для числа totally isotropic подпространств заданной размерности произвольной симметричной билинейной формы заданного ранга над полем характеристики 2, которые могут представлять самостоятельный интерес.

**Ключевые слова:** квадрат Шура–Адамара; случайный подкод линейного кода; totally isotropic подпространство симметричной билинейной формы; теоретико-кодовая криптография

DOI: 10.14357/19922264260201

EDN: NNGASK

## 1 Введение

Квадратом Шура–Адамара (квадратом Шура или просто квадратом) линейного  $[n, k]_q$ -кода  $C$  называют линейную оболочку всех покомпонентных произведений пар кодовых слов:

$$C^{\circ 2} = \langle c_1 \circ c_2 \mid c_1, c_2 \in C \rangle.$$

Квадрат Шура–Адамара линейных кодов стал за последнее десятилетие одним из центральных объектов алгебраической теории кодирования — как источником глубоких структурных результатов, так и мощным инструментом криптоанализа кодовых криптосистем.

Важнейшую роль в этом контексте играет следующая задача о подкодах: насколько типично, что подкод  $C_\lambda \subseteq C$  размерности  $\ell < k$  «наследует» квадрат Шура–Адамара исходного кода, т. е. выполняется равенство  $C_\lambda^{\circ 2} = C^{\circ 2}$ ? Этот вопрос не имеет очевидного ответа: подкоды могут быть существенно меньше исходного кода, а квадрат подкодов вкладывается в квадрат исходного,  $C_\lambda^{\circ 2} \subseteq C^{\circ 2}$ , поэтому равенство не является тривиальным. Однако в экспериментах удается наблюдать следующую картину: квадрат Шура–Адамара случайно выбранного

подкода  $C_\lambda$  почти всегда совпадает с квадратом  $C^{\circ 2}$  исходного кода (см., например, гипотезу 1 в работе [1] и табл. 3 из той же статьи).

Операция произведения Шура–Адамара впервые появилась в работах Р. Кеттера [2] и Р. Пеликаана [3], в которых на основе этой операции вводится понятие пары кодов локаторов ошибок, а также строятся эффективные алгоритмы декодирования некоторых циклических и алгеброгеометрических кодов.

Систематическое изучение произведений линейных кодов начато Х. Рандриамболлоной в работе [4], где введен формализм степеней линейного кода и установлены их базовые свойства.

В статье [5] доказано, что асимптотически при величине размерности линейного кода его квадрат Шура–Адамара с большой вероятностью достигает своего максимально возможного значения.

Работы [6, 7] уточняют поведение размерности квадрата Шура–Адамара случайного линейного кода, а именно: в них доказаны неасимптотические нижние границы вероятности того, что эта размерность будет максимально возможной. Описанное

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, chizhoviv@my.msu.ru

свойство случайного линейного кода служит достаточно мощным средством отличия некоторого линейного кода от случайного кода.

Криптографическая мотивация изучения квадрата Шура–Адамара столь же весома. Одна из первых атак на теоретико-кодовые криптосистемы, которая использует квадрат Шура–Адамара, принадлежит К. Виесшебринку [8]: он использовал тот факт, что квадрат Шура–Адамара подкодов ОРС-кода совпадает с квадратом Шура–Адамара исходного кода Рида–Соломона. В силу этого свойства криптоанализ криптосистемы Мак–Элиса [9], построенной на подкодах ОРС-кода, сводится к криптографическому анализу той же криптосистемы, построенной на самих ОРС-кодах, а к этой криптосистеме, как известно, применима эффективная атака Сидельникова–Шестакова [10].

С использованием квадрата Шура–Адамара в последнее время были разработаны атаки на криптосистемы Мак–Элиса, построенные на большом числе модификаций ОРС-кодов (см., например, статьи [11, 12]).

В работе [13] с помощью квадрата Шура–Адамара построены эффективные структурные атаки, т.е. восстанавливающие секретный ключ, на ряд теоретико-кодовых криптосистем, основанных на различных модификациях ОРС-кодов. В [1] предложена эффективная атака на теоретико-кодовую криптосистему на основе алгеброгеометрических кодов и их подкодов. При этом в обеих атаках ключевым является неформальное предположение о том, что квадрат Шура–Адамара подкода ОРС-кода или алгеброгеометрического кода с большой вероятностью совпадает с квадратом исходного кода.

Первый подход к строгому обоснованию этого свойства сделан в работе [14], в которой доказано, что вероятность, с которой квадрат Шура–Адамара случайного подкода ОРС-кода над полем из  $q$  элементов совпадает с квадратом самого ОРС-кода, стремится к единице при стремлении  $q$  к бесконечности. При этом поведение квадрата Шура–Адамара подкодов ОРС-кодов в других режимах выбора параметров неизвестно.

Эта же задача исследовалась и для подкодов двоичных кодов Рида–Маллера. Так, в работах [15, 16] проведена классификация произведений Шура–Адамара всех подкодов коразмерности 1 двоичных кодов Рида–Маллера. Из этой классификации следует, что почти для всех пар подкодов коразмерности 1 их произведение Шура–Адамара совпадает с квадратом Шура–Адамара кода Рида–Маллера. В работе [17] изучалось поведение квадрата Шура–Адамара подкодов кодов Рида–Маллера степени  $r$ , которые содержат целиком код Рида–Маллера на единицу меньшей размерности. И, кроме того,

установлено, что доля подкодов кода Рида–Маллера, квадрат Шура–Адамара которых не совпадает с квадратом исходного кода Рида–Маллера, стремится к нулю.

В настоящей работе для почти всех линейных кодов над конечным полем характеристики 2 будет установлена оценка вероятности того, что квадрат Шура–Адамара случайного подкода этого кода совпадает с квадратом всего кода.

## 2 Предварительные сведения и определения

Для произвольного натурального  $n$  через  $\mathbb{F}_q^n$  будем обозначать линейное пространство векторов-строк длины  $n$  над конечным полем  $\mathbb{F}_q$ .

Линейным блоковым  $[n]_q$ -кодом  $\mathcal{C}$  называется произвольное линейное подпространство пространства  $\mathbb{F}_q^n$ . При этом число  $n$  называется длиной кода  $\mathcal{C}$ . Векторы, лежащие в коде  $\mathcal{C}$ , будем называть кодовыми словами.

Линейным блоковым  $[n, k]_q$ -кодом  $\mathcal{C}$  называется линейное подпространство размерности  $k$  пространства  $\mathbb{F}_q^n$ . Число  $k$  называется размерностью кода  $\mathcal{C}$ .

Порождающей матрицей  $[n, k]_q$ -кода  $\mathcal{C}$  называется  $(k \times n)$ -матрица  $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$ , строками которой служат базисные векторы  $[n, k]_q$ -кода  $\mathcal{C}$ .

Если  $[n, k]_q$ -код  $\mathcal{C}$  имеет порождающую матрицу  $G$ , то справедливо равенство

$$\mathcal{C} = \{a \cdot G \mid a \in \mathbb{F}_q^k\}.$$

Если подмножество  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$  некоторого  $[n, k]_q$ -кода является  $[n, \ell]_q$ -кодом, то  $\mathcal{B}$  будем называть  $[n, \ell]_q$ -подкодом  $\mathcal{C}$ .

Произведением Шура–Адамара (произведением Шура, произведением Адамара) векторов  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}_q^n$  и  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_q^n$  называется покомпонентное произведение векторов  $c$  и  $b$ , т.е. вектор

$$c \circ b = (c_1 \cdot b_1, \dots, c_n \cdot b_n),$$

где « $\cdot$ » — операция умножения элементов поля  $\mathbb{F}_q$ .

Произведением Шура–Адамара (произведением Шура, произведением Адамара, покомпонентным произведением)  $[n]_q$ -кодов  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{B}$  называется код  $\mathcal{C} \circ \mathcal{B}$ , который совпадает с линейной оболочкой множества  $\{c \circ b \mid c \in \mathcal{C}, b \in \mathcal{B}\}$ . Здесь  $c \circ b$  — произведение Адамара векторов  $c$  и  $b$ . Квадратом Адамара кода  $\mathcal{C}$  называется код  $\mathcal{C}^{\circ 2} = \mathcal{C} \circ \mathcal{C}$ . Несложно увидеть, что если  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ , то  $\mathcal{B}^{\circ 2} \subseteq \mathcal{C}^{\circ 2}$ .

Для  $[n]_q$ -кода  $C$  определим  $[n]_q$ -код  $C^\perp$  как множество всех векторов  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}_q^n$ , для которых выполняется равенство  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}^\top = 0$  для каждого кодового слова  $\mathbf{c}$  кода  $C$ . Код  $C^\perp$  будем называть дуальным кодом к коду  $C$ . Если  $C$  —  $[n, k]_q$ -код, то  $C^\perp$  является  $[n, n - k]_q$ -кодом.

Оболочкой  $[n]_q$ -кода  $C$  называется  $[n]_q$ -код  $\mathcal{H}(C) = C \cap C^\perp$ . Размерность оболочки линейного кода устанавливает следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Если  $[n, k]_q$ -код  $C$  имеет порождающую матрицу  $G$ , то выполняется равенство

$$\dim \mathcal{H}(C) = k - \text{rank } GG^\top.$$

Более того, если  $F \in \mathbb{F}_q^{\ell \times n}$  — некоторая матрица, линейная оболочка строк которой совпадает с кодом  $C$ , то будет также верно равенство

$$\dim \mathcal{H}(C) = \text{rank } F - \text{rank } FF^\top.$$

**Доказательство.** Первая часть утверждения доказана, например, в работе [18].

Докажем вторую часть утверждения.

Так как линейная оболочка строк матрицы  $F$  совпадает с  $[n, k]_q$ -кодом  $C$ , то  $\text{rank } F = k$ . Далее, если матрица  $A \in \mathbb{F}_q^{\ell \times \ell}$  невырождена, то для любой матрицы  $F \in \mathbb{F}_q^{\ell \times n}$  будет выполняться равенство

$$\begin{aligned} \text{rank} ((A \cdot F) \cdot (A \cdot F)^\top) &= \\ &= \text{rank} (A \cdot (F \cdot F^\top) \cdot A^\top) = \text{rank} (F \cdot F^\top). \end{aligned}$$

Так как  $\text{rank } F = k$ , то существует такая матрица  $E \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$ ,  $\text{rank } E = k$ , что для некоторой невырожденной матрицы  $A \in \mathbb{F}_q^{\ell \times \ell}$  будет выполняться равенство

$$A \cdot F = \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{0}_{(\ell-k) \times n} \end{pmatrix},$$

т. е.  $\text{rank} ((AF) \cdot (AF)^\top) = \text{rank } E \cdot E^\top$ , а значит, из невырожденности  $A$  следует равенство  $\text{rank } FF^\top = \text{rank } EE^\top$ .

Так как линейная оболочка строк матрицы  $F$  совпадает с  $C$ , то тем же свойством обладает и  $E$ , поэтому с учетом того, что она имеет ранг  $k$ , матрица  $E$  будет порождающей матрицей  $C$ . Поэтому из первой части утверждения выполняется равенство

$$\dim \mathcal{H}(C) = k - \text{rank } EE^\top,$$

откуда с учетом равенств  $\text{rank } EE^\top = \text{rank } FF^\top$  и  $\text{rank } F = k$  будет следовать справедливость второй части утверждения.

### 3 Задача о квадрате Шура–Адамара случайного подкода

В работе будет представлять интерес вопрос, с какой вероятностью при случайном выборе  $[n, \ell]_q$ -подкода  $B$  будет выполняться равенство  $B^{\circ 2} = C^{\circ 2}$ .

Для начала необходимо формализовать случайный выбор  $[n, \ell]_q$ -подкода.

Если матрица  $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$  порождает  $[n, k]_q$ -код  $C$ , а  $A \in \mathbb{F}_q^{\ell \times k}$  — произвольная матрица ранга  $\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq k$ , то матрица  $A \cdot G$  будет порождающей матрицей для некоторого  $[n, \ell]_q$ -подкода  $B$  кода  $C$ . Верно и обратное: если  $B$  —  $[n, \ell]_q$ -подкод  $C$ , то найдется такая матрица  $A \in \mathbb{F}_q^{\ell \times k}$  ранга  $\ell$ , что  $A \cdot G$  будет порождать подкод  $B$ . Поэтому задачу о вычислении вероятности можно уточнить следующим образом.

Зафиксируем матрицу  $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$ , линейная оболочка ее строк совпадает с линейным кодом  $C$ .

Занумеруем произвольным образом все  $(\ell \times k)$ -матрицы над  $\mathbb{F}_q$  ранга  $\ell$ . Выберем случайно и равномерно номер  $\lambda \in \mathbb{N}$ , который соответствует матрице  $A_\lambda \in \mathbb{F}_q^{\ell \times k}$ . Обозначим через  $C_\lambda$  подкод кода  $C$ , совпадающий с линейной оболочкой строк матрицы  $A_\lambda G$ .

**Вопрос:** С какой вероятностью выполняется равенство  $C_\lambda^{\circ 2} = C^{\circ 2}$ ?

Ответ на этот вопрос будет дан в теореме 1.

### 4 Произведение Шура–Адамара и изотропные пространства билинейных форм

Сформулируем несложное техническое утверждение.

**Утверждение 2.** Для любых векторов  $x, y, b \in \mathbb{F}_q^n$  и диагональной матрицы  $D_b \in \mathbb{F}_q^{n \times n}$  с вектором  $b$  на главной диагонали выполняется равенство:

$$(x \circ y) \cdot b^\top = x \cdot D_b \cdot y^\top.$$

**Доказательство.** Равенство непосредственно следует из определения произведения Адамара и очевидного тождества  $x \cdot D_b = (x_1 b_1, x_2 b_2, \dots, x_n b_n)$ , верного для любых  $x, b \in \mathbb{F}_q^n$ .  $\square$

Утверждение 2 позволит далее связать размерность квадрата Шура–Адамара подкода с totally изотропными пространствами билинейных форм.

Напомним несколько фактов из теории билинейных форм.

Билинейной формой  $\beta$ , действующей на линейное пространство  $\mathbb{F}_q^k$  над полем  $\mathbb{F}_q$ , будем называть произвольное отображение  $\beta : \mathbb{F}_q^k \times \mathbb{F}_q^k \rightarrow \mathbb{F}_q$ , которое удовлетворяет следующим свойствам.

1. Для любых векторов  $x_1, x_2, y \in \mathbb{F}_q^k$  верно равенство

$$\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y).$$

2. Для любых векторов  $x, y_1, y_2 \in \mathbb{F}_q^k$  выполняется равенство

$$\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2).$$

3. Для любых векторов  $x, y \in \mathbb{F}_q^k$  и любой константы  $a \in \mathbb{F}_q$  выполняются равенства

$$\beta(a \cdot x, y) = a \cdot \beta(x, y);$$

$$\beta(x, a \cdot y) = a \cdot \beta(x, y).$$

Таким образом,  $\beta(x, y)$  представляет собой линейное отображение по каждой своей переменной.

Билинейная форма называется симметричной, если помимо прочего для любых  $x, y \in \mathbb{F}_q^k$  выполняется равенство  $\beta(y, x) = \beta(x, y)$ . Аналогично кососимметричной называется такая билинейная форма  $\beta$ , что для любых  $x, y \in \mathbb{F}_q^k$  выполняется равенство  $\beta(y, x) = -\beta(x, y)$ .

Если для любого  $x \in \mathbb{F}_q^k$  выполняется равенство  $\beta(x, x) = 0$ , то  $\beta$  называется знакопеременной (иногда в литературе также встречается термин «альтернированная»). Заметим, что над полем характеристики, отличной от двух, каждая кососимметричная форма — знакопеременная. Обратное верно только в случае, если поле  $\mathbb{F}_q$  имеет характеристику, отличную от двух. Также в поле характеристики 2 понятия симметричной и кососимметричной билинейной формы тождественны. Кроме того, в этом случае можно встретить симметричные билинейные формы, которые при этом не являются знакопеременными.

Иногда знакопеременные формы также называют симплектическими, а симметричные билинейные формы называют ортогональными.

Таким образом, из всех перечисленных типов билинейных форм над полем характеристики, отличной от 2, можно выделить два:

- (1) симметричная, или ортогональная;
- (2) кососимметричная, или симплектическая.

Над полем характеристики 2 можно рассматривать следующие два типа:

- (1) симметричная незнакомпеременная (неальтернированная);

- (2) симметричная знакопеременная, или симплектическая.

Зафиксируем в  $\mathbb{F}_q^k$  произвольным образом базис  $e_1, e_2, \dots, e_k$ . Тогда с каждой билинейной формой  $\beta$ , заданной на  $\mathbb{F}_q^k$ , можно связать  $(k \times k)$ -матрицу  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$  с элементами  $b_{i,j} = \beta(e_i, e_j) \in \mathbb{F}_q$ . Эту матрицу будем называть матрицей билинейной формы  $\beta$ . При фиксации базиса она определяется однозначно. Ясно, что тогда для любых  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{F}_q^k$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{F}_q^k$  можно записать

$$\beta(x, y) = x \cdot B \cdot y^T,$$

где координаты векторов  $x$  и  $y$  выбираются в том же базисе  $e_1, e_2, \dots, e_k$ .

Рангом билинейной формы  $\beta$  будем называть ранг ее матрицы  $B$ . Если ранг билинейной формы максимален, т. е. равен  $k$ , то такую билинейную форму будем называть невырожденной.

Отметим, что билинейная форма является симметричной (кососимметричной), если и только если матрица билинейной формы симметрична (кососимметрична), т. е. для нее выполняется условие  $B = B^T$  (соответственно  $B = -B^T$ ).

Если  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{F}_q^k$  — произвольное подпространство  $\mathbb{F}_q^k$  размерности  $\ell$ , заданное базисом  $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ ,  $v_i \in \mathcal{V}$ ,  $i = \overline{1, \ell}$ , то для билинейной формы  $\beta : \mathbb{F}_q^k \times \mathbb{F}_q^k \rightarrow \mathbb{F}_q$  можно определить билинейную форму  $\beta|_{\mathcal{V}} : \mathbb{F}_q^\ell \times \mathbb{F}_q^\ell \rightarrow \mathbb{F}_q$  следующим образом:

$$\beta|_{\mathcal{V}}(x, y) = \beta(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_\ell v_\ell,$$

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_\ell v_\ell) = \sum_{1 \leq i, j \leq \ell} x_i y_j \beta(v_i, v_j).$$

Здесь

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_\ell) \in \mathbb{F}_q^\ell; \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_\ell) \in \mathbb{F}_q^\ell.$$

Из определения билинейной формы  $\beta|_{\mathcal{V}}$  следует, что если  $B \in \mathbb{F}_q^{k \times k}$  — матрица билинейной формы  $\beta$ , а  $V \in \mathbb{F}_q^{\ell \times k}$  — матрица, строками которой служат векторы  $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ , то матрица  $B|_{\mathcal{V}} \in \mathbb{F}_q^{\ell \times \ell}$  билинейной формы  $\beta|_{\mathcal{V}}$  может быть построена следующим образом:

$$B|_{\mathcal{V}} = V \cdot B \cdot V^T.$$

Векторы  $x, y \in \mathbb{F}_q^k$  называются ортогональными векторами для билинейной формы  $\beta : \mathbb{F}_q^k \times \mathbb{F}_q^k \rightarrow \mathbb{F}_q$ , или ортогональными относительно  $\beta$ , если и только если  $\beta(x, y) = 0$ .

Линейное подпространство  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_q^k$  называется totally isotropic (или просто isotropic)

пространством для билинейной формы  $\beta$ , если и только если любые векторы  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$  ортогональны относительно  $\beta$ , т. е. равенство  $\beta(u_1, u_2) = 0$  выполнено для всех  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ .

Если  $B \in \mathbb{F}_q^{k \times k}$  — матрица билинейной формы  $\beta$ , то  $\mathcal{U}$  будет totally изотропным пространством  $\beta$ , если и только если для любых векторов  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$  выполняется равенство  $u_1 \cdot B \cdot u_2^\top = 0$ .

Пусть  $U \in \mathbb{F}_q^{\ell \times k}$  — матрица, составленная из базисных векторов линейного подпространства  $\mathcal{U}$ . Тогда  $\mathcal{U}$  будет изотропным пространством для билинейной формы  $\beta$  с матрицей  $B \in \mathbb{F}_q^{k \times k}$ , если и только если выполняется равенство  $U \cdot B \cdot U^\top = 0$ .

Если  $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$ , то рассмотрим матрицу  $G^{\circ 2}$ , которая состоит из произведений Адамара  $g_i \circ g_j$  пар строк  $g_i$  и  $g_j$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ , матрицы  $G$ . Из определения квадрата Шура–Адамара линейного кода верно следующее утверждение.

**Утверждение 3.** Если  $[n, k]_q$ -код  $\mathcal{C}$  имеет порождающую матрицу  $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$ , тогда  $\mathcal{C}^{\circ 2}$  совпадает с линейной оболочкой строк матрицы  $G^{\circ 2}$ , а значит,  $\dim \mathcal{C}^{\circ 2} = \text{rank } G^{\circ 2}$ .

Для каждого вектора  $b \in \mathbb{F}_q^n$  будем рассматривать диагональную матрицу  $D_b \in \mathbb{F}_q^{n \times n}$ , у которой на главной диагонали стоит вектор  $b$ .

**Утверждение 4.** Если  $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$  и  $A \in \mathbb{F}_q^{\ell \times k}$ , то неравенство  $\text{rank } (A \cdot G)^{\circ 2} \neq \text{rank } G^{\circ 2}$  выполняется тогда и только тогда, когда подпространство  $\mathcal{A}$ , порождаемое строками  $A$ , является totally изотропным пространством хотя бы одной симметричной билинейной формы с матрицей  $B_b = G \cdot D_b \cdot G^\top$ ,  $b \in \mathbb{F}_q^n$ , ранга по меньшей мере 1.

**Доказательство.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_\ell$  — строки матрицы  $A$ . Тогда строки матрицы  $(A \cdot G)^{\circ 2}$  суть произведения Адамара  $(a_i G) \circ (a_j G)$  для  $1 \leq i < j \leq \ell$ .

Из утверждения 2 для каждой пары  $1 \leq i < j \leq \ell$  выполняется равенство

$$((a_i G) \circ (a_j G)) \cdot b^\top = a_i \cdot G D_b G^\top \cdot a_j^\top,$$

поэтому условие  $(A \cdot G)^{\circ 2} \cdot b^\top = 0$  эквивалентно равенству

$$A \cdot (G D_b G^\top) \cdot A^\top = 0.$$

Аналогично условие  $G^{\circ 2} \cdot b^\top = 0$  эквивалентно равенству  $G D_b G^\top = 0$ .

В частности, если  $G D_b G^\top = 0$ , то и  $A G D_b G^\top A^\top = 0$ . Поэтому из равенства  $G^{\circ 2} \cdot b^\top = 0$  следует выполнение равенства  $(A \cdot G)^{\circ 2} \cdot b^\top = 0$ . Получается, что неравенство  $\text{rank } (A \cdot G)^{\circ 2} \neq \text{rank } G^{\circ 2}$  выполняется тогда и только тогда, когда найдется такой вектор  $b \in \mathbb{F}_q^n$ , что

$G^{\circ 2} \cdot b^\top \neq 0$  и при этом  $(A \cdot G)^{\circ 2} \cdot b^\top = 0$ , а это эквивалентно выполнению соотношений

$$G D_b G^\top \neq 0; \quad A \cdot (G D_b G^\top) \cdot A^\top = 0.$$

Последнее выполняется тогда и только тогда, когда найдется такой  $b \in \mathbb{F}_q^n$ , что подпространство  $\mathcal{A}$  totally изотропно для билинейной формы с матрицей  $B_b = G D_b G^\top$  ранга по меньшей мере 1.  $\square$

Из утверждения 4 следует, что для решения центрального вопроса статьи необходимо оценить число totally изотропных пространств каждой билинейной формы с матрицей  $B_b$  ранга по меньшей мере 1.

## 5 Число totally изотропных пространств невырожденной билинейной формы

Для каждой билинейной формы  $\beta$  рассмотрим число  $\nu(\beta)$ , равное максимальной размерности подпространства  $\mathcal{U}$ , изотропного для  $\beta$ . Число  $\nu(\beta)$  называется индексом Витта билинейной формы.

**Определение 1.** Если  $\beta(x, y)$  — симметричная билинейная форма на  $\mathbb{F}_q^k$ , то множество  $\mathcal{R}_\beta = \{x \in \mathbb{F}_q^k \mid \beta(x, y) = 0 \forall y \in \mathbb{F}_q^k\}$ , состоящее из векторов, ортогональных относительно билинейной формы  $\beta$  каждому вектору из  $\mathbb{F}_q^k$ , называется радикалом билинейной формы  $\beta$ .

**Утверждение 5.** Сумма размерностей радикала  $\mathcal{R}_\beta$  симметричной билинейной формы  $\beta$ , заданной на  $\mathbb{F}_q^k$ , и ее ранга равна  $k$ , т. е.  $\dim \mathcal{R}_\beta + \text{rank } \beta = k$ .

**Утверждение 6.** Если  $\beta$  — симметричная билинейная форма на  $\mathbb{F}_q^k$ , а  $\mathcal{R}_\beta$  — ее радикал, то найдется такое линейное подпространство  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{F}_q^k$ ,  $\dim \mathcal{W} = \text{rank } \beta$ , что выполняется равенство  $\mathbb{F}_q^k = \mathcal{R}_\beta \oplus \mathcal{W}$  и при этом  $\text{rank } \beta|_{\mathcal{W}} = \text{rank } \beta$ , т. е.  $\beta|_{\mathcal{W}}$  как форма, заданная на  $\mathcal{W}$ , невырождена.

**Доказательство.** Разложение  $\mathbb{F}_q^k$  в прямую сумму подпространств  $\mathcal{R}_\beta$  и  $\mathcal{W}$  можно получить дополнением базиса  $\mathcal{R}_\beta$  до базиса всего пространства. Нужно доказать только, что  $\beta|_{\mathcal{W}}$  невырождена.

Обозначим через  $\ell$  размерность  $\mathcal{W}$ , т. е.  $\ell = \text{rank } \beta$ , и рассмотрим матрицу  $B_{\mathcal{W}} \in \mathbb{F}_q^{\ell \times \ell}$  билинейной формы  $\beta|_{\mathcal{W}}$ . Рассмотрим такой вектор  $x \in \mathbb{F}_q^\ell$ , что  $x \cdot B_{\mathcal{W}} = 0$ , а значит, этот вектор ортогонален любому вектору из  $\mathbb{F}_q^\ell$  относительно формы  $\beta|_{\mathcal{W}}$ .

Фиксируем произвольным образом базис  $w_1, w_2, \dots, w_\ell \in \mathbb{F}_q^k$  подпространства  $\mathcal{W}$  и построим матрицу  $W \in \mathbb{F}_q^{\ell \times k}$ , у которой строки составлены

из базисных векторов  $w_i$ ,  $i = \overline{1, \ell}$ . Если для  $i = \overline{1, \ell}$  через  $e_i \in \mathbb{F}_q^\ell$  обозначить вектор с координатой 1 в позиции  $i$ , то с учетом определения  $\beta|_{\mathcal{W}}$  получим цепочку равенств

$$\beta|_{\mathcal{W}}(x, e_i) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(x \cdot W, w_i) = 0,$$

из которой следует, что  $x \cdot W$  ортогонален каждому вектору в  $\mathcal{W}$ . При этом, поскольку  $\beta$  симметрична, из определения радикала следует, что каждый вектор  $r \in \mathcal{R}_\beta$  удовлетворяет  $\beta(r, x \cdot W) = 0$ , откуда  $\beta(x \cdot W, r) = 0$ , т.е.  $x \cdot W$  ортогонален каждому вектору из  $\mathcal{R}_\beta$ . Получается, что он ортогонален всем векторам пространства  $\mathbb{F}_q^k$ . Но  $x \cdot W \in \mathcal{W}$  как линейная комбинация базисных векторов  $\mathcal{W}$ , поэтому  $x \cdot W \in \mathcal{R}_\beta \cap \mathcal{W} = \{0\}$ , т.е.  $x \cdot W = 0$ . Но так как строки  $W$  линейно независимы, то  $\text{rank } W = \ell$ , откуда  $x \cdot W = 0$  влечет равенство  $x = 0$ , а значит,  $\beta|_{\mathcal{W}}$  невырождена.  $\square$

Оказывается, что индекс Витта симплектических и симметричных неальтернированных билинейных форм не зависит от выбора конкретной формы, а определяется только ее типом.

Число изотропных подпространств невырожденной билинейной формы было вычислено в 1965 г. в работе [19].

**Утверждение 7 [19].** Пусть  $k$  — четное натуральное число и  $\beta$  — невырожденная симметричная билинейная форма, заданная на  $\mathbb{F}_q^k$ . Если характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  отлична от 2, то существуют ровно два класса эквивалентных невырожденных симметричных форм, различаемых параметром  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ : форма с  $\varepsilon = 1$  имеет индекс Витта  $\nu_{k,1}(q) = k/2$ , а форма с  $\varepsilon = -1$  — индекс Витта  $\nu_{k,-1}(q) = k/2 - 1$ . При этом число  $T_{k,\ell}^\varepsilon(q)$  изотропных подпространств размерности  $\ell$  формы  $\beta$  при  $1 \leq \ell \leq \nu_{k,\varepsilon}(q)$  равно

$$T_{k,\ell}^\varepsilon(q) = \left( q^{k/2} - \varepsilon \right) \left( q^{k/2-\ell} + \varepsilon \right) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\ell-1} (q^{k-2i} - 1)}{\prod_{i=1}^{\ell} (q^i - 1)}.$$

**Утверждение 8 [19].** Пусть  $k$  — нечетное натуральное число и  $\beta$  — невырожденная симметричная билинейная форма, заданная на  $\mathbb{F}_q^k$ . Если характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  отлична от 2, то индекс Витта  $\nu(\beta)$  равен  $\nu_k(q) = (k-1)/2$ . При этом число  $T_{k,\ell}(q)$  изотропных подпространств размерности  $\ell$  формы  $\beta$  при  $1 \leq \ell \leq \nu_k(q)$  равно

$$T_{k,\ell}(q) = \frac{\prod_{i=0}^{\ell-1} (q^{2((k-1)/2-i)} - 1)}{\prod_{i=1}^{\ell} (q^i - 1)}.$$

**Утверждение 9 [19].** Пусть  $k$  — четное натуральное число и  $\beta$  — невырожденная симплектическая билинейная форма, заданная на  $\mathbb{F}_q^k$ . Если характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  отлична от 2, то индекс Витта  $\nu(\beta)$  равен  $\nu_k(q) = k/2$ . При этом число  $T_{k,\ell}(q)$  изотропных подпространств размерности  $\ell$  формы  $\beta$  при  $1 \leq \ell \leq \nu_k(q)$  равно

$$T_{k,\ell}(q) = \frac{\prod_{i=0}^{\ell-1} (q^{2(k/2-i)} - 1)}{\prod_{i=1}^{\ell} (q^i - 1)}.$$

**Утверждение 10 [19].** Пусть  $k$  — четное натуральное число и  $\beta$  — невырожденная симплектическая билинейная форма, заданная на  $\mathbb{F}_q^k$ . Если характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2, то индекс Витта  $\nu(\beta)$  равен  $\nu_k(q) = k/2$ . При этом число  $T_{k,\ell}(q)$  изотропных подпространств размерности  $\ell$  формы  $\beta$  при  $1 \leq \ell \leq \nu_k(q)$  равно

$$T_{k,\ell}(q) = \frac{\prod_{i=0}^{\ell-1} (q^{2(k/2-i)} - 1)}{\prod_{i=1}^{\ell} (q^i - 1)}.$$

**Утверждение 11 [19].** Пусть  $k$  — нечетное натуральное число и  $\beta$  — невырожденная симметричная неальтернирующая билинейная форма, заданная на  $\mathbb{F}_q^k$ . Если характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2, то индекс Витта  $\nu(\beta)$  равен  $\nu_k(q) = (k-1)/2$ . При этом число  $T_{k,\ell}(q)$  изотропных подпространств размерности  $\ell$  формы  $\beta$  при  $1 \leq \ell \leq \nu_k(q)$  равно

$$T_{k,\ell}(q) = \frac{\prod_{i=0}^{\ell-1} (q^{2((k-1)/2-i)} - 1)}{\prod_{i=1}^{\ell} (q^i - 1)}.$$

**Утверждение 12 [19].** Пусть  $k$  — четное натуральное число и  $\beta$  — невырожденная симметричная неальтернирующая билинейная форма, заданная на  $\mathbb{F}_q^k$ . Если характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2, то индекс Витта  $\nu(\beta)$  равен  $\nu_k(q) = k/2$ . При этом число  $T_{k,\ell}(q)$  изотропных подпространств размерности  $\ell$  формы  $\beta$  при  $1 \leq \ell \leq \nu_k(q)$  равно

$$T_{k,\ell}(q) = (q^{k-\ell} - 1) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\ell-1} (q^{k-2i} - 1)}{\prod_{i=1}^{\ell} (q^i - 1)}.$$

## 6 Число изотропных пространств для произвольной билинейной формы

В данном разделе будет установлена точная форма числа изотропных подпространств заданной размерности произвольной симметричной билинейной формы.

**Утверждение 13.** Если симметричная билинейная форма  $\beta$ , заданная на  $\mathbb{F}_q^k$ , имеет ранг  $r$ , то ее индекс Витта  $\nu(\beta)$  равен  $\nu_{k,r}(q) = k - r + \nu_r(q)$ . При этом число  $T_{r,k,\ell}(q)$  подпространств размерности  $\ell$ , изотропных для этой билинейной формы, равно

$$T_{r,k,\ell}(q) = \sum_{s=\max(\ell-\nu_r(q), 0)}^{\min(\ell, k-r)} \begin{bmatrix} k-r \\ s \end{bmatrix}_q \cdot T_{r,\ell-s}(q) \cdot q^{(\ell-s)(k-r-s)},$$

где  $\begin{bmatrix} k-r \\ s \end{bmatrix}_q$  — гауссовский  $q$ -ичный биномиальный коэффициент, а  $T_{r,\ell-s}(q)$  равен числу  $(\ell-s)$ -мерных подпространств  $\mathbb{F}_q^r$ , изотропных невырожденной симметричной билинейной форме на  $\mathbb{F}_q^r$ .

**Доказательство.** Рассмотрим симметричную билинейную форму  $\beta$  на  $\mathbb{F}_q^k$  ранга  $r$ . Если  $\mathcal{R}_\beta \subseteq \mathbb{F}_q^k$  — радикал  $\beta$ , то согласно утверждению 6 существует такое подпространство  $\mathcal{W}$  размерности  $r$ , что пространство  $\mathbb{F}_q^k$  раскладывается в прямую сумму  $\mathbb{F}_q^k = \mathcal{R}_\beta \oplus \mathcal{W}$  и при этом билинейная форма  $\beta|_{\mathcal{W}}$  невырождена. Выберем базис  $\{w_1, w_2, \dots, w_{k-r}, w_{k-r+1}, \dots, w_k\}$  пространства  $\mathbb{F}_q^k$  таким образом, чтобы  $w_1, w_2, \dots, w_{k-r} \in \mathcal{R}_\beta$ , а  $w_{k-r+1}, \dots, w_k \in \mathcal{W}$ .

Пусть  $\mathcal{U}$  изотропно  $\beta$  и  $\dim \mathcal{U} = \ell$ . Определим число  $s = \dim \mathcal{U} \cap \mathcal{R}_\beta$ , т.е.  $s$  — размерность пересечения  $\mathcal{U}$  с радикалом  $\beta$ . Построим базис  $\{u_1, u_2, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_\ell\}$  пространства  $\mathcal{U}$  таким образом, чтобы  $u_1, u_2, \dots, u_s \in \mathcal{U} \cap \mathcal{R}_\beta$ .

Зафиксируем вектор  $u \in \mathcal{U}$  и рассмотрим элементы  $a_i \in \mathbb{F}_q$ ,  $a_i \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u, w_{k-r+i})$ ,  $i = \overline{1, r}$ . Так как  $\beta|_{\mathcal{W}}$  невырождена на  $\mathcal{W}$ , то найдется единственный вектор  $x_u = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{F}_q^r$  такой, что для вектора  $v_u = \sum_{i=1}^r x_i w_{k-r+i}$  выполняются равенства  $\beta(v_u, w_{k-r+i}) = a_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ . Но тогда  $\beta(u - v_u, w_{k-r+i}) = \beta(u, w_{k-r+i}) - \beta(v_u, w_{k-r+i}) = a_i - a_i = 0$ ,  $i = \overline{1, r}$ . С учетом того, что  $\beta(u - v_u, w_i) = 0$  для всех  $i = \overline{1, k-r}$ , так как  $w_1, \dots, w_{k-r} \in \mathcal{R}_\beta$ , получим включение  $u - v_u \in \mathcal{R}_\beta$ .

Итак, для каждого  $u \in \mathcal{U}$  найдется такой вектор  $v_u \in \text{span}(w_{k-r+1}, \dots, w_k)$  и вектор  $h \in \mathcal{R}_\beta$ , что  $u = v_u + h$ , причем вектор  $v_u$  определен однозначно. Тогда, если обозначить  $v_i \stackrel{\text{def}}{=} v_{u_{s+i}}$ ,  $i = \overline{1, \ell-s}$ , базис  $\mathcal{U}$  перепишется в виде:

$$\{u_1, u_2, \dots, u_s, v_1 + h_1, \dots, v_{\ell-s} + h_{\ell-s}\}, \quad (1)$$

где  $h_j \in \mathcal{R}_\beta$ ,  $j = \overline{1, \ell-s}$ .

Осталось наложить условия на  $v_1, v_2, \dots, v_{\ell-s}$ .

Пространство  $\mathcal{U}$  изотропно  $\beta$ , поэтому для любых  $i, j \in \{1, 2, \dots, \ell-s\}$  должно выполняться равенство  $0 = \beta(v_i + h_i, v_j + h_j) = \beta(v_i, v_j)$ . Последнее равенство следует из того, что  $h_i$  и  $h_j$  лежат

в радикале  $\beta$  и поэтому ортогональны любому вектору пространства  $\mathbb{F}_q^k$ . Получается, что  $v_i$  и  $v_j$  должны быть ортогональны для всех  $i, j$ .

Теперь  $v_i, v_j \in \text{span}(w_{k-r+1}, \dots, w_k) = \mathcal{W}$ , поэтому они соответствуют векторам  $x_i \in \mathbb{F}_q^r$  и  $x_j \in \mathbb{F}_q^r$ , для которых должно выполняться равенство  $\beta|_{\mathcal{W}}(x_i, x_j) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(v_i, v_j) = 0$ , т.е.  $\text{span}(x_1, x_2, \dots, x_{\ell-s})$  является изотропным подпространством размерности  $\ell-s$  невырожденной симметричной билинейной формы  $\beta|_{\mathcal{W}}$ .

Итак, каждое изотропное  $\beta$  подпространство  $\mathcal{U}$  размерности  $\ell$  порождается базисом вида (1), где

- $\mathcal{R}_\mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(u_1, \dots, u_s) \subseteq \mathcal{R}_\beta$  — подпространство размерности  $s$  радикала  $\beta$ ;
- $\mathcal{W}_\mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_{\ell-s})$  — подпространство размерности  $\ell-s$ , изотропное невырожденной симметричной форме  $\beta|_{\mathcal{W}}$  на  $\mathbb{F}_q^r$ ;
- $(h_1, \dots, h_{\ell-s})$  — упорядоченный набор векторов из  $\mathcal{R}_\beta$ .

Отсюда прямо следует, что индекс Витта  $\nu_{k,r}(q)$  симметричной билинейной формы  $\beta$  ранга  $r$  равен  $\dim \mathcal{R}_\beta + \nu_r(q) = k - r + \nu_r(q)$ , где  $\nu_r(q)$  — индекс Витта невырожденной билинейной формы над  $\mathbb{F}_q^r$ .

Далее несложно убедиться, что при фиксированных  $\mathcal{R}_\mathcal{U}$  и  $\mathcal{W}_\mathcal{U}$  два набора векторов  $(h'_1, \dots, h'_{\ell-s})$  и  $(h''_1, \dots, h''_{\ell-s})$  задают одно и то же пространство  $\mathcal{U}$  тогда и только тогда, когда для каждого  $i = \overline{1, \ell-s}$  выполняется включение  $h'_i - h''_i \in \mathcal{R}_\mathcal{U}$ , т.е. каждая пара  $(h'_i, h''_i)$  лежит в одном и том же смежном классе  $\mathcal{R}_\beta$  по подпространству  $\mathcal{R}_\mathcal{U}$ .

Так как число смежных классов по подпространству  $\mathcal{R}_\mathcal{U}$  размерности  $s$  в пространстве  $\mathcal{R}_\beta$  размерности  $k-r$  равно  $q^{k-r-s}$ , то каждая пара  $\mathcal{R}_\mathcal{U}$  и  $\mathcal{W}_\mathcal{U}$  определяет  $q^{(\ell-s)(k-r-s)}$  различных изотропных подпространств  $\mathcal{U}$ .

Далее, так как число  $s$ -мерных подпространств  $\mathcal{R}_\beta$  равно  $\begin{bmatrix} k-r \\ s \end{bmatrix}_q$ , а количество  $(\ell-s)$ -мерных подпространств  $\mathbb{F}_q^r$ , изотропных невырожденной симметричной билинейной форме, равно  $T_{r,\ell-s}(q)$ , то  $T_{r,k,\ell}(q)$  можно найти по формуле:

$$T_{r,k,\ell}(q) = \sum_{s=0}^{\min(\ell, k-r)} \begin{bmatrix} k-r \\ s \end{bmatrix}_q \cdot T_{r,\ell-s}(q) \cdot q^{(\ell-s)(k-r-s)}.$$

Учитывая ограничение  $\ell-s \leq \nu_r(q)$ , т.е.  $s \geq \ell - \nu_r(q)$ , связанное с тем, что при  $\ell-s > \nu_r(q)$  изотропных подпространств размерности  $\ell-s$  невырожденной билинейной форме на  $\mathbb{F}_q^r$  не существует, получим требуемую формулу для  $T_{r,k,\ell}(q)$ .  $\square$

## 7 Оценка числа изотропных пространств для билинейной формы заданного ранга

Вначале установим оценку числа totally изотропных подпространств невырожденной билинейной формы.

**Утверждение 14.** Пусть  $T_{k,\ell}$  — число подпространств размерности  $\ell \leq k/2$ , изотропных невырожденной симметричной или симплектической билинейной форме, заданной на  $\mathbb{F}_q^k$ . Тогда

$$\log_q T_{k,\ell} < \ell \cdot k - \frac{3\ell^2 - \ell}{2} + \log_q C_q,$$

где  $C_q = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{-i})^{-1}$ .

Доказательство. Обозначим

$$S_{k,\ell} = \frac{\prod_{i=0}^{\ell-1} (q^{k-2i} - 1)}{\prod_{i=1}^{\ell} (q^i - 1)}.$$

**Шаг 1:**  $T_{k,\ell} \leq S_{k,\ell}$  для каждого типа формы.

Для симплектических форм (утверждения 9 и 10) имеем  $T_{k,\ell} = S_{k,\ell}$ .

Для симметричных форм при характеристике, отличной от 2, и четном  $k$  (утверждение 7)

$$T_{k,\ell}^{\varepsilon} = \frac{(q^{k/2} - \varepsilon)(q^{k/2-\ell} + \varepsilon)}{q^k - 1} \cdot S_{k,\ell}.$$

Покажем, что  $(q^{k/2} - \varepsilon)(q^{k/2-\ell} + \varepsilon) < q^k - 1$ .

При  $\varepsilon = 1$ :

$$\begin{aligned} (q^{k/2} - 1)(q^{k/2-\ell} + 1) &= \\ &= q^{k-\ell} + q^{k/2} - q^{k/2-\ell} - 1 < q^k - 1, \end{aligned}$$

поскольку  $q^{k-\ell} + q^{k/2} \leq q^{k-1} + q^{k/2} < q^k$ , если  $\ell \geq 1$ .

При  $\varepsilon = -1$ :

$$\begin{aligned} (q^{k/2} + 1)(q^{k/2-\ell} - 1) &= \\ &= q^{k-\ell} - q^{k/2} + q^{k/2-\ell} - 1 < q^{k-\ell} < q^k - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,  $T_{k,\ell}^{\varepsilon} < S_{k,\ell}$  при обоих значениях  $\varepsilon$ .

Для симметричных неальтернирующих форм характеристики 2 при четном  $k$  (утверждение 12)

$$T_{k,\ell} = \frac{q^{k-\ell} - 1}{q^k - 1} \cdot S_{k,\ell} < S_{k,\ell}.$$

Для симметричных форм при нечетном  $k$  (утверждения 8 и 11)

$$T_{k,\ell} = \frac{\prod_{i=0}^{\ell-1} (q^{k-1-2i} - 1)}{\prod_{i=1}^{\ell} (q^i - 1)} < S_{k,\ell},$$

так как  $q^{k-1-2i} - 1 < q^{k-2i} - 1$  для каждого  $i$ .

**Шаг 2: оценка  $S_{k,\ell}$ .** Вынося старшие степени  $q$  из числителя и знаменателя, получим

$$S_{k,\ell} = q^{\ell k - (3\ell^2 - \ell)/2} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{\ell-1} (1 - q^{-(k-2i)})}{\prod_{i=1}^{\ell} (1 - q^{-i})},$$

где показатель  $\ell k - (3\ell^2 - \ell)/2$  есть  $\sum_{i=0}^{\ell-1} (k - 2i) - \sum_{i=1}^{\ell} i$ .

Поскольку все множители  $1 - q^{-(k-2i)}$  в числителе меньше единицы, а

$$\prod_{i=1}^{\ell} (1 - q^{-i})^{-1} < \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{-i})^{-1} = C_q,$$

получаем

$$\log_q S_{k,\ell} < \ell k - \frac{3\ell^2 - \ell}{2} + \log_q C_q,$$

что вместе с неравенством  $T_{k,\ell} \leq S_{k,\ell}$  завершает доказательство.  $\square$

Предварим оценку числа totally изотропных подпространств произвольной симметричной билинейной формы доказательством технической леммы.

**Лемма 1.** Для любых  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ , и  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q > 1$ , справедливо неравенство

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \leq q^{k(n-k)} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - q^{-i}} < C_q q^{k(n-k)},$$

где  $C_q = \prod_{i=1}^{+\infty} (1 - q^{-i})^{-1}$ .

Доказательство. По определению

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{q^{n-i} - 1}{q^{k-i} - 1} = \prod_{i=1}^k \frac{q^{n-k+i} - 1}{q^i - 1}.$$

Вынесем из числителя  $q^{n-k+i}$ , а из знаменателя —  $q^i$ , получим

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = q^{k(n-k)} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{1 - q^{-(n-k+i)}}{1 - q^{-i}}.$$

Так как  $0 < 1 - q^{-(n-k+i)} \leq 1$  при  $q > 1$  и  $n - k + i \geq 1$ , то из этого равенства следует требуемое неравенство.  $\square$

**Утверждение 15.** Число  $T_{r,k,\ell}$  подпространств размерности  $\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq k$ , изотропных симметричной

билинейной форме ранга  $r$ ,  $1 \leq r \leq k$ , заданной на конечном поле  $\mathbb{F}_q^k$  характеристики 2, удовлетворяет неравенству

$$\log_q T_{r,k,\ell} < \ell(k-\ell) - R_{r,\ell} + 2 \log_q C_q,$$

где

$$R_{r,\ell} = \begin{cases} \frac{\ell(\ell-1)}{2} - \log_q(\ell+1), & \text{если } 2\ell \leq r; \\ \ell \cdot \frac{r}{2} - \frac{r(r+2)}{8} - \log_q\left(\frac{r}{2} + 1\right), & \text{если } 2\ell > r \text{ и } r - \text{четное}; \\ \ell \cdot \frac{r+1}{2} - \frac{(r+5)(r-1)}{8} - \log_q\left(\frac{r+1}{2}\right), & \text{если } 2\ell > r \text{ и } r - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Доказательство. Из утверждения 13 следует, что

$$T_{r,k,\ell} \leq N_s \cdot \max_s \left( \left[ \begin{matrix} k-r \\ s \end{matrix} \right]_q \cdot T_{r,\ell-s} \cdot q^{(\ell-s)(k-r-s)} \right),$$

где максимум берется по всем целым  $s$  из отрезка  $[\max(\ell - \nu_r(q), 0), \min(\ell, k-r)]$ ,  $\nu_r(q)$  — индекс Витта невырожденной формы на  $\mathbb{F}_q^r$ ;  $N_s$  — число целых точек этого отрезка.

Оценим сначала  $N_s$ . При  $2\ell \leq r$  нижний предел суммирования равен 0, а верхний не превосходит  $\ell$ , поэтому  $N_s \leq \ell + 1$ . При  $2\ell > r$  и четном  $r$  нижний предел равен  $\ell - r/2$ , поэтому  $N_s \leq r/2 + 1$ . При  $2\ell > r$  и нечетном  $r$  нижний предел равен  $\ell - (r-1)/2$ , поэтому  $N_s \leq (r+1)/2$ .

Далее оценим  $\log_q R_s$ , где

$$R_s = \left[ \begin{matrix} k-r \\ s \end{matrix} \right]_q \cdot T_{r,\ell-s} \cdot q^{(\ell-s)(k-r-s)}.$$

Применяя лемму 1 и утверждение 14 (с заменой  $k$  на  $r$  и  $\ell$  на  $\ell - s$ ), получим

$$\log_q R_s < s(k-r-s) + \log_q C_q + (\ell-s)r - \frac{3(\ell-s)^2 - (\ell-s)}{2} + \log_q C_q + (\ell-s)(k-r-s).$$

Применяя равенство

$$s(k-r-s) + (\ell-s)(k-r-s) + (\ell-s)r = \ell k - (\ell+r)s$$

и раскрывая  $-(3(\ell-s)^2 - (\ell-s))/2$ , получим

$$\log_q R_s < \ell k - \frac{3\ell^2 - \ell}{2} - \frac{3}{2}f(s) + C,$$

где  $f(s) = (s - (4\ell - 2r - 1)/3)s$ . Функция  $f$  достигает своего минимума в точке  $x_0 = (4\ell - 2r - 1)/6$  и возрастает при  $x > x_0$ .

**Случай  $2\ell \leq r$ .** Тогда  $x_0 = (4\ell - 2r - 1)/6 < -1/6 < 0$  и функция  $f$  возрастает на  $[0, +\infty)$ , минимум достигается при  $s = 0$ , откуда  $f(0) = 0$ . Так как  $N_s \leq \ell + 1$ , получаем

$$\log_q T_{r,k,\ell} < \ell(k-\ell) - \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \log_q(\ell+1) + 2 \log_q C_q.$$

**Случай  $2\ell > r$ .** В этих условиях, как было показано выше,  $\max(\ell - \nu_r(q), 0) \geq \ell - r/2$ , поэтому верна цепочка неравенств

$$x_0 = \frac{1}{6}(4\ell - 2r - 1) < \frac{1}{6}(6\ell - 3r) \leq \max(\ell - \nu_r(q), 0),$$

Поэтому минимум  $f$  достигается при  $s = \ell - \nu_r(q)$ .

Если  $r$  — четное, то  $\nu_r(q) = r/2$  и  $N_s \leq r/2 + 1$ , откуда

$$\log_q T_{r,k,\ell} < \ell(k-\ell) - \ell \cdot \frac{r}{2} + \frac{r(r+2)}{8} + \log_q\left(\frac{r}{2} + 1\right) + 2 \log_q C_q.$$

Если  $r$  — нечетное, то  $\nu_r(q) = (r-1)/2$  и  $N_s \leq (r+1)/2$ , откуда

$$\log_q T_{r,k,\ell} < \ell(k-\ell) - \ell \cdot \frac{r+1}{2} + \frac{(r+5)(r-1)}{8} + \log_q\left(\frac{r+1}{2}\right) + 2 \log_q C_q.$$

Во всех случаях выполняется

$$\log_q T_{r,k,\ell} < \ell(k-\ell) - R_{r,\ell} + 2 \log_q C_q,$$

что и требовалось доказать.  $\square$

## 8 Число билинейных форм специального вида и заданного ранга

В работе [20] доказано следующее

**Утверждение 16.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2,  $s$  — размерность оболочки  $[n, k]_q$ -кода, а  $k_0 = k - s$ , где  $s \leq k \leq n - s$ . Тогда число  $M_{n,k}^s(q)$  таких кодов зависит от четности  $n$  и  $k_0$  и определяется следующими формулами.

1. Если  $n$  — четное, а  $k_0$  — нечетное, то

$$M_{n,k}^s(q) = q^{(nk_0 - k_0^2 + n - 1)/2} \cdot \left[ \frac{\frac{n}{2} - 1}{\frac{k_0 - 1}{2}} \right]_{q^2} \times \prod_{i=1}^s \frac{q^{n-k_0-i} - q^{i-1}}{(q^i - 1) \cdot q^{k_0+i-1}}.$$

2. Если  $n$  — нечетное и  $k_0$  — нечетное, то

$$M_{n,k}^s(q) = q^{(n-k_0)(k_0-1)/2+n-k} \cdot \left[ \frac{\frac{n-1}{2}}{\frac{k_0-1}{2}} \right]_{q^2} \times \\ \times \frac{q^{n-k_0}-1}{(q^s-1) \cdot q^{k-1}} \cdot \prod_{i=1}^{s-1} \frac{q^{n-k_0-i}-q^i}{(q^i-1) \cdot q^{k_0+i-1}}.$$

3. Если  $n$  — нечетное, а  $k_0$  — четное, то

$$M_{n,k}^s(q) = \\ = q^{k_0(n-k_0+1)/2} \cdot \left[ \frac{\frac{n-1}{2}}{\frac{k_0}{2}} \right]_{q^2} \cdot \prod_{i=1}^s \frac{q^{n-k_0-i}-q^{i-1}}{(q^i-1)q^{k_0+i-1}}.$$

4. Если  $n$  — четное и  $k_0$  — четное, то

$$M_{n,k}^s(q) = q^{k_0(n-k_0)/2} \cdot \left[ \frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{k_0}{2}} \right]_{q^2} \times \\ \times \frac{q^{n-s}-1}{(q^s-1) \cdot q^{k-1}} \cdot \prod_{i=1}^{s-1} \frac{q^{n-k_0-i}-q^i}{(q^i-1) \cdot q^{k_0+i-1}}.$$

**Утверждение 17.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2. Для любых  $n, k, s \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq s \leq k \leq n-s$ , выполняется неравенство

$$\log_q M_{n,k}^s(q) < k(n-k) - \frac{1}{2}s(s+1) + \log_q C_q + \log_q C_{q^2}.$$

**Доказательство.** Следуя нумерации случаев в утверждении 16, доказательство можно разбить на 4 случая. Рассмотрим подробно только случай 1:  $n$  — четное,  $k_0$  — нечетное.

Оценим произведение

$$P = \prod_{i=1}^s \frac{q^{n-k_0-i}-q^{i-1}}{(q^i-1) q^{k_0+i-1}}.$$

Вынося  $q^{i-1}$  из числителя, запишем

$$P = q^{-sk_0} \prod_{i=1}^s \frac{q^{n-k_0-2i+1}-1}{q^i-1}.$$

Так как  $q^{n-k_0-2i+1}-1 < q^{n-k_0-2i+1}$  и  $(q^i-1)^{-1} = q^{-i}(1-q^{-i})^{-1}$ , получаем

$$P < q^{s(n-2k_0+1)-3s(s+1)/2} \cdot \prod_{i=1}^s (1-q^{-i})^{-1}.$$

Далее, из леммы 1 следует, что

$$\left[ \frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{k_0-1}{2}} \right]_{q^2} < q^{(k_0-1)(n-k_0-1)/2} \cdot \prod_{j=1}^{(k_0-1)/2} (1-q^{-2j})^{-1}.$$

Объединяя степенные части, получаем

$$\frac{nk_0-k_0^2+n-1}{2} + \frac{(k_0-1)(n-k_0-1)}{2} + \\ + s(n-2k_0+1) - \frac{3s(s+1)}{2} = \\ = nk_0-k_0^2 + \frac{s(2n-4k_0-3s-1)}{2}.$$

Подставляя  $k_0 = k-s$  и приводя подобные слагаемые, убеждаемся, что это равно  $k(n-k)-s(s+1)/2$ . Поскольку

$$\prod_{i=1}^s (1-q^{-i})^{-1} < C_q; \quad \prod_{j=1}^{(k_0-1)/2} (1-q^{-2j})^{-1} < C_{q^2},$$

получаем требуемое неравенство.

В случаях 2 и 4 произведение идет от  $i = 1$  до  $s-1$ , а отдельный дробный множитель  $(q^a-1)((q^s-1)q^{k-1})$  оценивается как  $q^{a-s-k+1}(1-q^{-s})^{-1}$ . При этом множитель  $(1-q^{-s})^{-1}$  объединяется с  $\prod_{i=1}^{s-1} (1-q^{-i})^{-1}$ , давая

$$\prod_{i=1}^s (1-q^{-i})^{-1} < C_q,$$

и итоговая степенная часть совпадает с полученной в случае 1.

Случай 3 отличается от случая 1 лишь аргументами гауссова коэффициента и показателем начальной степени  $q$ ; аналогичное вычисление приводит к тому же результату.  $\square$

Пусть  $N_G(r)$  — число векторов  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}_q^n$ , для которых матрица  $\mathbf{B}_\mathbf{b} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{D}_\mathbf{b} \cdot \mathbf{G}^\top$  имеет ранг  $r$ ,  $1 \leq r \leq k$ . Если  $N_{G,w}(r)$  — число таких векторов  $\mathbf{b}$  веса Хемминга  $w$ ,  $1 \leq w \leq n$ , то

$$N_G(r) = \sum_{w=r}^n N_{G,w}(r).$$

**Утверждение 18.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2. Если  $\mathbf{G}$  — случайная  $(k \times n)$ -матрица над полем  $\mathbb{F}_q$ , то для любых натуральных чисел  $r, w$ ,  $1 \leq r \leq k$  и  $1 \leq w \leq n$ , выполняется неравенство

$$\mathbb{E}_{\mathbf{G} \leftarrow \mathbb{F}_q^{k \times n}} [N_{G,w}(r)] \leq B_q \binom{n}{w} (q-1)^w \times \\ \times \sum_{m=r}^{\min(k, \lfloor (w+r)/2 \rfloor)} q^{-(w-m)(k-m)-(m-r)(m-r+1)/2},$$

где  $B_q = C_q \cdot C_{q^2}$  — константа.

Доказательство. Для каждого  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}_q^n$  рассмотрим индикаторную функцию  $\rho_r(\mathbf{b}) \in \{0, 1\}$ , которая равна 1, если и только если  $\text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b} = r$ , т. е.

$$\rho_r(\mathbf{b}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b} = r; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда

$$N_{\mathbf{G}, w}(r) = \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{F}_q^n, \text{wt}(\mathbf{b})=w} \rho_r(\mathbf{b}).$$

Получается, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{G} \leftarrow \mathbb{F}_q^{k \times n}}[N_{\mathbf{G}, w}(r)] &= \\ &= \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{F}_q^n, \text{wt}(\mathbf{b})=w} \Pr_{\mathbf{G} \leftarrow \mathbb{F}_q^{k \times n}}[\text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b} = r]. \quad (2) \end{aligned}$$

Так как матрица  $\mathbf{B}_\mathbf{b}$  зависит только от  $\text{supp}(\mathbf{b})$ , а число векторов веса  $w$  в  $\mathbb{F}_q^n$  равно  $\binom{n}{w}(q-1)^w$ , то для любого фиксированного  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}_q^n$  с  $\text{wt}(\mathbf{b}) = w$ , используя формулу полной вероятности, запишем

$$\begin{aligned} \Pr[\text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b} = r] &= \\ &= \sum_{m=0}^k \Pr[\text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b} = r, \text{rank } \mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} = m]. \end{aligned}$$

Можно записать

$$\mathbf{B}_\mathbf{b} = \mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} \mathbf{D}_{\mathbf{b}_*} \mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})}^\top,$$

где  $\mathbf{b}_* \in \mathbb{F}_q^w$  — вектор длины  $w$ , который совпадает с вектором  $\mathbf{b}|_{\text{supp}(\mathbf{b})}$ , т. е. если  $\text{supp}(\mathbf{b}) = \{i_1, i_2, \dots, i_w\}$ , то  $\mathbf{b}_* = (b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_w})$ .

Так как  $\mathbb{F}_q$  имеет четную характеристику, то для любого элемента  $b \in \mathbb{F}_q$  существует такой элемент  $\sqrt{b} \in \mathbb{F}_q$ , что  $(\sqrt{b})^2 = b$ , т. е. в  $\mathbb{F}_q$  из элементов можно извлечь квадратный корень.

Обозначая через  $\sqrt{\mathbf{b}_*} = (\sqrt{b_{i_1}}, \sqrt{b_{i_2}}, \dots, \sqrt{b_{i_w}})$ , можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} \mathbf{D}_{\mathbf{b}_*} \mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})}^\top &= \\ &= (\mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} \mathbf{D}_{\sqrt{\mathbf{b}_*}}) \cdot (\mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} \mathbf{D}_{\sqrt{\mathbf{b}_*}})^\top. \end{aligned}$$

Если через  $\mathcal{C}$  обозначить линейный  $[w]_q$ -код, который совпадает с линейной оболочкой строк  $(k \times w)$ -матрицы  $\mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} \cdot \mathbf{D}_{\sqrt{\mathbf{b}_*}}$ , то на основании утверждения 1 получим равенство

$$\dim \mathcal{H}(\mathcal{C}) = \text{rank}(\mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} \cdot \mathbf{D}_{\sqrt{\mathbf{b}_*}}) - \text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b}.$$

Так как матрица  $\mathbf{D}_{\sqrt{\mathbf{b}_*}}$  невырождена, то выполняется равенство

$$\text{rank}(\mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} \cdot \mathbf{D}_{\sqrt{\mathbf{b}_*}}) = \text{rank } \mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})},$$

поэтому для кода  $\mathcal{C}$  получим соотношение

$$\dim \mathcal{H}(\mathcal{C}) = \text{rank } \mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} - \text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b}.$$

Итак, можно сделать вывод, что событие

$$\{\text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b} = r\} \cap \{\text{rank } \mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} = m\}$$

реализуется тогда и только тогда, когда  $(k \times w)$ -матрица  $\mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} \mathbf{D}_{\sqrt{\mathbf{b}_*}}$  порождает линейный  $[w, m]_q$ -код с оболочкой размерности  $s = m - r$ . Отсюда следует ограничение на  $m$ :  $r \leq m$ . Так как размерность оболочки  $[w, m]_q$ -кода не больше  $w - m$ , то для выполнения события необходимо, чтобы  $m$  удовлетворяло неравенству  $m - r \leq w - m$ , т. е.  $2m \leq w + r$ , а значит,

$$\begin{aligned} \Pr[\text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b} = r] &= \\ &= \sum_{m=r}^{\min(k, \lfloor (w+r)/2 \rfloor)} \Pr[\text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b} = r, \text{rank } \mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} = m]. \end{aligned}$$

Обозначим через  $M_{w,m}^s(q)$  число  $[w, m]_q$ -кодов, имеющих оболочку размерности  $s$ . Тогда общее число  $(k \times w)$ -матриц над  $\mathbb{F}_q$ , линейная оболочка строк которых совпадает с каким-либо  $[w, m]_q$ -кодом с оболочкой размерности  $s$ , будет равно  $M_{w,m}^s(q) \prod_{i=0}^{m-1} (q^k - q^i)$ . Так как матрица  $\mathbf{D}_{\sqrt{\mathbf{b}_*}}$  невырождена, столько же будет и  $(k \times w)$ -матриц  $\mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})}$ , для которых матрица  $\mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} \mathbf{D}_{\sqrt{\mathbf{b}_*}}$  порождает какой-либо  $[w, m]_q$ -код с оболочкой размерности  $s$ , а значит, общее число  $(k \times n)$ -матриц  $\mathbf{G}$ , у которых в позициях  $\text{supp}(\mathbf{b})$  стоит  $(k \times w)$ -подматрица  $\mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})}$  такая, что матрица  $\mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} \mathbf{D}_{\sqrt{\mathbf{b}_*}}$  порождает некоторый  $[w, m]_q$ -код с оболочкой размерности  $s$ , будет равно

$$q^{k(n-w)} M_{w,m}^s(q) \prod_{i=0}^{m-1} (q^k - q^i).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Pr[\text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b} = r, \text{rank } \mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} = m] &= \\ &= M_{w,m}^s(q) \cdot q^{-wk} \prod_{i=0}^{m-1} (q^k - q^i) \leq \\ &\leq M_{w,m}^s(q) \cdot q^{-(w-m)k}. \end{aligned}$$

Из утверждения 17 вытекает неравенство

$$M_{w,m}^s(q) < C_q \cdot C_{q^2} \cdot q^{m(w-m)-s(s+1)/2}.$$

Поэтому, обозначая через  $B_q = C_q \cdot C_{q^2}$ , получим

$$\begin{aligned} \Pr[\text{rank } \mathbf{B}_\mathbf{b} = r, \text{rank } \mathbf{G}|_{\text{supp}(\mathbf{b})} = m] &< \\ &< B_q \cdot q^{-(w-m)(k-m)-s(s+1)/2}, \end{aligned}$$

откуда с учетом равенства  $s = m - r$  следует, что

$$\Pr[\text{rank } B_b = r] < B_q^{\min(k, \lfloor (w+r)/2 \rfloor)} \sum_{m=r}^{\min(k, \lfloor (w+r)/2 \rfloor)} q^{-(w-m)(k-m)-(m-r)(m-r+1)/2}.$$

Подставляя последнее неравенство в выражение (2) и учитывая, что число слагаемых в сумме по  $b$  равно  $\binom{n}{w}(q-1)^w$ , окончательно получим требуемое.  $\square$

**Лемма 2.** Для любых вещественных чисел  $w, k$  и  $r$  функция

$$f(x) = (w-x)(k-x) + \frac{1}{2}(x-r)(x-r+1)$$

представляет собой параболу с положительным старшим коэффициентом  $3/2$  и имеет глобальный минимум в точке

$$x^* = \frac{1}{3} \left( w + k + r - \frac{1}{2} \right),$$

в которой она принимает значение

$$f(x^*) = -\frac{1}{6} \left( w + k + r - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}r(r-1) + wk.$$

При этом на любом отрезке  $[x_0, x_1]$  минимум  $f(x)$  достигается в точке  $x^*$ , если  $x^* \in [x_0, x_1]$ , и в ближайшем к  $x^*$  конце отрезка в противном случае.

**Утверждение 19.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2. Если  $G$  — случайная  $(k \times n)$ -матрица над полем  $\mathbb{F}_q$ , то для любого натурального числа  $r$ ,  $1 \leq r \leq k$ , и любого числа  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , выполняется неравенство:

$$\Pr_{G \leftarrow \mathbb{F}_q^{k \times n}} \left[ \sum_{w=2k-r}^n N_{G,w}(r) \leq \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor \right] > 1 - B_q \varepsilon \cdot q^{n + \log_q k - (k-r)^2/2 - (k-r)/2}.$$

**Доказательство.** Из утверждения 18 с учетом линейности математического ожидания следует неравенство

$$E = \mathbb{E}_{G \leftarrow \mathbb{F}_q^{k \times n}} \left[ \sum_{w=2k-r}^n N_{G,w}(r) \right] \leq B_q \sum_{w=2k-r}^n \binom{n}{w} (q-1)^w \sum_{m=r}^{\min(k, \lfloor (w+r)/2 \rfloor)} q^{-f(m)},$$

где  $f(x)$  — функция из леммы 2.

Так как  $w \geq 2k-r$ , то  $w+r \geq 2k$  и  $(w+r)/2 \geq k$ . Поэтому для целых чисел  $w, r$  и  $k$  выполняется равенство

$$\min \left( k, \left\lfloor \frac{w+r}{2} \right\rfloor \right) = k.$$

Из леммы 2 функция  $f(x)$  на отрезке  $[r, k]$  принимает минимальное значение либо в точке  $x^*$ , либо в ближайшем к  $x^*$  конце отрезка. С учетом неравенства  $w+r \geq 2k$  получим

$$x^* = \frac{1}{3} \left( w + k + r - \frac{1}{2} \right) \geq \frac{1}{3} \left( 3k - \frac{1}{2} \right) = k - \frac{1}{6},$$

а значит,  $x^* > k-1$  и для целочисленных значений  $m$  минимум  $f(m)$  на отрезке  $[r, k]$  достигается в точке  $m = k$ , где

$$f(k) = \frac{1}{2}(k-r)(k-r+1).$$

Следовательно, для всех  $m \in \{r, r+1, \dots, k\}$  и всех  $w \geq 2k-r$  выполняется  $q^{-f(m)} \leq q^{-f(k)}$  и внутренняя сумма содержит  $k-r+1$  слагаемых, откуда

$$E < B_q (k-r+1) q^{-(k-r)(k-r+1)/2} \sum_{w=2k-r}^n \binom{n}{w} (q-1)^w.$$

Оценивая сумму как

$$\sum_{w=2k-r}^n \binom{n}{w} (q-1)^w \leq \sum_{w=0}^n \binom{n}{w} (q-1)^w = q^n$$

и используя неравенство  $k-r+1 \leq k$ , получим

$$E < B_q q^{n + \log_q k - (k-r)(k-r+1)/2}.$$

Далее, применяя неравенство Маркова для неотрицательной целочисленной случайной величины  $\sum_{w=2k-r}^n N_{G,w}(r)$ , получим справедливость утверждения.  $\square$

**Утверждение 20.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2. Если  $G$  — случайная  $(k \times n)$ -матрица над полем  $\mathbb{F}_q$ , то для любого натурального числа  $r$ ,  $1 \leq r \leq k-1$ , удовлетворяющего неравенству

$$r - 4 \log_q(r+1) \leq k+1 - 4 \log_q((q-1)(n+1)),$$

и любого числа  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , выполняется неравенство

$$\Pr_{G \leftarrow \mathbb{F}_q^{k \times n}} \left[ \sum_{w=r+1}^{2k-r-1} N_{G,w}(r) < \delta^{-1} \binom{n}{r} (q-1)^r \right] > 1 - B_q \delta \cdot q^{-(k-r)/2 + \log_q(k(q-1)(n+1))}.$$

**Доказательство.** По условию  $w \leq 2k-r-1$ , поэтому  $w+r < 2k$  и  $\min(k, \lfloor (w+r)/2 \rfloor) = \lfloor (w+r)/2 \rfloor$ .

Рассмотрим функцию  $f(x)$  из леммы 2 с точкой глобального минимума  $x^*$ .

Так как  $w+r < 2k$ , то для целых чисел выполняется неравенство  $w+r \leq 2k-1$ , а значит, верна цепочка соотношений

$$x^* = \frac{1}{3} \left( w + k + r - \frac{1}{2} \right) \geq \frac{1}{3} \left( w + r + \frac{w+r}{2} \right) = \frac{w+r}{2} \geq \left\lfloor \frac{w+r}{2} \right\rfloor.$$

Поэтому при  $w \leq 2k-r-1$  функция  $f(x)$  на отрезке  $[r, (w+r)/2]$  убывает и достигает минимума в точке  $(w+r)/2$ , в которой она принимает значение

$$f\left(\frac{w+r}{2}\right) = \frac{w-r}{2} \left( k - \frac{w+r}{2} \right) + \frac{w-r}{4} \left( \frac{w-r}{2} + 1 \right).$$

Упрощая, получим, что для всех целых  $m$  из отрезка  $[r, \lfloor (w+r)/2 \rfloor] \subseteq [r, (w+r)/2]$  верно неравенство

$$-f(m) \leq -f\left(\frac{w+r}{2}\right) = \frac{1}{2} \left( \frac{w-r}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{w-r}{2} (2k-2r+1),$$

а значит, на основании утверждения 18 с учетом линейности математического ожидания выполняется неравенство

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{w=r+1}^{2k-r-1} N_{G,w}(r) \right] \leq B_q \sum_{w=r+1}^{2k-r-1} \binom{n}{w} (q-1)^w \times q^{((w-r)/2)^2/2 - ((w-r)/2)(2k-2r+1)/2}.$$

Оценим теперь отношение биномиально-степенных множителей:

$$\frac{\binom{n}{w} (q-1)^w}{\binom{n}{r} (q-1)^r} = \frac{\binom{n}{w}}{\binom{n}{r}} \cdot (q-1)^{w-r}.$$

По определению биномиальных коэффициентов

$$\frac{\binom{n}{w}}{\binom{n}{r}} = \prod_{i=1}^{w-r} \frac{n+1-(w-i+1)}{w-i+1} < \prod_{i=1}^{w-r} \frac{n+1}{w-i+1}.$$

Так как  $i \leq w-r$ , то  $w-i+1 \geq r+1$  и  $(w-i+1)^{-1} \leq (r+1)^{-1}$ , поэтому

$$\frac{\binom{n}{w} (q-1)^w}{\binom{n}{r} (q-1)^r} < \left( \frac{(q-1)(n+1)}{r+1} \right)^{w-r} = q^{(w-r) \log_q((q-1)(n+1)/(r+1))}.$$

Тогда

$$\left( \binom{n}{r} (q-1)^r \right)^{-1} \mathbb{E} \left[ \sum_{w=r+1}^{2k-r-1} N_{G,w}(r) \right] < B_q \sum_{w=r+1}^{2k-r-1} q^{g((w-r)/2)},$$

где

$$g(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x \left( 2k-2r+1 - 4 \log_q \frac{(q-1)(n+1)}{r+1} \right).$$

Функция  $g$  — парабола с положительным старшим коэффициентом  $1/2$ , поэтому на отрезке  $[1/2, k-r-1/2]$  (значения  $(w-r)/2$  при  $w = r+1, 2k-r-1$ ) максимум  $g$  достигается в одном из концов. Вычислим  $g$  на границах отрезка:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{k-r-2 \log_q((q-1)(n+1)/(r+1))}{2} - \frac{1}{8};$$

$$g\left(k-r-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(k-r)^2 + \left( 2 \log_q \left( \frac{(q-1)(n+1)}{r+1} \right) - \frac{1}{2} \right) (k-r) - \log_q \frac{(q-1)(n+1)}{r+1} + \frac{3}{8}.$$

Тогда

$$g\left(k-r-\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) = (k-r-1) \left( 2 \log_q \frac{(q-1)(n+1)}{r+1} - \frac{k-r+1}{2} \right).$$

По условию  $r \leq k-1$  и  $r-4 \log_q(r+1) \leq k+1-4 \log_q((q-1)(n+1))$ , откуда следует, что

$$\log_q \left( \frac{(q-1)(n+1)}{r+1} \right) \leq \frac{k-r+1}{4},$$

т. е.  $g(k-r-1/2) \leq g(1/2)$ .

Поскольку число слагаемых в сумме по  $w$  не превышает  $2k-2r-1$ , получаем

$$\left( \binom{n}{r} (q-1)^r \right)^{-1} \mathbb{E} \left[ \sum_{w=r+1}^{2k-r-1} N_{G,w}(r) \right] < B_q \cdot (2k-2r-1) \cdot q^{g(1/2)}.$$

Так как  $1 \leq r \leq k-1$ , то

$$\log_q \left( \frac{(q-1)(n+1)}{r+1} \right) + \log_q(2k-2r-1) - \frac{1}{8} < \log_q(k(q-1)(n+1)),$$

откуда

$$\left( \binom{n}{r} (q-1)^r \right)^{-1} \cdot \mathbb{E} \left[ \sum_{w=r+1}^{2k-r-1} N_{G,w}(r) \right] < B_q \cdot q^{-(k-r)/2 + \log_q(k(q-1)(n+1))}.$$

Далее, применяя неравенство Маркова, получим требуемое утверждение.  $\square$

**Утверждение 21.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2. Если  $G$  — случайная  $(k \times n)$ -матрица над полем  $\mathbb{F}_q$ , то для любого натурального числа  $r$ ,  $1 \leq r \leq k$ , выполняется неравенство

$$\Pr_{G \leftarrow \mathbb{F}_q^{k \times n}} \left[ N_G(r) = \sum_{w=r}^{2k-r-1} N_{G,w}(r) \right] > 1 - B_q q^{n + \log_q k - (k-r)^2/2 - (k-r)/2}.$$

Доказательство. Равенство

$$N_G(r) = \sum_{w=r}^{2k-r-1} N_{G,w}(r)$$

эквивалентно условию

$$\sum_{w=2k-r}^n N_{G,w}(r) = 0.$$

Из оценки математического ожидания, полученной в доказательстве утверждения 19, следует, что

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{w=2k-r}^n N_{G,w}(r) \right] < B_q q^{n + \log_q k - (k-r)(k-r+1)/2}.$$

Применяя неравенство Маркова  $\Pr[X \geq 1] \leq \mathbb{E}[X]$  к неотрицательной целочисленной случайной величине  $X = \sum_{w=2k-r}^n N_{G,w}(r)$ , получим

$$\Pr[X = 0] \geq 1 - \mathbb{E}[X] > 1 - B_q q^{n + \log_q k - (k-r)(k-r+1)/2}. \quad \square$$

**Утверждение 22.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2. Если  $G$  — случайная  $(k \times n)$ -матрица над полем  $\mathbb{F}_q$ , то для любого натурального числа  $r$ ,  $1 \leq r \leq k-1$ , удовлетворяющего неравенству  $r - 4 \log_q(r+1) \leq k+1 - 4 \log_q((q-1)(n+1))$ , и любого числа  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , выполняется неравенство

$$\Pr_{G \leftarrow \mathbb{F}_q^{k \times n}} \left[ N_G(r) < (1 + \delta^{-1}) \binom{n}{r} (q-1)^r \right] > 1 - B_q \delta \cdot q^{-(k-r)/2 + \log_q(k(q-1)(n+1))} - B_q q^{n + \log_q k - (k-r)^2/2 - (k-r)/2}.$$

Доказательство. По определению

$$N_G(r) = N_{G,r}(r) + \sum_{w=r+1}^{2k-r-1} N_{G,w}(r) + \sum_{w=2k-r}^n N_{G,w}(r).$$

Число векторов веса  $r$  в  $\mathbb{F}_q^n$  равно  $\binom{n}{r}(q-1)^r$ , поэтому

$$N_{G,r}(r) \leq \binom{n}{r} (q-1)^r.$$

Рассмотрим два события:  $A$  — выполнение неравенства

$$\sum_{w=r+1}^{2k-r-1} N_{G,w}(r) < \delta^{-1} \binom{n}{r} (q-1)^r$$

и  $B$  — выполнение равенства

$$\sum_{w=2k-r}^n N_{G,w}(r) = 0.$$

Если оба события реализуются, то

$$N_G(r) < (1 + \delta^{-1}) \binom{n}{r} (q-1)^r.$$

Используя неравенство

$$\Pr[A \cap B] \geq \Pr[A] + \Pr[B] - 1$$

и оценки из утверждений 20 (для события  $A$ ) и 21 (для события  $B$ ), получим требуемое неравенство.  $\square$

Как следствие из утверждения 22 докажем следующее

**Утверждение 23.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2. Если  $G$  — случайная  $(k \times n)$ -матрица над полем  $\mathbb{F}_q$ ,  $n, k \geq 1$ , и  $k \geq 4 \log_q((q-1)(n+1)/2)$ , то для любого натурального числа  $R$ ,  $1 \leq R \leq k-1$ , удовлетворяющего неравенству  $R - 4 \log_q(R+1) \leq k+1 - 4 \log_q((q-1)(n+1))$ , и любого числа  $\delta > 0$  выполняется

$$\Pr_{G \leftarrow \mathbb{F}_q^{k \times n}} \left[ \forall r \in [1, R]: N_G(r) < (1 + \delta^{-1}) \binom{n}{r} (q-1)^r \right] > 1 - P_q(n, k, \delta, R),$$

где

$$\begin{aligned} P_q(n, k, \delta, R) &= \\ &= \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1} B_q \delta \cdot q^{-(k-R)/2 + \log_q(k(q-1)(n+1))} + \\ &+ B_q q^{n + \log_q(kR) - (k-R)^2/2 - (k-R)/2}. \end{aligned}$$

Доказательство. Применим неравенство Буля: вероятность того, что неравенство  $N_G(r) < (1 + \delta^{-1}) \binom{n}{r} (q-1)^r$  нарушается хотя бы для одного

$r \in [1, R]$ , не превышает суммы вероятностей нарушения для каждого отдельного  $r$ .

При  $R = 1$  утверждение тривиально следует из утверждения 22.

Условие

$$R - 4 \log_q(R + 1) \leq k + 1 - 4 \log_q((q - 1)(n + 1))$$

гарантирует применимость утверждения 22 для каждого  $r \in [1, R]$ . Действительно, поскольку функция  $h(x) = x - 4 \log_q(x + 1)$  убывает на отрезке  $[1, 4 \ln^{-1}(q) - 1]$  и возрастает при  $x \geq 4 \ln^{-1}(q)$ , то максимум этой функции на отрезке  $[1, R]$  достигается в одной из крайних точек. В точке  $x = 1$  получим

$$h(1) = 1 - 4 \log_q 2,$$

но из условия на  $k$  следует неравенство

$$1 - 4 \log_q 2 \leq k + 1 - 4 \log_q((q - 1)(n + 1))$$

и к тому же из условия на  $R$  выполняется неравенство

$$h(R) \leq k + 1 - 4 \log_q((q - 1)(n + 1)),$$

поэтому сразу для всех  $r \in [1, R]$  выполняется требуемое неравенство.

По утверждению 22 вероятность нарушения для фиксированного  $r$  не превышает

$$B_q \delta \cdot q^{-(k-r)/2 + \log_q(k(q-1)(n+1))} + \\ + B_q q^{n + \log_q k - (k-r)^2/2 - (k-r)/2}.$$

Оценим каждую из двух сумм по  $r = \overline{1, R}$ .

**Первая сумма.** Это геометрическая прогрессия с основанием  $q^{1/2}$ :

$$\sum_{r=1}^R q^{-(k-r)/2} = q^{-k/2} \sum_{r=1}^R q^{r/2} = \\ = q^{-k/2} \cdot \frac{q^{1/2} (q^{R/2} - 1)}{q^{1/2} - 1} \leq \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q} - 1} q^{-(k-R)/2}.$$

**Вторая сумма.** Функция  $(k-r)(k-r+1)$  убывает по  $r$  на  $[1, R]$ , поэтому

$$\sum_{r=1}^R q^{-(k-r)(k-r+1)/2} \leq R \cdot q^{-(k-R)(k-R+1)/2}.$$

Подставляя обе оценки в неравенство Буля, получаем заявленное.  $\square$

## 9 Оценка числа totally изотропных подпространств для билинейных форм, связанных со случайным линейным кодом

Рассмотрим случайную  $(k \times n)$ -матрицу  $G$  над полем  $\mathbb{F}_q$  характеристики 2.

Оценим общее число подпространств, которые totally изотропны хотя бы для одной билинейной формы с матрицей  $B_b = G \cdot D_b \cdot G^T$ ,  $b \in \mathbb{F}_q^n$ . Ясно, что их число не превосходит суммы  $\sum_{r=1}^k T_{r,k,\ell}(q) N_G(r)$ .

Сформулируем простую техническую лемму.

**Лемма 3.** Пусть  $\ell, a, b, c, \alpha$  и  $\beta$  — произвольные числа. Рассмотрим функцию

$$f(x) = -4\ell \cdot (x + a) + (x + b)(x + c) + 8(\alpha x + \beta).$$

Она обладает следующими свойствами.

1. Имеет глобальный минимум в точке

$$x^* = -\frac{b+c}{2} + 2\ell - 4\alpha.$$

2. Монотонно убывает при  $x \leq x^*$  и монотонно возрастает при  $x \geq x^*$ .

3. Обращается в ноль в точках

$$x_{\pm} = 2\ell - \frac{1}{2}(b+c) - 4\alpha \pm \\ \pm \sqrt{\frac{(b+c-4\ell+8\alpha)^2}{4} + 4\ell \cdot a - bc - 8\beta}.$$

4. Если  $(b+c-4\ell+8\alpha)^2/4 > bc + 8\beta - 4\ell \cdot a$ , то  $f(x)$  на интервале  $(x_-, x_+)$  принимает отрицательные значения.

**Утверждение 24.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2 и  $\ell, k$  и  $n$  — такие натуральные числа, что  $1 \leq \ell \leq k$  и  $n \geq \max(2, \sqrt{q}/(q-1))$ . Обозначим  $\alpha_n(q) = \log_q((q-1)n)$ . Пусть также

$$\ell \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2(n+1) + \left(2\alpha_n(q) + \frac{1}{2}\right)^2}; \\ k \geq 1 + 4\alpha_n(q) + 2\sqrt{2(n+1)}.$$

Положим

$$r^* = \left\lfloor 2\ell - 1 - 2\sqrt{\ell(\ell-3) + \frac{1}{4} - 2n} \right\rfloor.$$

Тогда при случайном выборе  $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$  для любого  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , с вероятностью не менее  $1 - P_q(n, k, \delta, r^*)$  выполняется неравенство

$$\sum_{r=1}^k T_{r,k,\ell}(q) N_G(r) < c_q \cdot q^{\ell(k-\ell) - \ell + \log_q((1+\delta^{-1})n^2) + \log_q(\ell \cdot k)},$$

где  $c_q = 2q(q-1)^2 C_q^2$ .

Доказательство. Для начала докажем выполнение неравенства

$$2\ell - 1 - 2\sqrt{\ell(\ell-3) + \frac{1}{4} - 2n} \leq k + 1 - 4\alpha_n(q). \quad (3)$$

Оно эквивалентно неравенству

$$2\left(\ell - \frac{3}{2}\right) - 2\sqrt{\left(\ell - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 - 2n} \leq k - 1 - 4\alpha_n(q).$$

Рассмотрим функцию  $x - \sqrt{x^2 - 2 - 2n}$ . Так как  $2n + 2 > 0$ , то она имеет глобальный максимум в точке  $x = \sqrt{2n + 2}$ , в которой она принимает значение  $\sqrt{2n + 2}$ . Поэтому для всех  $\ell$  выполняется неравенство

$$2\left(\ell - \frac{3}{2}\right) - 2\sqrt{\left(\ell - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 - 2n} \leq 2\sqrt{2n + 2}.$$

Но по условию  $k \geq 1 + 4\alpha_n(q) + 2\sqrt{2(n+1)}$ , поэтому при описанных в условии ограничениях на  $k$  всегда верно неравенство (3).

Рассмотрим  $r^*$  из условия. Из неравенства (3) следует соотношение  $r^* \leq k + 1 - 4\alpha_n(q)$ , а значит, будет выполняться цепочка соотношений

$$\begin{aligned} r^* - 4\log_q(r^* + 1) &\leq r^* - 4\log_q 2 \leq \\ &\leq k + 1 - 4\log_q(2(q-1)n). \end{aligned}$$

Так как  $n \geq 1$ ,  $q \geq 2$ , то  $2(q-1)n \geq (q-1)(n+1)$  и, значит,  $r^* - 4\log_q(r^* + 1) \leq k + 1 - 4\log_q((q-1)(n+1))$ .

Несложно также убедиться, что для  $\ell$ , удовлетворяющих условию, будет верно, что  $r^* \geq 1$ .

Теперь по условию  $n \geq (q-1)^{-1}\sqrt{q}$ , поэтому  $4\log_q((q-1)n) \geq 2$  и  $r^* \leq k - 1$ , т. е. для  $r^*$  выполняются все условия утверждения 23.

Осталось проверить выполнение условия  $k \geq 4\log_q((q-1)(n+1)/2)$ . По условию

$$\begin{aligned} k - 4\log_q \frac{(q-1)(n+1)}{2} &\geq \\ &\geq 1 + 4\log_q \frac{2n}{n+1} + 2\sqrt{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Так как  $n \geq 1$ , то  $2n \geq n+1$  и  $1 + 4\log_q(2n/(n+1)) + 2\sqrt{2(n+1)} \geq 0$ , поэтому нужное неравенство выполняется.

Значит, на основании утверждения 23 с вероятностью по меньшей мере  $1 - P_q(n, k, \delta, r^*)$  для каждого  $r \in [1, r^*]$  выполняется

$$N_G(r) < (1 + \delta^{-1}) \binom{n}{r} (q-1)^r.$$

Покажем, что  $\binom{n}{r} (q-1)^r \leq q^{r\alpha_n(q)}$  для всех  $r \geq 1$ . При  $r = 1$  это равенство; при  $r = 2$  и  $n \geq 2$  имеем

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} (q-1)^2 &= \\ &= \frac{n(n-1)(q-1)^2}{2} < n^2 (q-1)^2 = q^{2\alpha_n(q)}; \end{aligned}$$

при  $r \geq 3$  пользуемся  $\binom{n}{r} \leq n^r$ .

С учетом этой оценки получим неравенство

$$\log_q N_G(r) < r\alpha_n(q) + \log_q(1 + \delta^{-1}).$$

Объединяя с оценкой 15, получаем для каждого  $r \in [1, r^*]$  неравенство

$$\begin{aligned} \log_q(T_{r,k,\ell} N_G(r)) &< \\ &< \ell(k-\ell) - \ell - S_{r,\ell} + r\alpha_n(q) + \log_q(1 + \delta^{-1}) + 2\log_q C_q, \end{aligned}$$

где

$$S_{r,\ell} = \begin{cases} \frac{\ell(\ell-3)}{2} - \log_q(\ell+1), & \text{если } 2\ell \leq r; \\ \ell \cdot \frac{r-1}{2} - \frac{(r+5)(r-1)}{8} - \log_q \frac{r+1}{2}, & \text{если } 2\ell > r \text{ и } r - \text{нечетное}; \\ \ell \cdot \frac{r-2}{2} - \frac{r(r+2)}{8} - \log_q \left(\frac{r}{2} + 1\right), & \text{если } 2\ell > r \text{ и } r - \text{четное}. \end{cases}$$

По условию  $r^* < 2\ell - 1 < 2\ell$ , поэтому для  $r \in [1, r^*]$  возможны только варианты, когда  $r < 2\ell$  и  $r$  имеет разную четность.

Когда  $r$  — нечетное и  $r < 2\ell$ , будет выполняться неравенство  $r \leq 2\ell - 1$ , а когда  $r$  — четное, то условие  $r < 2\ell$  гарантирует выполнение неравенства  $r \leq 2\ell - 2$ , т. е. во всех случаях  $\log_q((r+1)/2) \leq \log_q \ell$  и  $\log_q(r/2 + 1) \leq \log_q \ell$ .

Далее, из леммы 3 при  $a = -1$ ,  $b = 5$ ,  $c = -1$ ,  $\beta = 0$  и  $\alpha = \alpha_n(q)$  функция

$$-4\ell(r-1) + (r+5)(r-1) + 8r\alpha_n(q)$$

убывает на интервале  $[1, 2\ell - 2 - 4\alpha_n(q)]$ .

Несложно проверить, что из условия

$$\ell \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2(n+1) + \left(2\alpha_n(q) + \frac{1}{2}\right)^2}$$

следует, что  $r^* \leq 2\ell - 2 - 4\alpha_n(q)$ , поэтому максимум достигается в точке  $r = 1$ , т. е. в случае нечетного  $r$  из отрезка  $[1, r^*]$  будет выполнено неравенство

$$\log_q(T_{r,k,\ell} N_G(r)) < \ell(k-\ell) - \ell + \log_q \ell + \alpha_n(q) + \log_q(1+\delta^{-1}) + 2\log_q C_q.$$

Аналогично для четных  $r$ ,  $r \in [2, r^*]$ , применяя лемму 3 при  $a = -2$ ,  $b = 0$ ,  $c = 2$ ,  $\beta = 0$  и  $\alpha = \alpha_n(q)$ , получаем, что функция  $-4\ell(r-2) + r(r+2) + 8r\alpha_n(q)$  убывает на интервале  $[1, 2\ell - 1 - 4\alpha_n(q)]$ . Уже отмечалось, что  $r^* \leq 2\ell - 2 - 4\alpha_n(q)$ , поэтому выполняется неравенство  $r^* < 2\ell - 1 - 4\alpha_n(q)$ . Значит, на четных  $r \in [2, r^*]$  минимум достигается в точке  $r = 2$  и для таких  $r$  будет выполняться неравенство:

$$\log_q(T_{r,k,\ell} N_G(r)) < \ell(k-\ell) - \ell + 1 + \log_q \ell + 2\alpha_n(q) + \log_q(1+\delta^{-1}) + 2\log_q C_q.$$

Так как четная оценка превосходит нечетную (разность  $1 + \alpha_n(q) > 0$ ), то для всех  $r \in [1, r^*]$  справедливо

$$\log_q(T_{r,k,\ell} N_G(r)) < \ell(k-\ell) - \ell + 1 + \log_q \ell + 2\alpha_n(q) + \log_q(1+\delta^{-1}) + 2\log_q C_q.$$

Вводя константу  $c_q = 2q(q-1)^2 C_q^2$ , получим, что для всех  $r \in [1, r^*]$  верно неравенство

$$\log_q(T_{r,k,\ell} N_G(r)) < \ell(k-\ell) - \ell + \log_q((1+\delta^{-1})n^2) + \log_q \ell + \log_q c_q.$$

Рассмотрим теперь  $r \in [r^* + 1, \min(2\ell - 1, k)]$ .

Из утверждения 15 и тривиальной оценки  $N_G(r) \leq q^n$  для каждого слагаемого

$$\log_q(T_{r,k,\ell} N_G(r)) < \ell(k-\ell) - \ell - S_{r,\ell} + 2\log_q C_q + n.$$

Если  $r$  — нечетное, то, применяя лемму 3 при  $a = -1$ ,  $b = 5$ ,  $c = -1$ ,  $\beta = n$  и  $\alpha = 0$ , получим, что для всех  $r$  из отрезка  $[r_-, r_+]$  будет выполняться неравенство:

$$\log_q(T_{r,k,\ell} N_G(r)) < \ell(k-\ell) - \ell + \log_q \frac{r+1}{2} + 2\log_q C_q,$$

где

$$r_{\pm} = 2(\ell - 1) \pm 2\sqrt{\ell(\ell - 3) + \frac{9}{4} - 2n}.$$

Подкоренное выражение  $\ell(\ell - 3) + 9/4 - 2n$  положительно в силу условия  $n \leq \ell(\ell - 3)/2$ , вытекающего из условия утверждения. Так как  $9 > 1$ , то

$$2(\ell - 1) - 2\sqrt{\ell(\ell - 3) + \frac{1}{4} - 2n} > r_-.$$

Теперь по условию

$$r^* = \left\lfloor 2\ell - 1 - 2\sqrt{\ell(\ell - 3) + \frac{1}{4} - 2n} \right\rfloor \geq 2\ell - 1 - 2\sqrt{\ell(\ell - 3) + \frac{1}{4} - 2n} - 1,$$

поэтому  $r^* \geq r_-$ .

С другой стороны,

$$r_+ = 2(\ell - 1) + 2\sqrt{\ell(\ell - 3) + \frac{9}{4} - 2n} \geq 2\ell - 1 \geq \min(2\ell - 1, k - 1).$$

Значит, для нечетных  $r \in [r^* + 1, \min(2\ell - 1, k - 1)]$  будет выполняться неравенство:

$$\log_q(T_{r,k,\ell} N_G(r)) < \ell(k-\ell) - \ell + \log_q \frac{r+1}{2} + 2\log_q C_q.$$

Осталось заметить, что  $(r+1)/2 \leq \ell$  и  $C_q^2 \leq c_q$ . Поэтому в этом случае будет верно

$$\log_q(T_{r,k,\ell} N_G(r)) < \ell(k-\ell) - \ell + \log_q((1+\delta^{-1})n^2) + \log_q \ell + \log_q c_q.$$

Для четных  $r$  доказательство проводится аналогично с помощью леммы 3, примененной при  $a = -2$ ,  $b = 0$ ,  $c = 2$ ,  $\alpha = 0$  и  $\beta = n$ .

И, наконец, рассмотрим  $r \in [2\ell, k]$ .

Из утверждения 15 при  $r \geq 2\ell$ :

$$\log_q T_{r,k,\ell} < \ell(k-\ell) - \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \log_q(\ell+1) + 2\log_q C_q.$$

С тривиальной оценкой  $\log_q N_G(r) \leq n$  получаем неравенство

$$\log_q(T_{r,k,\ell} N_G(r)) < \ell(k-\ell) - \frac{\ell(\ell-1)}{2} + n + \log_q(\ell+1) + 2\log_q C_q.$$

Из условия утверждения следует неравенство

$$n + \log_q((q-1)n) \leq \frac{\ell(\ell-3)}{2},$$

поэтому если  $n \geq 2$ , то

$$-\frac{\ell(\ell-1)}{2} + \log_q(\ell+1) + n \leq -\ell + \log_q(\ell),$$

т. е. получим соотношение:

$$\log_q(T_{r,k,\ell} N_G(r)) < \ell(k-\ell) - \ell + \log_q((1+\delta^{-1})n^2) + \log_q \ell + \log_q c_q.$$

Таким образом, для всех  $r$ ,  $1 \leq r \leq k$ , будет выполняться требуемое неравенство, что завершает доказательство.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2,  $R \in (0, 1]$  и  $k = \lceil Rn \rceil$ . Зафиксируем также произвольное  $\varepsilon > 0$ .

Пусть  $\ell$  — натуральное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\left\lceil \sqrt{(2+2\varepsilon)n} + \frac{3}{2} \right\rceil \leq \ell \leq k.$$

Тогда существует  $n_0 = n_0(R, \varepsilon, q)$  такое, что для всех  $n \geq n_0$  при случайном выборе  $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$  с вероятностью не менее  $1 - \beta_q \cdot q^{-(R-4/\ell)n/2 + \log_q(k(n+1))}$ , где  $\beta_q = q^{5/2}(q + \sqrt{q})B_q$ , выполняется неравенство:

$$\sum_{r=1}^k T_{r,k,\ell}(q) N_G(r) < \gamma_q \cdot q^{\ell(k-\ell) - \ell + \log_q(n^2 k \ell)},$$

где  $\gamma_q = 6q(q-1)^2 C_q^2$ .

**Доказательство.** Воспользуемся утверждением 24.

Для начала рассмотрим условие на  $n$  и  $\ell$ . По условию  $(\ell-3/2)^2 \geq 2(1+\varepsilon)n$ . Найдется такое число  $n_1(\varepsilon, q)$ , что для всех  $n \geq n_1$  выполнены неравенства

$$\frac{1}{2} \left( 2 \log_q((q-1)n) + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \leq \varepsilon n, \quad \varepsilon n \geq 1.$$

Поэтому для всех  $n \geq n_1$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} 2(n+1) + \left( 2\alpha_n(q) + \frac{1}{2} \right)^2 &\leq \\ &\leq 2(n+1) + 2\varepsilon \cdot n - 2 = 2(1+\varepsilon)n \leq \left( \ell - \frac{3}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Теперь для всех  $n \geq n_1$  выполняется неравенство

$$2\alpha_n(q) + \frac{1}{2} \leq \sqrt{2\varepsilon n - 2},$$

т. е.  $4\alpha_n(q) + 1 \leq 2\sqrt{2\varepsilon n - 2}$ . Выберем теперь так  $n_2(\varepsilon, R)$ , чтобы выполнялось неравенство:

$$2\sqrt{2\varepsilon n - 2} + 2\sqrt{2(n+1)} \leq R \cdot n \leq k.$$

И тогда для  $n \geq \max(n_1, n_2)$  все условия утверждения 24 выполнены.

Оценим теперь величину  $P_q(n, k, \delta, r^*)$  сверху. Напомним, что

$$\begin{aligned} P_q &= \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1} B_q \delta \cdot q^{-(k-r^*)/2 + \log_q(k(q-1)(n+1))} + \\ &\quad + B_q q^{n + \log_q(kr^*) - (k-r^*)^2/2 - (k-r^*)/2}. \end{aligned}$$

Далее подберем так  $n$ , чтобы выполнялось неравенство

$$r^* \cdot q^{n - (k-r^*)^2/2} \leq \frac{1}{2}(q + \sqrt{q}) \cdot (n+1).$$

Тогда будет верна оценка

$$\begin{aligned} P_q &\leq \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1} B_q \delta \cdot q^{-(k-r^*)/2 + \log_q(k(q-1)(n+1))} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1} B_q \cdot q^{-(k-r^*)/2 + \log_q(k(q-1)(n+1))}, \end{aligned}$$

из которой при  $\delta = 1/2$  следует неравенство

$$P_q \leq \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1} B_q \cdot q^{-(k-r^*)/2 + \log_q(k(q-1)(n+1))}.$$

Рассмотрим

$$r^* = \left\lfloor 2\ell - 1 - 2\sqrt{\ell(\ell-3) + \frac{1}{4} - 2n} \right\rfloor.$$

Используя неравенство  $\sqrt{1-x} \geq 1-x$ , выполненное для любого  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , получим при  $n \geq n_1$  цепочку

$$\begin{aligned} r^* &\leq 2\ell - 1 - 2\ell \sqrt{1 - \frac{12\ell + 8n - 1}{4\ell^2}} \leq \\ &\leq \frac{12\ell + 8n - 1}{2\ell} - 1 = \frac{10\ell + 8n - 1}{2\ell}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$r^* < 5 + \frac{4n}{\ell}.$$

Так как по условию

$$\ell \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2(1+\varepsilon)n} > \sqrt{2(1+\varepsilon)n},$$

то

$$r^* < 5 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \cdot \sqrt{n}.$$

Подберем  $n_3(R, \varepsilon)$  так, чтобы для  $n \geq n_3$  выполнялось неравенство

$$5 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\sqrt{n} < Rn.$$

Тогда для всех  $n \geq n_3$  будет верна цепочка неравенств:

$$k - r^* \geq Rn - r^* \geq Rn - 5 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\sqrt{n}.$$

Так как по выбору  $n$  все разности неотрицательные, то эти же неравенства будут верны и для квадратов этих чисел, т. е.

$$(k - r^*)^2 \geq \left( Rn - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\sqrt{n} - 5 \right)^2,$$

а значит, если подобрать такое  $n_4(R, \varepsilon, q)$ , что для всех  $n \geq n_4$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \left( \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\sqrt{n} + 5 \right) \cdot q^{n - (Rn - (2\sqrt{2}/\sqrt{1+\varepsilon})\sqrt{n} - 5)^2/2} &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} (q + \sqrt{q}) \cdot (n + 1), \end{aligned}$$

то будет верно и нужное неравенство.

Положим  $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3, n_4, 2, \sqrt{q}/(q-1))$ . Теперь, используя неравенство  $k - r^* \geq Rn - 4n/\ell - 5$ , получим для всех  $n \geq n_0$  неравенство

$$P_q \leq \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1} B_q \cdot q^{5/2 - (R-4/\ell)n/2 + \log_q(k(q-1)(n+1))}.$$

Вводя константу  $\beta_q = q^{5/2}(q + \sqrt{q})B_q$ , получим требуемую оценку первой вероятности.

Для завершения доказательства осталось применить утверждение 24 для всех  $n \geq n_0$  и заметить, что при  $\delta = 1/2$  выражение  $1 + \delta^{-1}$  равно 3.  $\square$

## 10 Оценка вероятности того, что квадрат случайного подкода линейного кода совпадает с квадратом исходного кода

**Утверждение 25.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2 и  $\ell$ ,  $k$  и  $n$  — такие натуральные числа, что  $1 \leq \ell \leq k$  и  $n \geq \max(2, \sqrt{q}/(q-1))$ . Обозначим через  $\alpha_n(q) = \log_q((q-1)n)$ . Пусть также

$$\begin{aligned} \ell &\geq \frac{3}{2} + \sqrt{2(n+1) + \left(2\alpha_n(q) + \frac{1}{2}\right)^2}; \\ k &\geq 1 + 4\alpha_n(q) + 2\sqrt{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Положим

$$r^* = \left\lfloor 2\ell - 1 - 2\sqrt{\ell(\ell-3) + \frac{1}{4} - 2n} \right\rfloor.$$

Случайно и равномерно из множества всех  $(k \times n)$ -матриц над полем  $\mathbb{F}_q$  выберем матрицу  $G$  и зафиксируем ее. Пусть линейная оболочка строк матрицы  $G$  совпадает с некоторым линейным кодом  $\mathcal{C}$ .

Занумеруем произвольным образом все  $(\ell \times k)$ -матрицы над  $\mathbb{F}_q$  ранга  $\ell$ . Пусть их число равно

$$L = \begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix}_q |\text{GL}_\ell(q)|.$$

Выберем из множества  $[L] = \{1, 2, \dots, L\}$  номеров случайно и равномерно номер  $\lambda \in [L]$ , который соответствует матрице  $A_\lambda \in \mathbb{F}_q^{\ell \times k}$ , обозначим через  $\mathcal{C}_\lambda$  подкод кода  $\mathcal{C}$ , который совпадает с линейной оболочкой строк матрицы  $A_\lambda G$ .

Тогда для любого  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , с вероятностью не менее  $1 - P_q(n, k, \delta, r^*)$  по  $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \Pr_{\lambda \leftarrow [L]} [\mathcal{C}_\lambda^{\circ 2} = \mathcal{C}^{\circ 2}] &> \\ &> 1 - c_q \cdot q^{-\ell + \log_q((1+\delta^{-1})n^2) + \log_q(\ell \cdot k)}, \end{aligned}$$

где  $c_q = 2q(q-1)^2 C_q^2$ .

**Доказательство.** На основании утверждения 3 условие  $\mathcal{C}_\lambda^{\circ 2} \neq \mathcal{C}^{\circ 2}$  равносильно неравенству  $\text{rank}(A_\lambda G)^{\circ 2} \neq \text{rank } G^{\circ 2}$ .

По утверждению 4 подкод  $\mathcal{C}_\lambda$  размерности  $\ell$  удовлетворяет  $\mathcal{C}_\lambda^{\circ 2} \neq \mathcal{C}^{\circ 2}$  тогда и только тогда, когда порождающее его подпространство тотально изотропно относительно хотя бы одной билинейной формы с матрицей  $B_b = G D_b G^\top$ , где  $b \in \mathbb{F}_q^n$  и  $\text{rank } B_b \neq 0$ .

Как и раньше, обозначим через  $N_G(r)$  число таких векторов  $b \in \mathbb{F}_q^n$ , для которых матрица  $B_b$  имеет ранг  $r$ ,  $1 \leq r \leq k$ .

Тогда общее число  $\ell$ -мерных подпространств, тотально изотропных относительно хотя бы одной формы с матрицей  $B_b$  ненулевого ранга, не превосходит суммы  $\sum_{r=1}^k T_{r,k,\ell} N_G(r)$ .

Из утверждения 24 следует, что с вероятностью не менее  $1 - P_q(n, k, \delta, r^*)$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^k T_{r,k,\ell} N_G(r) &< \\ &< c_q \cdot q^{\ell(k-\ell) - \ell + \log_q((1+\delta^{-1})n^2) + \log_q(\ell k)}. \end{aligned}$$

Так как общее число матриц, порождающих заданное  $\ell$ -мерное подпространство, равно  $|\text{GL}_\ell(q)|$ , то будет верно неравенство

$$\Pr_{\lambda \leftarrow \mathbb{L}}[\mathcal{C}_\lambda^{\circ 2} \neq \mathcal{C}^{\circ 2}] \leq \frac{|\text{GL}_\ell(q)| \sum_{r=1}^k T_{r,k,\ell} N_G(r)}{|\text{GL}_\ell(q)| \begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix}_q}.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что  $\begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix}_q \geq q^{\ell(k-\ell)}$ .  $\square$

В завершение сформулируем центральную теорему, которая напрямую вытекает из утверждения 25 и следствия 1.

**Теорема 1.** Пусть характеристика поля  $\mathbb{F}_q$  равна 2,  $R \in (0, 1]$  и  $k = \lceil Rn \rceil$ . Зафиксируем также произвольное  $\varepsilon > 0$ .

Пусть  $\ell$  — натуральное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\left\lceil \sqrt{(2+2\varepsilon)n} + \frac{3}{2} \right\rceil \leq \ell \leq k.$$

Случайно и равномерно из множества всех  $(k \times n)$ -матриц над полем  $\mathbb{F}_q$  выберем матрицу  $G$  и зафиксируем ее. Пусть линейная оболочка ее строк порождает код  $\mathcal{C}$ .

Занумеруем произвольным образом все  $(\ell \times k)$ -матрицы над  $\mathbb{F}_q$  ранга  $\ell$ . Пусть их число равно

$$L = \begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix}_q |\text{GL}_\ell(q)|.$$

Выберем из множества  $\mathbb{L} = \{1, 2, \dots, L\}$  номеров случайно и равномерно номер  $\lambda \in \mathbb{L}$ , который соответствует матрице  $A_\lambda \in \mathbb{F}_q^{\ell \times k}$ , обозначим через  $\mathcal{C}_\lambda$  подкод кода  $\mathcal{C}$ , который совпадает с линейной оболочкой строк матрицы  $A_\lambda G$ .

Тогда существует  $n_0 = n_0(R, \varepsilon, q)$  такое, что для всех  $n \geq n_0$  при случайном выборе  $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$  с вероятностью не менее

$$1 - \beta_q \cdot q^{-(R-4/\ell)n/2 + \log_q(k(n+1))},$$

где  $\beta_q = q^{5/2}(q + \sqrt{q})B_q$ , выполняется неравенство

$$\Pr_{\lambda \leftarrow \mathbb{L}}[\mathcal{C}_\lambda^{\circ 2} = \mathcal{C}^{\circ 2}] > 1 - \gamma_q \cdot q^{-\ell + \log_q(n^2 k \ell)},$$

где  $\gamma_q = 6q(q-1)^2 C_q^2$ .

## 11 Заключение

Развитый в работе подход опирается на сведения задачи о размерности квадрата Шура–Адамара подкода к задаче о totally isotropic подпространствах семейства симметричных билинейных форм,

ассоциированных с порождающей матрицей кода. Этот переход позволил применить классические результаты о числе изотропных подпространств невырожденных форм и сочетать их с недавно полученной формулой для числа линейных кодов с заданной размерностью оболочки, что и привело к нетривиальной оценке искомой вероятности. Тем самым удалось формально подтвердить эвристическое предположение, ранее неоднократно использовавшееся при криптоанализе теоретико-кодовых криптосистем, построенных на подкодах ОРС-кодов и алгеброгеометрических кодов.

Установленные по ходу доказательства оценки числа totally isotropic подпространств заданной размерности произвольной симметричной билинейной формы над полем характеристики 2 представляют самостоятельный интерес и могут найти применение в других задачах теории кодирования и комбинаторики конечных геометрий.

Среди естественных направлений дальнейших исследований выделим перенос результатов на поля нечетной характеристики, уточнение оценок в случае малой размерности подкода, а также их конкретизацию полученных оценок для специальных классов кодов, представляющих криптографический интерес, — в первую очередь для подкодов ОРС-кодов и алгеброгеометрических кодов.

## Литература

1. Couvreur A., Márquez-Corbella I., Pellikaan R. Cryptanalysis of public-key cryptosystems that use subcodes of algebraic geometry codes // Algebraic geometry modeling in information theory / Eds. R. Pellikaan, X. Wu, S. Yao. — Ser. on number theory and its applications. — World Scientific, 2015. Vol. 8. P. 201–234. doi: 10.1142/9789814678701-0010.
2. Kötter R. A unified description of an error locating procedure for linear codes // 3rd Workshop (International) on Algebraic and Combinatorial Coding Theory Proceedings. — Voneshta Voda, Bulgaria: Hermes, 1992. P. 113–117.
3. Pellikaan R. On decoding by error location and dependent sets of error positions // Discrete Math., 1992. Vol. 106-107. No. 1. P. 369–381. doi: 10.1016/0012-365X(92)90567-Y.
4. Randriambololona H. On products and powers of linear codes under componentwise multiplication // Algorithmic arithmetic, geometry, and coding theory / Eds. S. Ballet, J.-M. Couveignes, D. Kohel, R. Rolland. — Contemporary mathematics ser. — Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2015. Vol. 637. P. 3–78. doi: 10.1090/conm/637/12749.
5. Cascudo I., Cramer R., Mirandola D., Zémor G. Squares of random linear codes // IEEE T. Inform. Theo-

- ry, 2015. Vol. 61. No. 3. P. 1159–1172. doi: 10.1109/TIT.2015.2393251.
6. Чижов И. В. Квадрат Адамара и обобщенное минимальное расстояние кода Рида–Маллера порядка 2 // Дискретная математика, 2023. Т. 35. № 1. С. 128–152. doi: 10.4213/dm1754.
  7. Чижов И. В. Неасимптотическая оценка вероятности того, что квадрат Шура–Адамара случайного длинного линейного кода имеет максимальную размерность // Прикладная дискретная математика, 2025. № 68. С. 56–70. doi: 10.17223/20710410/68/4. EDN: SYHLAQ.
  8. Wieschebrink C. Cryptanalysis of the Niederreiter public key scheme based on GRS subcodes // Post-quantum cryptography / Ed. N. Sendrier. — Lecture Notes in Computer Science ser. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. Vol. 6061. P. 61–72. doi: 10.1007/978-3-642-12929-2\_5.
  9. McEliece R. J. A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory // DSN Progress Report, 1978. Vol. 42–44. P. 114–116.
  10. Сидельников В. М., Шестаков С. О. О системе шифрования, построенной на основе обобщенных кодов Рида–Соломона // Дискретная математика, 1992. Т. 4. № 3. С. 57–63.
  11. Couvreur A., Lequesne M., Tillich J.-P. Recovering short secret keys of RLCE in polynomial time // Post-quantum cryptography / Eds. J. Ding, R. Steinwandt. — Lecture notes in computer science ser. — Cham: Springer, 2019. Vol. 11505. P. 133–152. doi: 10.1007/978-3-030-25510-7\_8.
  12. Couvreur A., Pratihari R., Tanısalı N., Zappatore I. On the structure of the Schur squares of twisted generalized Reed–Solomon codes and application to cryptanalysis // Post-quantum cryptography / Eds. R. Niederhagen, M.-J. O. Saarinen. — Lecture notes in computer science ser. — Cham: Springer, 2025. Vol. 15577. P. 3–34. doi: 10.1007/978-3-031-86599-2\_1.
  13. Couvreur A., Gaborit P., Gauthier-Umaña V., Otmani A., Tillich J.-P. Distinguisher-based attacks on public-key cryptosystems using Reed–Solomon codes // Design. Cod. Cryptogr., 2014. Vol. 73. No. 2. P. 641–666. doi: 10.1007/s10623-014-9967-z.
  14. Márquez-Corbella I., Martínez-Moro E., Pellikaan R. The non-gap sequence of a subcode of a generalized Reed–Solomon code // Design. Cod. Cryptogr., 2013. Vol. 66. No. 3. P. 317–333. doi: 10.1007/s10623-012-9694-2.
  15. Чижов И. В., Бородин М. А. Классификация произведений Адамара подкодов коразмерности 1 кодов Рида–Маллера // Дискретная математика, 2020. Т. 32. № 1. С. 115–134. doi: 10.4213/dm1583.
  16. Чижов И. В. Полная классификация произведений Адамара подкодов коразмерности 1 кодов Рида–Маллера // Вестник Московского университета. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2024. Т. 15. № 1. С. 67–80. doi: 10.55959/MSU/0137-0782-15-2024-47-1-67-80.
  17. Vysotskaya V. V. Characteristics of Hadamard square of special Reed–Muller subcodes // Прикладная дискретная математика, 2021. № 53. С. 75–88. doi: 10.17223/20710410/53/5. EDN: TEDEFN.
  18. Guenda K., Jitman S., Gulliver T. A. Constructions of good entanglement-assisted quantum error correcting codes // Design. Cod. Cryptogr., 2017. Vol. 86. No. 1. P. 121–136. doi: 10.1007/s10623-017-0330-z.
  19. Pless V. The number of isotropic subspaces in a finite geometry // Atti Accad. Naz. Lin., 1965. Vol. 39. P. 418–421.
  20. Li S., Shi M., Ling S. A mass formula for linear codes with prescribed hull dimension and related classification // IEEE T. Inform. Theory, 2025. Vol. 71. No. 1. P. 273–286. doi: 10.1109/TIT.2024.3425058.

Поступила в редакцию 16.02.2026

Принята к публикации 15.05.2026

# THE SCHUR–HADAMARD SQUARE OF A RANDOM SUBCODE OF A RANDOM LINEAR CODE OVER A FIELD OF CHARACTERISTIC 2 EQUALS THE SQUARE OF THE ORIGINAL CODE WITH HIGH PROBABILITY

I. V. Chizhov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

<sup>2</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The Schur–Hadamard square of a random subcode of a random linear code over a finite field of characteristic 2 is studied. Namely, for a uniformly random generator  $(k \times n)$ -matrix  $G$  of a code  $C$  and a uniformly random  $[n, \ell]_q$ -subcode  $C_\lambda \subseteq C$ , the probability that the equality  $C_\lambda^{\circ 2} = C^{\circ 2}$  holds is estimated. It is proved

that for  $k = \lceil Rn \rceil$  with  $R \in (0, 1]$  and a subcode dimension  $\ell$  of order  $\sqrt{n}$ , the above probability differs from one by a quantity that is exponentially small in  $n$ , and this holds simultaneously for an overwhelming fraction of matrices  $G$ . This result provides a rigorous justification of an experimentally observed property that underlies several attacks on McEliece-type code-based cryptosystems built upon subcodes of generalized Reed–Solomon codes and algebraic-geometric codes. As a technical tool, exact formulas and tight upper bounds are derived for the number of totally isotropic subspaces of a given dimension of an arbitrary symmetric bilinear form of prescribed rank over a field of characteristic 2; these bounds may be of independent interest.

**Keywords:** Schur square; random subcode of a linear code; totally isotropic subspace of a symmetric bilinear form; code-based cryptography

**DOI:** 10.14357/19922264260201

**EDN:** NNGASK

## References

1. Couvreur, A., I. Márquez-Corbella, and R. Pellikaan. 2015. Cryptanalysis of public-key cryptosystems that use subcodes of algebraic geometry codes. *Algebraic geometry modeling in information theory*. Eds. R. Pellikaan, X. Wu, and S. Yao. Ser. on number theory and its applications. World Scientific. 8:201–234. doi: 10.1142/9789814678701\_0010.
2. Kötter, R. 1992. A unified description of an error locating procedure for linear codes. *3rd Workshop (International) on Algebraic and Combinatorial Coding Theory Proceedings*. Voneshta Voda, Bulgaria: Hermes. 113–117.
3. Pellikaan, R. 1992. On decoding by error location and dependent sets of error positions. *Discrete Math.* 106/107(1):369–381. doi: 10.1016/0012-365X(92)90567-Y.
4. Randriambololona, H. 2015. On products and powers of linear codes under componentwise multiplication. *Algorithmic arithmetic, geometry, and coding theory*. Eds. S. Ballet, J.-M. Couveignes, D. Kohel, and R. Rolland. Contemporary mathematics ser. Providence, RI: American Mathematical Society. 637:3–78. doi: 10.1090/conm/637/12749.
5. Cascudo, I., R. Cramer, D. Mirandola, and G. Zéemor. 2015. Squares of random linear codes. *IEEE T. Inform. Theory* 61(3):1159–1173. doi: 10.1109/TIT.2015.2393251.
6. Chizhov, I. V. 2025. Hadamard square of linear codes and the generalized minimal distance of Reed–Muller code of order 2. *Discrete Mathematics Applications* 35(1):15–34. doi: 10.1515/dma-2025-0002. EDN: ATTIEX.
7. Chizhov, I. V. 2025. Neasimptoticheskaya otsenka veroyatnosti togo, chto kvadrat Shura–Adamara sluchaynogo dlinnogo lineynogo koda imeet maksimal’nyu razmernost’ [A non-asymptotic estimate of the probability that a Shur–Hadamard square of long random linear code has a maximum dimension]. *Prikladnaya diskretnaya matematika* [Applied Discrete Mathematics] 68:56–70. doi: 10.17223/20710410/68/4. EDN: SYHLAQ.
8. Wieschebrink, C. 2010. Cryptanalysis of the Niederreiter public key scheme based on GRS subcodes. *Post-quantum cryptography*. Ed. N. Sendrier. Lecture notes in computer science ser. Berlin, Heidelberg: Springer. 6061:61–72. doi: 10.1007/978-3-642-12929-2\_5.
9. McEliece, R. J. 1978. A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory. *DSN Progress Report* 42–44:114–116.
10. Sidelnikov, V. M., and S. O. Shestakov. 1992. On insecurity of cryptosystems based on generalized Reed–Solomon codes. *Discrete Mathematics Applications* 2(4):439–444. doi: 10.1515/dma.1992.2.4.439.
11. Couvreur, A., M. Lequesne, and J.-P. Tillich. 2019. Recovering short secret keys of RLCE in polynomial time. *Post-quantum cryptography*. Eds. J. Ding and R. Steinwandt. Lecture notes in computer science ser. Cham: Springer. 11505:133–152. doi: 10.1007/978-3-030-25510-7\_8.
12. Couvreur, A., R. Pratihari, N. Tanisalı, and I. Zappatore. 2025. On the structure of the Schur squares of twisted generalized Reed–Solomon codes and application to cryptanalysis. *Post-quantum cryptography*. Eds. R. Niederhagen and M.-J. O. Saarinen. Lecture notes in computer science ser. Cham: Springer. 15577:3–34. doi: 10.1007/978-3-031-86599-2\_1.
13. Couvreur, A., P. Gaborit, V. Gauthier-Umaña, A. Otmani, and J.-P. Tillich. 2014. Distinguisher-based attacks on public-key cryptosystems using Reed–Solomon codes. *Design. Cod. Cryptogr.* 73(2):641–666. doi: 10.1007/s10623-014-9967-z.
14. Márquez-Corbella, I., E. Martínez-Moro, and R. Pellikaan. 2013. The non-gap sequence of a subcode of a generalized Reed–Solomon code. *Design. Cod. Cryptogr.* 66(3):317–333. doi: 10.1007/s10623-012-9694-2.
15. Chizhov, I. and M. Borodin. 2022. Classification of Hadamard products of one-codimensional subcodes of Reed–Muller codes. *Discrete Mathematics Applications* 32(5):297–311. doi: 10.1515/dma-2022-0025.
16. Chizhov, I. V. 2024. Complete classification of Hadamard products of codimension 1 subcodes of Reed–Muller codes. *Moscow University Computational Mathematics Cybernetics* 48(1):65–78. doi: 10.3103/S0278641924010023. EDN: ORUCNZ.
17. Vysotskaya, V. V. 2021. Characteristics of Hadamard square of special Reed–Muller subcodes. *Prikladnaya diskretnaya matematika* [Applied Discrete Mathemat-

- ics] 53:75–88. doi: 10.17223/20710410/53/5. EDN: TEDEFN.
18. Guenda, K., S. Jitman, and T.A. Gulliver. 2017. Constructions of good entanglement-assisted quantum error correcting codes. *Design. Cod. Cryptogr.* 86(1):121–136. doi: 10.1007/s10623-017-0330-z.
19. Pless, V. 1965. The number of isotropic subspaces in a finite geometry. *Atti Accad. Naz. Lin.* 39(6):418–421.
20. Li, S., M. Shi, and S. Ling. 2025. A mass formula for linear codes with prescribed hull dimension and related classification. *IEEE T. Inform. Theory* 71(1):273–286. doi: 10.1109/TIT.2024.3425058.

*Received February 16, 2025*

*Accepted May 15, 2026*

## Contributor

**Chizhov Ivan V.** (b. 1984) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Information Security, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; chizhoviv@my.msu.ru

# АЛГОРИТМ РЕДУКЦИЙ НАИМЕНЬШЕЙ ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКИ ДЛЯ ФАКТОР-РЕШЕТОК\*

Д. В. Виноградов<sup>1</sup>

**Аннотация:** Представлен полиномиальный (относительно размера исходной обучающей выборки) алгоритм построения наименьшей обучающей выборки для фактор-решетки из решетки кандидатов наименьшей обучающей выборки путем последовательности редукций исходной выборки. Приводится описание структуры наименьшей обучающей выборки с доказательством ее минимальности. Описываемый алгоритм может быть полезен для последовательного сокращения пространства признаков, описывающих обучающие примеры, так, чтобы максимально сохранить соотношения между элементами решетки. Тогда в случае необходимости можно будет вернуться к исходному представлению и исследовать локальную окрестность заинтересовавшего элемента. Конструкция основана на хорошо известной характеристике конгруэнтностей решеток, простое доказательство этого факта также приводится в статье. Для представленного алгоритма доказаны теоремы корректности и полноты. Приведенные примеры демонстрируют тонкости применения и работы представленного в работе алгоритма.

**Ключевые слова:** решетка; неразложимые элементы; обучающая выборка; кандидат; конгруэнтность; фактор-решетка

DOI: 10.14357/19922264260202

EDN: QDASLT

## 1 Введение

Цель настоящей работы — обоснование алгоритма порождения наименьшей обучающей выборки для фактор-решетки кандидатов через последовательную серию редукций над наименьшей обучающей выборкой, для которой факторизуемая решетка служит решеткой кандидатов.

Теорема представления конечной решетки как кандидатов некоторой обучающей выборки представляет собой фундаментальную теорему анализа формальных понятий (АФП) [1]. Теперь эта теория излагается даже в англоязычных университетских учебниках [2], но на русском языке не существует ее систематического изложения. Обучающие выборки, соответствующие конечной решетке, не определяются однозначно, но среди них имеется единственная (с точностью до перестановок объектов и признаков) наименьшая выборка по числу объектов и признаков.

Классический ДСМ-метод (метод Джона Стюарта Милля) [3, 4] автоматического порождения гипотез основан на порождении (почти) всех кандидатов, число которых может оказаться экспоненциально большим. Побудительным мотивом к развитию описываемого алгоритма стали результаты ДСМ-экспериментов над массивом CIFAR-10, которые показали, что решетка кандидатов становится настолько большой, что ей требуется больше

100 ГБ памяти для вычислений. В статье [5] доказаны некоторые результаты, которые могут служить объяснением этого феномена.

Для максимального удобства читателя в разд. 2 представлены нужные определения и факты АФП, однако будем использовать устоявшуюся отечественную терминологию. В разд. 3 доказываем классическую теорему характеристики конгруэнтности, но приводится доказательство, упрощенное по сравнению с приведенным в [2]. Раздел 4 содержит описание предложенного алгоритма и доказательства его корректности и полноты.

## 2 Элементы анализа формальных понятий

Напомним основные определения и факты анализа формальных понятий [1, 6], хотя будем использовать отечественную терминологию [7].

**Определение 1.** Обучающей выборкой будем называть бинарное отношение  $I \subseteq O \times F$  между элементами множества  $O$ , которые называем именами объектов (или даже **объектами**), и элементами множества  $F$ , которые называем **признаками**.

**Определение 2.** Для подмножества  $A \subseteq O$  объектов его **сходством** называется подмножество  $A^< = \{f \in F : \forall o \in A [oIf]\}$ . Для пустого множества

\*Автор выражает благодарность коллегам из ФИЦ ИУ РАН за полезные обсуждения. Автор признателен Л. А. Якимовой и А. С. Миснику за обсуждение предложенного алгоритма, в том числе в контексте его применения в обучении с подкреплением при порождении стратегий в играх с полной информацией.

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, krrguest@yandex.ru

объектов имеем  $\emptyset^< = F$ . Для подмножества  $B \subseteq \subseteq F$  признаков его **родителями** называется подмножество  $B^> = \{o \in O : \forall f \in B [oIf]\}$ . Для пустого множества признаков верно  $\emptyset^> = O$ . Так задаются операции  $< : \mathcal{PO} \rightarrow \mathcal{PF}$  и  $> : \mathcal{PF} \rightarrow \mathcal{PO}$ , называемые **полярами**, где  $\mathcal{PX}$  — **множество-степень** для  $X$ .

С вычислительной точки зрения нахождение  $A^<$  сводится к побитовому умножению строк, соответствующих отобраным в подмножество  $A$  объектам. Аналогично вычисление  $B^>$  сводится к побитовому умножению столбцов, соответствующих отобраным в подмножество  $B$  признакам. Операция побитового умножения является базовой операцией современных вычислительных устройств (как центральных, так и графических процессоров), которая к тому же допускает эффективное векторное распараллеливание.

**Определение 3.** Пару  $\langle A, B \rangle$  назовем **кандидатом**, если  $B^> = A$  и  $A^< = B$ . Подмножество объектов (строк)  $A \subseteq O$  называется **родителями**, а подмножество  $B \subseteq F$  признаков (столбцов) называется **фрагментом**.

**Определение 4.** Порядок на кандидатах задается правилом  $\langle A, B \rangle \leq \langle C, D \rangle$ , если и только если  $B \subseteq D$  (или, что эквивалентно,  $A \supseteq C$ ).

Легкая часть фундаментальной теоремы АФП доказывается проверкой аксиом.

**Лемма 1.** Для обучающей выборки  $I \subseteq O \times F$  кандидаты образуют решетку  $\mathbb{L}(O, F, I)$  относительно операций

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle \wedge \langle C, D \rangle &= \langle (B \cap D)^>, B \cap D \rangle = \\ &= \langle (A \cup C)^<^>, B \cap D \rangle; \\ \langle A, B \rangle \vee \langle C, D \rangle &= \langle A \cap C, (A \cap C)^< \rangle = \\ &= \langle A \cap C, (B \cup D)^>^< \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Трудная часть фундаментальной теоремы утверждает, что для любой конечной решетки  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  можно найти такую обучающую выборку  $I \subseteq \subseteq O \times F$ , для которой решетка кандидатов будет изоморфна исходной решетке. Чтобы получить наименьшую по мощности обучающую выборку, дадим

**Определение 5.** Элемент  $x \in L$  решетки назовем  $\wedge$ -**неразложимым**, если  $x \neq \top$  и для любых  $y, z \in L$  из  $x < y$  и  $x < z$  следует, что  $x < y \wedge z$ . Элемент  $x \in L$  называется  $\vee$ -**неразложимым**, если  $x \neq \perp$  и для любых  $y, z \in L$  из  $y < x$  и  $z < x$  следует, что  $y \vee z < x$ .

**Лемма 2.** Подмножество  $F \subseteq L$  всех  $\vee$ -неразложимых элементов конечной решетки таково, что для любого элемента  $v \in L$  найдется такое подмножество  $V \subseteq F$ , что  $v = \bigvee V$ .

Подмножество  $O \subseteq L$  всех  $\wedge$ -неразложимых элементов конечной решетки таково, что для любого элемента  $w \in L$  найдется такое подмножество  $W \subseteq O$ , что  $w = \bigwedge W$ .

Докажем, например, второе утверждение. Используем нётеровость порядка конечной решетки. Если  $w \in L$   $\wedge$ -неразложим, то полагаем  $W = \{w\} \subseteq O$ . Для  $w = \perp$  берем  $W = \emptyset$ . Иначе  $w = u \wedge v$  для некоторых  $w < u$  и  $w < v$ . По предположению индукции  $u = \bigwedge U$  и  $v = \bigwedge V$  для соответствующих  $U \subseteq O$  и  $V \subseteq O$ . Тогда результат будет верен для  $W = U \cup V$ .

**Теорема 1.** Пусть для конечной решетки  $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$   $O$  будет подмножеством всех  $\wedge$ -неразложимых элементов, а  $F$  — подмножеством всех  $\vee$ -неразложимых элементов. Если определить обучающую выборку  $oIf \Leftrightarrow o \geq f$  как сужение отношения порядка  $\mathbb{L}$  ( $x \geq y \Leftrightarrow x \wedge y = y \Leftrightarrow x \vee y = x$ ) на  $O \times F$ , то решетка кандидатов этой выборки будет изоморфна исходной решетке  $\mathbb{L}$ .

Доказательство теоремы опирается на две вспомогательные леммы

**Лемма 3.** Для обучающей выборки  $\geq \subseteq O \times F$ , где  $O \subseteq L$  и  $F \subseteq L$  для конечной решетки  $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ , верно  $A^< = \{f \in F : f \leq \bigwedge A\}$  и  $B^> = \{o \in O : o \geq \bigvee B\}$ .

Докажем первое равенство. Если  $f \leq \bigwedge A$ , то для любого  $o \in A$  верно  $f \leq \bigwedge A \leq o$ ; следовательно,  $f \in A^<$ . Обратное включение  $A^< \subseteq \subseteq \{f \in F : f \leq \bigwedge A\}$  доказывается аналогично.

**Лемма 4.** Для конечной решетки  $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$  и обучающей выборки  $\geq \subseteq O \times F$ , где  $O$  — подмножество всех  $\wedge$ -неразложимых элементов, а  $F$  — подмножество всех  $\vee$ -неразложимых элементов, каждый кандидат  $\langle A, B \rangle$  имеет вид:

$$\{\{o \in O : x \leq o\}, \{f \in F : f \leq x\}\} \quad (2)$$

для

$$x = \bigwedge A = \bigvee B \in L. \quad (3)$$

Достаточно доказать, что  $\bigwedge A = \bigvee B$ . Так как  $B = A^<$ , то по лемме 3  $\bigvee B = \bigvee A^< = \bigvee \{f \in F : f \leq \bigwedge A\} \leq \bigwedge A$ . Для  $x = \bigwedge A \in L$  по лемме 2 найдется такое подмножество  $X \subseteq F$ , что  $x = \bigvee X$ . Но каждый  $f \in X$  удовлетворяет условию  $f \in \{f \in F : f \leq \bigwedge A\} = A^< = B$  по определению 3 и лемме 3. Поэтому  $X \subseteq B$  и  $\bigwedge A = x = \bigvee X \leq \bigvee B$ .

Требуемый теоремой 1 изоморфизм  $\mathbb{L} \rightarrow \rightarrow \mathbb{L}(O, F, I)$  задается формулами (2) и (3). Проверка свойств гомоморфизма оставляется читателю как легкое упражнение.

Докажем теперь минимальность обучающей выборки из теоремы 1 по числу элементов  $O \times F$ .

**Теорема 2.** Пусть имеется изоморфизм  $\phi : \langle L, \wedge, \vee \rangle \rightarrow \mathbb{L}(O, F, I)$  для некоторой обучающей выборки  $I \subseteq O \times F$ . Для любого  $\wedge$ -неразложимого элемента  $x \in L$  найдется такой  $o \in O$ , что  $\phi(x) = \langle \{o\}^{<>}, \{o\}^{<} \rangle$ . Для любого  $\vee$ -неразложимого элемента  $x \in L$  найдется такой  $f \in F$ , что  $\phi(x) = \langle \{f\}^{>}, \{f\}^{><} \rangle$ .

Докажем последнее утверждение. Для  $\vee$ -неразложимого элемента  $x \in L$  имеем  $\phi(x) = \langle A, B \rangle$  для некоторых  $A \subseteq O$  и  $B \subseteq F$ . Так как  $x \neq \perp$ , то  $B \neq \emptyset$ .

Пусть  $B = \{f_{i_1}, \dots, f_{i_m}\}$ , тогда докажем равенство  $\langle A, B \rangle = \bigvee_{j=1}^m \langle \{f_{i_j}\}^{>}, \{f_{i_j}\}^{><} \rangle$ . По легко проверяемым свойствам Галуа для поля

$$\begin{aligned} \forall C \subseteq O [C \subseteq C^{<>}], \forall D \subseteq F [D \subseteq D^{><}]; \\ \forall C_1, C_2 \subseteq O [C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1^{<} \supseteq C_2^{<}], \\ \forall D_1, D_2 \subseteq F [D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow D_1^{>} \supseteq D_2^{>}]; \\ \forall C \subseteq O [C^{<} = C^{<><}], \forall D \subseteq F [D^{>} = D^{><>}] \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} A = B^{>} &= \left( \bigcup_{j=1}^m \{f_{i_j}\} \right)^{>} \supseteq \left( \bigcup_{j=1}^m \{f_{i_j}\}^{><} \right)^{>} = \\ &= \bigcap_{j=1}^m \{f_{i_j}\}^{><>} = \bigcap_{j=1}^m \{f_{i_j}\}^{>}. \end{aligned}$$

С другой стороны, для всякого  $j$  из-за  $f_{i_j} \in B$  получаем  $A = B^{>} \subseteq \{f_{i_j}\}^{>}$ ; следовательно,  $A \subseteq \bigcap_{j=1}^m \{f_{i_j}\}^{>}$ . По формуле (1) получим требуемое равенство  $\langle A, B \rangle = \bigvee_{j=1}^m \langle \{f_{i_j}\}^{>}, \{f_{i_j}\}^{><} \rangle$ .

Но  $\vee$ -неразложимость сохраняется при изоморфизме, поэтому кандидат  $\langle A, B \rangle$  неразложим в  $\mathbb{L}(O, F, I)$ ; следовательно,  $\phi(x) = \langle \{f_{i_j}\}^{>}, \{f_{i_j}\}^{><} \rangle$  для некоторого  $f_{i_j} \in B$ . Теорема доказана.

Теорема 2 утверждает, что столбец, соответствующий  $\vee$ -неразложимому элементу  $x \in L$ , нельзя выбросить, а также нельзя выбросить строку, соответствующую  $\wedge$ -неразложимому элементу  $x \in L$ .

### 3 Конгруэнции и фактор-решетки

**Определение 6.** Отношение эквивалентности  $\approx$  между элементами решетки  $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$  называется **конгруэнцией**, если  $a \approx b$  и  $c \approx d$  влекут  $a \wedge c \approx b \wedge d$  и  $a \vee c \approx b \vee d$ . Классы эквивалентных элементов называются **блоками**. Блок, содержащий элемент  $a \in L$ , обозначается через  $[a]_{\approx}$ .

Легко проверить, что отношение  $h(a) = h(b)$  является конгруэнцией на решетке  $\mathbb{L}_1 = \langle L_1, \wedge_1, \vee_1 \rangle$  для любого гомоморфизма решеток  $h : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2 = \langle L_2, \wedge_2, \vee_2 \rangle$ , т.е. отображения  $h : L_1 \rightarrow L_2$ , которое сохраняет операции  $h(a \wedge_1 b) = h(a) \wedge_2 h(b)$  и  $h(a \vee_1 b) = h(a) \vee_2 h(b)$ . Эта конгруэнция называется **ядром**  $\text{Ker}(h)$  этого гомоморфизма.

**Определение 7.** Фактор-решеткой  $\mathbb{L}/_{\approx}$  решетки  $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$  относительно конгруэнции  $\approx$  называется решетка на множестве блоков  $L/_{\approx} = \{[a]_{\approx} : a \in L\}$  с операциями  $[a]_{\approx} \wedge [b]_{\approx} = [a \wedge b]_{\approx}$  и  $[a]_{\approx} \vee [b]_{\approx} = [a \vee b]_{\approx}$ .

Очевидно, что для конгруэнции  $\approx$  отображение  $q(a) = [a]_{\approx}$  определяет сюръективный гомоморфизм  $q$  решетки  $\mathbb{L}$  на фактор-решетку  $\mathbb{L}/_{\approx}$ , для которого  $\text{Ker}(q) = \approx$ .

Классическая теорема о гомоморфизме утверждает, что любой гомоморфизм  $h : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2 = \langle L_2, \wedge_2, \vee_2 \rangle$  может быть представлен как композиция  $h = i \cdot q$ , где  $q : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_1/_{\approx}$  — сюръективный гомоморфизм на фактор-решетку по конгруэнции  $\approx = \text{Ker}(h)$ , а  $i : \mathbb{L}_1/_{\approx} \rightarrow \mathbb{L}_2$  — инъективный гомоморфизм  $i([a]_{\approx}) = h(a)$ .

Перечислим основные свойства конгруэнций.

**Лемма 5.** Пусть  $\approx$  — конгруэнция на решетке  $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ . Тогда

- (1) если  $a \approx c$  и  $a \leq b \leq c$ , то  $a \approx b$  и  $b \approx c$ ;
- (2) если  $a \approx b$ , то  $(a \wedge b) \approx (a \vee b)$ ;
- (3) если  $a \approx (a \vee b)$ , то  $b \approx (a \wedge b)$ ;
- (4) если  $b \approx (a \wedge b)$ , то  $a \approx (a \vee b)$ .

Докажем только последнее утверждение:  $b \approx (a \wedge b)$  влечет  $(b \vee a) \approx ((a \wedge b) \vee a) = a$ , где последнее равенство — тождество поглощения для решетки.

**Теорема 3.** Отношение эквивалентности  $\approx$  является конгруэнцией на решетке  $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ , если и только если оно имеет все свойства из леммы 5.

Достаточно доказать, что при условии  $e \approx d$  имеем  $(e \vee c) \approx (d \vee c)$  и  $(e \wedge c) \approx (d \wedge c)$ . Проверим первую импликацию: пусть  $e \approx d$ , тогда  $(e \vee c) \approx (d \vee c)$ . Тогда  $(e \vee d) \approx (e \wedge d)$  по свойству 2. Неравенства  $(e \wedge d) \leq ((e \wedge d) \vee c) \wedge (e \vee d) \leq (e \vee d)$  и  $(e \vee d) \approx (e \wedge d)$  по свойству 1 влекут  $((e \wedge d) \vee c) \wedge (e \vee d) \approx (e \vee d)$ . Из неравенств  $(e \wedge d) \leq ((e \vee d) \wedge ((e \wedge d) \vee c)) \leq ((e \wedge d) \vee c)$  следует  $((e \vee d) \wedge ((e \wedge d) \vee c)) \vee c = ((e \wedge d) \vee c)$ . Обозначая  $b = ((e \wedge d) \vee c)$  и  $a = (e \vee d)$ , имеем  $(a \wedge b) \approx a$ , что по свойству 4 влечет  $b = ((e \wedge d) \vee c) \approx (a \vee b) = (e \vee d) \vee ((e \wedge d) \vee c) = ((e \vee d) \vee c)$ . Но  $((e \wedge d) \vee c) \leq (e \vee c) \leq ((e \vee d) \vee c)$  по свойству 1 влечет  $(e \vee c) \approx ((e \vee d) \vee c) = (e \vee d)$ . Аналогично доказывается, что  $(d \vee c) \approx ((e \vee d) \vee c) = (e \vee d)$ . По транзитивности и симметричности отношения эквивалентности имеем  $(e \vee c) \approx (d \vee c)$ .

Доказательство второй импликации следует из принципа дуальности с использованием свойства 3 вместо свойства 4.

## 4 Алгоритм редукций обучающей выборки

Вопрос о представлении объектов бинарными признаками решается совместно с экспертами в предметной области, возможно, с привлечением онтологий и больших лингвистических моделей. Предполагается, что обучающая выборка задана. Некоторые объекты, описываемые в выбранных признаках, окажутся одинаково представленными, а так как ДСМ-метод не опирается на частоту встречаемости, то устранение таких дубликатов уменьшает вычислительную сложность. Данное замечание позволяет редуцировать некоторые строки. Также выбранные признаки иногда можно удалить без потери предсказательной и объяснительной силы, что позволяет редуцировать столбцы в выборке с последующей редукцией строк.

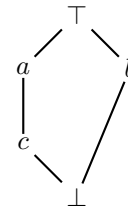
Вопрос о выборе редуцируемого признака можно решать, например, с использованием максимального уменьшения энтропии целевого свойства (в ДСМ-методе имеются не только положительные (обучающие) примеры, но и отрицательные примеры, называемые «контрпримерами»). Такая редукция уменьшает размер решетки и, соответственно, снижает вычислительную сложность (см. Алгоритм 1).

Перед применением предлагаемого алгоритма требуется топологически (совместимо с включением соответствующих подмножеств) отсортировать строки наименьшей выборки по возрастанию, а столбцы по убыванию. Таких топологических порядков может быть несколько, подходит любой. Алгоритмы топологической сортировки описаны в классических учебниках по алгоритмам, например в [8].

При редукциях строк и столбцов хочется, тем не менее, получать согласованные решетки кандидатов, чтобы в интересных случаях можно было вернуться к расширенному набору признаков с сохранением отношений между кандидатами. Наиболее строго это будет происходить при переходе к фактор-решеткам исходного множества кандидатов.

Для наглядности будем демонстрировать операции редукции на следующем примере, где полезно расширить наименьшую обучающую выборку строкой, соответствующей наибольшему элементу  $\top$ , и столбцом, соответствующим наименьшему элементу  $\perp$ .

**Пример 1.** Рассмотрим решетку



Соответствующая расширенная наименьшая обучающая выборка имеет вид:

| $\geq$ | $a$ | $b$ | $c$ | $\perp$ |
|--------|-----|-----|-----|---------|
| $c$    | 0   | 0   | 1   | 1       |
| $b$    | 0   | 1   | 0   | 1       |
| $a$    | 1   | 0   | 1   | 1       |
| $\top$ | 1   | 1   | 1   |         |

Если в примере 1 начать с редуцирования строки  $c$ , то получим в качестве умножения строку  $a$  и должны отметить к редуцированию первый столбец, в результате удаления которого получится

| $\geq$ | $b$ | $c$ | $\perp$ |
|--------|-----|-----|---------|
| $b$    | 1   | 0   | 1       |
| $a$    | 0   | 1   | 1       |
| $\top$ | 1   | 1   |         |

Это соответствует конгруэнции  $a \approx c$ . Легко видеть, что удаление строки приводит к склейке удаляемого  $\wedge$ -неразложимого элемента  $c$  на накрывающий его элемент  $a$  решетки. Этот же самый результат получится, если сначала редуцировать первый столбец, что соответствует склейке удаляемого  $\vee$ -неразложимого элемента  $a$  с накрываемым им элементом  $c$  решетки.

Если в примере 1 начать с удаления строки  $b$ , то получим в качестве умножения строку  $\top$  и должны отметить к удалению первый и третий столбцы, в результате удаления которых получится

| $\geq$ | $b$ | $\perp$ |
|--------|-----|---------|
| $c$    | 0   | 1       |
| $a$    | 0   | 1       |
| $\top$ | 1   |         |

После удаления дубликатов получим обучающую выборку для конгруэнции  $b \approx \top, a \approx c \approx \perp$ .

Если в примере 1 начать с удаления строки  $a$ , то получим в качестве умножения строку  $\top$  и должны отметить к удалению второй столбец. При его удалении возникнет потребность удалить строку  $c$ , и после устранения дубликатов получится обучающая выборка

| $\geq$ | $a \approx c$ | $\perp$ |
|--------|---------------|---------|
| $b$    | 0             | 1       |
| $\top$ | 1             |         |

для конгруэнции  $a \approx \top \approx c, b \approx \perp$ .

**Алгоритм 1:** Редукция обучающей выборки

**Data:** Топологически отсортированная наименьшая обучающая выборка  $I \subseteq O \times F$ , списки редуцируемых строк  $R \subset O$ ,  $C = \emptyset$  или редуцируемых столбцов  $R = \emptyset$ ,  $C \subset F$ .

**Result:** Топологически отсортированная наименьшая выборка для фактор-решетки  $I^- \subseteq O^- \times F^-$ , где  $O^- \subseteq (O \setminus R)$  и  $F^- \subseteq (F \setminus C)$ .

```

1  $I^- := I$ ;  $O^- := O$ ;  $F^- := F$ ;
2 while  $((C \neq \emptyset) \vee (R \neq \emptyset))$  do
3   if  $(C = \emptyset)$  then // редуцируем строки
4     for  $(r = o_j \in R)$  do
5        $X := \{f : f \in F^-\}$ ; //  $X := \top^<$ 
6       for  $(k = |O^-|; k > j; k = k - 1)$  do // вычисляем накрывающий элемент
7         if  $(\{r\}^< \subset \{o_k\}^<)$  then
8            $X := X \cap \{o_k\}^<$ ;
9         end
10      end
11      for  $(k = 1; k \leq |F^-| - 1; k = k + 1)$  do // удаляем столбцы-дубликаты
12        for  $(l = k + 1; l \leq |F^-|; l = l + 1)$  do
13          if  $(\{f_k\}^> \cap \{f_l\}^>) \subseteq \{r\})$  then
14             $F^- := F^- \setminus \{f_l\}$ ;
15          end
16        end
17      end
18       $C := C \cup \{f_i \in F^- : f_i \in X, \neg(rI^- f_i)\}$ ; // добавляем редуцируемые столбцы
19       $R := R \setminus \{r\}$ ;  $O^- := O^- \setminus \{r\}$ ;  $I^- := I^- \cap (O^- \times F^-)$ ; // удаляем строку
20    end
21  end
22  else // редуцируем столбцы
23    for  $(c = f_j \in C)$  do
24       $Y := \{o : o \in O^-\}$ ; //  $Y := \perp^>$ ;
25      for  $(k = |F^-|; k > j; k = k - 1)$  do // вычисляем накрываемый элемент
26        if  $(\{c\}^> \subset \{f_k\}^>)$  then
27           $Y := Y \cap \{f_k\}^>$ ;
28        end
29      end
30      for  $(k = |O^-|; k \geq 2; k = k - 1)$  do // удаляем строки-дубликаты
31        for  $(l = k - 1; l \leq 1; l = l - 1)$  do
32          if  $(\{o_k\}^< \cap \{o_l\}^<) \subseteq \{c\})$  then
33             $O^- := O^- \setminus \{o_l\}$ ;
34          end
35        end
36      end
37       $R := R \cup \{o_i \in O^- : o_i \in Y, \neg(o_i I^- c)\}$ ; // добавляем редуцируемые строки
38       $C := C \setminus \{c\}$ ;  $F^- := F^- \setminus \{c\}$ ;  $I^- := I^- \cap (O^- \times F^-)$ ; // удаляем столбец
39    end
40  end
41 end

```

Для доказательства корректности алгоритма 1 нужно доказать следующую теорему.

**Теорема 4.** Пусть обучающая выборка  $I \subseteq O \times F$  является наименьшей выборкой для решетки  $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ . Для множества редуциру-

емых строк  $R \subset O$  результат работы Алгоритма 1 на входных данных  $(I, R, C = \emptyset)$  — это наименьшая обучающая выборка для фактор-решетки  $\mathbb{L}/\approx$ , где конгруэнция  $\approx$  порождается отождествлением каждого  $\langle \{r\}^>, \{r\}^< \rangle$  для  $r \in R$  с элементом  $\bigwedge \{u \in L : \langle \{r\}^>, \{r\}^< \rangle < u\}$ . Для множества ре-

дуцируемых столбцов  $C \subset F$  результат работы Алгоритма 1 на входных данных  $(I, R = \emptyset, C)$  — это наименьшая обучающая выборка для фактор-решетки  $\mathbb{L}/\approx$ , где конгруэнция  $\approx$  порождается отождествлением каждого элемента  $\langle \{c\}^>, \{c\}^{><} \rangle$  для  $c \in C$  с элементом  $\bigvee \{d \in L : d < \langle \{c\}^>, \{c\}^{><} \rangle\}$ .

Рассмотрим случай первого утверждения, когда начинаем с  $C = \emptyset$  и  $R \neq \emptyset$ . Будем применять индукцию по числу циклов while алгоритма 1. В ходе вычислений while-цикла множество  $C$  будет увеличиваться, а  $R$  — уменьшаться. Во внутреннем for-цикле перебираются все столбцы  $r = o_j \in R$  в некотором (неважно каком) порядке.

Из леммы 2 следует, что

$$x = \bigwedge \{u \in L : \langle \{r\}^{><}, \{r\}^{<} \rangle < u\}$$

можно представить в виде

$$x = \bigwedge \{ \langle \{o\}^{><}, \{o\}^{<} \rangle : o \in O, \langle \{r\}^{><}, \{r\}^{<} \rangle < \langle \{o\}^{><}, \{o\}^{<} \rangle \}.$$

По определению 5 (из-за  $\wedge$ -неразложимости  $r \in R \subset O$ ) индукцией по мощности числа объектов из правой части последнего равенства выводится, что  $\langle \{r\}^{><}, \{r\}^{<} \rangle < x$ . Условие  $\langle \{r\}^{><}, \{r\}^{<} \rangle < x$  равносильно

$$\{r\}^{<} \subset X := \bigcap \{ \{o\}^{<} : o \in O, \{r\}^{<} \subset \{o\}^{<} \}$$

согласно определению 4 и лемме 1. Здесь  $x = \langle X^>, X \rangle$ , тогда  $\{r\}^{><} = X^> \cup \{r\}$ .

В представлении  $w = \bigwedge \{ \langle \{o\}^{><}, \{o\}^{<} \rangle : o \in W \}$  любого элемента  $w \leq r$  по лемме 2 верно включение  $W = \{o \in O : w \leq \langle \{o\}^{><}, \{o\}^{<} \rangle\} \supseteq (X^> \cup \{r\})$ , поэтому  $w = \bigwedge \{ \langle \{o\}^{><}, \{o\}^{<} \rangle : o \in W \} \wedge x$ . Следовательно, удаление строки  $r \in R$  отождествляет  $w$  с  $w^+ = \bigwedge \{ \langle \{o\}^{><}, \{o\}^{<} \rangle : o \in W \setminus \{r\} \} \wedge x$ . В частности,  $\langle \{r\}^{><}, \{r\}^{<} \rangle$  отождествляется с  $\top \wedge x = x$ .

Чтобы полученное отношение эквивалентности оказалось конгруэнтностью, по теореме 3 необходимо обеспечить свойства из леммы 5. Рассмотрим

$$D := X \setminus (\{r\}^{<}) = \{f \in F : f \in X, \neg(rIf)\}.$$

Тогда для

$$y = \langle D^>, D^{><} \rangle = \bigvee \{ \langle \{f\}^>, \{f\}^{><} \rangle : f \in C \} \in L$$

выполняется

$$y \vee \langle \{r\}^{><}, \{r\}^{<} \rangle = x,$$

так как

$$D^> \cap (X^> \cup \{r\}) = D^> \cap X^> = (D \cup X)^> = X^>.$$

По свойству 3 конгруэнций, если  $\langle \{r\}^{><}, \{r\}^{<} \rangle \approx x$ , то должно быть

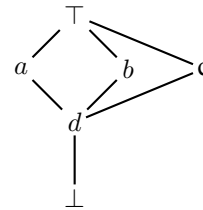
$$\begin{aligned} \langle D^>, D^{><} \rangle &= y \approx y \wedge \langle \{r\}^{><}, \{r\}^{<} \rangle = \\ &= \langle (D \cup \{r\})^{><}, D^{><} \cap \{r\}^{<} \rangle. \end{aligned}$$

Любой  $f \in D$  — это такой  $f \notin \{r\}^{<}$ , что  $f \in X$ . Но  $D \subseteq D^{><}$  влечет  $f \in D^{><}$ ; следовательно, все столбцы из  $D$  должны быть редуцированы. Поэтому расширяем  $C := C \cup D$ , сокращаем  $R := R \setminus \{r\}$  и редуцируем столбец  $r$  в обучающей выборке. Затем удаляются строки-дубликаты, чтобы обеспечить минимальность редуцированной обучающей выборки. После завершения for-цикла будет  $C \neq \emptyset$  и  $R = \emptyset$ , а значит, можно перейти к следующей итерации while-цикла. Там рассуждения аналогичны с заменой столбцов строками, и наоборот.

Так как число строк и столбцов конечно, то процедура останавливается, а совместная индукция по числу while-циклов алгоритма 1 доказывает свойства 3 и 4 из леммы 5. Свойства 1 и 2, очевидно, выполнены, так как алгоритм отождествляет удаляемую строку с непосредственно накрывающим его кандидатом, а удаляемый столбец — с непосредственно накрываемым кандидатом. Тем самым доказано первое утверждение теоремы. Второе утверждение доказывается аналогично.

Немодулярная решетка ниже показывает необходимость ограничиться только признаками, различающими удаляемую строку с накрывающим ее элементом.

**Пример 2.** Рассмотрим решетку



Наименьшая обучающая выборка имеет вид (используем штрихи для признаков):

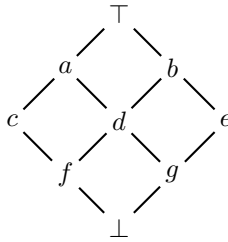
| $\geq$  | $a'$ | $b'$ | $c'$ | $d'$ |
|---------|------|------|------|------|
| $\perp$ | 0    | 0    | 0    | 0    |
| $c$     | 0    | 0    | 1    | 1    |
| $b$     | 0    | 1    | 0    | 1    |
| $a$     | 1    | 0    | 0    | 1    |

В примере 2 конгруэнция с  $a \approx \perp$ , соответствующая удалению строки  $a$ , по свойству 3 должна отождествлять  $d \approx b$  и  $d \approx c$ , по свойству 1  $d \approx \top = (b \vee c)$  и по свойству 2  $d \approx c$ . Алгоритм 1 при удалении строки  $r = a$  вычислит  $X = \{a', b', c', d'\}$ . Тогда  $C = X \setminus (\{r\}^{<}) = \{b', c'\}$ , но  $C^{><} = \{a', b', c', d'\}$ .

Удаление столбцов вынудит удалить также строки  $R = \{c, b\}$ , оставив строку  $\perp$ , тогда как удаление  $C^{><}$  полностью сократит все строки и столбцы, что даст неверный результат.

Перед доказательством теоремы полноты рассмотрим пример, который показывает, что иногда нужно предварительно найти редуцируемые строки (или столбцы).

**Пример 3.** Рассмотрим решетку



Наименьшая обучающая выборка имеет вид (используем штрихи для признаков):

| $\geq$ | $c'$ | $e'$ | $f'$ | $g'$ |
|--------|------|------|------|------|
| $e$    | 0    | 1    | 0    | 1    |
| $c$    | 1    | 0    | 1    | 0    |
| $b$    | 0    | 1    | 1    | 1    |
| $a$    | 1    | 0    | 1    | 1    |

В примере 3 для построения выборки для фактор-решетки по конгруэнции  $a \approx d$  нельзя применить редукцию (нет ни строки  $d$ , ни столбца  $a'$ ). Но строки  $a$  и  $d = a \wedge b$  отличаются в первом столбце, поэтому нужно запустить редукцию с удалением первого столбца. Альтернативно столбцы  $d' = f' \vee g'$  и  $a' = c' \vee d' = c' \vee (f' \vee g')$  отличаются в третьей строке  $b$ , поэтому можно запустить редукцию с удаления третьей строки.

Для примера 3 конгруэнция, порождаемая  $c \approx d$ , также отождествляет  $f = (c \wedge d) \approx (c \vee d) = a$ , поэтому в серии применений алгоритма 1 сначала отождествляем  $a \approx c$ , а потом  $c \approx f$ .

**Теорема 5.** Пусть обучающая выборка  $I \subseteq O \times F$  является наименьшей выборкой для решетки  $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ . Для произвольной конгруэнции  $\approx$  найдется серия множеств редуцируемых столбцов  $C_1 \subset F, \dots, C_k \subset F \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_{k-1})$ , такая что результатом алгоритма 1 на  $C_1, \dots, C_k$  будет наименьшая обучающая выборка для фактор-решетки  $\mathbb{L}/\approx$ . Аналогично для произвольной конгруэнции  $\approx$  найдется такая серия множеств редуцируемых строк  $R_1 \subset O, \dots, R_k \subset O \setminus (R_1 \cup \dots \cup R_{k-1})$ , что результатом алгоритма 1 на  $R_1, \dots, R_k$  будет наименьшая обучающая выборка для фактор-решетки  $\mathbb{L}/\approx$ .

Будем доказывать первое утверждение. Так как пересечение конгруэнций фиксированной решетки тоже является конгруэнцией этой решетки, то

конгруэнции сами образуют собой (даже дистрибутивную) решетку. При этом  $\wedge$ -неприводимые конгруэнции порождаются эквивалентностью одной пары элементов исходной решетки.

Найдем одну такую пару и породим с ее помощью множество  $C_1 \subset F$  редуцируемых столбцов. Для этого рассмотрим произвольную пару кандидатов  $e \approx d$  с  $e \neq d$  исходной конгруэнции. По свойству 2 из леммы 5 верно  $(e \wedge d) \approx (e \vee d)$ . Так как  $e \neq d$  влечет  $(e \wedge d) < (e \vee d)$ , то можно предполагать, что  $e \approx d$  с  $e < d$ . Рассмотрим цепочку накрытий  $(\forall i \neg \exists b[a_i < b < a_{i+1}]) e = a_0 < a_1 < \dots < a_l = d$ . По свойству 1 конгруэнций выполняется  $\forall i[a_i \approx a_{i+1}]$ . Поэтому можно ограничиться случаем  $e \approx d$  и  $\neg \exists b[e < b < d]$ .

Из леммы 2 для  $E = \{o \in O : e \leq \langle \{o\}^{<>}, \{o\}^{<} \rangle\}$  и  $D = \{o \in O : d \leq \langle \{o\}^{<>}, \{o\}^{<} \rangle\}$  получим представления  $e = \bigwedge \{\langle \{o\}^{<>}, \{o\}^{<} \rangle : o \in E\}$  и  $d = \bigwedge \{\langle \{o\}^{<>}, \{o\}^{<} \rangle : o \in D\}$ . Согласно определению 4 и лемме 1 условие  $e < d$  равносильно  $\bigcap \{\{o\}^{<} : o \in E\} \subset \bigcap \{\{o\}^{<} : o \in D\}$ .

Рассмотрим

$$C_1 := \bigcap \{\{o\}^{<} : o \in D\} \setminus \left( \bigcap \{\{o\}^{<} : o \in E\} \right) \neq \emptyset.$$

Тогда для

$$y = \langle C_1^{>}, C_1 \rangle = \bigvee \{\langle \{f\}^{>}, \{f\}^{<} \rangle : f \in C_1\} \in L$$

выполняется  $y \vee e = d$ . По свойству 3 конгруэнций если  $e \approx y \vee e = d$ , то должно быть  $y \approx e \wedge y$ . Рассуждение, аналогичное проведенному в доказательстве теоремы 4, доказывает, что столбцы из  $C_1$  должны быть редуцированы.

После редукции множества  $C_1 \subset F$  повторное применение вышеописанной техники породит такую последовательность  $C_2 \subset F \setminus C_1, \dots, C_k \subset F \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_{k-1})$ , что после окончания редукций никакие пары кандидатов не будут эквивалентны.

Доказательство второго утверждения теоремы проводится дуально с помощью свойства 4 из леммы 5.

Полиномиальность предложенного алгоритма очевидна. Однако пример линейного порядка показывает, что число фактор-решеток может оказаться экспоненциально большим.

## 5 Заключение

Наблюдается растущий интерес [9–11] к исследованию механизмов классификации на основе причинно-следственных связей. Этот подход может обеспечить доверие к результатам классификации [12]. Классическими процедурами порождения причин исследуемого эффекта служит синтез

познавательных процедур ДСМ-метода [3, 4]. Однако эксперименты показывают, что довольно часто при вычислении правдоподобных причин может наблюдаться экспоненциальный взрыв их числа и, как следствие, объема необходимой памяти.

В настоящей работе был представлен алгоритм построения обучающих выборок для фактор-решеток с использованием наименьшей обучающей выборки. Этот подход может быть применен перед алгоритмами ДСМ-метода для уменьшения размера обучающей выборки и, следовательно, требуемой памяти и времени вычислений.

В работе [13] обзревается механизмы выбора признаков для задач классификации. Один из таких механизмов основан на теории информации. Представляется интересным провести детальные экспериментальные исследования применения описанного алгоритма для уменьшения времени вычислений с использованием энтропийного подхода к определению последовательно редуцируемых столбцов (признаков).

Вероятностно-комбинаторный формальный метод обучения [7, 14] значительно реже сталкивается с высокой вычислительной сложностью, тем не менее, например при применении его к обучению с подкреплением для порождения стратегий в игре «Крестики-нолики» [15], число порождаемых кандидатов кажется излишне большим.

## Литература

1. *Ganter B., Wille R.* Formal concept analysis: Mathematical foundations. — 2nd ed. — Cham, Switzerland: Springer, 2024. 370 p. doi: 10.1007/978-3-031-63422-2.
2. *Davey B. A., Priestley H. A.* Introduction to lattices and order. — 2nd ed. — Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2012. 298 p. doi: 10.1017/CBO9780511809088.
3. *Финн В. К.* Индуктивные методы Д. С. Милля в системах искусственного интеллекта. Часть I // Искусственный интеллект и принятие решений, 2010. Вып. 3. С. 3–21. doi: 10.3103/S0147688211060037. EDN: OOVSPR.
4. *Финн В. К.* Индуктивные методы Д. С. Милля в системах искусственного интеллекта. Часть II // Искусственный интеллект и принятие решений, 2010. Вып. 4. С. 14–40. doi: 10.3103/S0147688212050036. EDN: OPGVZD.
5. *Vinogradov D. V.* The nonpolynomiality of the number of similarities for random training sets // Pattern Recognition Image Analysis, 2024. Vol. 34. Iss. 3. P. 570–573. doi: 10.1134/S1054661824700378. EDN: AJOZUQ.
6. *Wille R.* Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts // Ordered sets / Ed. I. Rival. — NATO Advanced Study Institutes ser. — Dordrecht, Netherlands: Springer, 1982. Vol. 83. P. 445–470. doi: 10.1007/978-94-009-7798-3\_15.
7. *Виноградов Д. В.* Алгебраическое машинное обучение: упор на эффективность // Автоматика и телемеханика, 2022. Т. 83. № 6. С. 5–23. doi: 10.31857/S0005231022060022. EDN: ACGDEV.
8. *Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У.* Алгоритмы / Пер. с англ. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2023. 320 с. (*Dasgupta S., Papadimitriou C. H., Vazirani U. V.* Algorithms. — New York, NY: McGraw-Hill, 2006. 336 p. doi: 10.5555/1177299.)
9. *Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Кульченков В. В., Тимонина Е. Е., Шоргин С. Я.* Причинно-следственные связи в задачах классификации // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 43–49. doi: 10.14357/19922264230106. EDN: DTQZPK.
10. *Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Тимонина Е. Е., Шоргин С. Я.* Сложные причинно-следственные связи // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 84–89. doi: 10.14357/19922264230212. EDN: TGXQIW.
11. *Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Смирнов Д. В., Тимонина Е. Е.* Классификация с помощью причинно-следственных связей // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 71–75. doi: 10.14357/19922264230310. EDN: AKWBZD.
12. *Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Писковский В. О., Тимонина Е. Е.* Машинное обучение и доверие к результатам классификации // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 2. С. 63–68. doi: 10.14357/19922264250208. EDN: CXRNKN.
13. *Lamsaf A., Carrilho R., Neves J. C., Proença H.* Causality, machine learning, and feature selection: A survey // Sensors — Basel, 2025. Vol. 25. No. 8. Art 2373. 25 p. doi: 10.3390/s25082373.
14. *Vinogradov D. V.* Minimization of empirical risk as a means of choosing the number of hypotheses in algebraic machine learning // Pattern Recognition Image Analysis, 2023. Vol. 33. No. 3. P. 525–528. doi: 10.1134/S1054661823030458. EDN: AJWVAK.
15. *Виноградов Д. В., Якимова Л. А.* Вероятностный подход к «Доброму старомодному» искусственному интеллекту // Научно-техническая информация. Сер. 2: Информационные процессы и системы, 2024. № 3. С. 21–26. doi: 10.36535/0548-0027-2024-03-4. EDN: CKRSHC.

Поступила в редакцию 11.02.2026

Принята к публикации 15.05.2026

# REDUCTIONS ALGORITHM OF THE SMALLEST TRAINING SAMPLE FOR FACTOR-LATTICE

D. V. Vinogradov

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The paper presents a polynomial-time algorithm (with respect to the size of the initial training sample) for constructing the smallest training set for a factor-lattice of the lattice of candidates for the smallest training sample through a sequence of reductions of this sample. The structure of the smallest training sample is described alongside a proof of its minimality. The proposed algorithm can be useful for consistently reducing the space of features describing training examples so as to preserve the relationships between the elements of the lattice as much as possible. Then, if necessary, it will be possible to return to the original representation and explore the local neighborhood of the element of interest. The construction is based on the well-known characterization of lattice congruences, a simple proof of this fact is also given in the article. The correctness and completeness theorems for the algorithm are proved. The examples are given to demonstrate the subtleties of the application and operation of the algorithm presented in the work.

**Keywords:** lattice; irreducible elements; training sample; candidate; congruence; factor-lattice

**DOI:** 10.14357/19922264260202

**EDN:** QDASLT

## Acknowledgments

The author is grateful to his colleagues at the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences for helpful discussions. Special thanks go to L. A. Yakimova and A. S. Misnik for discussing the proposed algorithm, including its application to reinforcement learning for strategy generation in games with perfect information.

## References

1. Ganter, B., and R. Wille. 2024. *Formal concept analysis: Mathematical foundations*. 2nd ed. Cham, Switzerland: Springer. 370 p. doi: 10.1007/978-3-031-63422-2.
2. Davey, B. A., and H. A. Priestley. 2012. *Introduction to lattices and order*. 2nd ed. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press. 298 p. doi: 10.1017/CBO9780511809088.
3. Finn, V. K. 2011. J. S. Mill’s inductive methods in artificial intelligence systems. Part I. *Scientific Technical Information Processing* 38(6):385–402. doi: 10.3103/S0147688211060037. EDN: PEQWYD.
4. Finn, V. K. 2012. J. S. Mill’s inductive methods in artificial intelligence systems. Part II. *Scientific Technical Information Processing* 39(5):241–260. doi: 10.3103/S0147688212050036. EDN: XZVFBO
5. Vinogradov, D. V. 2024. The nonpolynomiality of the number of similarities for random training sets. *Pattern Recognition Image Analysis* 34(3):570–573. doi: 10.1134/S1054661824700378. EDN: AJOZUQ.
6. Wille, R. 1982. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts. *Ordered sets*. Ed. I. Rival. NATO Advanced Study Institutes ser. Netherlands: Springer. 83:445–470. doi: 10.1007/978-94-009-7798-3\_15.
7. Vinogradov, D. V. 2022. Algebraic machine learning: Emphasis on efficiency. *Automat. Rem. Contr.* 83(6):831–846. doi: 10.1134/S0005117922060029. EDN: BAPXFM.
8. Dasgupta, S., C. H. Papadimitriou, and U. V. Vazirani. 2006. *Algorithms*. New York, NY: McGraw-Hill. 336 p. doi: 10.5555/1177299.
9. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, V. V. Kulchenkov, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2023. Prichinno-sledstvennye svyazi v zadachakh klassifikatsii [Causal relationships in classification problems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(1):43–49. doi: 10.14357/19922264230106. EDN: DTQZPK.
10. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2023. Slozhnye prichinno-sledstvennye svyazi [Complex cause-and-effect relationships]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):84–89. doi: 10.14357/19922264230212. EDN: TGXQIW.
11. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, D. V. Smirnov, and E. E. Timonina. 2023. Klassifikatsiya s pomoshch’yu prichinno-sledstvennykh svyazey [Classification by cause-and-effect relationships]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):71–75. doi: 10.14357/19922264230310. EDN: AKWBZD.
12. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, V. O. Piskovski, and E. E. Timonina. 2025. Mashinnoe obucheniye i doverie k rezul’tatam klassifikatsii [Machine learning and trust in classification results].

- ing and trust in classification results]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(2):63–68. doi: 10.14357/19922264250208. EDN: CXRNNK.
13. Lamsaf, A., R. Carrilho, J. C. Neves, and H. Proença. 2025. Causality, machine learning, and feature selection: A survey. *Sensors — Basel* 25(8):2373. 25 p. doi: 10.3390/s25082373.
14. Vinogradov, D. V. 2023. Minimization of empirical risk as a means of choosing the number of hypotheses in algebraic machine learning. *Pattern Recognition Image Analysis* 33(3):525–528. doi: 10.1134/S1054661823030458. EDN: AJWVAK.
15. Vinogradov, D. V. and L. A. Iakimova. 2024. Probabilistic approach to good old-fashioned artificial intelligence. *Automatic Documentation Mathematical Linguistics* 58(2):135–140. doi: 10.3103/s000510552470002x. EDN: VZATPA.

Received February 11, 2025

Accepted May 15, 2026

## Contributor

**Vinogradov Dmitry V.** (b. 1964) — Doctor of Science in physics and mathematics, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; krrguest@yandex.ru

# ДЕКОДИРОВАНИЕ ВИЗУАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ ИЗ НЕЙРОННЫХ СИГНАЛОВ: РЕКОНСТРУКЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ СОВМЕСТНОГО АНАЛИЗА ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МАГНИТНО-РЕЗОНАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ И ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАФИИ

Д. Д. Дорин<sup>1</sup>, Н. С. Киселев<sup>2</sup>, А. В. Грабовой<sup>3</sup>

**Аннотация:** Реконструкция визуальных стимулов по нейронным сигналам представляет собой фундаментальную задачу нейродекодирования, находящуюся на стыке вычислительной нейронауки и машинного обучения. Несмотря на успехи, достигнутые благодаря применению контрастивного обучения и диффузионных генеративных моделей, большинство существующих подходов ограничены использованием лишь одной модальности: либо функциональной магнитно-резонансной томографии (фМРТ) с высоким пространственным разрешением, либо электроэнцефалографии (ЭЭГ) с высокой временной точностью. Совместное использование этих модальностей остается малоизученным направлением. В данной работе предложена мультимодальная архитектура, одновременно обрабатывающая сигналы фМРТ и ЭЭГ для реконструкции визуальных стимулов. Эмбединги мозговой активности обучаются контрастивно для их сближения с CLIP (Contrastive Language-Image Pretraining) представлениям изображений. Предложенная двухстадийная схема генерации включает синтез промежуточного латентного представления с помощью априорной модели, обученной на совместных фМРТ–ЭЭГ-векторах, и последующее декодирование этого представления предобученной диффузионной моделью, обусловленной CLIP-эмбедингами. Эксперименты на открытом мультимодальном датасете подтверждают эффективность разработанной архитектуры в задаче нейродекодирования. По метрике CLIP-Score мультимодальная модель превосходит одномодальные аналоги, что подчеркивает значимость совместного анализа фМРТ и ЭЭГ для точной реконструкции визуальных стимулов.

**Ключевые слова:** декодирование визуальных стимулов; фМРТ–ЭЭГ; контрастивное обучение; диффузионные модели; реконструкция изображений

**DOI:** 10.14357/19922264260203

**EDN:** MIJPRC

## 1 Введение

Современные достижения в области анализа нейробиологических данных и нейровизуализации существенно расширили возможности разработки интерфейсов мозг–компьютер (ИМК) [1, 2]. Интерфейсы мозг–компьютер представляют собой технологию прямого взаимодействия между нервной системой и внешними устройствами, минуя периферические нервно-мышечные пути [3]. На основе регистрации и декодирования нейробиологических сигналов — в частности, электроэнцефалограммы, магнитоэнцефалограммы и фМРТ — подобные системы позволяют преобразовывать ментальные намерения и когнитивные состояния в управляющие команды для протезов, роботизированных устройств или компьютерных интерфейсов [4–6]. Это особенно актуально для пациентов

с тяжелыми двигательными или коммуникативными нарушениями, поскольку ИМК потенциально восстанавливают их способность к автономному взаимодействию с окружающей средой [7]. В данной работе в рамках ИМК исследуется задача декодирования и реконструкции визуальных стимулов на основе одновременных неинвазивных записей мозговой активности фМРТ и ЭЭГ. Эти методы регистрируют нейробиологические сигналы, которые отражают динамические процессы восприятия визуальных сцен. При этом восприятие определяется не только характеристиками внешнего стимула, но и внутренними когнитивными состояниями, эмоциональными реакциями, а также индивидуальным опытом наблюдателя.

Методы ЭЭГ и фМРТ представляют собой две ключевые нейробиологические модальности, демонстрирующие взаимодополняющие спектры

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), dorin.dd@phystech.edu

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), kiselev.ns@phystech.edu

<sup>3</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет); Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, grabovoy.av@phystech.edu

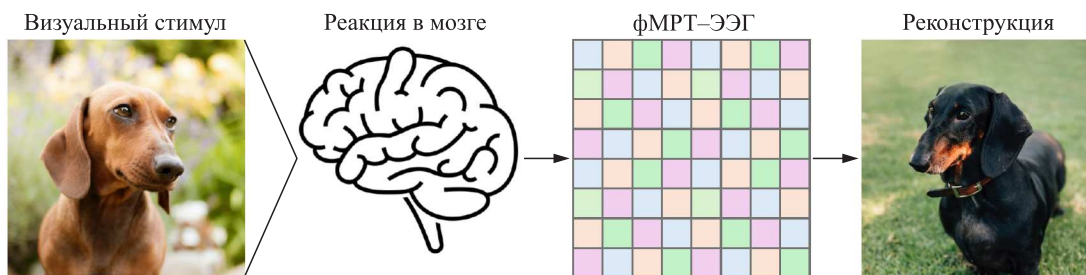
пространственно-временного разрешения. В основе фМРТ лежит регистрация гемодинамического ответа, связанного с нейронной активностью, посредством BOLD-сигнала (*англ.* blood-oxygen-level dependent), который возникает с задержкой 4–8 с [8, 9]. Такая задержка связана с медленным откликом сосудистой системы на потребность мозга в глюкозе [10, 11]. Преимуществом фМРТ является высокое пространственное разрешение, однако временное разрешение сильно ограничено, так как частота сканирования мала [12]. Кроме того, запись фМРТ чувствительна к артефактам, вызванным движениями головы, пульсацией, дыханием и тепловым шумом сканера [13, 14]. В свою очередь, ЭЭГ обеспечивает высокое временное разрешение, позволяя отслеживать динамику нейронных процессов в реальном времени [15]. Однако ее пространственное разрешение ограничено из-за объемной проводимости тканей головы, а качество сигнала дополнительно снижается из-за низкого отношения сигнала к шуму [16] и выраженной межиндивидуальной вариабельности [17, 18]. Одновременная запись ЭЭГ и фМРТ позволяет объединить преимущества обеих модальностей, но требует учета специфики магнитно-резонансной среды: в условиях высокого магнитного поля возникают мощные артефакты — градиентные и кардиобалистические [19, 20]. Для их компенсации необходимы магнитно-резонансно-совместимые системы записи, точная синхронизация временных меток и специализированные методы постобработки [21].

В связи с развитием контрастивного обучения появилась возможность эффективно сопоставлять данные из разных модальностей. Так, в модели CLIP [22] с помощью контрастивной функции потерь, построенной на косинусном расстоянии, удалось обучить совместное латентное пространство для эмбедингов изображений и текстовых описаний. Аналогичный подход был распространен и на другие пары модальностей — при условии подбора соответствующих энкодеров [23, 24]. В области ИМК это привело к появлению методов реконструкции изображений по нейробиологиче-

ским сигналам, в первую очередь по фМРТ или ЭЭГ в отдельности [25, 26]. Основная идея большинства современных моделей заключается в том, чтобы контрастивно приблизить эмбединги мозговой активности к CLIP-эмбедингам изображений. Поскольку CLIP обучался на сопоставлении изображений и текста, его пространство эмбедингов обладает богатой семантической структурой и демонстрирует высокую эффективность в задачах zero-shot (*пер. с англ.* «без примеров»), т. е. на новые данные без дополнительного обучения [22]. Это делает CLIP-эмбединги особенно подходящими для обусловливания генеративных моделей, используемых в реконструкции изображений, предъявленных испытуемому во время записи нейросигналов [26]. Однако существующие подходы опираются лишь на одну модальность. В то же время фМРТ и ЭЭГ демонстрируют фундаментально разные, но взаимодополняющие характеристики: первая обеспечивает высокое пространственное разрешение при низком временном, вторая — наоборот [12, 15]. Их комбинация позволяет компенсировать слабые стороны каждой из модальностей и потенциально повысить качество реконструкции.

В данной работе решается задача реконструкции изображений по одновременно зарегистрированным сигналам фМРТ–ЭЭГ, как проиллюстрировано на рис. 1. До появления недавних мультимодальных наборов данных с визуальными стимулами, таких как [27], обработка ЭЭГ и фМРТ, как правило, проводилась отдельно. Новые датасеты открывают возможность интегрировать оба типа сигналов в единую архитектуру. По аналогии с предшествующими исследованиями в данной работе используется двухэтапный метод декодирования мозговой активности:

- (1) контрастивное выравнивание сигналов фМРТ и ЭЭГ с эмбедингами изображений;
- (2) обусловливание предобученной модели генерации изображений на уточненный априорной моделью эмбединг сигналов мозга.



**Рис. 1** Иллюстрация задачи реконструкции изображений по одновременным сигналам фМРТ–ЭЭГ

Основной же вклад настоящей работы заключается в следующем.

1. Вводится мультимодальная модель, использующая одновременно фМРТ–ЭЭГ-сигналы для реконструкции изображений, просматриваемых пациентом.
2. Предлагается архитектура мультимодальной модели, в которой обучаются три модуля: два энкодера, независимо обрабатывающих наблюдаемые сигналы, и модуль объединения, переводящий их в единое комбинированное представление.
3. Проводится сравнительный анализ исключением модальностей, демонстрирующий необходимость учета обоих сигналов фМРТ и ЭЭГ совместно.

## 2 Сопутствующие работы

Визуальный энкодер — один из ключевых компонентов в рассматриваемой модели, поскольку от его качества напрямую зависит, насколько полно удастся извлечь семантическую информацию из изображения, включая объекты, их позы и контекст сцены. Для многих задач традиционно используются предобученные с учителем энкодеры, среди которых наиболее распространены сверточные архитектуры VGG-19 [28] и ResNet [29], а также Vision Transformer (ViT) [30]. Эти модели обеспечивают устойчивые визуальные эмбединги, однако недавние исследования в области контрастного и самообучения показывают, что такие подходы, как CLIP [22] и DINO [31], построенные на базе ViT, формируют более выразительные и обобщаемые представления по сравнению с моделями, обученными с учителем. Это преимущество подтверждается на широком спектре задач переноса обучения, включая декодирование и реконструкцию изображений по нейросигналам. В рамках предлагаемого подхода в качестве визуального энкодера используется мультимодальная архитектура CLIP [22], что обусловлено ее высокой эффективностью, устойчивостью к доменным сдвигам и богатой семантической структурой латентного пространства.

Наличие высококачественных наборов данных с одновременными записями фМРТ и ЭЭГ при предъявлении визуальных стимулов — необходимое условие для постановки и решения задачи реконструкции изображений по мозговой активности. За последние годы появилось несколько открытых датасетов, включающих совместную регистрацию этих модальностей. Однако большинство доступных наборов либо исключают визуальную стимуляцию, например регистрируют

активность в состоянии покоя или при аудиостимуляции [32, 33], либо содержат разнесенные во времени сессии фМРТ и ЭЭГ [34], либо ориентированы на верификацию технической совместимости методов регистрации, а не на исследование стимул-зависимой нейродинамики [35]. Из доступных на момент написания работы датасетов лишь два обеспечивают одновременную регистрацию при предъявлении визуальных стимулов: датасет Telesford и др. [27] и датасет Wakeman & Henson [36]. Первый содержит записи от 22 участников при просмотре как синтетических стимулов — мерцающего шахматного поля и абстрактных сцен в парадигме Inscapes, так и натуралистических — коротких видеороликов. Второй включает данные 16 участников при выполнении задачи распознавания статичных изображений лиц. В работе рассматривается датасет [27] в качестве основного, поскольку разнообразие стимулов — от контролируемых синтетических до динамических естественных видео — обеспечивает более широкое покрытие визуальных паттернов и способствует обучению обобщаемых моделей реконструкции. Именно на его основе формируются обучающие тройки (фМРТ, ЭЭГ, изображение).

Недавние достижения в области декодирования визуальной информации по сигналам фМРТ продемонстрировали высокое качество реконструкции за счет интеграции контрастного обучения и генеративных моделей [25]. Авторы [37] предлагают двухэтапную модель: на первом этапе данные фМРТ кодируются с помощью регрессии, обучаемой индивидуально для каждого участника, после чего реконструируется грубое изображение с помощью модели VDVAE (very deep variational autoencoder); на втором — изображение уточняется диффузионной моделью, обусловленной как CLIP-эмбедингами исходного изображения, так и его текстовым описанием, что обеспечивает высокую семантическую согласованность реконструкции. В исследовании [38] предложен метод реконструкции видео по временному ряду фМРТ. Используется контрастное обучение и CLIP-эмбединги аналогично предыдущему исследованию. Генерация видео осуществляется с помощью модифицированной диффузионной модели с временным вниманием и обуславливанием на эмбединги фМРТ. В работе [39] предлагается диффузионная априорная модель для уточнения фМРТ-эмбедингов в CLIP-пространстве, устраняющая разрыв между модальностями и повышающая качество декодирования. На основе ЭЭГ также достигнуто сопоставимое качество реконструкции. Основная идея многих работ аналогична: двухэтапная реконструкция — сначала

контрастивно обучаются эмбединги сигналов ЭЭГ к CLIP-эмбедингам изображений, затем используются предобученная генеративная модель для реконструкции [26, 40, 41]. В качестве кодировщиков применяют различные архитектуры: индивидуальные LSTM (long short-term memory) для каждого пациента [41], сверточные сети [40], а также гибридные архитектуры, сочетающие свертки с механизмом внимания [26]. Представленные подходы легли в основу проектирования предлагаемого двухмодального энкодера.

Современные генеративные модели изображений сыграли ключевую роль в продвижении задач визуального декодирования. Наиболее успешными оказались латентно-диффузионные архитектуры, которые работают в компактном скрытом пространстве и допускают гибкое обусловливание на внешние эмбединги [42, 43]. Отдельную линию исследований составляют модели, непосредственно обусловленные на CLIP-эмбединги изображений и/или текста, что позволяет использовать общее семантическое пространство для управления генерацией [22, 44]. В таких подходах CLIP-пространство выступает универсальным интерфейсом между модулями, кодирующими различные модальности, и генератором. В настоящей работе будем следовать этой парадигме: для рекон-

струкции изображений используем предобученную латентно-диффузионную модель SDXL (Stable Diffusion eXtra Large) [45], обусловленную на CLIP-эмбединги через модуль IP-Adapter (Image Prompt Adapter) [45, 46], что позволяет напрямую переносить информацию из комбинированных эмбедингов фМРТ-ЭЭГ в пространство генерации.

### 3 Постановка задачи

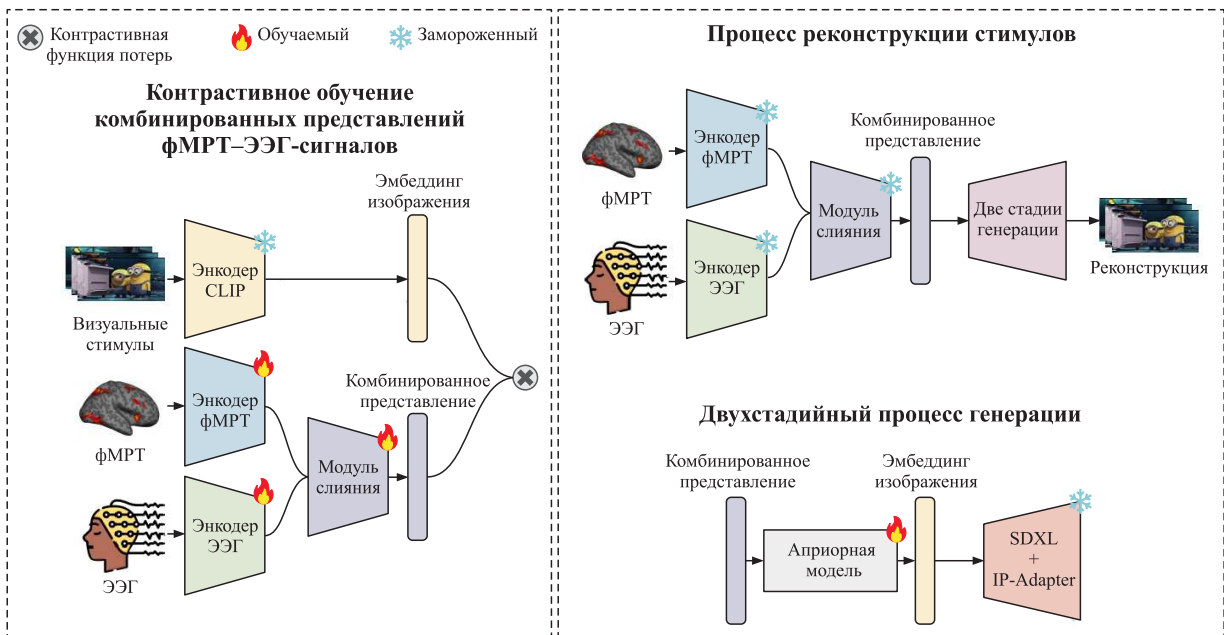
Задан датасет триплетов (фМРТ, ЭЭГ, изображение):

$$\mathfrak{D} = \{(\mathbf{F}_i, \mathbf{E}_i, \mathbf{I}_i) | i = 1, \dots, N\},$$

$$(\mathbf{F}_i, \mathbf{E}_i) \in \mathcal{X}_f \times \mathcal{X}_e, \mathbf{I}_i \in \mathcal{Y}.$$

Здесь  $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{X \times Y \times Z}$  — данные фМРТ с пространственными размерностями  $X, Y$  и  $Z$ ;  $\mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^{K \times T}$  — данные ЭЭГ, где  $K$  — число каналов,  $T$  — длина временного окна;  $\mathbf{I}_i \in \mathbb{R}^{H \times W \times C}$  — изображение с высотой  $H$ , шириной  $W$  и числом каналов  $C$ . Требуется построить отображение  $\mathbf{f}$  из совместного пространства данных фМРТ–ЭЭГ в пространство изображений:

$$\mathbf{f} : \mathcal{X}_e \times \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{Y}.$$



**Рис. 2** Схема декодирования изображений на основе сигналов фМРТ–ЭЭГ. Процесс декодирования реализуется в два этапа. На первом этапе проводится контрастное обучение энкодера сигналов фМРТ–ЭЭГ, в ходе которого представления мозговых сигналов выравниваются с замороженными эмбедингами изображений, полученными с помощью модели CLIP. На втором этапе осуществляется двухстадийная генерация реконструкций: сначала обучается диффузионная априорная модель для уточнения эмбедингов сигналов мозга, а затем предобученная диффузионная модель, обусловленная на CLIP эмбединги, генерирует реконструкции изображений

## 4 Метод

На рис. 2 представлена схема декодирования изображений. Процесс строится из двух основных этапов: контрастивное обучение комбинированных представлений фМРТ–ЭЭГ-сигналов и реконструкция стимулов.

### 4.1 Контрастивное обучение комбинированных сигналов функциональной магнитно-резонансной томографии и электроэнцефалографии

**Энкодер сигналов функциональной магнитно-резонансной томографии и электроэнцефалографии.** Архитектура энкодера состоит из трех модулей: энкодера фМРТ, энкодера ЭЭГ и модуля объединения. Для обеспечения персонализированного представления мозговой активности каждый модуль включает индивидуализирующие компоненты, позволяющие явно моделировать межсубъектные различия — критически важный аспект при работе с нейросигналами. Архитектуры энкодеров фМРТ и ЭЭГ изображены на рис. 3.

Энкодер ЭЭГ интегрирует индивидуальные обучаемые эмбединги пациентов с исходными многоканальными данными посредством конкатенации, формируя единое векторное представление. Архитектура энкодера включает последовательность трех сверточных слоев: одномерную свертку по временному измерению, одномерную

свертку по каналам (пространству) и свертку для сжатия в вектор. Полученный эмбединг пропускается через MLP (multilayer perceptron) голову, формируя итоговое представление. Формально для батча данных ЭЭГ  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{B \times K \times T}$  энкодер  $\mathcal{E}_e$  генерирует эмбединги

$$\mathbf{Z}_e = \mathcal{E}_e(\mathbf{E}) \in \mathbb{R}^{B \times d_e},$$

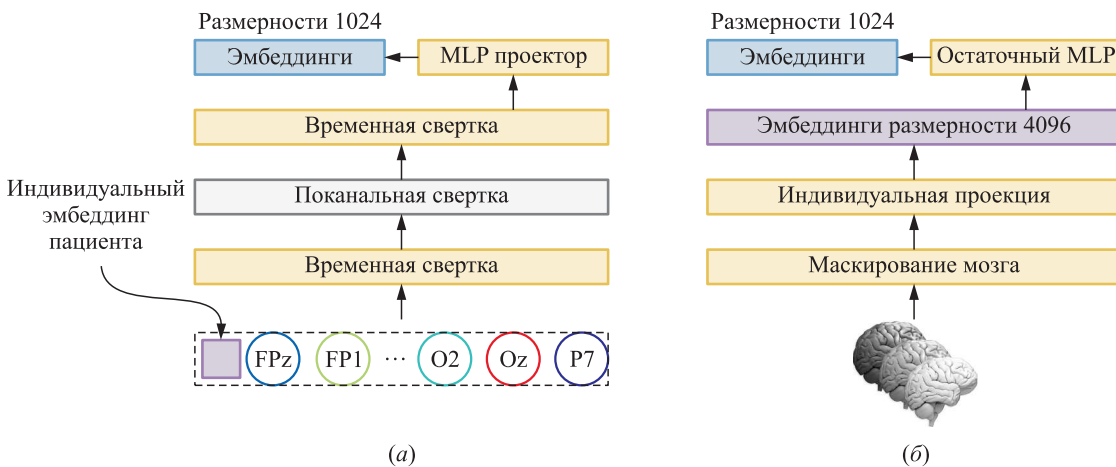
где  $d_e$  — размерность латентного пространства ЭЭГ.

Энкодер фМРТ учитывает индивидуальные особенности пациентов за счет персонализированного маскирования мозга. На первом этапе вычисляется маска, отделяющая релевантные воксели от фона, путем суммирования абсолютных разностей временного ряда фМРТ и применения алгоритма Оцу [47] для автоматического выбора порога. Выделенные воксели векторизуются и проходят через индивидуальный линейный слой, проецирующий признаки в общее латентное пространство размерности 4096. Завершающий этап — обработка эмбедингов через MLP с остаточными соединениями. Для батча данных фМРТ  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{B \times X \times Y \times Z}$  энкодер  $\mathcal{E}_f$  преобразует исходный тензор в латентное представление

$$\mathbf{Z}_f = \mathcal{E}_f(\mathbf{F}) \in \mathbb{R}^{B \times d_f},$$

где  $d_f$  — размерность латентного пространства фМРТ.

Полученные эмбединги  $\mathbf{Z}_e$  и  $\mathbf{Z}_f$  подаются на вход обучаемого модуля объединения  $\mathcal{F}$ , который интегрирует высокочастотную информацию из



**Рис. 3** Архитектуры кодировщиков ЭЭГ (а) и фМРТ (б): (а) энкодер ЭЭГ интегрирует индивидуальные обучаемые эмбединги пациентов с исходными многоканальными данными посредством конкатенации, формируя единое векторное представление; далее применяются одномерные свертки по временному и каналному измерениям, а также MLP-голова для генерации итоговых эмбедингов; (б) энкодер фМРТ включает персонализированное маскирование мозга, векторизацию вокселей и проекцию в латентное пространство через индивидуальный линейный слой. Завершающая обработка осуществляется с использованием MLP с остаточными соединениями

ЭЭГ и пространственно детализированные данные фМРТ, формируя совместные эмбединги

$$\mathbf{Z}_c = \mathcal{F}(\mathbf{Z}_f, \mathbf{Z}_e) \in \mathbb{R}^{B \times d}.$$

В данной работе модуль объединения реализован как конкатенация эмбедингов с последующей обработкой через MLP для извлечения совместных представлений.

**Эмбединги изображений.** Для извлечения визуальных эмбедингов используется предобученная модель CLIP ViT-H/14 [22], которая генерирует эмбединги изображений  $\mathbf{Z}_I \in \mathbb{R}^{B \times d}$ . Данная модель обеспечивает высококачественные, семантически насыщенные и хорошо обобщающиеся эмбединги, а также совместима с множеством генеративных моделей, предобученных на CLIP-пространстве.

**Контрастивное обучение энкодера сигналов мозга.** Основной целью контрастивного обучения ставится сопоставление нейронных представлений фМРТ–ЭЭГ с визуальными эмбедингами, извлеченными с помощью замороженного энкодера

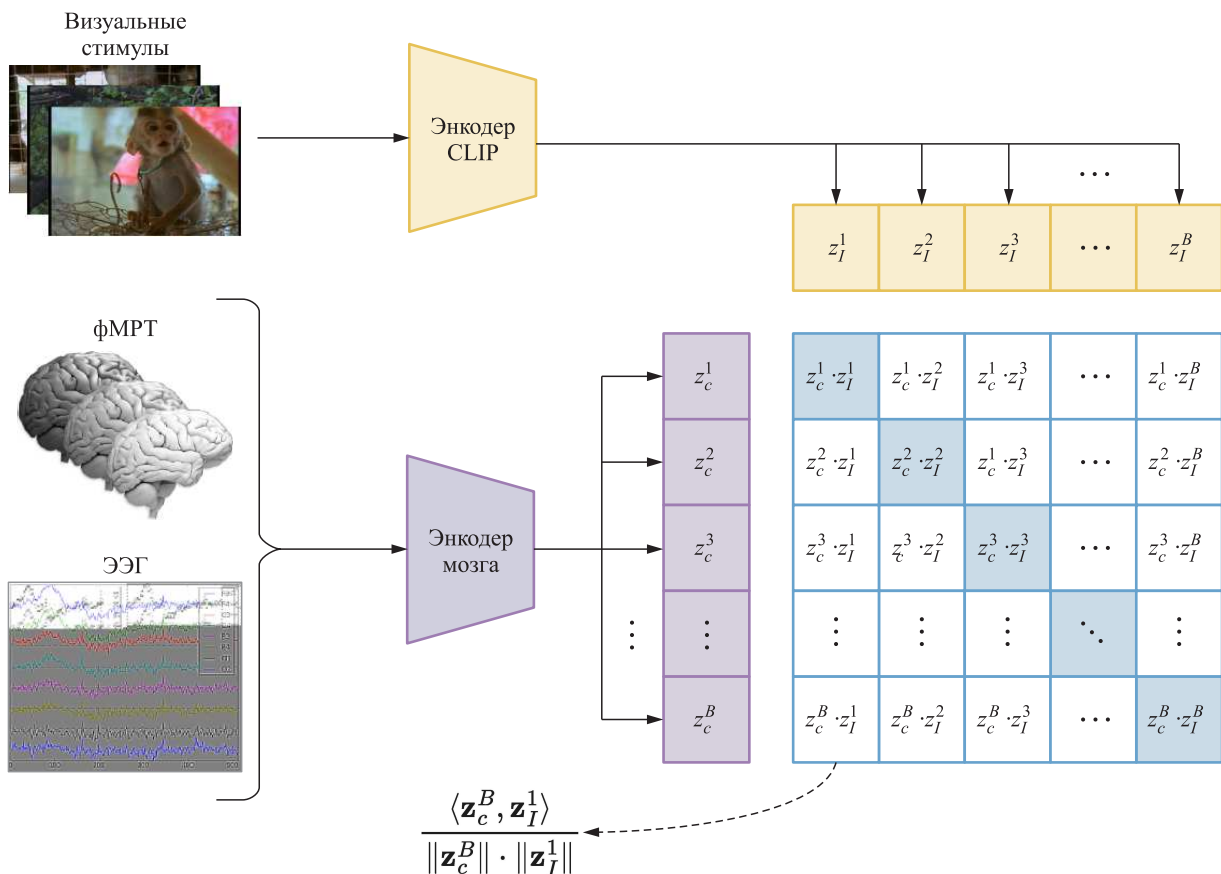
CLIP, как показано на рис. 2. Обучение происходит на триплетах (фМРТ, ЭЭГ, изображение) и включает оптимизацию трех ключевых компонентов: энкодера фМРТ  $\mathcal{E}_f$ , энкодера ЭЭГ  $\mathcal{E}_e$  и модуля объединения  $\mathcal{F}$ . Для вычисления логитов близости используется косинусное расстояние между нормированными эмбедингами:

$$\mathbf{Z}_I^n = \frac{\mathbf{Z}_I}{\|\mathbf{Z}_I\|}, \quad \mathbf{Z}_c^n = \frac{\mathbf{Z}_c}{\|\mathbf{Z}_c\|},$$

где  $\mathbf{Z}_I$  — эмбединги изображений, полученные с помощью замороженного CLIP;  $\mathbf{Z}_c$  — объединенные эмбединги фМРТ–ЭЭГ. Матрица логитов  $\mathbf{L}$  вычисляется как

$$\mathbf{L} = \mathbf{Z}_I^n (\mathbf{Z}_c^n)^\top \cdot e^\tau,$$

где  $\tau$  — обучаемый параметр температуры. В процессе контрастивного обучения рассматриваются все возможные пары «объединенный эмбединг



**Рис. 4** Иллюстрация контрастивного обучения и формирования батчей. Отрицательные примеры формируются автоматически. Косинусные расстояния между эмбедингами замороженного CLIP и нейронными эмбедингами используются в качестве логитов

мозга — эмбединг изображения» для максимизации эффективности обучения. Критическим аспектом данного подхода представляется наличие большого числа негативных примеров, что позволяет модели не только корректно сопоставлять положительные пары, но и четко различать негативные. Как показано на рис. 4, при размере батча  $B$  формируется матрица логитов размером  $B \times B$ , где лишь  $B$  пар, расположенных на главной диагонали, являются положительными соответствиями.

Функция потерь основывается на симметричной контрастивной оптимизации, аналогичной подходу CLIP [22], и представляет собой усредненную сумму двух кросс-энтропийных потерь:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2B} \sum_{b=0}^{B-1} \left[ \log \left( \frac{\exp(\mathbf{L}_{bb})}{\sum_{j=0}^{B-1} \exp(\mathbf{L}_{bj})} \right) + \log \left( \frac{\exp(\mathbf{L}_{bb})}{\sum_{i=0}^{B-1} \exp(\mathbf{L}_{ib})} \right) \right],$$

где  $\mathbf{L}_{ij}$  обозначает элемент матрицы логитов  $\mathbf{L}$  на позиции  $(i, j)$ .

## 4.2 Процесс реконструкции стимулов

Вводится совместное распределение изображений  $\mathbf{x}$  и их скрытых визуальных представлений  $\mathbf{z}_I$  при условии комбинированных нейронных эмбедингов  $\mathbf{z}_c$ :

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}_I | \mathbf{z}_c) = p(\mathbf{z}_I | \mathbf{z}_c) p(\mathbf{x} | \mathbf{z}_I).$$

Здесь  $p(\mathbf{z}_I | \mathbf{z}_c)$  моделирует согласование комбинированного представления фМРТ–ЭЭГ с высокоразмерным визуальным пространством CLIP (стадия I), а  $p(\mathbf{x} | \mathbf{z}_I)$  описывает генерацию изображения при условии уточненного визуального эмбединга (стадия II).

**Стадия I: диффузионная модель в пространстве CLIP.** В пространстве визуальных эмбедингов CLIP обучается легкая диффузионная модель вида  $\epsilon_{\theta}(\mathbf{z}_I^{(t)}, t, \mathbf{z}_c)$ , где  $\mathbf{z}_I^{(t)}$  — зашумленная версия истинного эмбединга  $\mathbf{z}_I$  на шаге  $t$  прямого диффузионного процесса;  $\mathbf{z}_c$  — комбинированный эмбединг, полученный модулем слияния. Обучение осуществляется по методу DDPM (denoising diffusion probabilistic models, вероятностные диффузионные модели расшумления) [48] с функцией потерь

$$\mathcal{L}_{\text{prior}}(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbf{z}_I, \mathbf{z}_c, t, \epsilon} \left\| \epsilon - \epsilon_{\theta}(\mathbf{z}_I^{(t)}, t, \mathbf{z}_c) \right\|_2^2.$$

На этапе исполнения априорная диффузионная модель генерирует оценку  $\hat{\mathbf{z}}_I \approx \mathbf{z}_I$  итеративной процедурой расшумления, согласующей  $\mathbf{z}_c$  с визуальным пространством CLIP. Кодировщики  $\mathcal{E}_f$ ,  $\mathcal{E}_e$  и модуль слияния  $\mathcal{F}$  остаются замороженными, что упрощает схему и стабилизирует обучение.

**Стадия II: генерация изображения при условии  $\hat{\mathbf{z}}_I$ .** Для реконструкции изображения используется предобученная латентно-диффузионная модель SDXL [45]  $\epsilon_{\phi}(\mathbf{x}^{(t)}, t, h(\hat{\mathbf{z}}_I))$ , где  $\mathbf{x}^{(t)}$  — зашумленный латент изображения;  $h(\cdot)$  — проекционный адаптер IP-Adapter [46], переводящий  $\hat{\mathbf{z}}_I$  в формат условия, совместимый с SDXL. Модель  $\phi$  не дообучается.

### Итоговый процесс реконструкции

1. Контрастивное обучение выравнивает  $\mathbf{z}_c$  с  $\mathbf{z}_I$  (см. разд. 4.1).
2. Априорная диффузионная модель генерирует согласованное визуальное представление  $\hat{\mathbf{z}}_I$  по  $\mathbf{z}_c$ .
3. Предобученная SDXL, обусловленная через  $h(\hat{\mathbf{z}}_I)$ , синтезирует изображение  $\hat{\mathbf{x}}$ .

## 5 Вычислительный эксперимент

### 5.1 Данные

В работе используется открытый датасет с одновременной регистрацией фМРТ и ЭЭГ при предъявлении визуальных стимулов [27]. Данные собраны у 22 здоровых участников в возрасте от 23 до 51 года в ходе двух сканирований. Эксперимент включает записи в состоянии покоя, при просмотре мерцающего шахматного поля, абстрактной анимации Inscapes — компьютерно сгенерированной последовательности трехмерных фигур с плавными переходами, а также коротких видеороликов, представляющих натуралистические стимулы: фрагменты мультфильмов The Present и Despicable Me, а также фрагменты фильмов с обезьянами. Все визуальные стимулы демонстрируются в естественном, натуралистическом формате, что способствует высокой межсубъектной корреляции и устойчивости нейронных откликов. Синхронизация ЭЭГ и фМРТ достигается через запись триггеров сканера в ЭЭГ-поток. Предобработка ЭЭГ включает удаление градиентных и кардиобаллистических артефактов, полосовую фильтрацию и усредненное реферирование. Для фМРТ применяется стандартная коррекция движения, сглаживание и нормализация. Параметры регистрации приведены в табл. 1.

Таблица 1 Описание оборудования и основные параметры нейросигналов

| Модальность | Оборудование               | Частота дискретизации, Гц | Каналы                        |
|-------------|----------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| ЭЭГ         | Brain Products BrainCap MR | 5000                      | 61 кортикальный электрод      |
| фМРТ        | Siemens 3.0 T TIM Trio     | 0,476                     | 12-канальная головная катушка |

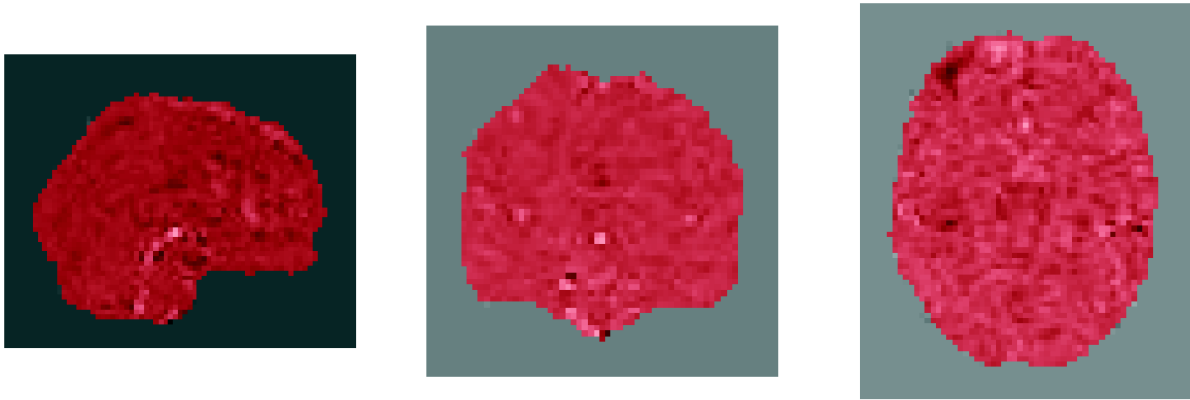


Рис. 5 Для снижения размерности данных фМРТ применяются маски головного мозга, исключающие фоновые воксели, не несущие информации о визуальном стимуле. Маски формируются на основе анализа наиболее изменчивых вокселей в ответ на стимуляцию. Воксели, включенные в маску, выделены красным цветом

Для обучения моделей данные преобразуются в триплеты (фМРТ, ЭЭГ, изображение). Чтобы снизить размерность фМРТ и убрать фоновые воксели, для каждого участника строится индивидуальная маска мозга: вычисляется суммарное абсолютное изменение сигнала во времени по каждому вокселю и к полученному тензору применяется метод Оцу [47] для автоматического выбора порога. Результат — бинарная маска мозга, отделяющая воксели мозга от фона. Пример применения маски мозга на срезы снимка фМРТ показан на рис. 5.

5.2 Параметры энкодеров

В экспериментах использовались две специализированные архитектуры, адаптированные под особенности каждой модальности. Энкодер fMRI начинается с персонализированной линейной проекции: для каждого участника воксели, отобранные с помощью индивидуальной бинарной маски, проецируются в пространство размерности 4096 обучаемым линейным слоем. За этим следует остаточный многослойный перцептрон, состоящий из трех полносвязных преобразований: первый расширяет представление до 2048, второй сохраняет эту размерность, а третий сжимает до 1024. Между слоями применяются нелинейность GELU (Gaussian error linear unit) и нормализация по слою (LayerNorm); к выходу каждого блока добавляется остаточное соединение от входа. Dropout во всех слоях установлен равным 0,1.

Для обработки ЭЭГ-сигналов применялся компактный энкодер. Входные данные имеют размер  $61 \times 525$ , где 60 каналов соответствуют кортикальным электродам, а один дополнительный канал — обучаемому эмбедингу участника. Архитектура включает три последовательных сверточных слоя: временную свертку с размером ядра (1, 32) и 256 фильтрами, пространственную свертку с ядром (61, 1) и 512 фильтрами и глобальную свертку с ядром (1, 525) и 1024 фильтрами. После сверток следует MLP-проектор, реализующий преобразование  $1024 \rightarrow 2048 \rightarrow 1024$  с нелинейностью GELU и LayerNorm. Dropout во всех сверточных и проекционных слоях равен 0,1. Выходной эмбединг имеет размерность 1024, что обеспечивает совместимость с модулем слияния и CLIP-пространством.

Модуль объединения эмбедингов фМРТ и ЭЭГ реализован как двухслойный MLP: первый слой расширяет конкатенированное представление (размерность 2048) до 4096; второй сжимает его обратно до целевой размерности 1024. Активация — GELU, dropout — 0,1. Выходной эмбединг совместим с CLIP-пространством и используется как условие при генерации изображений.

5.3 Результаты экспериментов

Для верификации эффективности предложенного подхода проведены два эксперимента: визуальный анализ изображений-реконструкций и количественная оценка через CLIP-Score.



**Рис. 6** Примеры реконструкции изображений по сигналам фМРТ–ЭЭГ: (а) оригинальное изображение; (б) реконструкция из CLIP-эмбединга оригинального изображения с помощью предобученной SDXL (предельное качество реконструкции); (в) реконструкция предложенным методом без диффузионной априорной модели; (г) реконструкция предложенным методом с диффузионной априорной моделью. Применение априорной модели повышает семантическую согласованность реконструированных изображений с исходными стимулами

В первом эксперименте выполнено сравнение реконструкций, полученных с диффузионной априорной моделью и без нее. Примеры приведены на рис. 6.

Во втором эксперименте проводится количественная оценка с использованием метрики CLIP-Score — косинусной близости между CLIP-эмбедингом реконструированного изображения  $\mathbf{z}_I$  и комбинированным представлением мозговой активности  $\mathbf{z}_c$ :

$$\text{CLIP-Score}(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_I) = \frac{\langle \mathbf{z}_c, \mathbf{z}_I \rangle}{\|\mathbf{z}_c\| \cdot \|\mathbf{z}_I\|}.$$

Метрики вычислялись на тестовой выборке датасета [27], использовались данные из видеостимулов monkey1, monkey2 и monkey5. Усреднение проводилось по участникам и объектам. Для получения результатов в табл. 2 были использованы следующие конфигурации моделей:

- **ЭЭГ** — используется только энкодер ЭЭГ  $\mathcal{E}_e$ , модуль объединения отключен, эмбединг  $\mathbf{Z}_e$

напрямую используется для реконструкции без априорной модели;

- **фМРТ** — используется только энкодер фМРТ  $\mathcal{E}_f$ , модуль объединения отключен, эмбединг  $\mathbf{Z}_f$  напрямую используется для реконструкции без априорной модели;
- **фМРТ–ЭЭГ** — используются оба энкодера  $\mathcal{E}_e$  и  $\mathcal{E}_f$  с модулем объединения  $\mathcal{F}$ , формирующим комбинированный эмбединг  $\mathbf{Z}_c$  без априорной модели;
- **ЭЭГ & Diffusion Prior** — используется энкодер ЭЭГ с последующей априорной диффузионной моделью для уточнения эмбединга перед генерацией;
- **фМРТ & Diffusion Prior** — используется энкодер фМРТ с последующей априорной диффузионной моделью для уточнения эмбединга перед генерацией;
- **фМРТ–ЭЭГ & Diffusion Prior** — используется полная архитектура с обоими энкодерами, мо-

**Таблица 2** Сравнение CLIP-Score для различных конфигураций модели на трех видеостимулах из набора данных. Проведено усреднение по всем 22 испытуемым, нижним регистром указаны среднеквадратичные отклонения. Наилучшие результаты выделены жирным шрифтом

| Модель                     | Название видеостимула    |                          |                          |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
|                            | monkey1                  | monkey2                  | monkey5                  |
| ЭЭГ                        | 0,231 $\pm$ 0,004        | 0,262 $\pm$ 0,004        | 0,224 $\pm$ 0,005        |
| фМРТ                       | 0,254 $\pm$ 0,004        | 0,270 $\pm$ 0,003        | 0,242 $\pm$ 0,003        |
| фМРТ–ЭЭГ                   | 0,310 $\pm$ 0,003        | 0,312 $\pm$ 0,004        | 0,284 $\pm$ 0,003        |
| ЭЭГ & Diffusion Prior      | 0,542 $\pm$ 0,005        | 0,557 $\pm$ 0,003        | 0,538 $\pm$ 0,003        |
| фМРТ & Diffusion Prior     | 0,564 $\pm$ 0,005        | 0,571 $\pm$ 0,004        | 0,551 $\pm$ 0,005        |
| фМРТ–ЭЭГ & Diffusion Prior | <b>0,668</b> $\pm$ 0,003 | <b>0,647</b> $\pm$ 0,005 | <b>0,644</b> $\pm$ 0,003 |

дулем объединения и априорной диффузионной моделью.

Полученные результаты показывают, что использование одной модальности дает худшие показатели по сравнению с комбинированной моделью на основе фМРТ и ЭЭГ. Более того, интеграция диффузионной априорной модели существенно повышает CLIP-Score для всех конфигураций, а наилучшее качество достигается при совместном использовании фМРТ, ЭЭГ и диффузионной априорной модели. Это подтверждает тот факт, что мультимодальность компенсирует фундаментальные ограничения отдельных методов регистрации, а двухстадийная генерация критически важна для семантической точности реконструкции.

5.4 Ограничения метода и обсуждение

Важно отметить ограничения, связанные с использованием CLIP-пространства в качестве промежуточного представления. Поскольку CLIP обучался на сопоставлении изображений и текстовых описаний, его эмбединги кодируют преимущественно семантическую информацию высокого уровня — объекты, их взаимосвязи, общий контекст сцены, но не сохраняют детальную информацию о низкоуровневых визуальных характеристиках, таких как точные текстуры, локальные паттерны или пиксельные детали. Следовательно, предложенный метод реконструкции ориентирован на семантическую согласованность реконструированных изображений с исходными стимулами, а не на точное пиксельное восстановление низкоуровневых визуальных деталей. Это ограничение является фундаментальным следствием выбора CLIP в качестве промежуточного представления и разделяется всеми подходами, основанными на CLIP-эмбедингах [25, 26, 39].

Экспериментальная проверка метода выполнена на одном публичном датасете [27], и оценка ка-

чества реконструкции основана преимущественно на метрике CLIP-Score. Хотя полученные результаты демонстрируют эффективность предложенного подхода, важно явно обозначить границы применимости метода. Результаты, представленные в данной работе, получены на данных здоровых участников при просмотре видеостимулов определенного типа (мультфильмы и фильмы с обезьянами). Переносимость полученных результатов на другие типы визуальных стимулов (например, статичные изображения, абстрактные паттерны, текстовые стимулы) или условия регистрации (например, другие параметры сканирования, различные системы записи ЭЭГ) требует дополнительной валидации. Кроме того, метод может демонстрировать разную эффективность для участников с различными индивидуальными особенностями нейронной активности или патологиями. Расширение экспериментальной части за счет дополнительных сценариев или альтернативных метрик могло бы усилить обоснованность сделанных выводов, хотя в текущем виде эксперименты достаточны для подтверждения заявленных результатов в рамках использованного датасета.

6 Заключение

В работе предложена мультимодальная архитектура реконструкции изображений по одновременным сигналам фМРТ–ЭЭГ, основанная на контрастивном выравнивании комбинированных эмбедингов мозговой активности с CLIP-пространством и двухстадийной генерации через априорную диффузионную модель и предобученную SDXL. Эксперименты показывают, что использование обеих модальностей совместно превосходит одномодальные варианты по метрике CLIP-Score, а применение априорной модели дополнительно повышает согласованность реконструкций, под-

тверждая эффективность интеграции пространственной и временной информации мозговой активности для точного нейродекодирования.

## Литература

1. Wolpaw J. R., Birbaumer N., Heetderks W. J., McFarland D. J., Peckham P. H., Schalk G., Donchin E., Quatrano L. A., Robinson C. J., Vaughan T. M. Brain–computer interface technology: A review of the first international meeting // *IEEE T. Rehabil. Eng.*, 2000. Vol. 8. No. 2. P. 164–173. doi: 10.1109/TRE.2000.847807.
2. Makeig S., Debener S., Onton J., Delorme A. Mining event-related brain dynamics // *Trends Cogn. Sci.*, 2004. Vol. 8. No. 5. P. 204–210. doi: 10.1016/j.tics.2004.03.008.
3. Wolpaw J. R., Birbaumer N., McFarland D. J., Pfurtscheller G., Vaughan T. M. Brain–computer interfaces for communication and control // *Clin. Neurophysiol.*, 2002. Vol. 113. P. 767–791. doi: 10.1016/S1388-2457(02)00057-3.
4. Song Y., Wu W., Lin C., Lin G., Li G., Xie L. Assistive mobile robot with shared control of brain–machine interface and computer vision // 4th Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference Proceedings. — IEEE, 2020. Vol. 1. P. 405–409. doi: 10.1109/ITNEC48623.2020.9085096.
5. Cruz A., Pires G., Lopes A., Carona C., Nunes U. J. A self-paced BCI with a collaborative controller for highly reliable wheelchair driving: Experimental tests with physically disabled individuals // *IEEE T. Hum.-Mach. Syst.*, 2021. Vol. 51. No. 2. P. 109–119. doi: 10.1109/THMS.2020.3047597.
6. Дорин Д. Д., Грабовой А. В., Стрижов В. В. Улучшение декодирования данных ФМРТ с использованием пространственно-временных характеристик в условиях ограниченного набора данных // Докл. Акад. наук. Математика, информатика, процессы управления, 2025. Т. 527. № 5. С. 11–30. doi: 10.7868/S2686954325070021. EDN: JKVVTX.
7. Schwarz A., Höller M. K., Pereira J., Ofner P., Müller-Putz G. R. Decoding hand movements from human EEG to control a robotic arm in a simulation environment // *J. Neural Eng.*, 2020. Vol. 17. No. 3. Art. 036010. 24 p. doi: 10.1088/1741-2552/ab882e.
8. Bandettini P. A., Wong E. C., Hinks R. S., Tikofsky R. S., Hyde J. S. Time course EPI of human brain function during task activation // *Magn. Reson. Med.*, 1992. Vol. 25. No. 2. P. 390–397. doi: 10.1002/mrm.1910250220.
9. Dorin D., Kiselev N., Grabovoy A., Strijov V. Forecasting fMRI images from video sequences: Linear model analysis // *Health Information Science Systems*, 2024. Vol. 12. No. 1. Art. 55. 11 p. doi: 10.1007/s13755-024-00315-5. EDN: TJNNHV.
10. Ogawa S., Lee T. M., Kay A. R., Tank D. W. Brain magnetic resonance imaging with contrast dependent on blood oxygenation // *P. Natl. Acad. Sci. USA*, 1990. Vol. 87. No. 24. P. 9868–9872. doi: 10.1073/pnas.87.24.9868.
11. Logothetis N. K. The underpinnings of the BOLD functional magnetic resonance imaging signal // *J. Neurosci.*, 2003. Vol. 23. No. 10. P. 3963–3971. doi: 10.1523/jneurosci.23-10-03963.2003.
12. Glover G. H. Overview of functional magnetic resonance imaging // *Neurosurg. Clin. N. Am.*, 2011. Vol. 22. No. 2. P. 133–139. doi: 10.1016/j.nec.2010.11.001.
13. Menon R. S., Kim S.-G. Spatial and temporal limits in cognitive neuroimaging with fMRI // *Trends Cogn. Sci.*, 1999. Vol. 3. No. 6. P. 207–216. doi: 10.1016/s1364-6613(99)01329-7.
14. Logothetis N. K. What we can do and what we cannot do with fMRI // *Nature*, 2008. Vol. 453. No. 7197. P. 869–878. doi: 10.1038/nature06976.
15. Srinivasan R. Methods to improve the spatial resolution of EEG // *Int. J. Bioelectromagnetism*, 1999. Vol. 1. No. 1. P. 102–111.
16. Schlögl A., Slater M., Pfurtscheller G. Presence research and EEG // 5th Annual Workshop (International) on Presence Proceedings. — ISPR, 2002. Vol. 1. P. 9–11.
17. Morioka H., Kanemura A., Hirayama J., Shikauchi M., Ogawa T., Ikeda S., Kawanabe M., Ishii S. Learning a common dictionary for subject-transfer decoding with resting calibration // *NeuroImage*, 2015. Vol. 111. P. 167–178. doi: 10.1016/j.neuroimage.2015.02.015.
18. Jayaram V., Alamgir M., Altun Y., Schölkopf B., Grosse-Wentrup M. Transfer learning in brain-computer interfaces // *IEEE Comput. Intell. M.*, 2016. Vol. 11. No. 1. P. 20–31. doi: 10.1109/MCI.2015.2501545.
19. Niazy R. K., Beckmann C. F., Iannetti G. D., Brady J. M., Smith S. M. Removal of FMRI environment artifacts from EEG data using optimal basis sets // *NeuroImage*, 2005. Vol. 28. No. 3. P. 720–737. doi: 10.1016/j.neuroimage.2005.06.067.
20. Ritter P., Villringer A. Simultaneous EEG–fMRI // *Neurosci. Biobehav. R.*, 2006. Vol. 30. No. 6. P. 823–838. doi: 10.1016/j.neubiorev.2006.06.008.
21. Huster R. J., Debener S., Eichele T., Herrmann C. S. Methods for simultaneous EEG–fMRI: An introductory review // *J. Neurosci.*, 2012. Vol. 32. No. 18. P. 6053–6060. doi: 10.1523/JNEUROSCI.0447-12.2012.
22. Radford A., Kim J. W., Hallacy C., et al. Learning transferable visual models from natural language supervision // Conference (International) on Machine Learning Proceedings. — New York, NY, USA: PMLR, 2021. P. 8748–8763.
23. Hu T., Xiang X., Qin J., Tan Y. Audio-text retrieval based on contrastive learning and collaborative attention mechanism // *Multimedia Systems*, 2023. Vol. 29. No. 6. P. 3625–3638. doi: 10.1007/s00530-023-01144-4.
24. Wang Z., Zhao Y., Huang H., Liu J., Yin A., Tang L., Li L., Wang Y., Zhang Z., Zhao Z. Connecting multi-modal contrastive representations // *Adv. Neur. In.*, 2023. Vol. 36. P. 22099–22114. doi: 10.52202/075280-0970.
25. Huang S., Shao W., Wang M.-L., Zhang D.-Q. fMRI-based decoding of visual information from human brain activity: A brief review // *Int. J. Automation Computing*, 2021. Vol. 18. No. 2. P. 170–184. doi: 10.1007/s11633-020-1263-y.
26. Li D., Wei C., Li S., Zou J., Liu Q. Visual decoding and reconstruction via EEG embeddings with guided diffu-

- sion // Adv. Neur. In., 2024. Vol. 37. P. 102822–102864. doi: 10.52202/079017-3266.
27. Telesford Q. K., Gonzalez-Moreira E., Xu T., Tian Y., Colcombe S. J., Cloud J., Russ B. E., Falchier A., Nentwich M., Madsen J., Parra L. C., Schroeder C. E., Milham M. P., Franco A. R. An open-access dataset of naturalistic viewing using simultaneous EEG–fMRI // Scientific Data, 2023. Vol. 10. No. 1. Art. 554. 13 p. doi: 10.1038/s41597-023-02458-8.
28. Simonyan K., Zisserman A. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition. — Cornell University, 2014. 14 p. arXiv:1409.1556 [cs.CV].
29. He K., Zhang X., Ren S., Sun J. Deep residual learning for image recognition // Proc. CVPR IEEE, 2016. P. 770–778. doi: 10.1109/CVPR.2016.90.
30. Dosovitskiy A., Beyer L., Kolesnikov A., Weissenborn D., Zhai X., Unterthiner T., Dehghani M., Minderer M., Heigold G., Gelly S., Uszkoreit J., Houtsby N. An image is worth  $16 \times 16$  words: Transformers for image recognition at scale // 9th Conference (International) on Learning Representations Proceedings. — Amherst, MA, USA: OpenReview.net, 2021.
31. Caron M., Touvron H., Misra I., Jégou H., Mairal J., Bojanowski P., Joulin A. Emerging properties in self-supervised vision transformers // IEEE/CVF Conference (International) on Computer Vision Proceedings. — IEEE, 2021. P. 9650–9660. doi: 10.1109/ICCV48922.2021.00951.
32. Gu Y., Sainburg L. E., Han F., Liu X. Simultaneous EEG and functional MRI data during rest and sleep from humans // Data Brief, 2023. Vol. 48. Art. 109059. 5 p. doi: 10.1016/j.dib.2023.109059.
33. Momenian M., Ma Z., Wu S., Wang C., Brennan J., Hale J., Meyer L., Li J. Le Petit Prince Hong Kong (LPPHK): Naturalistic fMRI and EEG data from older Cantonese speakers // Scientific Data, 2024. Vol. 11. No. 1. Art. 992. 12 p. doi: 10.1038/s41597-024-03745-8.
34. Berezutskaya J., Vansteensel M. J., Aarnoutse E. J., Freudenburg Z. V., Piantoni G., Branco M. P., Ramsey N. F. Open multimodal iEEG–fMRI dataset from naturalistic stimulation with a short audiovisual film // Scientific Data, 2022. Vol. 9. No. 1. Art. 91. 13 p. doi: 10.1038/s41597-022-01173-0.
35. Gallego-Rudolf J., Corsi-Cabrera M., Concha L., Ricardo-Garcell J., Pasaye-Alcaraz E. Simultaneous and independent electroencephalography and magnetic resonance imaging: A multimodal neuroimaging dataset // Data Brief, 2023. Vol. 51. Art. 109661. 11 p. doi: 10.1016/j.dib.2023.109661.
36. Wakeman D. G., Henson R. N. A multi-subject, multimodal human neuroimaging dataset // Scientific Data, 2015. Vol. 2. No. 1. Art. 150001. 10 p. doi: 10.1038/sdata.2015.1.
37. Ozcelik F., VanRullen R. Natural scene reconstruction from fMRI signals using generative latent diffusion // Sci. Rep. — U.K., 2023. Vol. 13. No. 1. Art. 15666. 15 p. doi: 10.1038/s41598-023-42891-8.
38. Chen Z., Qing J., Zhou J. H. Cinematic mindscapes: High-quality video reconstruction from brain activity // Adv. Neur. In., 2023. Vol. 36. P. 24841–24858.
39. Scotti P., Banerjee A., Goode J., et al. Reconstructing the Mind’s Eye: fMRI-to-image with contrastive learning and diffusion priors // Adv. Neur. In., 2023. Vol. 36. P. 24705–24728.
40. Mishra R., Sharma K., Jha R. R., Bhavsar A. NeuroGAN: Image reconstruction from EEG signals via an attention-based GAN // Neural Computing Applications, 2023. Vol. 35. P. 9181–9192. doi: 10.1007/s00521-022-08178-1.
41. Singh P., Pandey P., Miyapuram K., Raman S. EEG2IMAGE: Image reconstruction from EEG brain signals // Conference (International) on Acoustics, Speech and Signal Processing Proceedings. — IEEE, 2023. Art. 10096587. 5 p. doi: 10.1109/ICASSP49357.2023.10096587.
42. Esser P., Rombach R., Ommer B. Taming transformers for high-resolution image synthesis // IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Proceedings. — IEEE, 2021. P. 12868–12878. doi: 10.1109/CVPR46437.2021.01268.
43. Hatamizadeh A., Song J., Liu G., Kautz J., Vahdat A. DiffT: Diffusion vision transformers for image generation // Computer vision / Eds. A. Leonardis, S. Ricci, S. Roth, O. Russakovsky, T. Sattler, G. Varol. — Lecture notes in computer science ser. — Cham: Springer, 2025. Vol. 15066. P. 37–55. doi: 10.1007/978-3-031-73242-3\_3.
44. Crowson K., Biderman S., Kornis D., Stander D., Hal-lahan E., Castricato L., Raff E. VQGAN–CLIP: Open domain image generation and editing with natural language guidance // Computer vision / Eds. S. Avidan, G. J. Brostow, M. Cisse, G. M. Farinella, T. Hassner. — Lecture notes in computer science ser. — Cham: Springer, 2022. Vol. 13697. P. 88–105. doi: 10.1007/978-3-031-19836-6\_6.
45. Podell D., English Z., Lacey K., Blattmann A., Dockhorn T., Müller J., Penna J., Rombach R. SDXL: Improving latent diffusion models for high-resolution image synthesis // Conference (International) on Learning Representations Proceedings. — Amherst, MA, USA: OpenReview.net, 2024. P. 1862–1874.
46. Ye H., Zhang J., Liu S., Han X., Yang W. IP-Adapter: Text compatible image prompt adapter for text-to-image diffusion models. — Cornell University, 2023. 16 p. arXiv:2308.06721 [cs.CV].
47. Otsu N. A threshold selection method from gray-level histograms // IEEE T. Sys. Man Cyb., 1979. Vol. 9. Iss. 1. P. 62–66. doi: 10.1109/TSMC.1979.4310076.
48. Ho J., Jain A., Abbeel P. Denoising diffusion probabilistic models. — Cornell University, 2020. 25 p. arXiv: 2006.11239 [cs.LG].

Поступила в редакцию 26.11.2025

Принята к публикации 15.05.2026

# DECODING VISUAL INFORMATION FROM NEURAL SIGNALS: IMAGE RECONSTRUCTION BASED ON JOINT FUNCTIONAL MAGNETIC RESONANCE IMAGING AND ELECTROENCEPHALOGRAPHY ANALYSIS

D. D. Dorin<sup>1</sup>, N. S. Kiselev<sup>1</sup>, and A. V. Grabovoy<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141701, Russian Federation

<sup>2</sup>V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya Str., Moscow 117997, Russian Federation

**Abstract:** Reconstructing visual stimuli from neural signals is a fundamental challenge in neurodecoding, lying at the intersection of computational neuroscience and modern machine learning. Despite recent advances achieved using contrastive representations and diffusion-based generative models, most existing approaches are limited to a single neuroimaging modality — either functional magnetic resonance imaging (fMRI) with high spatial resolution, or electroencephalography (EEG) with high temporal resolution. The integration of both modalities remains a largely unexplored area. In this work, a multimodal architecture is proposed that jointly processes fMRI and EEG signals to reconstruct visual stimuli. Brain activity embeddings are trained contrastively to align with CLIP image embeddings. The proposed two-stage generation pipeline comprises synthesis of an intermediate latent representation via a prior model trained on joint fMRI–EEG vectors, followed by decoding this representation using a pretrained diffusion model conditioned on CLIP embeddings. Experiments on a publicly available multimodal dataset demonstrate the efficacy of the proposed architecture for neural decoding. Quantitatively, the multimodal model surpasses unimodal baselines in terms of CLIP-Score, underscoring the importance of jointly leveraging fMRI and EEG signals for accurate visual stimulus reconstruction.

**Keywords:** visual stimulus decoding; fMRI–EEG; contrastive learning; diffusion models; image reconstruction

**DOI:** 10.14357/19922264260203

**EDN:** MIJPRC

## References

1. Wolpaw, J. R., N. Birbaumer, W. J. Heetderks, D. J. McFarland, P. H. Peckham, G. Schalk, E. Donchin, L. A. Quatrano, C. J. Robinson, and T. M. Vaughan. 2000. Brain–computer interface technology: A review of the first international meeting. *IEEE T. Rehabil. Eng.* 8(2):164–173. doi: 10.1109/TRE.2000.847807.
2. Makeig, S., S. Debener, J. Onton, and A. Delorme. 2004. Mining event-related brain dynamics. *Trends Cogn. Sci.* 8(5):204–210. doi: 10.1016/j.tics.2004.03.008.
3. Wolpaw, J. R., N. Birbaumer, D. J. McFarland, G. Pfurtscheller, and T. M. Vaughan. 2002. Brain–computer interfaces for communication and control. *Clin. Neurophysiol.* 113(6):767–791. doi: 10.1016/S1388-2457(02)00057-3.
4. Song, Y., W. Wu, C. Lin, G. Lin, G. Li, and L. Xie. 2020. Assistive mobile robot with shared control of brain-machine interface and computer vision. *4th Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference Proceedings*. IEEE 1:405–409. doi: 10.1109/ITNEC48623.2020.9085096.
5. Cruz, A., G. Pires, A. Lopes, C. Carona, and U. J. Nunes. 2021. A self-paced BCI with a collaborative controller for highly reliable wheelchair driving: Experimental tests with physically disabled individuals. *IEEE T. Hum.-Mach. Syst.* 51(2):109–119. doi: 10.1109/THMS.2020.3047597.
6. Dorin, D., A. Grabovoy, and V. Strijov. 2025. Enhancing fMRI data decoding with spatiotemporal characteristics in limited dataset. *Dokl. Math.* 112(2):465–480. doi: 10.1134/S1064562425700383. EDN: JUSNZZ.
7. Schwarz, A., M. K. Höller, J. Pereira, P. Ofner, and G. R. Müller-Putz. 2020. Decoding hand movements from human EEG to control a robotic arm in a simulation environment. *J. Neural Eng.* 17(3):036010. 24 p. doi: 10.1088/1741-2552/ab882e.
8. Bandettini, P. A., E. C. Wong, R. S. Hinks, R. S. Tikofsky, and J. S. Hyde. 1992. Time course EPI of human brain function during task activation. *Magn. Reson. Med.* 25(2):390–397. doi: 10.1002/mrm.1910250220.
9. Dorin, D., N. Kiselev, A. Grabovoy, and V. Strijov. 2024. Forecasting fMRI images from video sequences: Linear model analysis. *Health Information Science Systems* 12(1):55. 11 p. doi: 10.1007/s13755-024-00315-5. EDN: TJNNHV.
10. Ogawa, S., T. M. Lee, A. R. Kay, and D. W. Tank. 1990. Brain magnetic resonance imaging with contrast dependent on blood oxygenation. *P. Natl. Acad. Sci. USA* 87(24):9868–9872. doi: 10.1073/pnas.87.24.9868.
11. Logothetis, N. K. 2003. The underpinnings of the BOLD functional magnetic resonance imaging signal. *J. Neurosci.* 23(10):3963–3971. doi: 10.1523/jneurosci.23-10-03963.2003.

12. Glover, G. H. 2011. Overview of functional magnetic resonance imaging. *Neurosurg. Clin. N. Am.* 22(2):133–139. doi: 10.1016/j.nec.2010.11.001.
13. Menon, R. S., and S.-G. Kim. 1999. Spatial and temporal limits in cognitive neuroimaging with fMRI. *Trends Cogn. Sci.* 3(6):207–216. doi: 10.1016/s1364-6613(99)01329-7.
14. Logothetis, N. K. 2008. What we can do and what we cannot do with fMRI. *Nature* 453(7197):869–878. doi: 10.1038/nature06976.
15. Srinivasan, R. 1999. Methods to improve the spatial resolution of EEG. *Int. J. Bioelectromagnetism* 1(1):102–111.
16. Schlögl, A., M. Slater, and G. Pfurtscheller. 2002. Presence research and EEG. *5th Annual Workshop (International) on Presence Proceedings*. ISPR. 1:9–11.
17. Morioka, H., A. Kanemura, J. Hirayama, M. Shikauchi, T. Ogawa, S. Ikeda, M. Kawanabe, and S. Ishii. 2015. Learning a common dictionary for subject-transfer decoding with resting calibration. *NeuroImage* 111:167–178. doi: 10.1016/j.neuroimage.2015.02.015.
18. Jayaram, V., M. Alamgir, Y. Altun, B. Scholkopf, and M. Grosse-Wentrup. 2016. Transfer learning in brain-computer interfaces. *IEEE Comput. Intell. M.* 11(1):20–31. doi: 10.1109/MCI.2015.2501545.
19. Niazy, R. K., C. F. Beckmann, G. D. Iannetti, J. M. Brady, and S. M. Smith. 2005. Removal of FMRI environment artifacts from EEG data using optimal basis sets. *NeuroImage* 28(3):720–737. doi: 10.1016/j.neuroimage.2005.06.067.
20. Ritter, P., and A. Villringer. 2006. Simultaneous EEG–fMRI. *Neurosci. Biobehav. R.* 30(6):823–838. doi: 10.1016/j.neubiorev.2006.06.008.
21. Huster, R. J., S. Debener, T. Eichele, and C. S. Herrmann. 2012. Methods for simultaneous EEG–fMRI: An introductory review. *J. Neurosci.* 32(18):6053–6060. doi: 10.1523/JNEUROSCI.0447-12.2012.
22. Radford, A., J. W. Kim, C. Hallacy, et al. 2021. Learning transferable visual models from natural language supervision. *Conference (International) on Machine Learning Proceedings*. New York, NY: PMLR. 8748–8763.
23. Hu, T., X. Xiang, J. Qin, and Y. Tan. 2023. Audio-text retrieval based on contrastive learning and collaborative attention mechanism. *Multimedia Syst.* 29(6):3625–3638. doi: 10.1007/s00530-023-01144-4.
24. Wang, Z., Y. Zhao, H. Huang, J. Liu, A. Yin, L. Tang, L. Li, Y. Wang, Z. Zhang, and Z. Zhao. 2023. Connecting multi-modal contrastive representations. *Adv. Neur. In.* 36:22099–22114. doi: 10.52202/075280-0970.
25. Huang, S., W. Shao, M.-L. Wang, and D.-Q. Zhang. 2021. fMRI-based decoding of visual information from human brain activity: A brief review. *Int. J. Automation Computing* 18(2):170–184. doi: 10.1007/s11633-020-1263-y.
26. Li, D., C. Wei, S. Li, J. Zou, and Q. Liu. 2024. Visual decoding and reconstruction via EEG embeddings with guided diffusion. *Adv. Neur. In.* 37:102822–102864. doi: 10.52202/079017-3266.
27. Telesford, Q. K., E. Gonzalez-Moreira, T. Xu, Y. Tian, S. J. Colcombe, J. Cloud, B. E. Russ, A. Falchier, M. Nentwich, J. Madsen, L. C. Parra, C. E. Schroeder, M. P. Milham, and A. R. Franco. 2023. An open-access dataset of naturalistic viewing using simultaneous EEG–fMRI. *Scientific Data* 10(1):554. 13 p. doi: 10.1038/s41597-023-02458-8.
28. Simonyan, K., and A. Zisserman. 2014. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition. Cornell University. 14 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1409.1556> (accessed June 1, 2026).
29. He, K., X. Zhang, S. Ren, and J. Sun. 2016. Deep residual learning for image recognition. *Proc. CVPR IEEE* 770–778. doi: 10.1109/CVPR.2016.90.
30. Dosovitskiy, A., L. Beyer, A. Kolesnikov, D. Weissenborn, X. Zhai, T. Unterthiner, M. Dehghani, M. Minderer, G. Heigold, S. Gelly, J. Uszkoreit, and N. Houlsby. 2021. An image is worth 16 × 16 words: Transformers for image recognition at scale. *9th Conference (International) on Learning Representations Proceedings*. Amherst, MA: OpenReview.net. Available at: <https://openreview.net/pdf?id=YicbFdNTTy> (accessed June 1, 2026).
31. Caron, M., H. Touvron, I. Misra, H. Jégou, J. Mairal, P. Bojanowski, and A. Joulin. 2021. Emerging properties in self-supervised vision transformers. *IEEE/CVF Conference (International) on Computer Vision Proceedings*. IEEE. 9650–9660. doi: 10.1109/ICCV48922.2021.00951.
32. Gu, Y., L. E. Sainburg, F. Han, and X. Liu. 2023. Simultaneous EEG and functional MRI data during rest and sleep from humans. *Data Brief* 48:109059. 5 p. doi: 10.1016/j.dib.2023.109059.
33. Momenian, M., Z. Ma, S. Wu, C. Wang, J. Brennan, J. Hale, L. Meyer, and J. Li. 2024. Le Petit Prince Hong Kong (LPPHK): Naturalistic fMRI and EEG data from older Cantonese speakers. *Scientific Data* 11(1):992. 12 p. doi: 10.1038/s41597-024-03745-8.
34. Berezutskaya, J., M. J. Vansteensel, E. J. Aarnoutse, Z. V. Freudenburg, G. Piantoni, M. P. Branco, and N. F. Ramsey. 2022. Open multimodal iEEG–fMRI dataset from naturalistic stimulation with a short audiovisual film. *Scientific Data* 9(1):91. 13 p. doi: 10.1038/s41597-022-01173-0.
35. Gallego-Rudolf, J., M. Corsi-Cabrera, L. Concha, J. Ricardo-Garcell, and E. Pasaye-Alcaraz. 2023. Simultaneous and independent electroencephalography and magnetic resonance imaging: A multimodal neuroimaging dataset. *Data in Brief* 51:109661. 11 p. doi: 10.1016/j.dib.2023.109661.
36. Wakeman, D. G., and R. N. Henson. 2015. A multi-subject, multi-modal human neuroimaging dataset. *Scientific Data* 2(1):150001. 10 p. doi: 10.1038/sdata.2015.1.
37. Ozcelik, F., and R. VanRullen. 2023. Natural scene reconstruction from fMRI signals using generative latent diffusion. *Sci. Rep. — U.K.* 13(1):15666. 15 p. doi: 10.1038/s41598-023-42891-8.
38. Chen, Z., J. Qing, and J. H. Zhou. 2023. Cinematic mindscapes: High-quality video reconstruction from brain activity. *Adv. Neur. In.* 36:24841–24858.
39. Scotti, P., A. Banerjee, J. Goode, et al. 2023. Reconstructing the Mind’s eye: fMRI-to-image with contrastive

- learning and diffusion priors. *Adv. Neur. In.* 36:24705–24728.
40. Mishra, R., K. Sharma, R. R. Jha, and A. Bhavsar. 2023. NeuroGAN: Image reconstruction from EEG signals via an attention-based GAN. *Neural Computing Applications* 35:9181–9192. doi: 10.1007/s00521-022-08178-1.
  41. Singh, P., P. Pandey, K. Miyapuram, and S. Raman. 2023. EEG2IMAGE: Image reconstruction from EEG brain signals. *Conference (International) on Acoustics, Speech and Signal Processing Proceedings*. IEEE. Art. 10096587. 5p. doi: 10.1109/ICASSP49357.2023.10096587.
  42. Esser, P., R. Rombach, and B. Ommer. 2021. Taming transformers for high-resolution image synthesis. *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Proceedings*. IEEE. 12868–12878. doi: 10.1109/CVPR46437.2021.01268.
  43. Hatamizadeh, A., J. Song, G. Liu, J. Kautz, and A. Vahdat. 2025. DiffiT: Diffusion vision transformers for image generation. *Computer vision*. Eds. A. Leonardis, S. Ricci, S. Roth, O. Russakovsky, T. Sattler, and G. Varol. Lecture notes in computer science ser. Springer. 15066:37–55. doi: 10.1007/978-3-031-73242-3\_3.
  44. Crowson, K., S. Biderman, D. Kornis, D. Stander, E. Halahan, L. Castricato, and E. Raff. 2022. VQGAN–CLIP: Open domain image generation and editing with natural language guidance. *Computer vision*. Eds. S. Avidan, G. J. Brostow, M. Cisse, G. M. Farinella, and T. Hassner. Lecture notes in computer science ser. Cham: Springer. 13697:88–105. doi: 10.1007/978-3-031-19836-6\_6.
  45. Podell, D., Z. English, K. Lacey, A. Blattmann, T. Dockhorn, J. Müller, J. Penna, and R. Rombach. 2024. SDXL: Improving latent diffusion models for high-resolution image synthesis. *Conference (International) on Learning Representations Proceedings*. Amherst, MA: OpenReview.net. 1862–1874.
  46. Ye, H., J. Zhang, S. Liu, X. Han, and W. Yang. 2023. IP-adapter: Text compatible image prompt adapter for text-to-image diffusion models. Cornell University. 16 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2308.06721> (accessed June 1, 2026).
  47. Otsu, N. 1979. A threshold selection method from gray-level histograms. *IEEE T. Syst. Man Cyb.* 9(1):62–66. doi: 10.1109/TSMC.1979.4310076.
  48. Ho, J., A. Jain, and P. Abbeel. 2020. Denoising diffusion probabilistic models. Cornell University. 25 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2006.11239> (accessed June 1, 2026).

Received November 26, 2025

Accepted May 15, 2026

## Contributors

**Dorin Daniil D.** (b. 2002) — master student, Department of Intelligent Systems, Phystech School of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141701, Russian Federation; dorin.dd@phystech.edu

**Kiselev Nikita S.** (b. 2002) — master student, Department of Intelligent Systems, Phystech School of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141701, Russian Federation; kiselev.ns@phystech.edu

**Grabovoy Andrey V.** (b. 1997) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Laboratory 42 “Data Mining,” V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya Str., Moscow 117997, Russian Federation; associate professor, Department of Intelligent Systems, Phystech School of Applied Mathematics and Computer Science, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141701, Russian Federation; grabovoy.av@phystech.edu

# МНОГОШАГОВЫЙ АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

А. В. Пантелеев<sup>1</sup>, Е. А. Хвошнянская<sup>2</sup>

**Аннотация:** Статья посвящена разработке и применению метаэвристических алгоритмов оптимизации для решения задач оптимального управления непрерывными и дискретными динамическими системами. Описаны стратегия поиска и алгоритм нахождения экстремума функции многих переменных при интервальных ограничениях. Процедура поиска использует идеи метаэвристических алгоритмов оптимизации о динамическом изменении области поиска, а также ускоренных алгоритмов на основе прогнозирования и учета памяти об удачных решениях, полученных в процессе исследований множества допустимых решений. Эффективность предложенного метода продемонстрирована на примерах решения задачи оптимального программного управления непрерывными и дискретными динамическими системами. В последнем случае рассмотрены задачи управления отдельной траекторией, пучком траекторий при наличии неопределенности задания начальных условий движения, семейством траекторий стохастической системы. Решены задачи параметрической оптимизации технических систем: натяжной/компрессионной пружины, трехзвенного стержневого элемента, трубчатой колонны. Приведенные численные результаты сопровождаются рекомендациями по подбору гиперпараметров предложенного метода оптимизации.

**Ключевые слова:** метаэвристические алгоритмы оптимизации; оптимальное управление; программное управление; динамические системы

**DOI:** 10.14357/19922264260204

**EDN:** MNEPBL

## 1 Введение

Решение прикладных задач теории оптимального управления, как правило, связано с применением численных методов оптимизации, в развитии которых можно выделить два ключевых подхода.

Первый подход связан с реализацией детерминированных и стохастических процедур поиска экстремума при наложении различных, иногда весьма существенных ограничений на свойства и структуру целевой функции. Основное преимущество такого подхода заключается в возможности математического обоснования сходимости алгоритма и в ряде случаев получения гарантий по скорости его сходимости. Однако данный подход предъявляет высокие требования к условиям постановки задачи, которые нередко трудно соблюсти в практических применениях, а проверка выполнения этих условий может быть крайне затруднена из-за их сложности. При этом применяются следующие методы и подходы:

- численные алгоритмы удовлетворения необходимых условий условного или безусловного экстремумов [1, 2];
- методы штрафов (внешних штрафов, барьерных функций, комбинированный метод штрафов, метод множителей, метод точных штрафных функций) [2];
- методы возможных направлений [2];
- методы, использующие идеи моментов и адаптацию [3];
- методы на основе универсального градиентного спуска [4];
- диагональные методы [5];
- интервальные методы [6];
- методы второго порядка и квазиньютоновские методы [1, 2].

Достаточно полное единообразное описание методов данной группы имеется в [7, 8].

<sup>1</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), институт «Компьютерные науки и прикладная математика», avpanteleev@inbox.ru

<sup>2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), институт «Компьютерные науки и прикладная математика», liza190401@mail.ru

Второй подход связан с применением метаэвристических методов оптимизации, которые объединяют в себе один или более эвристических методов, управляемых стратегией поиска более высокого уровня. Они способны покидать окрестности локальных экстремумов и выполнять достаточно полное исследование множества допустимых решений. Метаэвристические методы оптимизации позволяют находить решение высокого качества за разумное с практической точки зрения время. В отличие от традиционных методов оптимизации, метаэвристические методы могут применяться в ситуациях, когда практически полностью отсутствует информация о характере и свойствах исследуемой функции. Тем не менее слабой стороной этой группы методов является, как правило, отсутствие формальных доказательств сходимости и гарантий, что найденное решение действительно близко к глобальному экстремуму. Классификация метаэвристических методов в настоящее время носит условный характер, поскольку характерные группы методов базируются на сходных идеях, и имеется устойчивая тенденция к созданию гибридных алгоритмов, объединяющих в себе сразу несколько хорошо зарекомендовавших себя алгоритмов. Кроме того, один и тот же алгоритм может принадлежать сразу к нескольким группам. Можно выделить следующие группы метаэвристических методов оптимизации:

- эволюционные методы [7, 9–11];
- методы «роевого» интеллекта [12–17];
- методы, имитирующие физические процессы [7, 9–12, 16];
- биоинспирированные методы [12–17];
- мультиагентные методы [7, 16, 17];
- мултистартовые методы [7].

Разнообразие методов оптимизации и постоянное появление новых алгоритмов и их модификаций объясняется хорошо известной теоремой No Free Lunch (NFL) [18]. Эта теорема утверждает отсутствие универсального метода, способного эффективно решать все возможные задачи оптимизации. Поэтому выбор метода определяется конкретной задачей оптимизации: видом целевой функции и ограничений, задающих множество допустимых решений.

В статье предлагается новый метод оптимизации, который объединяет оба описанных подхода. Исследование области допустимых решений использует перелеты Леви [19] с целью борьбы с эффектом «застывания» в окрестностях локальных экстремумов. Этап разработки перспективных областей реализуется из прогнозируемой точ-

ки, определяемой конечной памятью алгоритма на двух последних шагах [1, 3, 4]. Поиск из прогнозируемой точки реализует стратегию последовательного сокращения области поиска с ее неполным восстановлением после каждого из проходов [20]. Новое положение решения определяется суммарным влиянием прогнозируемой точки и взвешенным влиянием результатов удачных шагов из нее. Процесс завершается после достижения заданного числа проходов. В качестве приближенного решения задачи выбирается наилучшее решение (решения) из полученных в результате реализованных проходов. Алгоритм относится к многошаговым [1], так как использует концепцию конечной памяти о предыдущих положениях решения.

## 2 Многошаговый адаптивный алгоритм оптимизации с прогнозированием

### 2.1 Постановка задачи

Рассматривается задача поиска условного минимума непрерывной целевой функции  $f(x)$  на множестве допустимых решений  $D$ , т.е. такой точки  $x^* \in D$ , что

$$f(x^*) = \min_{x \in D} f(x), \quad (1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ;  $D = \{x | x_i \in [a_i, b_i], i = \overline{1, n}\}$ .

### 2.2 Алгоритм решения задачи

Описанная в конце разд. 1 стратегия поиска реализуется в виде пошагового алгоритма. Рекомендуемые на шаге 1 значения параметров метода получены в результате анализа применения метода при решении общепринятого набора тестовых задач [7, 9–12, 17]. Проведенное тестирование свидетельствует о сходимости метода для выпуклых дифференцируемых целевых функций.

**Шаг 1.** Задать параметры метода: максимальное число попыток из текущей точки  $N \in [40, 200]$ ; максимальное число проходов  $P \in [5, 40]$ ; число итераций за время прохода  $K \in [30, 150]$ ; наименьшая величина шага  $R \in [10^{-8}, 10^{-7}]$ ; параметр уменьшения величины шага  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ); параметр восстановления величины шага  $\eta$  ( $0 < \eta < 1$ ); величина шага, используемого при полетах Леви,  $\beta \in [0,02; 0,6]$ ; параметр распределения Леви  $\lambda$  ( $1 < \lambda \leq 3$ ); константа различимости  $\varepsilon = 10^{-7}$ .

**Шаг 2.** Задание начального приближения  $x^{(0)} \in D$ :

- (а) используя равномерный закон распределения.  
Для этого с помощью равномерного распреде-

ления на единичном отрезке  $[0; 1]$  генерировать  $n$  случайных точек  $P_i^0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Используя линейное преобразование, каждую точку отобразить на соответствующий ей промежуток  $[a_i, b_i]$ :  $x_i^{(0)} = (b_i - a_i)P_i^0 + a_i$ ;

(б) положить  $x_i^{(0)} = (a_i + b_i)/2$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

**Шаг 3.** Положить  $p = 1$  (счетчик числа проходов), множество  $\text{Pool} = \emptyset$ . Задать начальную величину шага  $t_0 = (1/2) \min_{i=\overline{1, n}}(b_i - a_i)$ .

**Шаг 4.** Положить  $k = 0$  (счетчик числа итераций).

**Шаг 5.** Найти прогнозируемое решение:

$$z^{(k)} = x^{(k)} + \left(1 - e^{-k/5}\right) \left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right) \text{rand}[0, 1],$$

где  $\text{rand}[0, 1]$  — случайная величина, описываемая равномерным законом распределения на отрезке  $[0, 1]$ . Если для какого-либо значения  $i$  не выполняется ограничение, т. е.  $z_i^{(k)} \notin [a_i, b_i]$ , то положить  $z_i^{(k)} = x_i^{(k)}$ .

**Шаг 6.** Реализовать поиск в окрестности прогнозируемого решения.

**Шаг 6.1.** Положить  $s = 0$  (число удачных попыток),  $j = 1$  (число попыток из точки),  $J = \emptyset$  (множество номеров удачных попыток из текущей точки).

**Шаг 6.2.** Генерировать случайный вектор  $\xi^j = (\xi_1^j, \dots, \xi_n^j)^T$ , где  $\xi_i^j$  — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[-1, 1]$ .

**Шаг 6.3.** Найти

$$y^j = z^{(k)} + t_k \frac{\xi^j}{\|\xi^j\|},$$

где  $\|\xi^j\|$  — евклидова норма вектора.

**Шаг 6.4.** Если  $y^j \in D$  и  $f(y^j) < f(z^{(k)})$ , то шаг удачный, положить  $s = s + 1$ , номер  $j$  включить в множество  $J$ . Если  $y^j \notin D$  или  $f(y^j) \geq f(z^{(k)})$ , то шаг неудачный.

Если  $j < N$ , то положить  $j = j + 1$  и перейти к шагу 6.2.

Если  $j = N$ , то процедуру поиска с текущей величиной шага завершить.

**Шаг 6.5.** Если  $s = 0$ , проверить условие завершения прохода: если  $t_k \leq R$ , проход завершить, включить найденное решение в множество  $\text{Pool}$  и перейти к шагу 8; если  $t_k > R$ , положить  $t_k = \alpha t_k$  и перейти к шагу 6.1.

Если  $s \neq 0$ , то упорядочить решения  $y^j$ ,  $j \in J$ , по неубыванию значения целевой функции:  $y^{(1)}, \dots, y^{(s)}$ . Затем наилучшему удачному решению  $y^{(1)}$  поставить в соответствие вес, равный 1, а наихудшему  $y^{(s)}$ , равный  $1/s$ , т. е. всем удачным решениям сопоставить значения веса, уменьшающиеся по линейному закону  $(s + 1 - j)/s$ ,  $j = \overline{1, s}$ .

**Шаг 6.6.** Найти новое положение решения, используя средневзвешенную величину:

$$x^{(k+1)} = z^{(k)} + \frac{\sum_{j=1}^s y^{(j)}(s + 1 - j)/s}{(s + 1)/2}.$$

Если  $x^{(k+1)} \notin D$ , то положить  $x^{(k+1)} = y^{(1)}$ .

**Шаг 7.** Проверка завершения итераций в рамках текущего прохода.

Если  $k < K$ , то положить  $k = k + 1$  и перейти к шагу 5.

Если  $k = K$ , то полученное решение включить в множество  $\text{Pool}$  и перейти к шагу 8.

**Шаг 8.** Проверка завершения числа проходов. Если  $p < P$ , то положить  $p = p + 1$  и перейти к шагу 9. Если  $p = P$ , процесс поиска завершить. Из множества  $\text{Pool}$  выбрать решения  $x^*$ , соответствующие наименьшему значению целевой функции  $f(x^*)$ .

**Шаг 9.** Реализация следующего прохода. Найти новое начальное значение величины шага  $t_0 = (\eta^p/2) \min_{i=\overline{1, n}}(b_i - a_i)$ . Генерировать новое положение начальной точки с помощью распределения Леви:

$$x_i^{(0)} = z_i^{(k)} + \frac{\beta}{p} \text{Levy}_i(\lambda), \quad i = \overline{1, n},$$

где для вычисления величины  $\text{Levy}_i(\lambda)$  требуется генерировать число  $Q_i$  с помощью равномерного закона распределения на отрезке  $[\varepsilon, b_i - a_i]$ , вычислить значения  $\theta_i = 2\pi Q_i$  и  $L_i = Q_i^{-1/\lambda}$ , а затем

$$\text{Levy}_i(\lambda) = \begin{cases} L_i \sin \theta_i, & i = 1, \left[\frac{n}{2}\right]; \\ L_i \cos \theta_i, & i = \left[\frac{n}{2}\right] + 1, n. \end{cases}$$

Если  $x_i^{(0)} \notin [a_i, b_i]$ , процесс генерации следует повторить.

Перейти к шагу 4.

**Замечания.** На шаге 5 находится прогнозируемое решение с целью начала поиска из него, а не из текущего решения. При этом используется схема двухшагового быстрого градиентного метода [1, 3, 4]. Для учета информации о двух последних итерациях используется величина  $(1 - e^{-k/5})(x^{(k)} - x^{(k-1)})$  с весовым коэффициентом, отличающимся от известного  $(k - 1)/(k + r - 1)$ ,  $r \geq 3$ . Умножение этого слагаемого на  $\text{rand}[0, 1]$  способствует активизации поиска (при этом детерминированный подход заменяется стохастическим).

При поиске из прогнозируемой точки на шаге 6.3 реализуется метод случайного поиска с возвратом при неудачном шаге, дополненный процедурой сохранения в памяти удачных попыток из

данной точки, которые ранжируются по величине целевой функции. На шаге 6.5 при нахождении новой величины шага фактически проводится редукция области поиска, как в методе [20].

На шаге 6.6 авторами предложена формула для нахождения нового положения решения с использованием средневзвешенной величины удачных решений, найденных на шаге 6.5.

На шаге 9 реализуется переход к следующему проходу. При этом для нахождения величины шага используется стратегия метода [20] с частичным восстановлением области поиска (с коэффициентом  $\eta$ ).

### 3 Применение в задачах оптимального программного управления непрерывными динамическими системами

#### Постановка задачи и стратегия поиска решения.

Поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2)$$

где  $x$  — вектор состояния системы,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ ;  $u$  — вектор управления,  $u = (u_1, \dots, u_q)^T \in U \subseteq R^q$ ,  $U$  — некоторое заданное множество допустимых значений управления;  $t$  — время,  $t \in T = [t_0, t_f]$ ,  $T$  — промежуток времени функционирования системы, моменты начала  $t_0$  и окончания  $t_f$  заданы;  $f(t, x, u)$  — непрерывная вектор-функция,  $f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))^T : T \times R^n \times U \rightarrow R^n$ ;  $R^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство.

Начальное условие

$$x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

задает начальное состояние системы.

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени, т. е. рассматривается так называемое программное управление.

Множество допустимых управлений  $U_0$  образуют кусочно-непрерывные функции  $u(\cdot)$  со значениями в множестве  $U$ . В точках разрыва значение управления определяется как предел справа.

Определим множество допустимых процессов  $D(t_0, x_0)$  как множество пар  $d = (x(\cdot), u(\cdot))$ , которые включают траекторию  $x(\cdot)$  и управление  $u(\cdot)$  (где  $\forall t \in T : x(t) \in R^n, u(t) \in U$ , функции  $x(\cdot)$  непрерывны и кусочно-дифференцируемы, а  $u(\cdot) \in U_0$

кусочно-непрерывны), удовлетворяющие уравнению (2) с начальным условием (3) почти всюду на множестве  $T$ .

На множестве  $D(t_0, x_0)$  определим функционал качества управления

$$I(d) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_f)), \quad (4)$$

где  $f^0(t, x, u)$  и  $F(x)$  — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Требуется найти такую пару  $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in D(t_0, x_0)$ , что

$$I(d^*) = \min_{d \in D(t_0, x_0)} I(d). \quad (5)$$

Для приближенного решения задачи предлагается применить кусочно-постоянную аппроксимацию закона управления. Для этого следует выбрать  $N$  точек на отрезке  $[t_0, t_f]$ , в которых будет искаться оптимальное управление, тогда  $h = (t_f - t_0)/N$  — величина шага. Если  $t_0 = 0$ , то в результате формируется равномерная сетка  $\{0, h, 2h, \dots, Nh\}$ . Управлению  $u(\cdot)$  будет соответствовать дискретное управление  $\{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ , где  $u(t) = u(\bar{t}h)$ ,  $\bar{t} = 0, \bar{N}-1$ , а траектории  $x(\cdot)$  — дискретный аналог  $\{x(0), x(1), \dots, x(N)\}$ , где  $x(t) = x(\bar{t}h)$ ,  $\bar{t} = 0, \bar{N}$ ;  $x(0) = x_0$ . Далее решается задача оптимизации, в которой вектор

$$\begin{aligned} \nu &= (\nu_0, \dots, \nu_{N-1})^T = \\ &= \left( \underbrace{u_1(0), \dots, u_q(0)}_{\nu_0}, \dots, \underbrace{u_1(N-1), \dots, u_q(N-1)}_{\nu_{N-1}} \right)^T \end{aligned}$$

аналогичен точке  $x$  множества допустимых решений  $D$ , а функционал (4) в форме  $I(\nu)$  — целевой функции  $f(x)$  в задаче (1).

Рассмотрим пример решения задачи (5). Поведение модели объекта управления описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 0,5 [u_1(t) + u_2(t)] \cos x_3(t); \\ \dot{x}_2(t) &= 0,5 [u_1(t) + u_2(t)] \sin x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) &= 0,5 [u_1(t) - u_2(t)], \end{aligned}$$

где  $x \in R^3$ ,  $u \in R^2$ ,  $t \in [0, t_f]$ . Ограничения на управление:  $|u_i| \leq 10$ ,  $i = 1, 2$ . Заданы начальные условия:  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = 10$ ,  $x_3(0) = 0$  — и конечные условия:  $x_{1f} = 0$ ,  $x_{2f} = 0$ ,  $x_{3f} = 0$ . Имеются два фазовых ограничения на плоскости  $Ox_1x_2$ :  $(x_1 - 2,5)^2 + (x_2 - 2,5)^2 \geq 2,5^2$ ;  $(x_1 - 7,5)^2 + (x_2 - 7,5)^2 \geq 2,5^2$ , т. е. две запретные зоны, ограниченные окружностями.

Требуется с помощью выбора закона управления  $u(\cdot)$  перевести систему из заданной начальной точки в окрестность заданной конечной точки радиуса 0,01, не нарушая фазовых ограничений, за минимальное время.

Заметим, что в [21] данная математическая модель используется для описания движения двухгусеничного мобильного робота.

Для формирования критерия качества предлагается записать фазовые ограничения в канонической форме:

$$h_1(x) = 2,5 - \sqrt{(x_1 - 2,5)^2 + (x_2 - 2,5)^2} \leq 0;$$

$$h_2(x) = 2,5 - \sqrt{(x_1 - 7,5)^2 + (x_2 - 7,5)^2} \leq 0.$$

Тогда функционал (4) можно представить в виде:

$$I = t_f + \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i(t_f) - x_{if})^2} + \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) \cdot \mathbf{1}(h_i(x(t))) dt \rightarrow \min,$$

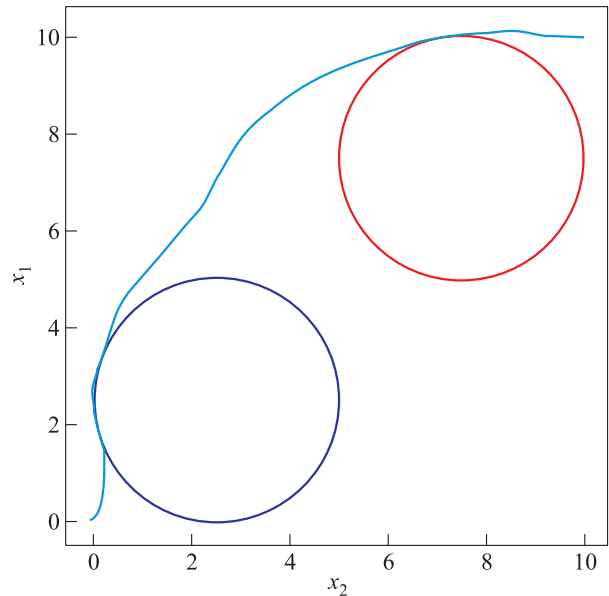
где  $\mathbf{1}(\cdot)$  — единичная ступенчатая функция;  $t_f$  — затраченное время:

$$t_f = \begin{cases} t, & \text{если } \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i(t) - x_{if})^2} \leq 0,01; \\ 2,5 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Второе слагаемое отражает штраф за нарушение конечного условия, третье слагаемое — штраф за нарушение фазовых ограничений.

В данной задаче требуется найти оптимальное управление  $u^*(\cdot)$ , соответствующую траекторию  $x^*(\cdot)$  и время  $t_f^*$ , которые обеспечивают минимальное значение функционала.

Приближенное решение задачи ищется в классе кусочно-постоянных функций на отрезке  $[0; 2,5]$ , который делится на 10 промежутков одинаковой длины. Таким образом, для нахождения каждой из координат  $u_1(\cdot)$ ,  $u_2(\cdot)$  вектора управления требуется найти 10 значений управления в точках разрыва первого рода. Численное интегрирование уравнений движения осуществлялось методом Эйлера с шагом 0,01. Поставленная задача оптимального управления свелась к конечномерной задаче оптимизации с 20 переменными. Использовались следующие значения параметров многошагового адаптивного алгоритма оптимизации с прогнозированием (МАОП):  $N = 40$ ;  $P = 5$ ;  $K = 60$ ;



**Рис. 1** Траектория движения в проекции на плоскость  $Ox_1x_2$

$R = 10^{-7}$ ;  $\alpha = 0,95$ ;  $\eta = 0,91$ ;  $\beta = 0,6$ ;  $\lambda = 1,5$ . Полученное значение функционала качества:  $I^* = 2,6387$ . На рис. 1 показан график изменения проекции полученной траектории на плоскость  $Ox_1x_2$ .

Рассмотренная задача решалась также в [21, 22] с применением различных методов оптимизации. Приведенные результаты и вид траекторий близки с полученными МАОП<sup>1</sup>.

## 4 Применение в задачах оптимального программного управления дискретными динамическими системами

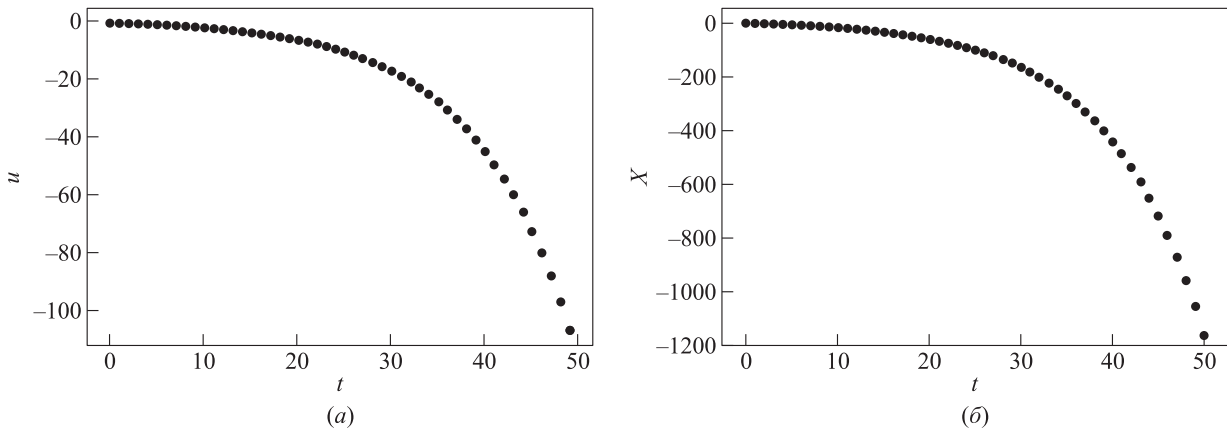
### 4.1 Оптимальное управление отдельной траекторией

Поведение нелинейной детерминированной дискретной модели объекта управления описывается разностным уравнением

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad t = \overline{0, N-1}, \quad (6)$$

где  $t$  — дискретное время,  $t \in \{0, 1, \dots, N\}$ ;  $x$  — вектор состояния системы,  $x \in R^n$ ;  $u$  — вектор управления,  $u \in U \subseteq R^q$ ,  $U$  — множество допустимых значений управления, представляющее собой прямое произведение отрезков  $[a_i, b_i]$ ,  $i = \overline{1, q}$ ;

<sup>1</sup> Программное обеспечение МАОП и его применения в задачах оптимального управления создано авторами в среде Visual Studio Code на языке программирования Python. Использовался компьютер Lenovo 21KH с 16 ГБ оперативной памяти и процессором 13th Gen Intel(R) Core(TM) i7-13700H.



**Рис. 2** Оптимальное управление (а) и траектория (б)

$f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))^T$  — непрерывная вектор-функция; число шагов дискретного времени  $N$  задано.

Начальное состояние задано:

$$x(0) = x_0. \quad (7)$$

Множество допустимых процессов  $\mathbf{D}(0, x_0)$  — это множество пар  $d = (x(\cdot), u(\cdot))$ , включающих траекторию  $x(\cdot) = \{x_0, x(1), \dots, x(N)\}$  и допустимое управление  $u(\cdot) = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\} \in \mathbf{U}_0$  и удовлетворяющих уравнению состояния (6) и начальному условию (7).

На множестве  $\mathbf{D}(0, x_0)$  определен функционал качества управления

$$I(d) = \sum_{k=0}^{N-1} f^0(k, x(k), u(k)) + F(x(N)),$$

где  $f^0(t, x, u)$  и  $F(x)$  — заданные непрерывные функции.

Требуется найти такую пару  $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathbf{D}(0, x_0)$ , что

$$I(d^*) = \min_{d \in \mathbf{D}(0, x_0)} I(d). \quad (8)$$

Рассмотрим пример решения задачи (8). Поведение модели объекта управления описывается разностным уравнением  $x(t+1) = x(t) + u(t)$ ,  $t = \overline{0, N-1}$ , где  $x \in R$ , ограничение на управление:  $-2 \cdot 10^4 \leq u \leq 0$ . Начальное состояние:  $x(0) = 0$ . На множестве допустимых процессов определен функционал качества

$$I = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \gamma^{-t} u^2(t) + x(N), \quad \gamma > 1.$$

Требуется найти минимальное значение функционала и оптимальный процесс  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ , на котором это значение достигается.

Пример имеет аналитическое решение [17]:

$$u^*(t) = -\gamma^t; \quad x^*(t) = x_0 + \frac{1 - \gamma^t}{\gamma - 1};$$

$$\min I = x_0 + \frac{1 - \gamma^N}{2(\gamma - 1)}.$$

Зададим значение параметра  $\gamma = 1,1$  и число шагов дискретного времени  $N = 50$ . Тогда можно вычислить минимальное значение функционала качества:  $I_{\min} = -581,9543$ . Параметры метода МАОП:  $N = 200$ ;  $P = 30$ ;  $K = 150$ ;  $R = 10^{-8}$ ;  $\alpha = 0,85$ ;  $\eta = 0,89$ ;  $\beta = 0,3$ ;  $\lambda = 1,5$ . На рис. 2 показаны полученные оптимальные управление и траектория, при этом значение функционала  $I^* = -581,9543$ .

Решение задачи с применением самоорганизующегося миграционного алгоритма (SOMA, Self-Organizing Migrating Algorithm) [23]:  $\min I = -581,3259$  — и его модифицированной версии (MSOMA, Modified SOMA) [24]:  $\min I = -581,8043$ . При использовании биоинспирированных методов оптимизации, имитирующих поведение стаи окуней (PSS, Perch School Search) [25] и имитирующих поведение стаи синиц (TFO, Tomtit Flock Optimization) [26], были получены следующие результаты:  $I_{\text{PSS}}^* = -581,9543$ ;  $I_{\text{TFO}}^* = -581,9542$ .

## 4.2 Оптимальное в среднем управление пучком траекторий

Поведение нелинейной детерминированной дискретной модели объекта управления описывается разностным уравнением

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad t = \overline{0, N-1}, \quad (9)$$

где  $t$  — дискретное время;  $x$  — вектор состояния системы,  $x \in R^n$ ;  $u$  — вектор управления,  $u \in U \subseteq R^q$ ,  $U$  — множество допустимых значений

управления, для каждого значения  $t$  представляющее собой прямое произведение отрезков  $[a_i, b_i]$ ,  $i = \overline{1, q}$ ;  $f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))^T$  — непрерывная вектор-функция; число шагов дискретного времени  $N$  задано.

Предполагается, что множество начальных состояний  $\Omega$  представляет собой параллелепипед с объемом  $V_\Omega$ , определенный прямым произведением отрезков  $[\alpha_i, \beta_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , т.е.  $\Omega = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$ :

$$x(0) = x_0 \in \Omega \subset R^n. \quad (10)$$

Множество допустимых управлений  $U_0$  образуют последовательности  $u(\cdot) = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ , где  $u(t) \in U \forall t \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ .

Множество допустимых процессов  $D(0, x_0)$  — это множество пар  $d = (x(\cdot), u(\cdot))$ , включающих траекторию  $x(\cdot) = \{x_0, x(1), \dots, x(N)\}$  и допустимое управление  $u(\cdot) = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\} \in U_0$ , удовлетворяющих уравнению состояния (9) и начальному условию (10).

На множестве  $D(0, x_0)$  определен функционал качества управления отдельной траекторией

$$I(x_0, d) = \sum_{t=0}^{N-1} f^0(t, x(t), u(t)) + F(x(N)), \quad (11)$$

где  $f^0(t, x, u)$  и  $F(x)$  — заданные непрерывные функции.

Каждому допустимому управлению  $u(\cdot) \in U_0$  и множеству  $\Omega$  поставим в соответствие пучок траекторий системы уравнений (9):

$$X(t, u(\cdot)) = \bigcup \{x(t, u(\cdot), x_0) | x_0 \in \Omega\},$$

т.е. объединение решений  $x(t, u(\cdot), x_0)$  уравнения (9) по всем возможным начальным состояниям (10).

Качество управления пучком траекторий предлагается оценивать величиной функционала

$$J[u(\cdot)] = \int_{\Omega} \frac{I(x_0, d) dx_0}{V_\Omega}. \quad (12)$$

Требуется найти такое управление  $u^*(\cdot) \in U_0$ , что

$$J[u^*(\cdot)] = \min_{u(\cdot) \in U_0} J[u(\cdot)]. \quad (13)$$

Искомое управление называется оптимальным в среднем, поскольку минимизируется среднее значение функционала (11) на множестве начальных состояний.

Сравним поставленную задачу оптимального управления с формулировкой общей задачи минимизации (1). В качестве вектора независимых переменных  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  используется вектор  $(u(0), u(1), \dots, u(N-1))^T$ , координаты которого удовлетворяют ограничениям вида  $u(t) \in U \subseteq R^q$ , где  $U = \{u | u_i \in [a_i, b_i], i = \overline{1, q}\}$ , а в качестве целевой функции — функционал (12).

Все отрезки  $[\alpha_i, \beta_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , с помощью шага  $\Delta x_i$  разбиваются на  $L_i$  отрезков, а параллелепипед  $\Omega$  делится на  $L = L_1 \cdot \dots \cdot L_n$  элементарных подмножеств  $\Omega_l$ ,  $l = \overline{1, L}$ . В каждом элементарном подмножестве  $\Omega_l$  задается начальное состояние  $x_0^l$  (центр параллелепипеда  $\Omega_l$ ). Эти начальные состояния и применяемое управление порождают  $L$  траекторий, на которых вычисляется значение функционала (12).

Порядок решения задачи выглядит следующим образом: выбрать метод оптимизации и задать его параметры; реализовать заданное число итераций выбранным методом. Для вычисления значений  $I(x_0^l, d)$  функционала (11) следует  $L$  раз последовательно решить уравнение (9) с начальными условиями  $x_0^l$ ,  $l = \overline{1, L}$ . Затем усреднить полученные ре-

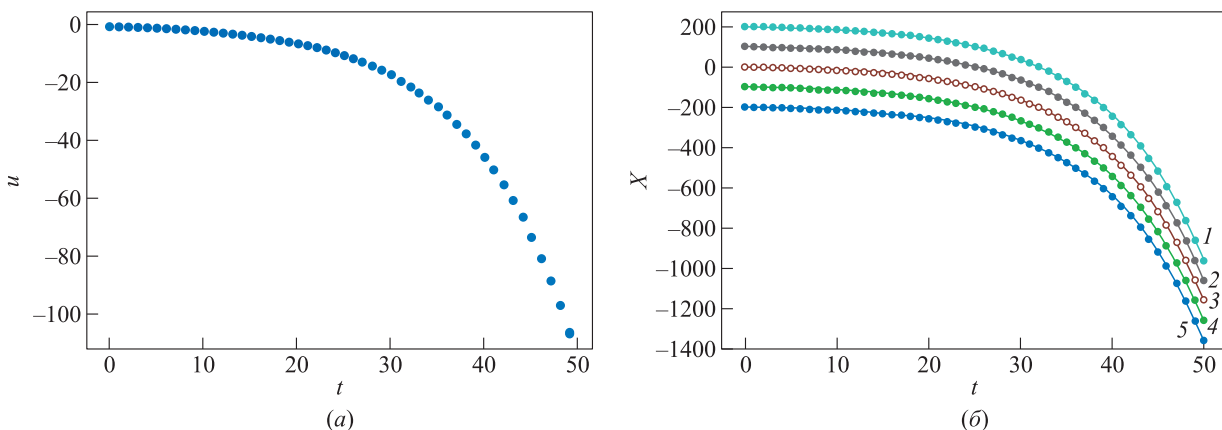


Рис. 3 Оптимальное программное управление (а) и траектории пучка (б)

зультаты, т. е. найти приближенное значение функционала (12):

$$J = \sum_{l=1}^L \frac{I(x_0^l, d)}{L}.$$

Требуется найти оптимальное в среднем управление  $u^*(\cdot) = \{u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)\}$  и соответствующий ему пучок траекторий, образованный  $L$  реализациями.

Рассмотрим пример решения задачи (13). Поведение модели объекта управления описывается разностным уравнением  $x(t+1) = x(t) + u(t)$ , где  $x \in R$ ,  $t = \overline{0, N-1}$ ,  $-2 \cdot 10^4 \leq u \leq 0$ , начальные состояния  $x(0) \in \Omega = [-200; 200]$ . Функционал (11) имеет вид:

$$I(x_0, d) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \gamma^{-t} u^2(t) + x(N), \quad \gamma > 1.$$

Требуется найти управление, минимизирующее значение функционала (12).

Заддим значение параметра  $\gamma = 1,1$ , число шагов дискретного времени  $N = 50$ , число реализаций  $L = 5$ . На рис. 3 показаны полученные оптимальное управление и траектории пучка. Параметры метода МАОП:  $N = 70$ ;  $P = 40$ ;  $K = 30$ ;  $R = 10^{-8}$ ;  $\alpha = 0,6$ ;  $\eta = 0,89$ ;  $\beta = 0,02$ ;  $\lambda = 1,5$ ; значение функционала качества  $J^* = -581,9486$ .

Результаты работы миграционных алгоритмов SOMA [23]:  $\min J = -581,8247$  — и MSOMA [24]:  $\min J = -581,9022$ .

### 4.3 Оптимальное в среднем управление стохастической системой

Поведение нелинейной дискретной стохастической модели объекта управления описывается уравнением

$$X(t+1) = g(t, X(t), u(t)) + \sigma(t, X(t))W(t), \quad t = \overline{0, N-1}, \quad (14)$$

где  $t$  — дискретное время,  $t \in T = \{0, 1, \dots, N\}$ , число  $N$  задано;  $X$  — вектор состояния системы,  $X \in R^n$ ;  $u$  — вектор управления,  $u \in U \subseteq R^q$ ,  $U$  — множество допустимых значений управления, представляющее собой прямое произведение отрезков  $[a_i, b_i]$ ,  $i = \overline{1, q}$ ;  $g(t, x, u) : T \times R^n \times U \rightarrow R^n$  — вектор-функция размера  $(n \times 1)$ ;  $\sigma(t, x) : T \times R^n \rightarrow R^{n \times l}$  — матричная функция размера  $(n \times l)$ ;  $W(t)$  —  $l$ -мерный случайный вектор с известной плотностью вероятности  $p(W, t)$ .

Начальные условия  $X(0) = X_0$  заданы начальной плотностью вероятности  $p_0(x)$ .

Множество допустимых управлений  $U_0$  образуют последовательности  $u(\cdot) = \{u(0), u(1), \dots$

$\dots, u(N-1)\}$ , такие что  $\forall t \in \{0, 1, \dots, N-1\}$   $u(t) \in U$ .

Определим функционал качества управления отдельной траекторией

$$I(X_0, u(\cdot)) = \sum_{t=0}^{N-1} f^0(t, X(t), u(t)) + F(X(N)), \quad (15)$$

где  $f^0(t, x, u) : T \times R^n \times U \rightarrow R$  и  $F(x) : R^n \rightarrow R$  — заданные непрерывные функции.

Качество управления системой будем оценивать величиной математического ожидания функционала (15):

$$J[u(\cdot)] = M[I(X_0, u(\cdot))]. \quad (16)$$

Требуется найти такое управление, что

$$J[u^*(\cdot)] = \min_{u(\cdot) \in U_0} J[u(\cdot)]. \quad (17)$$

Искомое управление называется оптимальным в среднем, поскольку минимизируется среднее значение функционала (15) по множеству реализаций.

Предположим, что закон распределения начального состояния равномерный на множестве  $\Omega$ . При моделировании системы (14) предлагается использовать  $L$  реализаций.

Порядок решения задачи выглядит следующим образом: выбрать метод оптимизации и задать его параметры; реализовать заданное число итераций выбранным методом. Для вычисления значений  $I(X_0^l, u(\cdot))$  функционала (15) следует  $L$  раз последовательно решить уравнение (14) с начальными условиями  $X_0^l$ ,  $l = \overline{1, L}$ , которые генерируются при помощи равномерного закона распределения на заданном множестве  $\Omega$ . Затем найти приближенное значение функционала (16) по формуле

$$J = \sum_{l=1}^L \frac{I(X_0^l, u(\cdot))}{L}.$$

В результате найти управление  $u^*(\cdot) = \{u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)\}$  и соответствующее ему семейство траекторий, образованное  $L$  реализациями.

Рассмотрим пример решения задачи (17). Поведение модели объекта управления описывается разностным уравнением  $X(t+1) = X(t) + u(t) + \sigma W(t)$ , где  $X \in R$ ,  $t = \overline{0, N-1}$ , ограничение на управление:  $-2 \cdot 10^4 \leq u \leq 0$ ,  $W(t)$  — гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией,  $\sigma = 20$ . Начальные состояния заданы равномерным законом распределения на отрезке  $x(0) \in [-200; 200]$ . Функционал (15) имеет вид:

$$I(X_0, u(\cdot)) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \gamma^{-t} u^2(t) + X(N), \quad \gamma > 1.$$

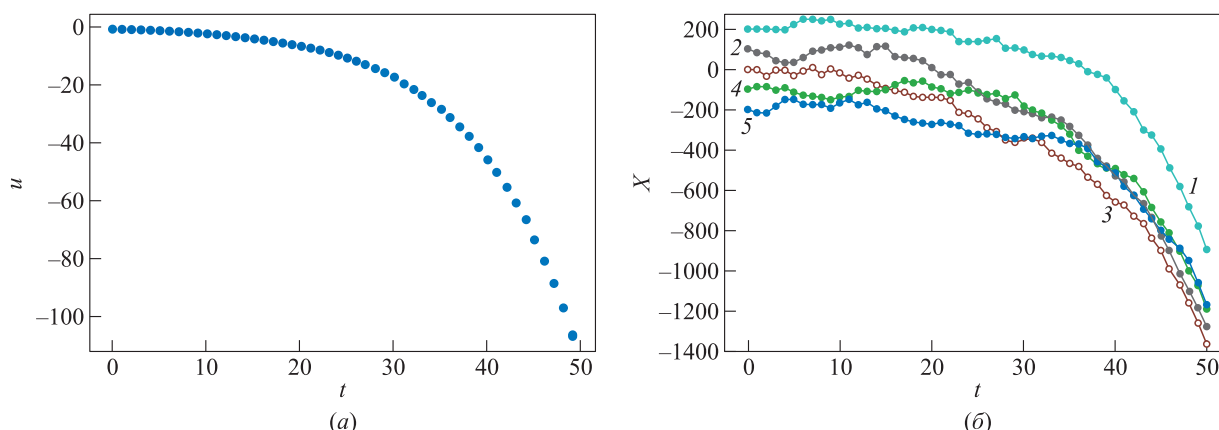


Рис. 4 Оптимальное управление (а) и семейство траекторий (б)

Требуется найти оптимальное программное управление, минимизирующее значение функционала (16).

Зададим число шагов дискретного времени  $N = 50$ , число реализаций  $K = 40$ , величину параметра  $\gamma = 1,1$ . Параметры метода МААОП:  $P = 30$ ;  $R = 10^{-5}$ ;  $\alpha = 0,7$ ;  $\eta = 0,89$ ;  $\beta = 0,02$ ;  $\lambda = 1,5$ . На рис. 4 изображены найденные оптимальное управление и семейство траекторий. Полученное значение функционала качества  $J^* = -598,9379$ . Результаты работы алгоритма SOMA [23] —  $\min J = -428,0443$ , а работы алгоритма MSOMA [24] —  $\min J = -593,329$ .

Сравнительный анализ результатов, полученных в подразд. 4.1–4.3, показывает, что предложенный метод позволяет получать решения, сравнимые или превосходящие по точности известные решения при существенно меньших затратах времени счета. Он может быть использован при решении разнообразных задач оптимизации и синтеза управления [27–29].

## 5 Применение в задачах параметрической оптимизации технических систем

Все рассматриваемые в данном разделе задачи относятся к проблемам поиска условного минимума целевой функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  с ограничениями типа неравенств  $g^1(x) \leq 0, \dots, g^m(x) \leq 0$ , определенными на множестве допустимых решений  $D = \{x | x_i \in [a_i, b_i], i = \overline{1, n}\}$ .

Стратегия поиска решения заключается в переходе от исходной задачи к задаче поиска минимума вспомогательной функции  $F(x, c)$ , полученной с помощью применения метода внешних штрафов [2]:

$$F(x, c) = f(x) + \sum_{i=1}^m c_i [\max \{0, g^i(x)\}]^2 \rightarrow \min_{x \in D},$$

где  $c_1, \dots, c_m$  — коэффициенты штрафной функции, которые подбираются так, чтобы получить решение, удовлетворяющее заданным ограничениям.

### 5.1 Задача определения параметров натяжной/компрессионной пружины

Целью ставится нахождение минимальной по весу конструкции пружины, определяемой вектором параметров  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ , соответствующих диаметру проволоки, среднему диаметру витка и числу активных витков. Конструкция пружины должна удовлетворять ограничениям по минимальному отклонению, напряжению сдвига, частоте колебаний и ограничениям на внешний диаметр [30]:

$$f(x) = (x_3 + 2)x_1^2 x_2 \rightarrow \min;$$

$$g^1(x) = 1 - \frac{x_2^3 x_3}{71\,875 x_1^4} \leq 0;$$

$$g^2(x) = \frac{4x_2^2 - x_1 x_2}{12\,566(x_1^3 x_2 - x_1^4)} + \frac{2,46}{12\,566 x_1^2} - 1 \leq 0;$$

$$g^3(x) = 1 - \frac{140,54 x_1}{x_2^2 x_3} \leq 0;$$

$$g^4(x) = \frac{x_1 + x_2}{1,5} - 1 \leq 0;$$

$$D = [0,05; 2] \times [0,25; 1,3] \times [2; 15].$$

Результат решения с параметрами  $c_i = 100$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $N = 100$ ,  $P = 100$ ,  $K = 150$ ,  $R = 10^{-8}$ ,  $\alpha = 0,4$ ,  $\eta = 0,89$ ,  $\beta = 0,02$  и  $\lambda = 1,5$ :  $x^* = (0,051692; 0,356843; 11,293138)^T$ ;  $f(x^*) = 0,012676$ . Наилучшему известному решению соответствует значение целевой функции  $f(x^{\text{best}}) = 0,012675$  [30].

## 5.2 Оптимизация конструкции трехзвенного стержневого элемента

Целью ставится минимизация объема конструкции, определяемой площадью поперечного сечения стержней  $x_1$  и  $x_3$  ( $x_1 = x_3$ ) и стержня  $x_2$  при удовлетворении ограничений на обеспечение прочности и жесткости конструкции [30]:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\sqrt{2}x_1 + x_2)l \rightarrow \min; \\ g^1(x) &= \frac{\sqrt{2}x_1 + x_2}{\sqrt{2}x_1^2 + 2x_1x_2}P - \sigma \leq 0; \\ g^2(x) &= \frac{x_2}{\sqrt{2}x_1^2 + 2x_1x_2}P - \sigma \leq 0; \\ g^3(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}x_2 + x_1}P - \sigma \leq 0; \\ D &= [0; 1] \times [0; 1], \end{aligned}$$

где  $\sigma = 2 \text{ кН/см}^2$ ;  $l = 100 \text{ см}$ ;  $P = 2 \text{ кН/см}^2$ .

Результат решения с параметрами  $c_i = 10^9 k$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где  $k$  — номер итерации,  $N = 50$ ,  $P = 120$ ,  $K = 80$ ,  $R = 10^{-6}$ ,  $\alpha = 0,6$ ,  $\eta = 0,89$ ,  $\beta = 0,3$  и  $\lambda = 1$ :  $x^* = (0,788773, 0,407969)^T$ ;  $f(x^*) = 263,895851$ . Известному решению соответствует  $f(x^{\text{best}}) = 263,895872$  [30].

## 5.3 Оптимизация конструкции трубчатой колонны

Трубчатая колонна находится под вертикальной нагрузкой  $P = 2500 \text{ кгс}$ , при этом предел текучести  $\sigma_y = 500 \text{ кгс/см}^2$ , модуль упругости  $E = 0,85 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$  и длина ограничений  $L = 250 \text{ см}$  были определены на основе геометрии конструкции и допустимых напряжений. Характерными переменными служат номинальный диаметр колонны  $x_1$  и половина толщины стенки трубы  $x_2$ . Цель задачи оптимизации заключается в минимизации стоимости [30]:

$$\begin{aligned} f(x) &= 9,82x_1x_2 + 2x_1 \rightarrow \min; \\ g^1(x) &= \frac{P}{\pi x_1 x_2 \sigma_y} - 1 \leq 0; \\ g^2(x) &= \frac{8PL^2}{\pi^3 E x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)} - 1 \leq 0; \\ g^3(x) &= \frac{2}{x_1} - 1 \leq 0; \\ g^4(x) &= \frac{x_1}{14} - 1 \leq 0; \end{aligned}$$

$$g^5(x) = \frac{0,2}{x_2} - 1 \leq 0;$$

$$g^6(x) = \frac{x_2}{0,8} - 1 \leq 0;$$

$$D = [2; 14] \times [0,2; 0,8].$$

Результат решения с параметрами  $c_i = 1000$ ,  $i = 1, 6$ ,  $N = 100$ ,  $P = 80$ ,  $K = 100$ ,  $R = 10^{-8}$ ,  $\alpha = 0,9$ ,  $\eta = 0,89$ ,  $\beta = 0,5$  и  $\lambda = 1,5$ :  $x^* = (5,402279; 0,292175)^T$ ;  $f(x^*) = 26,53804$ . Известному решению соответствует величина целевой функции  $f(x^{\text{known}}) = 26,531566$  [30].

Заметим, что все полученные в данном разделе результаты соответствуют известным решениям, что свидетельствует о применимости предложенного метода к данному классу задач.

## 6 Заключение

Как продемонстрировано в предыдущих разделах на решениях четырех задач оптимального управления непрерывными и дискретными динамическими системами, а также трех задач параметрической оптимизации технических систем, предложенный многошаговый адаптивный алгоритм оптимизации с прогнозированием позволяет получать результаты с достаточно высокой точностью.

Комплексное использование принципа последовательного сокращения множества поиска и его неполного восстановления перед очередным проходом с идеей многошаговости, т.е. конечной памяти алгоритма, составляет механизм покидания областей притяжения локальных экстремумов и в конечном итоге ускорения сходимости.

Разработанный алгоритм может найти применение в задачах структурно-параметрического синтеза систем управления с неполной обратной связью по доступным координатам вектора состояния, а также в задачах совместного оценивания и управления, возникающих в процессе проектирования авиационно-космических систем.

## Литература

1. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983. 384 с.
2. Bazaraa M. S., Sherali H. D., Shetty C. M. Nonlinear programming: Theory and algorithms. — 3rd ed. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2006. 880 p. doi: 10.1002/0471787779. EDN: YCVSZE.
3. Нестеров Ю. Е. Методы выпуклой оптимизации. — М.: МЦНМО, 2010. 278 с.
4. Гасников А. В. Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска. — М.: МФТИ, 2018. 272 с. EDN: UWLALM.

5. *Sergeyev Y. D., Kvasov D. E.* Deterministic global optimization: An introduction to the diagonal approach. — New York, NY, USA: Springer, 2017. 136 p. doi: 10.1007/978-1-4939-7199-2. EDN: GDUIJ.
6. *Hansen E., Walster G. W.* Global optimization using interval analysis. — 2nd ed. — New York, NY, USA: Marcel Dekker, 2004. 492 p.
7. Encyclopedia of optimization / Eds. C. A. Floudas, P. M. Pardalos. — New York, NY, USA: Springer, 2009. 4646 p.
8. *Locatelli M., Schoen F.* (Global) optimization: Historical notes and recent developments // EURO J. Computational Optimization, 2021. Vol. 9. Art. 100012. 15 p. doi: 10.1016/j.ejco.2021.100012.
9. Handbook of metaheuristics / Eds. M. Gendreau, J.-Y. Potvin. — New York, NY, USA: Springer, 2019. 610 p. doi: 10.1007/978-3-319-91086-4.
10. *Alorfi A.* A survey of recently developed metaheuristics and their comparative analysis // Eng. Appl. Artif. Intel., 2023. Vol. 117. Part A. Art. 105622. 36 p. doi: 10.1016/j.engappai.2022.105622.
11. *Tomar V., Bansal M., Singh P.* Metaheuristic algorithms for optimization: A brief review // Engineering Proceedings, 2024. Vol. 59. No. 1. Art. 238. doi: 10.3390/engproc2023059238.
12. *Yang X. S., Chien S. F., Ting T. O.* Bio-inspired computation and optimization // Bio-inspired computation in telecommunications. — New York, NY, USA: Morgan Kaufmann, 2015. P. 1–21. doi: 10.1016/B978-0-12-801538-4.00001-X.
13. *Del Ser J., Osaba E., Molina D., Yang X.-S., Salcedo-Sanz S., Camacho D., Das S., Suganthan P. N., Coello Coello C. A., Herrera F.* Bio-inspired computation: Where we stand and what's next // Swarm Evol. Comput., 2019. Vol. 48. P. 220–250. doi: 10.1016/j.swevo.2019.04.008.
14. *Tzantetos A., Fister I., Dounias G.* A comprehensive database of nature-inspired algorithms // Data Brief, 2020. Vol. 31. Art. 105792. 9 p. doi: 10.1016/j.dib.2020.105792.
15. *Niculina Dragoi E., Dafinescu V.* Review of metaheuristics inspired from the animal kingdom // Mathematics, 2021. Vol. 9. No. 18. Art. 2335. 52 p. doi: 10.3390/math9182335. EDN: EKHSJU.
16. *Карпенко А. П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. — 3-е изд. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. 448 с. EDN: NCAEFY.
17. *Пантелеев А. В., Каранэ М. М. С.* Мультиагентные и биоинспирированные методы оптимизации технических систем. — М.: Доброе слово и Ко, 2024. 336 с. EDN: NJFRAO.
18. *Wolpert D. H., Macready W. G.* No free lunch theorems for optimization // IEEE T. Evolut. Comput., 1997. Vol. 1. No. 1. P. 67–82. doi: 10.1109/4235.585893.
19. *Gutowski M.* Lévy flights as an underlying mechanism for global optimization algorithms. — Cornell University, 2001. 8 p. arXiv:math-ph/0106003.
20. *Luus R.* Iterative dynamic programming. — London, U.K.: Chapman & Hall/CRC, 2000. 344 p. doi: 10.1201/9781420036022.
21. *Дивеев А. И., Константинов С. В.* Исследование практической сходимости эволюционных алгоритмов оптимального программного управления колесным роботом // Известия РАН. Теория и системы управления, 2018. № 4. С. 80–106. doi: 10.31857/s000233880002513-3. EDN: YSBCOL.
22. *Пантелеев А. В., Надоров И. С.* Применение модификации метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, для решения задачи оптимального программного управления мобильным роботом // Моделирование и анализ данных, 2025. Т. 15. № 1. С. 81–109. doi: 10.17759/mda.2025150105. EDN: PPGMJB.
23. Self-organizing migrating algorithm. Methodology and implementation / Eds. D. Davendra, I. Zelinka. — Studies in computational intelligence ser. — Cham: Springer, 2016. Vol. 626. 289 p. doi: 10.1007/978-3-319-28161-2.
24. *Panteleev A., Rakitianskii V.* Application of migrating optimization algorithms in problems of optimal control of discrete-time stochastic dynamical systems // Axioms, 2023. Vol. 12. Iss. 11. Art. 1014. 22 p. doi: 10.3390/axioms12111014. EDN: GTSEYV.
25. *Panteleev A. V., Kolessa A. A.* Optimal open-loop control of discrete deterministic systems by application of the perch school metaheuristic optimization algorithm // Algorithms, 2022. Vol. 15. Iss. 5. Art. 157. 16 p. doi: 10.3390/a15050157. EDN: FVVSIP.
26. *Panteleev A. V., Kolessa A. A.* Application of the tomitt flock metaheuristic optimization algorithm to the optimal discrete time deterministic dynamical control problem // Algorithms, 2022. Vol. 15. Iss. 9. Art. 301. 19 p. doi: 10.3390/a15090301. EDN: RDMOTY.
27. *Босов А. В.* Стабилизация траектории линейной системы со скачкообразным дрейфом при целочисленных ограничениях на управление // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 3. С. 10–18. doi: 10.14357/19922264250302. EDN: YZEHC.
28. *Борисов А. В., Игнатов А. Н., Борисов В. А.* Оптимизация скоростного режима грузового поезда по критерию среднего ущерба от аварий // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 3. С. 27–35. doi: 10.14357/19922264250304. EDN: BJFFCD.
29. *Иванов С. В., Мартюшева Я. Г., Наумов А. В., Степанов А. Е.* Оптимизация по квантильному критерию позиционной стратегии тестируемого в динамической модели прохождения ограниченного по времени теста // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 4. С. 65–71. doi: 10.14357/19922264250407. EDN: LZGUSS.
30. *Nekoo S. R., Acosta J. A., Ollero A.* A search algorithm for constrained engineering optimization and tuning the gains of controllers // Expert Syst. Appl., 2022. Vol. 206. Art. 117866. 27 p. doi: 10.1016/j.eswa.2022.117866.

Поступила в редакцию 10.02.2026

Принята к публикации 15.05.2026

# MULTISTEP ADAPTIVE OPTIMIZATION ALGORITHM WITH PREDICTION AND ITS APPLICATION TO OPTIMAL CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS

A. V. Panteleev and E. A. Khvoshnyanskaya

Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation

**Abstract:** The paper is devoted to the development and application of metaheuristic optimization algorithms to solve optimal control problems for continuous and discrete dynamic systems. A search strategy and an algorithm for finding the extremum of a multivariable function under interval constraints are described. The search procedure leverages concepts from metaheuristic optimization algorithms regarding dynamic modifications of the search space, alongside accelerated algorithms based on prediction and the incorporation of successful solution memory obtained during the exploration of the feasible solution set. The efficiency of the proposed method is demonstrated through examples of solving optimal open-loop control problems for both continuous and discrete dynamic systems. In the latter case, the control problems for an individual trajectory, a bundle of trajectories under initial condition uncertainties, and a family of trajectories of a stochastic system are considered. The problems of parametric optimization of technical systems, including a tension/compression spring, a three-bar truss, and a tubular column, are solved. The presented numerical results are accompanied by recommendations for tuning the hyperparameters of the proposed optimization method.

**Keywords:** metaheuristic optimization algorithms; optimal control; open-loop control; dynamic systems

**DOI:** 10.14357/19922264260204

**EDN:** MNEPBL

## References

1. Polyak, B. T. 1987. *Introduction to optimization*. New York, NY: Optimization Software, Inc. 438 p.
2. Bazaraa, M. S., H. D. Sherali, and C. M. Shetty. 2006. *Nonlinear programming: Theory and algorithms*. 3rd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 880 p. doi: 10.1002/0471787779. EDN: YCVSZE.
3. Nesterov, Yu. E. 2010. *Metody vypukloy optimizatsii* [Convex optimization methods]. Moscow: MTsNMO. 278 p.
4. Gasnikov, A. V. 2018. *Sovremennye chislennyye metody optimizatsii. Metod universal'nogo gradientnogo spуска* [Modern numerical optimization methods: Universal gradient descent]. Moscow: MFTI. 286 p. EDN: UWLALM.
5. Sergeyev, Y. D., and D. E. Kvasov. 2017. *Deterministic global optimization: An introduction to the diagonal approach*. New York, NY: Springer. 136 p. doi: 10.1007/978-1-4939-7199-2. EDN: GDUZIJ.
6. Hansen, E., and G. W. Walster. 2004. *Global optimization using interval analysis*. 2nd ed. New York, NY: Marcel Dekker. 492 p.
7. Floudas, C. A., and P. M. Pardalos, eds. 2009. *Encyclopedia of optimization*. 2nd ed. New York, NY: Springer. 4646 p.
8. Locatelli, M., and F. Schoen. 2021. (Global) optimization: Historical notes and recent developments. *EURO J. Computational Optimization* 9:100012. 15 p. doi: 10.1016/j.ejco.2021.100012.
9. Gendreau, M., and J.-Y. Potvin, eds. 2019. *Handbook of metaheuristics*. New York, NY: Springer. 610 p. doi: 10.1007/978-3-319-91086-4.
10. Alorf, A. 2023. A survey of recently developed metaheuristics and their comparative analysis. *Eng. Appl. Artif. Intel.* 117(Part A):105622. 36 p. doi: 10.1016/j.engappai.2022.105622.
11. Tomar, V., M. Bansal, and P. Singh. 2024. Metaheuristic algorithms for optimization: A brief review. *Engineering Proceedings* 59(1):238. 16 p. doi: 10.3390/engproc2023059238.
12. Yang, X. S., S. F. Chien, and T. O. Ting. 2015. Bio-inspired computation and optimization: An overview. *Bio-inspired computation in telecommunications* 1–21. New York, NY: Morgan Kaufmann. doi: 10.1016/B978-0-12-801538-4.00001-X.
13. Del Ser, J., E. Osaba, D. Molina, X.-S. Yang, S. Salcedo-Sanz, D. Camacho, S. Das, P. N. Suganthan, C. A. Coello Coello, and F. Herrera. 2019. Bio-inspired computation: Where we stand and what's next. *Swarm Evol. Comput.* 48:220–250. doi: 10.1016/j.swevo.2019.04.008.
14. Tzaneetos, A., I. Fister, and G. Dounias. 2020. A comprehensive database of nature-inspired algorithms. *Data Brief* 31:105792. 9 p. doi: 10.1016/j.dib.2020.105792.
15. Niculina Dragoi, E., and V. Dafinescu. 2021. Review of metaheuristics inspired from the animal kingdom. *Mathematics* 9(18):2335. 52 p. doi: 10.3390/math9182335. EDN: EKHSJU.
16. Karpenko, A. P. 2021. *Sovremennyye algoritmy poiskovoy optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennyye prirodoy* [Modern search engine optimization algorithms: Nature-inspired algorithms]. 3rd ed. Moscow: MGTU im. N. E. Bauman. 448 p. EDN: NCAEFY.

17. Pantelev, A. V., and M. M. S. Karane. 2024. *Mul'tiagentnye i bioinspirirovannye metody optimizatsii tekhnicheskikh sistem* [Multi-agent and bio-inspired methods for optimizing technical systems]. Moscow: Dobroe slovo i Ko. 336 p. EDN: NJFRAO.
18. Wolpert, D. H., and W. G. Macready. 1997. No free lunch theorems for optimization. *IEEE T. Evolut. Comput.* 1(1):67–82. doi: 10.1109/4235.585893.
19. Gutowski, M. 2001. Lévy flights as an underlying mechanism for global optimization algorithms. Cornell University. 8 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/math-ph/0106003> (accessed June 5, 2026).
20. Luus, R. 2000. *Iterative dynamic programming*. London, U.K.: Chapman & Hall/CRC. 344 p. doi: 10.1201/9781420036022.
21. Diveev, A. I., and S. V. Konstantinov. 2018. Study of the practical convergence of evolutionary algorithms for the optimal program control of a wheeled robot. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 57(4):561–580. doi: 10.1134/S106423071804007X. EDN: YCARZZ.
22. Pantelev, A. V., and I. S. Nadorov. 2025. Primenenie modifikatsii metoda, imitiruyushchego povedenie stai motyl'kov, dlya resheniya zadachi optimal'nogo programmnogo upravleniya mobil'nym robotom [Application of the modified method simulating the behavior of a flock of moths to solve the optimal open loop control problem of a mobile robot movement]. *Modelirovanie i analiz dannykh* [Modeling and Data Analysis] 15(1):81–109. doi: 10.17759/mda.2025150105. EDN: PPGMJB.
23. Davendra, D., and I. Zelinka, eds. 2016. *Self-organizing migrating algorithm. Methodology and implementation*. Studies in computational intelligence ser. Cham: Springer. Vol. 626. 289 p. doi: 10.1007/978-3-319-28161-2.
24. Pantelev, A., and V. Rakitianskii. 2023. Application of migrating optimization algorithms in problems of optimal control of discrete-time stochastic dynamical systems. *Axioms* 12(11):1014. 22 p. doi: 10.3390/axioms12111014. EDN: GTSEYV.
25. Pantelev, A. V., and A. A. Kolessa. 2022. Optimal open-loop control of discrete deterministic systems by application of the perch school metaheuristic optimization algorithm. *Algorithms* 15(5):157. 16 p. doi: 10.3390/a15050157. EDN: FVVSIP.
26. Pantelev, A. V., and A. A. Kolessa. 2022. Application of the tomtit flock metaheuristic optimization algorithm to the optimal discrete time deterministic dynamical control problem. *Algorithms* 15(9):301. 19 p. doi: 10.3390/a15090301. EDN: RDMOTY.
27. Bosov, A. V. 2025. Stabilizatsiya traektorii lineynoy sistemy so skachkoobraznym dreyfom pri tselochislennykh ogranicheniyakh na upravlenie [Stabilization of the trajectory of a linear system with jumping drift under integer control constraints]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(3):10–18. doi: 10.14357/19922264250302. EDN: YZEHCC.
28. Borisov, A. V., A. N. Ignatov, and V. A. Borisov. 2025. Optimizatsiya skorostnogo rezhima gruzovogo poezda po kriteriyu srednego ushcherba ot avari [Optimization of a train speed profile based on the expected accident damage criterion]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(3):27–35 doi: 10.14357/19922264250304. EDN: BJFFCD.
29. Ivanov, S. V., Ya. G. Martyushova, A. V. Naumov, and A. E. Stepanov. 2025. Optimizatsiya po kvantil'nomu kriteriyu pozitsionnoy strategii testiruyemogo v dinamicheskoy modeli prokhozheniya ogranichennogo po vremeni testa [Optimization according to the quantile criterion of the test taker position strategy in the dynamic model of passing the time-limited test]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(4):65–71. doi: 10.14357/19922264250407. EDN: LZGUSS.
30. Nekoo, S. R., J. A. Acosta, and A. Ollero. 2022. A search algorithm for constrained engineering optimization and tuning the gains of controllers. *Expert Syst. Appl.* 206:117866. 27 p. doi: 10.1016/j.eswa.2022.117866.

Received February 10, 2026

Accepted May 15, 2026

## Contributors

**Pantelev Andrei V.** (b. 1955) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Cybernetics, Institute of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; [avpantelev@inbox.ru](mailto:avpantelev@inbox.ru)

**Khvoshnyanskaya Elizaveta A.** (b. 2001) — assistant professor, Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russian Federation; [liza190401@mail.ru](mailto:liza190401@mail.ru)

# ФИЛЬТРАЦИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ\*

А. В. Борисов<sup>1</sup>, Ю. Н. Куринов<sup>2</sup>

**Аннотация:** Статья продолжает цикл работ, посвященных решению задач анализа и оценивания класса специальных марковских скачкообразных процессов (СМСП). Рассмотрена задача фильтрации состояний СМСП по дискретизованным наблюдениям, представленным приращениями диффузионного процесса, коэффициенты сноса и диффузии которого зависят от состояния сигнального процесса. Задача заключается в нахождении условного распределения оцениваемого сигнала относительно доступных наблюдений. Выведены уравнения оптимальной фильтрации и предложен численный алгоритм их реализации, основанный на построении аналитических аппроксимаций условных плотностей. Доказано утверждение, характеризующее их точность в зависимости от порядка аппроксимации. Качество предложенных оценок проиллюстрировано численным примером.

**Ключевые слова:** специальный марковский скачкообразный процесс; наблюдения с мультипликативными шумами; плотность условного распределения; дискретизованные наблюдения; аналитическая аппроксимация оценки фильтрации

DOI: 10.14357/19922264260205

EDN: NVORZE

## 1 Введение

Статья продолжает цикл работ [1–4], посвященных исследованию СМСП и решению для них прикладных задач анализа и оценивания. Наблюдения представлены приращениями диффузионного процесса с коэффициентами, зависящими от состояния СМСП. В [4] было представлено решение задачи оптимальной фильтрации состояний СМСП по диффузионным наблюдениям с мультипликативными шумами. Условное распределение выражалось через систему рекуррентно связанных стохастических уравнений типа Кушнера–Стратоновича и отдельных интегральных преобразований. Предлагаемая работа посвящена вопросам вычислительной реализации данной оценки.

Численные методы и алгоритмы решения задач нелинейной фильтрации широко представлены в современных исследованиях. Среди них можно выделить следующие направления: методы аппроксимации решений уравнений Кушнера–Стратоновича и Дункана–Мортенсена–Закаи, описывающих условное распределение оцениваемого процесса [5–7], методы субоптимальной фильтрации калмановского типа [8, 9], а также подходы,

основанные на методе Монте-Карло [10, 11]. Важным аспектом решения прикладной задачи считается нахождение баланса между точностью оценивания и вычислительной сложностью алгоритма. Алгоритмы субоптимальной фильтрации представляются вычислительно эффективными, в то же время они не имеют строгого математического обоснования, что в ряде случаев приводит к снижению качества оценивания и расходимости фильтров. Уравнения Кушнера–Стратоновича представляют собой стохастические интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, численное решение которых связано со значительными вычислительными затратами. Методы Монте-Карло обладают универсальной применимостью, однако требуют значительных вычислительных ресурсов.

Целью предлагаемой работы ставится разработка алгоритма решения задачи фильтрации состояний системы наблюдения в непрерывном времени путем перехода к непрерывно-дискретной системе. Помимо аппроксимации решения исходной непрерывной задачи подобный алгоритм имеет самостоятельную ценность из-за широкой практической распространенности непрерывно-дискретных систем наблюдения.

\* Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по Соглашению № 075-15-2025-345. Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, aborisov@frcsc.ru

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, kurinovurij@gmail.com

Непрерывно-дискретные системы наблюдения широко представлены в прикладных задачах [12, 13]. Как правило, дискретизация наблюдений обусловлена физическими ограничениями измерительных систем, которые не позволяют регистрировать данные с частотой, достаточной для их моделирования в непрерывном времени. При этом непрерывность оцениваемого процесса во времени может быть принципиальной для задачи, что не позволяет перейти к полностью дискретной системе. Кроме того, численные схемы фильтрации в непрерывном времени характеризуются низкой устойчивостью, особенно при увеличении шага дискретизации [14].

Статья организована следующим образом: в разд. 2 содержится описание системы наблюдения и постановка задачи оптимальной фильтрации. В разд. 3 представлено решение задачи фильтрации в виде рекуррентных соотношений, описывающих динамику условной плотности распределения СМСП относительно наблюдений, а также предложена их аналитическая аппроксимация. В разд. 4 рассмотрен численный пример фильтрации траектории, демонстрирующий влияние неопределенности параметров априорных распределений на качество оценки. Раздел 5 содержит выводы и заключительные замечания.

## 2 Постановка задачи фильтрации

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией Винера–Пуассона [15]  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$  рассматривается система наблюдения

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{Z}_0 + \int_0^t D^Z \mathbf{Z}_s ds + \mu_t^Z; \quad (1)$$

$$\Delta \xi_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(Z_s) ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(Z_s) dw_s, \quad k = \overline{1, K}, \quad (2)$$

в которой непрерывный процесс  $\mathbf{Z}_t$  определяет оцениваемое состояние, а наблюдения  $\Delta \xi_k$  поступают в дискретные моменты времени  $t_k = kh$  ( $h > 0$  — некоторый шаг) и представляют собой дискретизованный во времени диффузионный процесс

$$\xi_t = \int_0^t f(Z_s) ds + \int_0^t g(Z_s) dw_s. \quad (3)$$

Состояние  $\mathbf{Z}_t = \text{col}(\theta_t, Y_t^1 \theta_t, \dots, Y_t^M \theta_t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^{MN}$  представляет собой процесс, ассоциированный с СМСП  $Z_t \triangleq \text{col}(\theta_t, Y_t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M$  [1], распределение которого определяется матрицей

интенсивностей переходов  $\Lambda$ , начальным распределением  $p_0$  компоненты  $\theta_0$ , начальным распределением  $\Pi_0 = \text{col}(\pi_0^1(y), \dots, \pi_0^N(y))$  компоненты  $Y_0$  и распределением  $\Pi = \text{col}(\pi^1(y), \dots, \pi^N(y))$  компоненты  $Y_t$  после первого скачка.

В дискретизованных наблюдениях  $\Delta \xi_k$  коэффициенты сноса  $f(\cdot)$  и диффузии  $g(\cdot)$  — функции состояния, а  $w_t \in \mathbb{R}^K$  —  $\mathcal{F}_t$ -согласованный винеровский процесс.

Задача оптимальной фильтрации по дискретизованным наблюдениям заключается в нахождении условного распределения  $(\theta_{t_k}, Y_{t_k})$  относительно сигма-алгебры доступных наблюдений  $\mathcal{O}_k \triangleq \sigma\{\Delta \xi_1, \dots, \Delta \xi_k\}$ .

Для корректного вывода уравнений фильтрации предположим, что для системы наблюдения (1), (2) выполнены следующие условия:

- (а)  $h|\lambda_{ii}| < 1, i = \overline{1, N}$ , — шаг дискретизации наблюдений достаточно мал по сравнению с интенсивностями выхода из состояний процесса  $\theta_t$ ;
- (б)  $g(e, y) \geq cI, c > 0, \forall (e, y) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M$ , — равномерная невырожденность шумов в наблюдениях;
- (в)  $\sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} [\|f(e_n, y)\|^2 + \|g(e_n, y)\|^2] (\pi^n(y) + \pi_0^n(y)) dy < \infty$  — условие, обеспечивающее для наблюдаемого процесса  $\xi$  существование моментов до второго включительно.

Условия (а)–(в) гарантируют, что условное распределение  $Z_{t_i} = (\theta_{t_i}, Y_{t_i})$  относительно  $\mathcal{O}_k$  выражается с помощью условной плотности  $\psi_{t_k}(y) \triangleq \text{col}(\hat{\psi}_{t_k}^1(y), \dots, \hat{\psi}_{t_k}^N(y))$ , обладающей тем свойством, что

$$\mathcal{P}\{\theta_{t_k} = e_n, Y_{t_k} \in B | \mathcal{O}_k\} = \int_B \hat{\psi}_{t_k}^n(y) dy$$

для всех  $n = \overline{1, N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ .

## 3 Решение задачи фильтрации

Введем следующие обозначения:

- $N_k^\theta$  — число скачков марковского скачкообразного процесса (МСП)  $\theta$  на  $[t_k, t_{k+1}]$ ;
- $\alpha_i^k, i \geq 0$ , — момент  $i$ -го скачка МСП  $\theta$  на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$ , причем  $\alpha_0^k \triangleq t_k$ ;
- $\Delta \alpha_i^k \triangleq \alpha_{i+1}^k - \alpha_i^k, i \geq 0$ , — время пребывания процесса в некотором состоянии, при этом  $\mathcal{P}\{N_k^\theta = r, \alpha_{r+1}^k = t_{k+1}\} = 1$ ; заметим, что  $\sum_i \Delta \alpha_i^k = h$ ;
- $\mathcal{U}_r \triangleq \{u \in \mathbb{R}_+^{r+1} : u_0 + u_1 + \dots + u_r = h\}$  — симплекс, являющийся носителем распределения случайных величин  $\{\Delta \alpha_i^k\}$ .

Дискретизованные наблюдения (2) можно представить как

$$\begin{aligned} \Delta \xi_k = & \sum_{i=0}^{N_k^\theta} \left( \int_{\alpha_i^k}^{\alpha_{i+1}^k} f(\theta_{\alpha_i^k}, Y_{\alpha_i^k}) ds + \right. \\ & \left. + \int_{\alpha_i^k}^{\alpha_{i+1}^k} g(\theta_{\alpha_i^k}, Y_{\alpha_i^k}) dw_s \right) = \sum_{i=0}^{N_k^\theta} \Delta \alpha_i^k f(\theta_{\alpha_i^k}, Y_{\alpha_i^k}) + \\ & + \sum_{i=0}^{N_k^\theta} g(\theta_{\alpha_i^k}, Y_{\alpha_i^k}) (w_{\alpha_{i+1}^k} - w_{\alpha_i^k}). \end{aligned}$$

Ввиду скачкообразного характера  $Z_t$  коэффициенты сноса и диффузии процесса (3) остаются постоянными на интервалах между скачками СМСП  $[\alpha_i^k, \alpha_{i+1}^k]$ . Таким образом, приращение может быть представлено в виде случайной суммы. Поскольку приращения винеровского процесса являются гауссовскими случайными величинами, распределение дискретизованных наблюдений при фиксированной траектории  $Z_{[t_{k-1}, t_k]}$  также оказывается гауссовским:

$$\Delta \xi_k \sim \mathcal{N} \left( \sum_{i=0}^{N_k^\theta} \Delta \alpha_i^k f(\theta_{\alpha_i^k}, Y_{\alpha_i^k}), \sum_{i=0}^{N_k^\theta} \Delta \alpha_i^k g g^\top (\theta_{\alpha_i^k}, Y_{\alpha_i^k}) \right). \quad (4)$$

Данное распределение позволяет получить оценку филътрации с помощью обобщенной формулы Байеса [16, 17]. Формула (4) показывает, что распределение наблюдений представляет собой сдвиг-масштабную смесь гауссовских распределений. При этом смешивающее распределение имеет достаточно сложную структуру, поскольку выражается через распределение СМСП на всем интервале наблюдений.

Обозначим через  $\rho$  совместное распределение скачков и значений процесса  $\theta$  на отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$  при условии  $\{\theta_{t_k} = e\}$ :

$$\begin{aligned} \rho_r^{i_1, \dots, i_r}(du | e) = \\ = \mathcal{P} \left\{ N_k^\theta = r, \Delta \alpha_0^k \in du_0, \Delta \alpha_1^k \in du_1, \theta_{\alpha_1^k} = e_{i_1}, \dots, \right. \\ \left. \Delta \alpha_r^k \in du_r, \theta_{\alpha_r^k} = e_{i_r} | \theta_{\alpha_0^k} = e \right\}. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Условная плотность распределения  $\hat{\psi}_{t_k}^m(y)$  определяется следующей рекуррентной схемой:

$$\hat{\psi}_{t_k}^m(y) = \frac{\tilde{\psi}_{t_k}^m(y, \Delta \xi_k)}{\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \tilde{\psi}_{t_k}^j(v, \Delta \xi_k) dv}, \quad m = \overline{1, N}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{t_k}^m(y, x) = \\ = \sum_{n=1}^N \sum_{r=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^M} \Phi^r(m, y, x | n, v) \hat{\psi}_{t_{k-1}}^n(v) \nu^r(y, dv), \\ m = \overline{1, N}, \quad (6) \end{aligned}$$

есть совместная условная плотность  $(\theta_{t_k}, Y_{t_k}, \Delta \xi_k)$  относительно  $\mathcal{O}_{k-1}$ ;  $\Phi^r(\cdot)$  представляет условную переходную плотность пары  $(Z_{t_k}, \Delta \xi_k)$  за  $r$  скачков процесса  $Z$ , произошедших на интервале времени  $[t_{k-1}, t_k]$ :

$$\begin{aligned} \Phi^r(n, \gamma, x | i_0, y_0) = (\mathcal{P} \{ N_k^\theta = r, \theta_{t_k} = e_n, Y_{t_k} \in d\gamma, \\ \Delta \xi_k \in dx | \theta_{t_{k-1}} = i_0, Y_{t_{k-1}} = y_0 \}) / (d\gamma dx); \end{aligned}$$

$\nu^0(y, dv) = \delta_y(dv)$  — мера Дирака, сосредоточенная в точке  $y$ ;  $\nu^r(y, dv) = L(dv)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , — мера Лебега на  $\mathbb{R}^M$ .

Начальное условие  $\hat{\psi}_0(y)$  для рекурсии имеет вид:

$$\hat{\psi}_0^n(y) = p_0^n \pi_0^n(y), \quad m = \overline{1, N}.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении 1.

Явный вид  $\Phi^r(\cdot)$  может быть легко получен, исходя из марковского свойства  $Z_t$  и явного вида переходных вероятностей компоненты  $\theta_t$  [18]:

$$\begin{aligned} \Phi^0(n, \gamma, x | i_0, y_0) = \\ = \delta_{ni_0} \mathcal{N}(x, hf(e_n, \gamma), hgg^\top(e_n, \gamma)) e^{h\lambda_{nn}}; \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^r(i_r, y_r, x | i_0, y_0) = \pi^{i_r}(y_r) \int_{\mathcal{U}_r} \int_{\mathbb{R}^M \times (r-1)} \sum_{i_1=1}^N \dots \\ \dots \sum_{i_{r-1}=1}^N \mathcal{N} \left( x, \sum_{j=0}^r u_j f(e_{i_j}, y_j), \sum_{j=0}^r u_j g g^\top(e_{i_j}, y_j) \right) \times \\ \times \pi^{i_1}(y_1) \dots \pi^{i_{r-1}}(y_{r-1}) dy_1 \dots \\ \dots dy_{r-1} \rho_r^{i_0, i_1, \dots, i_r}(du | e_{i_0}) \quad \text{при } r \in \mathbb{N}. \quad (8) \end{aligned}$$

Уравнения (5) и (6) содержат бесконечные суммы, связанные с произвольным числом скачков СМСП на интервале дискретизации наблюдений. Следует отметить, что упомянутые суммы не могут быть вычислены аналитически, что препятствует непосредственной численной реализации (5) и (6). Тем не менее для любой доверительной вероятности  $\beta$  с помощью пуассоновского распределения можно вычислить такое максимальное число скачков  $s$  на временном отрезке длины  $h$ , превысить

которое СМСП  $Z_t$  может с вероятностью, не большей  $1 - \beta$ . Это соображение позволяет использовать в (6) лишь конечное число слагаемых подобно тому, как это было сделано в [19] для аппроксимации решения задачи фильтрации состояний МСП с конечным множеством состояний

Рассмотрим *аналитическую аппроксимацию порядка  $s$  оценки фильтрации*  $\check{\psi}_{t_k}^m(y | s)$ , ограничивая в выражении (6) бесконечную сумму числом  $s \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{t_k}^m(y, x | s) = \\ = \sum_{n=1}^N \sum_{r=0}^s \int_{\mathbb{R}^M} \Phi^r(m, y, x | n, v) \check{\psi}_{t_{k-1}}^n(v | s) \nu^r(y, dv), \\ m = \overline{1, N}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \check{\psi}_{t_k}^m(y | s) = \frac{\bar{\psi}_{t_k}^m(y, \Delta \xi_k | s)}{\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \bar{\psi}_{t_k}^j(v, \Delta \xi_k | s) dv}, \\ m = \overline{1, N}. \quad (10) \end{aligned}$$

Выражения (9) и (10) описывают условное распределение  $Z_t$  относительно наблюдений при условии, что на  $[t_{k-1}, t_k)$  произошло не более  $s$  скачков СМСП.

Рассмотрим показатель точности аналитической аппроксимации на  $k$ -м шаге:

$$\varepsilon_k(s) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \mathbb{E} \left[ \left| \hat{\psi}_{t_k}^m(y) - \check{\psi}_{t_k}^m(y | s) \right| \right] dy.$$

Данный показатель равен среднему расстоянию полной вариации между условным распределением  $\hat{\psi}$  и его аппроксимацией  $\check{\psi}$ .

**Теорема 2.** Показатель точности аналитической аппроксимации  $s$ -го порядка ограничен сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(s) \leq \\ \leq 1 - \left( 1 - \exp\{h(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})\} \frac{(h\lambda_{\max})^{s+1}}{(s+1)!} \right)^k, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\lambda_{\max} = \max_{i=1, N} |\lambda_{ii}|; \quad \lambda_{\min} = \min_{i=1, N} |\lambda_{ii}|.$$

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении 2.

Данное утверждение позволяет контролировать точность применяемого численного алгоритма путем изменения числа учитываемых скачков  $s$ . На практике шаг дискретизации наблюдений и интенсивности переходов обычно ограничены известными величинами. Таким образом, варьировать

можно параметр  $s$ , который предлагается выбирать в соответствии с соотношением (11) для достижения компромисса между допустимой и требуемой точностью оценивания, с одной стороны, и объемом вычислительных затрат — с другой.

## 4 Численный пример

Продemonстрируем работу описанного алгоритма на численном примере. Специальный МСП имеет следующие параметры:

$$\begin{aligned} \Lambda = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,01 & -0,06 & 0,05 \\ 0,15 & 0,1 & -0,25 \end{pmatrix}; \quad p_0 = \begin{pmatrix} 0,098 \\ 0,686 \\ 0,216 \end{pmatrix}; \\ \pi^1(y) \sim R[0,2; 0,4]; \\ \pi^2(y) \sim R[0,3; 0,5]; \\ \pi^3(y) \sim R[0,4; 0,6]. \end{aligned}$$

Измерения  $\xi$  представлены следующей моделью:

$$\xi_t = \int_0^t \sqrt{Y_s} dw_s \in \mathbb{R}^L.$$

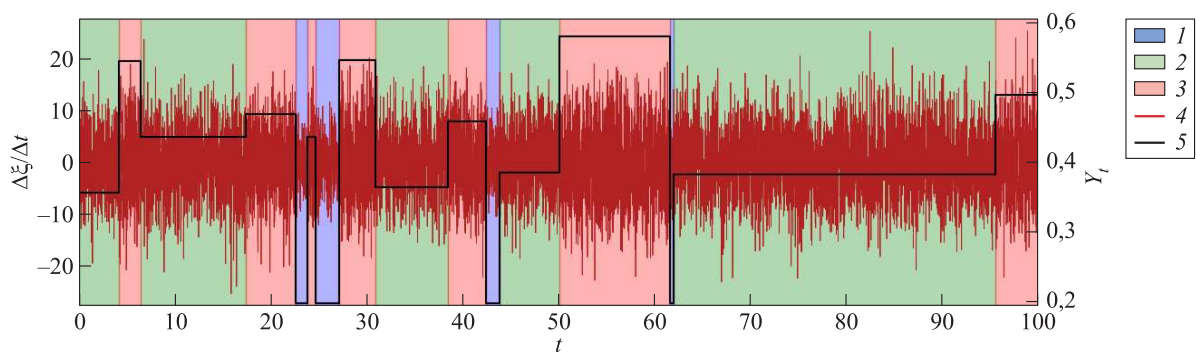
Таким образом, полезный сигнал представлен интенсивностью шумов в наблюдениях. Отсутствие коэффициента сноса осложняет оценивание, поэтому данный пример можно считать вариантом стрессового тестирования предложенного алгоритма фильтрации, когда необходимо достичь приемлемой точности при наличии малоинформативных наблюдений.

На рис. 1 представлены доступные наблюдения  $\Delta \xi_k$ , шаг дискретизации  $h_{\text{obs}} = 2 \cdot 10^{-3}$ . Цветом фона показано истинное состояние процесса  $\theta_t$ .

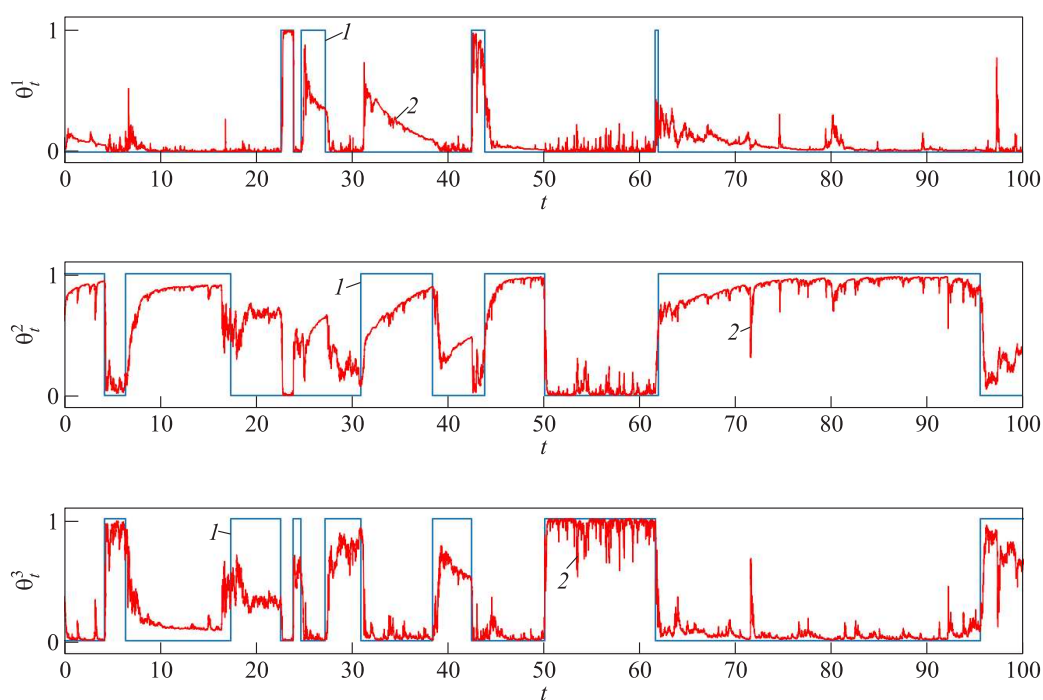
Специальный МСП моделировался в непрерывном времени с помощью условного распределения времени пребывания в текущем состоянии относительно предыдущего, а также условных вероятностей переходов для процесса  $\theta$ . Данный подход позволяет обеспечить корректность эксперимента в контексте аналитической аппроксимации.

Фильтрация проводилась с шагом дискретизации  $h_{\text{filter}} = h_{\text{obs}}$ , в алгоритме использовалась аналитическая аппроксимация порядка  $s = 1$ , результаты представлены на рис. 2 и 3.

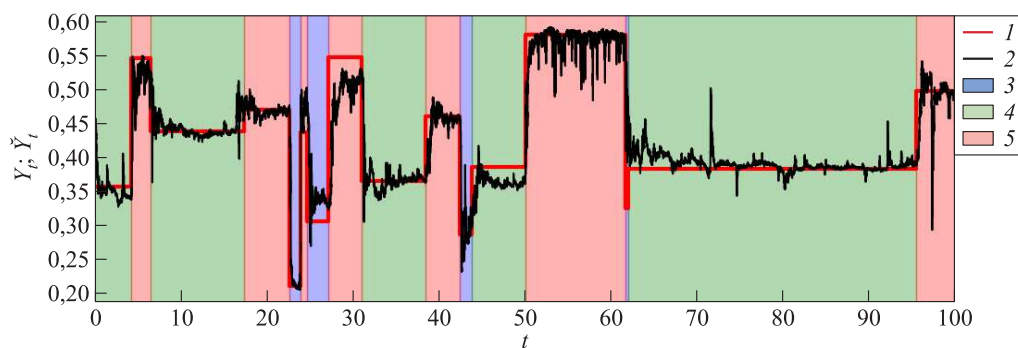
Отметим относительно низкую точность оценивания  $\theta$  при удовлетворительном качестве оценивания  $Y$ . Это явление обусловлено пересечением носителей условных распределений  $\pi^n(y)$ , вследствие чего даже при прямом наблюдении компоненты  $Y$  невозможно однозначно восстановить состояние  $\theta$ . На интервале  $t \in [17,42; 22,64]$  реализация  $Y_t$  рав-



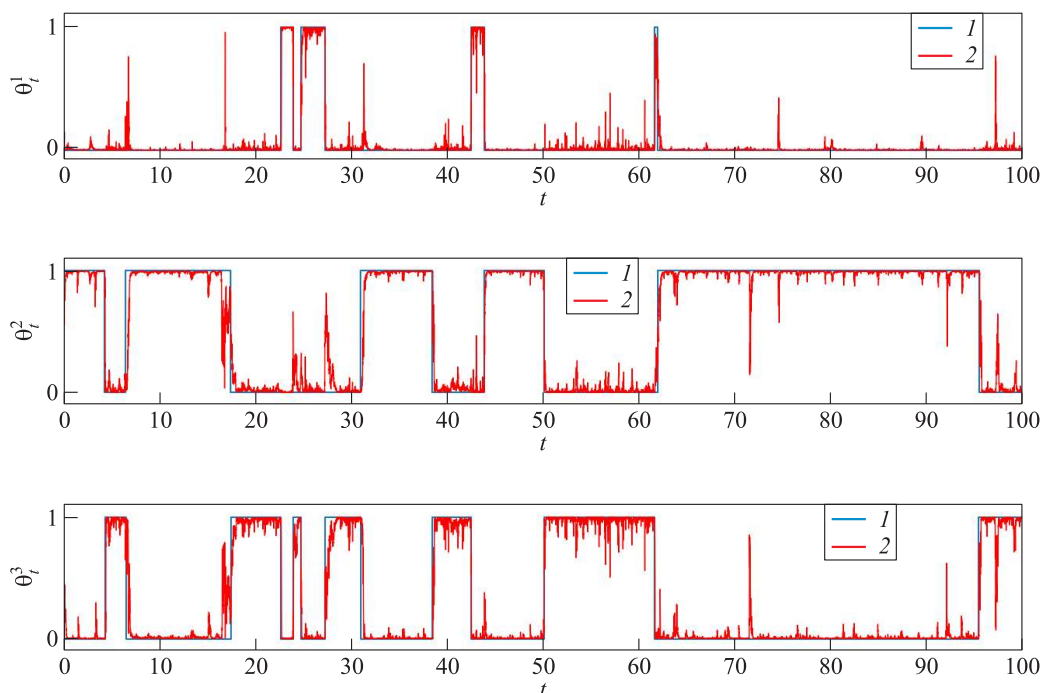
**Рис. 1** Доступные наблюдения  $\Delta\xi$ : 1 —  $\theta_t = e_1$ ; 2 —  $e_2$ ; 3 —  $\theta_t = e_3$ ; 4 —  $\Delta\xi_t/\Delta t$ ; 5 —  $Y_t$



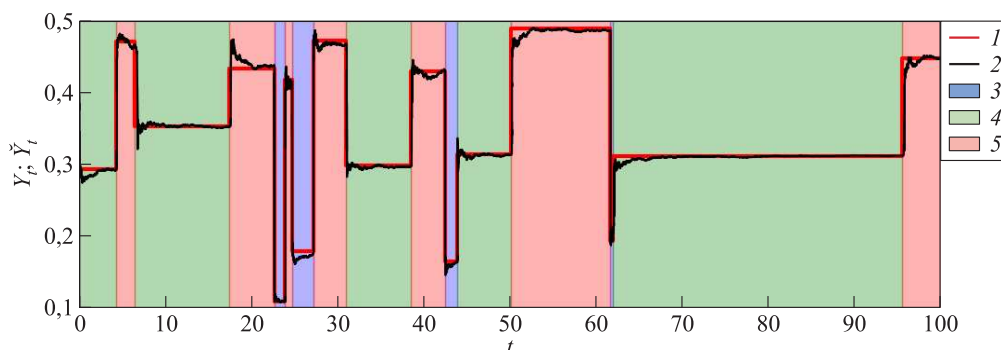
**Рис. 2** Состояние  $\theta_t$  (1) и его оценка  $\hat{\theta}_t$  (2)



**Рис. 3** Состояние  $Y_t$  (1) и его оценка  $\hat{Y}_t$  (2); 3 —  $\theta = e_1$ ; 4 —  $e_2$ ; 5 —  $\theta = e_3$



**Рис. 4** Состояние  $\theta_t$  (1) и его оценка  $\check{\theta}_t$  (2) — случай непересекающихся носителей условных распределений  $Y$



**Рис. 5** Состояние  $Y_t$  (1) и его оценка  $\check{Y}_t$  (2) — случай непересекающихся носителей условных распределений  $Y$ : 3 —  $\theta = e_1$ ; 4 —  $e_2$ ; 5 —  $\theta = e_3$

на 0,47 и принадлежит пересечению носителей рассматриваемых распределений, что приводит к ухудшению точности оценивания  $\theta$  на данном отрезке времени.

На рис. 4 и 5 представлены результаты фильтрации СМСП при той же траектории  $\theta$ , но с распределениями  $\pi$ , сосредоточенными на непересекающихся интервалах:  $\pi^1(y) \sim R[0,1; 0,3]$ ;  $\pi^2(y) \sim R[0,3; 0,5]$ ;  $\pi^3(y) \sim R[0,5; 0,7]$ .

Полученные результаты демонстрируют, что при пересекающихся носителях распределений  $\pi^i$  оценка компоненты  $\theta$  может иметь посредственное качество даже при высоком качестве оценивания компоненты  $Y$ .

## 5 Заключение

В статье рассмотрена задача оптимальной фильтрации СМСП по дискретизованным наблюдениям с мультипликативными шумами. Представлены уравнения оптимальной нелинейной фильтрации, описывающие динамику условной плотности распределения.

Предложена аналитическая аппроксимация условного распределения. Она построена при дополнительном предположении, что на интервалах дискретизации произошло не более заданного числа скачков, определяющего порядок аппроксимации. Приведена оценка точности аппроксимации в зависимости от ее порядка, шага дискретизации

и параметров системы. Данная оценка не учитывает погрешность приближенного вычисления интегралов, что представляется предметом дальнейших исследований.

Результаты работы могут применяться в различных прикладных задачах оценивания при наличии дискретизованных наблюдений или при высокочастотном потоке наблюдений, регистрируемых в случайные моменты времени.

Полученные результаты расширяют класс задач оптимальной фильтрации для скачкообразных стохастических систем и могут быть использованы при построении вычислительно эффективных алгоритмов оценивания в условиях дискретных наблюдений.

## Приложение 1

**Доказательство теоремы 1.** Проведем доказательство аналогично [17]. Рассмотрим выражения (7) и (8). Здесь гауссовская плотность  $\mathcal{N}$  представляет собой распределение наблюдений при фиксированной траектории  $Z_t$  (4). Траектория описывается параметрами  $(r, e_{i_j}, y_j, u_j)$  — числом скачков на отрезке длины  $h$ , состояниями  $\theta$ , значениями  $Y$  и временами пребывания в различных состояниях. Проинтегрировав рассматриваемую плотность по данным параметрам, заключаем, что  $\Phi^r(i_r, y_r, x | i_0, y_0)$  представляет собой переходную плотность следующего распределения:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(N_k^\theta = r, \Delta\xi_{k+1} \in B_1, \theta_{t_{k+1}} = e_{i_r}, \\ Y_{t_{k+1}} \in B_2 | \theta_{t_k} = e_{i_0}, Y_{t_k} = y_0) = \\ = \int_{B_1} \int_{B_2} \Phi^r(i_r, y_r, x | i_0, y_0) dy_r dx, \\ B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^L), B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, выражение

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \Phi^r(m, y, x | n, v) \hat{\psi}_{t_k}^n(v) dv$$

представляет собой совместную плотность распределения  $(\theta_{t_{k+1}}, Y_{t_{k+1}}, \Delta\xi_{k+1})$  относительно  $\mathcal{O}_k$ .

Истинность формулы (5) следует из марковского свойства системы наблюдения и вычисляется по известной совместной плотности состояния и наблюдения [17]. Теорема 1 доказана.

## Приложение 2

**Доказательство теоремы 2.** Обозначим  $\mathcal{O}_0 = \sigma\{\emptyset, \Omega\}$  и введем события  $H_s^k = \{N_1^\theta \leq s, \dots, N_k^\theta \leq s\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  и  $H_s^0 = \Omega$ , заключающиеся в том, что на всех интервалах дискретизации произошло не более  $s$  скачков СМСП  $Z$ .

Заметим, что  $\check{\psi}_{t_0}(y | s) = p_0^m \pi_m^0(y)$ . Покажем при помощи математической индукции, что меры, соответствующие плотностям  $\check{\psi}_{t_k}$ ,  $k = \mathbb{Z}_+$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} \check{\eta}_k(A | s) &= \frac{1}{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\}} \mathbb{E} \left[ \mathbf{I}_A(Z_{t_k}(\omega)) \mathbf{I}_{H_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k \right] = \\ &= \frac{\mathcal{P}\{H_s^k, Z_{t_k} \in A | \mathcal{O}_k\}}{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Достаточно доказать утверждение для множеств вида  $e \times A$ , где  $e \in \mathbb{S}^N$ ,  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ .

**База индукции:** пусть  $k = 0$ , тогда в силу определения  $\check{\psi}_{t_0}^m(y | s)$ ,  $H_s^0$  и  $\mathcal{O}_0$  имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}\{H_s^0, \theta_{t_0} = e_m, Y_{t_0} \in B | \mathcal{O}_0\}}{\mathcal{P}\{H_s^0 | \mathcal{O}_0\}} &= \\ = \frac{\mathcal{P}\{H_s^0, \theta_{t_0} = e_m, Y_{t_0} \in B\}}{\mathcal{P}\{H_s^0\}} &= \\ = \mathcal{P}\{H_s^0, \theta_{t_0} = e_m, Y_{t_0} \in B\} &= p_0^m \int_B \pi_m^0(y) dy = \\ = \mathcal{P}\{\theta_{t_0} = e_m, Y_{t_0} \in B\} \int_B \check{\psi}_{t_0}^m(y | s) dy. \end{aligned}$$

**Шаг индукции:** пусть для  $t_{k-1}$ ,  $k \geq 1$ , верно следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}\{H_s^{k-1}, \theta_{t_{k-1}} = e_m, Y_{t_{k-1}} \in B | \mathcal{O}_{k-1}\}}{\mathcal{P}\{H_s^{k-1} | \mathcal{O}_{k-1}\}} &= \\ = \int_B \check{\psi}_{t_{k-1}}^m(y | s) dy. \end{aligned}$$

В силу (12) для всех  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^L)$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}\{N_k^\theta \leq s, H_s^{k-1}, \theta_{t_k} = e_m, Y_{t_k} \in B, \Delta\xi_k \in C | \mathcal{O}_{k-1}\}}{\mathcal{P}\{H_s^{k-1} | \mathcal{O}_{k-1}\}} &= \\ = \sum_{r=0}^s \sum_{n=1}^N \int_B \int_C \int_{\mathbb{R}^M} \Phi^r(m, y, x | n, v) \times \\ \times \underbrace{\check{\psi}_{t_{k-1}}^n(v | s) \nu^r(y, dv)}_{\check{\eta}_{k-1}(\{e_n\} \times dv)} dx dy. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) следуют равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{H_s^k, \theta_{t_k} = e_m, Y_{t_k} \in B | \mathcal{O}_k\} &= \\ = \left( \sum_{r=0}^s \sum_{n=1}^N \int_B \int_{\mathbb{R}^M} \Phi^r(m, y, \Delta\xi_k | n, v) \check{\eta}_{k-1}(\{e_n\} \times dv) dy \right) / \\ / \left( \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{m', n'=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^M} \Phi^q(m', y', \Delta\xi_k | n', v') \times \right. \\ \left. \times \check{\eta}_{k-1}(\{e_{n'}\} \times dv') dy' \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\} &= \mathbb{E}[\mathbf{I}_{H_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] = \\ &= \left( \sum_{r=0}^s \sum_{m,n=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^M} \Phi^r(m, y, \Delta\xi_k | n, v) \times \right. \\ &\quad \times \check{\eta}_{k-1}(\{e_n\} \times dv) dy \Big) / \\ &\quad / \left( \sum_{q=0}^\infty \sum_{m',n'=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^M} \Phi^q(m', y', \Delta\xi_k | n', v') \times \right. \\ &\quad \times \check{\eta}_{k-1}(\{e_{n'}\} \times dv') dy' \Big) , \end{aligned}$$

из чего следует

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}\{H_s^k, \theta_{t_k} = e_m, Y_{t_k} \in B | \mathcal{O}_k\}}{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\}} &= \\ &= \left( \sum_{r=0}^s \sum_{n=1}^N \int_B \int_{\mathbb{R}^M} \Phi^r(m, y, \Delta\xi_k | n, v) \times \right. \\ &\quad \times \check{\eta}_{k-1}(\{e_n\} \times dv) dy \Big) / \\ &\quad / \left( \sum_{q=0}^s \sum_{m',n'=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^M} \Phi^q(m', y', \Delta\xi_k | n', v') \times \right. \\ &\quad \times \check{\eta}_{k-1}(\{e_{n'}\} \times dv') dy' \Big) = \int_B \check{\psi}_{t_k}^m(y | s) dy . \end{aligned}$$

Таким образом, представление (13) справедливо.

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \int |\hat{\psi}_{t_k}^m(y) - \check{\psi}_{t_k}^m(y | s)| dy .$$

Данный показатель, будучи метрикой полной вариации, допускает эквивалентное определение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \int |\hat{\psi}_{t_k}^m(y) - \check{\psi}_{t_k}^m(y | s)| dy &= \\ &= \sup_A |\mathcal{P}\{Z_{t_k} \in A | \mathcal{O}_k\} - \check{\eta}_k(A)| , \end{aligned}$$

где  $\check{\eta}_k(A)$  — мера, определяемая плотностью  $\check{\psi}_{t_k}(y | s)$ , а супремум берется по множествам из  $2^{\mathbb{S}^N} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ .

Для всех  $A \in 2^{\mathbb{S}^N} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{Z_{t_k} \in A | \mathcal{O}_k\} - \check{\eta}_k(A) &= \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) | \mathcal{O}_k] - \\ &- \frac{1}{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\}} \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{H_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] = \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{H_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] + \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{\bar{H}_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\}} \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{H_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] = \\ &= \frac{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\}}{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\}} \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{H_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] + \\ &\quad + \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{\bar{H}_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] - \\ &- \frac{1}{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\}} \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{H_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] = \\ &= \frac{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\} - 1}{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\}} \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{H_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] + \\ &\quad + \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{\bar{H}_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] = \\ &= - \frac{\mathcal{P}\{\bar{H}_s^k | \mathcal{O}_k\}}{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\}} \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{H_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] + \\ &\quad + \frac{\mathcal{P}\{\bar{H}_s^k | \mathcal{O}_k\}}{\mathcal{P}\{\bar{H}_s^k | \mathcal{O}_k\}} \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{\bar{H}_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] = \\ &= \mathcal{P}\{\bar{H}_s^k | \mathcal{O}_k\} \underbrace{\left( \frac{1}{\mathcal{P}\{\bar{H}_s^k | \mathcal{O}_k\}} \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{\bar{H}_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] - \right.} \\ &\quad \left. - \frac{1}{\mathcal{P}\{H_s^k | \mathcal{O}_k\}} \mathbb{E}[\mathbf{I}_A(Z_{t_k}) \mathbf{I}_{H_s^k}(\omega) | \mathcal{O}_k] \right) . \end{aligned}$$

Здесь  $\check{\eta}(A)$  также является некоторой вероятностной мерой.

Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(s) &= \mathbb{E} \left[ \sup_A |\mathcal{P}\{Z_{t_k} \in A | \mathcal{O}_k\} - \check{\eta}_k(A)| \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[ \sup_A |\mathcal{P}\{\bar{H}_s^k | \mathcal{O}_k\} (\check{\eta}_k(A) - \check{\eta}(A))| \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathcal{P}\{\bar{H}_s^k | \mathcal{O}_k\} \sup_A |\check{\eta}_k(A) - \check{\eta}(A)| \right] \leq \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \mathcal{P}\{\bar{H}_s^k | \mathcal{O}_k\} \right] = \mathcal{P}\{\bar{H}_s^k\} . \end{aligned}$$

Ограничим  $\mathcal{P}\{\bar{H}_s^k\}$ . Для этого рассмотрим вероятность следующего события:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(N_k^\theta \geq s+1) &\leq e^{-\lambda_{\min} h} \sum_{r=s+1}^\infty \frac{(\lambda_{\max} h)^r}{r!} = \\ &= e^{(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})h} \frac{\zeta^{s+1}}{(s+1)!} , \end{aligned}$$

где последнее равенство имеет место в силу теоремы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа,  $\zeta \in (0, \lambda_{\max} h)$ . Поэтому

$$\mathcal{P}(N_k^\theta \geq s+1) \leq e^{(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})h} \frac{(h\lambda_{\max})^{s+1}}{s+1} ,$$

откуда следует, что

$$\mathcal{P}\left\{\overline{H}_s^k\right\} \leq 1 - \left(1 - e^{(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})h} \frac{(h\lambda_{\max})^{s+1}}{(s+1)!}\right)^k.$$

Теорема 2 доказана.

## Литература

1. Борисов А., Куринов Ю., Смелянский Р. Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 30–37. doi: 10.14357/19922264240304. EDN: XPVTGJ.
2. Борисов А., Куринов Ю., Смелянский Р. Фильтрация состояний класса марковских скачкообразных процессов по разнородным наблюдениям с аддитивными шумами // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 10–18. doi: 10.14357/19922264240402. EDN: FEMNQL.
3. Борисов А., Куринов Ю., Смелянский Р. Математическое обеспечение мониторинга состояний и характеристик сетевого соединения по комплексной статистической информации // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 2. С. 35–44. doi: 10.14357/19922264250205. EDN: NSVAYD.
4. Борисов А. Фильтрация специальных марковских скачкообразных процессов по наблюдениям с мультипликативными шумами // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 4. С. 2–11. doi: 10.14357/19922264250401. EDN: CVUOMY.
5. Kushner H., Dupuis P. Numerical methods for stochastic control problems in continuous time. — 2nd ed. — Stochastic modelling and applied probability ser. — New York, NY, USA: Springer, 2001. 500 p. doi: 10.1007/978-1-4613-0007-6.
6. Sun Z., Yau S. Solving nonlinear filtering problems with correlated noise based on Hermite–Galerkin spectral method // Automatica, 2023. Vol. 156. Iss. 10. Art. 111176. 14 p. doi: 10.1016/j.automatica.2023.111176.
7. Yau S., Chen X., Jiao X., et al. Principles of nonlinear filtering theory. — Algorithms and computation in mathematics ser. — Cham: Springer, 2024. Vol. 33. 508 p. doi: 10.1007/978-3-031-77684-7.
8. Simon D. Optimal state estimation: Kalman,  $H^\infty$  and nonlinear approaches. — New York, NY, USA: Wiley, 2006. 520 p. doi: 10.1002/0470045345.
9. Särkkä S., Svensson L. Bayesian filtering and smoothing. — Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2023. 438 p. doi: 10.1017/9781108917407.
10. Wills A., Schön T. Sequential Monte Carlo: A unified review // Annual Review Control Robotics Autonomous Systems, 2023. Vol. 6. Iss. 1. P. 159–182. doi: 10.1146/annurev-control-042920-015119.
11. Stone L., Streit R., Anderson S. Introduction to Bayesian tracking and particle filters. — Cham: Springer, 2023. 124 p. doi: 10.1007/978-3-031-32242-6.
12. Li X., Jilkov V. A survey of maneuvering target tracking — Part III: Measurement models // Proc. SPIE, 2001. Vol. 4473. P. 423–446. doi: 10.1117/12.492752.
13. Arasaratnam I., Haykin S., Hurd T. R. Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: Theory and simulations // IEEE T. Signal Proces., 2010. Vol. 58. Iss. 10. P. 4977–4993. doi: 10.1109/TSP.2010.2056923.
14. Platen E., Bruti-Liberati N. Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. 856 p. doi: 10.1007/978-3-642-13694-8.
15. Ishikawa Y., Kunita H. Malliavin calculus on the Wiener–Poisson space and its application to canonical SDE with jumps // Stoch. Proc. Appl., 2006. Vol. 116. No. 12. P. 1743–1769. doi: 10.1016/j.spa.2006.04.013.
16. Липцер Р., Ширяев А. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука, 1974. 696 с.
17. Бертсекас Д., Шрив С. Стохастическое оптимальное управление. Случай дискретного времени / Пер. с англ. — М.: Наука, 1985. 280 с. (Bertsekas D. P., Shreve S. E. Stochastic optimal control: The discrete-time case. — Orlando, FL, USA: Academic Press Inc., 1978. 323 p.)
18. Миллер Б., Миллер Г., Семенухин К. Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений // Автоматика и телемеханика, 2011. № 2. С. 111–130. EDN: NEJTEF.
19. Borisov A., Sokolov I. Optimal filtering of Markov jump processes given observations with state-dependent noises: Exact solution and stable numerical schemes // Mathematics, 2020. Vol. 8. No. 4. Art. 506. 22 p. doi: 10.3390/math8040506. EDN: XHZEZI.

Поступила в редакцию 22.02.2026

Принята к публикации 15.05.2026

# FILTERING OF SPECIAL MARKOV JUMP PROCESSES BY DISCRETIZED OBSERVATIONS

A. V. Borisov<sup>1,2</sup> and Yu. N. Kurinov<sup>2</sup><sup>1</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation<sup>2</sup>M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

**Abstract:** The paper continues a series of studies devoted to the analysis and estimation problems for a class of special Markov jump processes. It addresses the filtering problem for special Markov jump processes based on discretized observations represented by increments of a diffusion process whose drift and diffusion coefficients depend on the state of the signal process. The objective is to determine the conditional distribution of the estimated signal with respect to the available observations. The equations of optimal filtering are derived and a numerical algorithm for their implementation is proposed based on constructing analytical approximations of the corresponding conditional densities. A statement characterizing the approximation accuracy as a function of the approximation order is proven. The performance of the proposed estimates is illustrated by a numerical example.

**Keywords:** special Markov jump process; discretized observations; observation with multiplicative noise; conditional probability density; analytical approximation of filtering estimate

DOI: 10.14357/19922264260205

EDN: NVORZE

## Acknowledgments

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the Agreement No. 075-15-2025-345. The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (CKP “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

## References

1. Borisov, A., Yu. Kurinov, and R. Smeliarsky. 2024. Veroyatnostnyy analiz klassa markovskikh skachkoobraznykh protsessov [Probabilistic analysis of a class of Markov jump processes]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):30–37. doi: 10.14357/19922264240304. EDN: XPVTGJ.
2. Borisov, A., Yu. Kurinov, and R. Smeliarsky. 2024. Fil'tratsiya sostoyaniy klassa markovskikh skachkoobraznykh protsessov po raznorodnym nablyudeniyam s additivnymi shumami [Filtering of a class of Markov jump processes by heterogeneous observations with additive noises]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):10–18. doi: 10.14357/19922264240402. EDN: FEMNQL.
3. Borisov, A. V., Yu. N. Kurinov, and R. L. Smeliarsky. 2025. Matematicheskoe obespechenie monitoringa sostoyaniy i kharakteristik setevogo soedineniya po kompleksnoy statisticheskoy informatsii [Mathematical support for monitoring of states and numerical characteristics of network connection based on compound statistical information]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(2):35–44. doi: 10.14357/19922264250205. EDN: NSVAYD.
4. Borisov, A. V. 2025. Fil'tratsiya spetsial'nykh markovskikh skachkoobraznykh protsessov po nablyudeniyam s mul'tiplikativnymi shumami [Filtering of special Markov jump processes by observations with multiplicative noise]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(4):2–11. doi: 10.14357/19922264250401. EDN: CVUOMY.
5. Kushner, H., and P. Dupuis. 2001. *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time*. 2nd ed. Stochastic modelling and applied probability ser. New York, NY: Springer. 500 p. doi: 10.1007/978-1-4613-0007-6.
6. Sun, Z., and S. Yau. 2023. Solving nonlinear filtering problems with correlated noise based on Hermite–Galerkin spectral method. *Automatica* 156(10):111176. 14 p. doi: 10.1016/j.automatica.2023.111176.
7. Yau, S., X. Chen, X. Jiao, et al. 2024. *Principles of nonlinear filtering theory*. Algorithms and computation in mathematics ser. Cham: Springer. Vol. 33. 508 p. doi: 10.1007/978-3-031-77684-7.
8. Simon, D. 2006. *Optimal state estimation: Kalman,  $H^\infty$  and nonlinear approaches*. New York, NY: Wiley. 520 p. doi: 10.1002/0470045345.
9. Särkkä, S., and L. Svensson. 2023. *Bayesian filtering and smoothing*. 2nd ed. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press. 438 p. doi: 10.1017/9781108917407.
10. Wills, A., and T. Schön. 2023. Sequential Monte Carlo: A unified review. *Annual Review Control Robotics Autonomous Systems* 6(1):159–182. doi: 10.1146/annurev-control-042920-015119.
11. Stone, L., R. Streit, and S. Anderson. 2023. *Introduction to Bayesian tracking and particle filters*. Springer. 124 p. doi: 10.1007/978-3-031-32242-6.

12. Li, X., and V. Jilkov. 2001. A survey of maneuvering target tracking — Part III: Measurement models. *Proc. SPIE* 4473:423–446. doi: 10.1117/12.492752.
13. Arasaratnam, I., S. Haykin, and T. R. Hurd. 2010. Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: Theory and simulations. *IEEE T. Signal Proces.* 58(10):4977–4993. doi: 10.1109/TSP.2010.2056923.
14. Platen, E., and N. Bruti-Liberati. 2010. *Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance*. Berlin, Heidelberg: Springer. 856 p. doi: 10.1007/978-3-642-13694-8.
15. Ishikawa, Y., and H. Kunita. 2006. Malliavin calculus on the Wiener–Poisson space and its application to canonical SDE with jumps. *Stoch. Proc. Appl.* 116(12):1743–1769. doi: 0.1016/j.spa.2006.04.013.
16. Liptser, R. S., and A. N. Shiryaev. 1974. *Statistics of random processes: I. General theory*. 2nd ed. Applications of mathematics ser. Berlin; New York: Springer, 2001. Vol. 5. 443 p. doi: 10.1007/978-3-662-13043-8.
17. Bertsekas, D. P., and S. E. Shreve. 1978. *Stochastic optimal control: The discrete-time case*. Orlando, FL: Academic Press Inc. 323 p.
18. Miller, B. M., G. B. Miller, and K. V. Semenikhin. 2011. Methods to design optimal control of Markov process with finite state set in the presence of constraints. *Automat. Rem. Contr.* 72(2):323–341. doi: 10.1134/S000511791102010X. EDN: OHUBSJ.
19. Borisov, A., and I. Sokolov. 2020. Optimal filtering of Markov jump processes given observations with state-dependent noises: Exact solution and stable numerical schemes. *Mathematics* 8(4):506. 22 p. doi: 10.3390/math8040506. EDN: XHZEZI.

Received February 22, 2026

Accepted May 15, 2026

## Contributors

**Borisov Andrei V.** (b. 1965) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; aborisov@frcsc.ru

**Kurinov Yuri N.** (b. 2002) — master student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; kurinovurij@gmail.com

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ДИГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ВЫБОРКЕ СО СЛАБО ЗАВИСИМЫМИ КОМПОНЕНТАМИ\*

А. А. Кудрявцев<sup>1</sup>, О. В. Шестаков<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматривается дигамма-распределение, частные случаи которого представимы в виде обобщенного гамма-распределения и обобщенного бета-распределения второго рода. Обосновывается сильная состоятельность и доказывается асимптотическая нормальность оценок параметров дигамма-распределения, полученных при помощи модифицированного метода моментов, основанного на выборочных кумулянтах, в случае слабой зависимости компонент выборки. Рассматриваются оценки трех неизвестных параметров (характеристического показателя, параметров формы и масштаба) при фиксированных параметрах концентрации. Оценивание последних не рассматривается ввиду нетривиальности обращения полигамма-функций. Сформулированные утверждения относятся к ограниченному набору значений оцениваемых параметров, однако могут быть с легкостью перенесены на общий случай при помощи алгоритма выбора оценок, подробно изложенного в предыдущих цитируемых работах авторов. Доказательство основного утверждения базируется на достаточном условии слабой сходимости функций от асимптотически нормальных векторов. Результаты статьи могут быть использованы для широкого класса распределений, возникающих при описании процессов, для моделирования которых используются распределения с неотрицательным неограниченным носителем.

**Ключевые слова:** слабая зависимость; оценивание параметров; дигамма-распределение; смешанные распределения; метод моментов; кумулянты; асимптотическая нормальность

DOI: 10.14357/19922264260206

EDN: UOBWDQ

## 1 Введение

Обобщенное гамма-распределение [1–3] и обобщенное бета-распределение второго рода [4] вместе с их частными видами зарекомендовали себя удобными инструментами при моделировании широкого класса объектов и явлений в случае, когда исследователь имеет дело с неотрицательными неограниченными величинами. В работе [5] было предложено новое распределение, обобщающее перечисленные.

**Определение 1.** Будем говорить, что случайная величина  $\zeta$  имеет дигамма-распределение  $\text{DiG}(r, \nu, p, q, \delta)$  с характеристическим показателем  $r \in \mathbb{R}$  и параметрами формы  $\nu \neq 0$ , концентрации  $p, q > 0$  и масштаба  $\delta > 0$ , если ее преобразование Меллина задается соотношением

$$\mathcal{M}_{\zeta}(z) = \frac{\delta^z \Gamma(p + z/\nu) \Gamma(q - rz/\nu)}{\Gamma(p)\Gamma(q)},$$

$$p + \frac{\text{Re}(z)}{\nu} > 0, \quad q - \frac{r\text{Re}(z)}{\nu} > 0, \quad (1)$$

где  $\text{Re}(z)$  — действительная часть комплексного числа;  $\Gamma(z)$  — гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$$

При моделировании реальных явлений неизбежно возникает задача оценивания неизвестных параметров распределения по имеющимся статистическим данным. Моменты дигамма-распределения, как следует из (1), выражаются через немонотонные гамма-функции, а плотность представляется в терминах специальных гамма-экспоненциальной функции, функции Фокса и функции Мейера [5, 6], что приводит к затруднительности применения классических статистических методов оценивания, таких как метод моментов и максимального правдоподобия. По этой причине в [5] был предложен метод оценивания параметров распределения (1), основанный на логарифмических кумулянтах. Родственные задачи решались, например, в работах [7–9].

\*Статья подготовлена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (грант Минобрнауки России № 075-15-2025-345).

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, aakudryavtsev@cs.msu.ru

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Московский центр фундаментальной и прикладной математики; Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, oshestakov@cs.msu.ru

Также в ряде задач приходится рассматривать выборку из зависимых компонент. Такие ситуации возникают, например, при анализе различных геофизических процессов и анализе помех в коммуникационных каналах.

Пусть  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  — стационарная в строгом смысле последовательность случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , и  $\mathfrak{F}_k^m$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная случайными величинами  $X_i$ ,  $k \leq i \leq m$ . Обозначим через  $\mathcal{L}^2(\mathfrak{F}_k^m)$  совокупность всех  $\mathfrak{F}_k^m$ -измеримых случайных величин с конечными вторыми моментами. Определим максимальный коэффициент корреляции:

$$\rho(n) = \sup_{f, g} |\text{corr}(f, g)|, \quad f \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{F}_{-\infty}^0), \quad g \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{F}_n^\infty), \quad n > 0. \quad (2)$$

Условие  $\rho(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  означает ослабление зависимости в последовательности  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  между «прошлым» и «будущим».

В статье показывается асимптотическая нормальность оценок параметров дигамма-распределения, полученных при помощи модифицированного метода моментов. При этом предполагается, что компоненты выборки, по которой строятся оценки, слабо зависимы.

## 2 Построение оценок параметров

В данном разделе рассматривается основанный на логарифмических кумулянтах метод оценивания параметров  $r$ ,  $\nu$  и  $\delta$  дигамма-распределения (1) при фиксированных значениях параметров концентрации  $p$  и  $q$ . Оценивание параметров  $p$  и  $q$  представляет собой отдельную проблему ввиду сложности обращения полигамма-функции.

Приведем в качестве вспомогательных утверждения, опубликованные в [10]. В этой работе рассматривался частный случай распределения (1) при  $0 \leq r < 1$ , что не умаляет общности результатов.

Для получения явного вида теоретических логарифмических кумулянтов рассмотрим полигамма-функции

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z), \quad \psi^{(m)}(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} \ln \Gamma(z), \quad m = 1, 2, \dots$$

Теоретические кумулянты случайной величины  $\ln \zeta$ , где  $\zeta \sim \text{DiG}(r, \nu, p, q, \delta)$ , имеют вид [5]:

$$\kappa_1(r, \nu, \delta) = E \ln \zeta = \frac{\nu \ln \delta + \psi(p) - r\psi(q)}{\nu};$$

$$\begin{aligned} \kappa_m(r, \nu) &= (-i)^m \frac{d^m}{dy^m} \ln E \zeta^{iy} \Big|_{y=0} = \\ &= \frac{\psi^{(m-1)}(p) + (-r)^m \psi^{(m-1)}(q)}{\nu^m}, \quad m > 1. \end{aligned}$$

Моменты случайной величины  $\ln \zeta$  представимы в виде [11]:

$$\begin{aligned} \mu_m(r, \nu, \delta) &\equiv E \ln^m \zeta = \\ &= B_m(\kappa_1(r, \nu, \delta), \kappa_2(r, \nu), \dots, \kappa_m(r, \nu)), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $B_m$  — полный (экспоненциальный) полином Белла, рекуррентно определяемый как

$$\begin{aligned} B_{m+1}(x_1, \dots, x_{m+1}) &= \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k B_{m-k}(x_1, \dots, x_{m-k}) x_{k+1}, \quad B_0 = 1. \end{aligned}$$

Точный вид необходимых соотношений, связывающих моменты и кумулянты, представлен в [11].

Для определения выборочных логарифмических кумулянтов введем обозначение для выборочных логарифмических моментов случайной величины  $\zeta$ :

$$L_m(\mathbb{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln^m X_i,$$

где  $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$  — выборка из распределения  $\zeta$ .

Обозначим  $l = (l_1, l_2, l_3, l_4)$ . Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} K_1(l) &\equiv K_1(l_1) = \frac{l_1}{\psi(q)}; \\ K_2(l) &\equiv K_2(l_1, l_2) = \frac{l_2 - l_1^2}{\psi'(q)}; \\ K_3(l) &\equiv K_3(l_1, l_2, l_3) = \frac{l_3 - 3l_2l_1 + 2l_1^3}{\psi''(q)}; \\ K_4(l) &\equiv K_4(l_1, l_2, l_3, l_4) = \\ &= \frac{l_4 - 4l_3l_1 - 3l_2^2 + 12l_2l_1^2 - 6l_1^4}{\psi'''(q)}. \end{aligned}$$

Определим статистики

$$\begin{aligned} K_1(\mathbb{X}) &\equiv K_1(L_1(\mathbb{X})); \\ K_2(\mathbb{X}) &\equiv K_2(L_1(\mathbb{X}), L_2(\mathbb{X})); \\ K_3(\mathbb{X}) &\equiv K_3(L_1(\mathbb{X}), L_2(\mathbb{X}), L_3(\mathbb{X})); \\ K_4(\mathbb{X}) &\equiv K_4(L_1(\mathbb{X}), L_2(\mathbb{X}), L_3(\mathbb{X}), L_4(\mathbb{X})). \end{aligned}$$

Заметим, что статистики  $\psi^{(m-1)}(q)K_m(\mathbb{X})$  представляют собой  $m$ -е выборочные логарифмические кумулянты дигамма-распределения.

Рассматриваемый метод оценивания неизвестных параметров основан на решении системы уравнений для логарифмических кумулянтов:

$$\kappa_m(r, \nu, \delta) = \psi^{(m-1)}(q)K_m(\mathbb{X}), \quad m = \overline{1, 4}. \quad (4)$$

Для описания решения системы (4) введем в рассмотрение ряд функций от логарифмических кумулянтов с аргументами  $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ :

$$\tau(k) \equiv \tau(k_2, k_4) = \phi_1^2 k_4 + \phi_3 (k_4 - k_2^2),$$

$$\phi_m = \frac{\psi^{(m)}(p)}{\psi^{(m)}(q)}; \quad (5)$$

$$D(k) \equiv D(k_1, k_2, k_4) =$$

$$= \exp \left\{ \psi(q)k_1 + \frac{\psi(q)R(k) - \psi(p)}{V(k)} \right\},$$

$$R(k) \equiv R(k_2, k_4) = \sqrt{\frac{\phi_1 k_4 - k_2 \sqrt{\tau(k)}}{k_2^2 - k_4}},$$

$$V(k) \equiv V(k_2, k_4) = \sqrt{\frac{\phi_1 k_2 - \sqrt{\tau(k)}}{k_2^2 - k_4}}. \quad (6)$$

**Лемма 1.** Пусть  $0 \leq r < \sqrt{\phi_3/\phi_1}$  и  $\nu > 0$ . При фиксированных параметрах  $p$  и  $q$  распределения GE( $r, \nu, p, q, \delta$ ) оценки

$$\left. \begin{aligned} \hat{r}(\mathbb{X}) &= R(K_2(\mathbb{X}), K_4(\mathbb{X})); \\ \hat{\nu}(\mathbb{X}) &= V(K_2(\mathbb{X}), K_4(\mathbb{X})); \\ \hat{\delta}(\mathbb{X}) &= D(K_1(\mathbb{X}), K_2(\mathbb{X}), K_4(\mathbb{X})) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

параметров  $r$ ,  $\nu$  и  $\delta$  обладают свойством сильной состоятельности.

Доказательство следует из непрерывности функций (6) и доказанной в [12] теоремы 2, применяемой к выборочным логарифмическим моментам.

**Замечание 1.** Как показано в работах [10, 13, 14], система (4) может иметь различные решения в зависимости от области изменения параметров  $r$  и  $\nu$ . Алгоритм выбора нужного решения подробно описан в [10, 13]. В данной работе без ограничения общности рассматривается единственный случай, когда  $0 \leq r < \sqrt{\phi_3/\phi_1}$  и  $\nu > 0$ . Результаты статьи с легкостью переносятся на остальные случаи аналогично работе [10].

### 3 Асимптотическая нормальность оценок параметров гамма-экспоненциального распределения

Утверждения об асимптотической нормальности оценок (7) базируются на следующих леммах [15].

**Лемма 2.** В  $\mathbb{R}^n$  случайный вектор  $X_n$  сходится по распределению к случайному вектору  $X$ , если и только если каждая линейная комбинация компонент  $X_n$  сходится по распределению к такой же линейной комбинации компонент  $X$ .

**Лемма 3.** Предположим, что в  $\mathbb{R}^k$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(T_{n1}, \dots, T_{nk}) \Rightarrow N(\mu, \Sigma),$$

где  $\Sigma$  — ковариационная матрица. Пусть действительная функция  $g(l) = g(l_1, \dots, l_k)$  имеет отличный от нуля дифференциал в точке  $l = \mu$ . Положим

$$d = \left( \left. \frac{\partial g}{\partial l_1} \right|_{l=\mu}, \dots, \left. \frac{\partial g}{\partial l_k} \right|_{l=\mu} \right).$$

Тогда  $\sqrt{n}g(T_{n1}, \dots, T_{nk}) \Rightarrow N(g(\mu), d\Sigma d^T)$ .

В дальнейших рассуждениях понадобятся производные функций (6), выраженные в терминах функций  $\phi_m$  и  $\tau$ , заданных в (5). Заметим, что

$$R_{k_2}(k) \equiv \frac{\partial R}{\partial k_2}(k_2, k_4) =$$

$$= \frac{k_4 \left( \phi_1^2 k_2^2 + \tau(k) - 2\phi_1 k_2 \sqrt{\tau(k)} \right)}{2(k_2^2 - k_4)^{3/2} \sqrt{\tau(k)} \sqrt{\phi_1 k_4 - k_2 \sqrt{\tau(k)}}};$$

$$R_{k_4}(k) \equiv \frac{\partial R}{\partial k_4}(k_2, k_4) =$$

$$= - \frac{k_2 \left( \phi_1^2 k_2^2 + \tau(k) - 2\phi_1 k_2 \sqrt{\tau(k)} \right)}{4(k_2^2 - k_4)^{3/2} \sqrt{\tau(k)} \sqrt{\phi_1 k_4 - k_2 \sqrt{\tau(k)}}};$$

$$V_{k_2}(k) \equiv \frac{\partial V}{\partial k_2}(k_2, k_4) =$$

$$= \frac{k_2 (\phi_1^2 k_4 + \tau(k)) - \phi_1 (k_2^2 + k_4) \sqrt{\tau(k)}}{2(k_2^2 - k_4)^{3/2} \sqrt{\tau(k)} \sqrt{\phi_1 k_2 - \sqrt{\tau(k)}}};$$

$$V_{k_4}(k) \equiv \frac{\partial V}{\partial k_4}(k_2, k_4) =$$

$$= - \frac{\phi_1^2 k_2^2 + \tau(k) - 2\phi_1 k_2 \sqrt{\tau(k)}}{4(k_2^2 - k_4)^{3/2} \sqrt{\tau(k)} \sqrt{\phi_1 k_2 - \sqrt{\tau(k)}}};$$

$$D_{k_1}(k) \equiv \frac{\partial D}{\partial k_1}(k_1, k_2, k_4) =$$

$$= \psi(q) \exp \left\{ \psi(q)k_1 + \frac{\psi(q)R(k) - \psi(p)}{V(k)} \right\};$$

$$D_{k_2}(k) \equiv \frac{\partial D}{\partial k_2}(k_1, k_2, k_4) =$$

$$= \exp \left\{ \psi(q)k_1 + \frac{\psi(q)R(k) - \psi(p)}{V(k)} \right\} \times$$

$$\times \frac{\psi(p)V_{k_2}(k) + \psi(q)R_{k_2}(k)V(k) - \psi(q)R(k)V_{k_2}(k)}{V^2(k)};$$

$$D_{k_4}(k) \equiv \frac{\partial D}{\partial k_4}(k_1, k_2, k_4) =$$

$$= \exp \left\{ \psi(q)k_1 + \frac{\psi(q)R(k) - \psi(p)}{V(k)} \right\} \times$$

$$\times \frac{\psi(p)V_{k_4}(k) + \psi(q)R_{k_4}(k)V(k) - \psi(q)R(k)V_{k_4}(k)}{V^2(k)}.$$

Используя формулу производной сложной функции, получаем

$$\frac{\partial R}{\partial l_1}(l) = -\frac{2l_1}{\psi'(q)} R_{k_2}(K_2(l), K_4(l)) -$$

$$- \frac{4l_3 - 24l_2l_1 + 24l_1^3}{\psi'''(q)} R_{k_4}(K_2(l), K_4(l)); \quad (8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial l_2}(l) = \frac{1}{\psi'(q)} R_{k_2}(K_2(l), K_4(l)) -$$

$$- \frac{6l_2 - 12l_1^2}{\psi'''(q)} R_{k_4}(K_2(l), K_4(l)); \quad (9)$$

$$\frac{\partial R}{\partial l_3}(l) = -\frac{4l_1}{\psi'''(q)} R_{k_4}(K_2(l), K_4(l)); \quad (10)$$

$$\frac{\partial R}{\partial l_4}(l) = \frac{1}{\psi'''(q)} R_{k_4}(K_2(l), K_4(l)); \quad (11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_1}(l) = -\frac{2l_1}{\psi'(q)} V_{k_2}(K_2(l), K_4(l)) -$$

$$- \frac{4l_3 - 24l_2l_1 + 24l_1^3}{\psi'''(q)} V_{k_4}(K_2(l), K_4(l)); \quad (12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_2}(l) = \frac{1}{\psi'(q)} V_{k_2}(K_2(l), K_4(l)) -$$

$$- \frac{6l_2 - 12l_1^2}{\psi'''(q)} V_{k_4}(K_2(l), K_4(l)); \quad (13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_3}(l) = -\frac{4l_1}{\psi'''(q)} V_{k_4}(K_2(l), K_4(l)); \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_4}(l) = \frac{1}{\psi'''(q)} V_{k_4}(K_2(l), K_4(l)); \quad (15)$$

$$\frac{\partial D}{\partial l_1}(l) = \frac{1}{\psi(q)} D_{k_1}(K_1(l), K_2(l), K_4(l)) -$$

$$- \frac{2l_1}{\psi'(q)} D_{k_2}(K_1(l), K_2(l), K_4(l)) -$$

$$- \frac{4l_3 - 24l_2l_1 + 24l_1^3}{\psi'''(q)} D_{k_4}(K_1(l), K_2(l), K_4(l)); \quad (16)$$

$$\frac{\partial D}{\partial l_2}(l) = \frac{1}{\psi'(q)} D_{k_2}(K_1(l), K_2(l), K_4(l)) -$$

$$- \frac{6l_2 - 12l_1^2}{\psi'''(q)} D_{k_4}(K_1(l), K_2(l), K_4(l)); \quad (17)$$

$$\frac{\partial D}{\partial l_3}(l) = -\frac{4l_1}{\psi'''(q)} D_{k_4}(K_1(l), K_2(l), K_4(l)); \quad (18)$$

$$\frac{\partial D}{\partial l_4}(l) = \frac{1}{\psi'''(q)} D_{k_4}(K_1(l), K_2(l), K_4(l)). \quad (19)$$

Введем следующие обозначения, чтобы сформулировать утверждение об асимптотической нормальности оценок параметров  $r$ ,  $\nu$  и  $\delta$  при фиксированных параметрах концентрации  $p$  и  $q$ . Пусть

$$d_R = \left( \frac{\partial R}{\partial l_1}(l) \Big|_{l=\mu}, \frac{\partial R}{\partial l_2}(l) \Big|_{l=\mu}, \frac{\partial R}{\partial l_3}(l) \Big|_{l=\mu}, \frac{\partial R}{\partial l_4}(l) \Big|_{l=\mu} \right); \quad (20)$$

$$d_V = \left( \frac{\partial V}{\partial l_1}(l) \Big|_{l=\mu}, \frac{\partial V}{\partial l_2}(l) \Big|_{l=\mu}, \frac{\partial V}{\partial l_3}(l) \Big|_{l=\mu}, \frac{\partial V}{\partial l_4}(l) \Big|_{l=\mu} \right); \quad (21)$$

$$d_D = \left( \frac{\partial D}{\partial l_1}(l) \Big|_{l=\mu}, \frac{\partial D}{\partial l_2}(l) \Big|_{l=\mu}, \frac{\partial D}{\partial l_3}(l) \Big|_{l=\mu}, \frac{\partial D}{\partial l_4}(l) \Big|_{l=\mu} \right), \quad (22)$$

где частные производные  $\partial R/\partial l_k(l)$ ,  $\partial V/\partial l_k(l)$  и  $\partial D/\partial l_k(l)$  определены в (8)–(19), а  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$  — вектор моментов (3).

Обозначим

$$Q_{s,t}(m) = \text{cov}(\ln^s X_n, \ln^t X_{n+m}) =$$

$$= \mathbb{E} \ln^s X_n \ln^t X_{n+m} - \mu_s \mu_t, \quad s, t = \overline{1, 4}.$$

Всюду далее предполагается, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n)$ , где  $\rho(n)$  определены в (2), сходится. В этом случае существует положительно полуопределенная спектральная матрица [16, 17]

$$\Sigma_\lambda = 2\pi \begin{pmatrix} f_{1,1}(\lambda) & f_{1,2}(\lambda) & f_{1,3}(\lambda) & f_{1,4}(\lambda) \\ f_{1,2}(\lambda) & f_{2,2}(\lambda) & f_{2,3}(\lambda) & f_{2,4}(\lambda) \\ f_{1,3}(\lambda) & f_{2,3}(\lambda) & f_{3,3}(\lambda) & f_{3,4}(\lambda) \\ f_{1,4}(\lambda) & f_{2,4}(\lambda) & f_{3,4}(\lambda) & f_{4,4}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где

$$f_{s,t}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{-im\lambda} Q_{s,t}(m), \quad s, t = \overline{1, 4},$$

непрерывны и ограничены. Ввиду четности  $Q_{s,t}(m)$

$$f_{s,t}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{-im\lambda} Q_{s,t}(m) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{im\lambda} Q_{s,t}(m) = \frac{1}{2\pi} \sum_m \cos(m\lambda) Q_{s,t}(m) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( Q_{s,t}(0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(m\lambda) Q_{s,t}(m) \right).$$

Сформулируем утверждения об асимптотической нормальности оценок (7) при фиксированных параметрах концентрации  $p$  и  $q$ .

**Теорема 1.** Пусть  $0 \leq r < \sqrt{\phi_3/\phi_1}$  и  $\nu > 0$ . Предположим, что спектральная матрица  $\Sigma_0$  в (23) положительно определена. Тогда при  $n \rightarrow \infty$  оценки (7) неизвестных параметров  $r$ ,  $\nu$  и  $\delta$  асимптотически нормальны:

$$\begin{aligned}\sqrt{n} \frac{\hat{r}(\mathbb{X}) - r}{\sqrt{d_R \Sigma_0 d_R^T}} &\Rightarrow N(0, 1); \\ \sqrt{n} \frac{\hat{\nu}(\mathbb{X}) - \nu}{\sqrt{d_V \Sigma_0 d_V^T}} &\Rightarrow N(0, 1); \\ \sqrt{n} \frac{\hat{\delta}(\mathbb{X}) - \delta}{\sqrt{d_D \Sigma_0 d_D^T}} &\Rightarrow N(0, 1),\end{aligned}$$

где матрица  $\Sigma_0$  и векторы  $d_R$ ,  $d_V$  и  $d_D$  задаются соотношениями (23) и (20)–(22) соответственно.

**Доказательство.** Покажем асимптотическую нормальность вектора из выборочных логарифмических моментов  $L(\mathbb{X}) = (L_1(\mathbb{X}), L_2(\mathbb{X}), L_3(\mathbb{X}), L_4(\mathbb{X}))$ . Для этого рассмотрим вектор  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  и линейную комбинацию

$$Z_i(\alpha) = \sum_{m=1}^4 \alpha_m \ln^m X_i, \quad \sum_{m=1}^4 \alpha_m^2 > 0.$$

Найдем дисперсию нормированной суммы таких линейных комбинаций. Имеем

$$\mathbf{D} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i(\alpha) = \mathbf{D} \sum_{m=1}^4 \alpha_m L_m(\mathbb{X}) = \alpha \Sigma'(n) \alpha^T.$$

Здесь

$$\Sigma'(n) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1}(n) & \sigma_{1,2}(n) & \sigma_{1,3}(n) & \sigma_{1,4}(n) \\ \sigma_{1,2}(n) & \sigma_{2,2}(n) & \sigma_{2,3}(n) & \sigma_{2,4}(n) \\ \sigma_{1,3}(n) & \sigma_{2,3}(n) & \sigma_{3,3}(n) & \sigma_{3,4}(n) \\ \sigma_{1,4}(n) & \sigma_{2,4}(n) & \sigma_{3,4}(n) & \sigma_{4,4}(n) \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_{s,s}(n) = \mathbf{D} L_s(\mathbb{X})$ ;  $\sigma_{s,t}(n) = \text{cov}(L_s(\mathbb{X}), L_t(\mathbb{X}))$  при  $s < t$ ,  $s, t = \overline{1, 4}$ .

При  $n \rightarrow \infty$  [17]

$$n \sigma_{s,t}(n) \longrightarrow 2\pi f_{s,t}(0), \quad s, t = \overline{1, 4}.$$

Таким образом, из (23) при  $\lambda = 0$  имеем

$$n \mathbf{D} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i(\alpha) \longrightarrow \alpha \Sigma_0 \alpha^T.$$

Поскольку матрица  $\Sigma_0$  положительно определена и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n)$  сходится, имеем [17]

$$\begin{aligned}\frac{(1/n) \sum_{i=1}^n Z_i(\alpha) - \mathbf{E}(1/n) \sum_{i=1}^n Z_i(\alpha)}{\sqrt{\mathbf{D}(1/n) \sum_{i=1}^n Z_i(\alpha)}} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow N(0, 1).\end{aligned}$$

Следовательно, по лемме 2 получаем для вектора выборочных логарифмических моментов

$$\sqrt{n} L(\mathbb{X}) \Rightarrow N(\mu, \Sigma_0), \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$  — вектор теоретических логарифмических моментов.

Кроме того, в условиях теоремы компоненты вектора  $d_R$ , определенного в (20), конечны и функция  $R(k_2, k_4) = R(K_2(l), K_4(l))$  имеет в точке  $l = \mu$  отличный от нуля дифференциал.

Таким образом, выполнены все условия леммы 3. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sqrt{n} R(K_2(\mathbb{X}), K_4(\mathbb{X})) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow N(R(K_2(\mu), K_4(\mu)), d_R \Sigma_0 d_R^T),\end{aligned}$$

что завершает доказательство для оценки характеристического показателя  $r$ .

Полностью аналогично доказываются утверждения теоремы об асимптотической нормальности оценок  $\hat{\nu}(\mathbb{X})$  и  $\hat{\delta}(\mathbb{X})$  параметров формы  $\nu$  и масштаба  $\delta$ . Теорема доказана.

## Литература

1. Amoroso L. Ricerche intorno alla curva dei redditi // Ann. Mat. Pur. Appl., 1925. Vol. 2. P. 123–159. doi: 10.1007/BF02409935.
2. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф. О приемах исследования случайных колебаний речного стока // Труды НИУ ГУГМС. Сер. IV, 1946. Вып. 29. С. 3–32.
3. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф. Выбор кривых распределения вероятностей для расчетов речного стока // Известия АН СССР. Отд. техн. наук, 1948. № 6. С. 15–21.
4. McDonald J. B. Some generalized functions for the size distribution of income // Econometrica, 1984. Vol. 52. No. 3. P. 647–665. doi: 10.2307/1913469.
5. Кудрявцев А. А., Недоливко Ю. Н., Шестаков О. В. Основные вероятностные характеристики дигамма-распределения и метод оценивания его параметров // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. матем. и киберн., 2022. № 3. С. 22–29. EDN: OFHFMW.
6. Кудрявцев А. А. О представлении гамма-экспоненциального и обобщенного отрицательного биномиального распределений // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 4. С. 76–80. doi: 10.14357/19922264190412. EDN: YTZLNY.
7. Кудрявцев А. А., Шестаков О. В. Метод оценивания параметров гамма-экспоненциального распределе-

- ния по выборке со слабо зависимыми компонентами // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 58–63. doi: 10.14357/19922264230308. EDN: PEXTVK.
8. Кудрявцев А. А., Шестаков О. В. Равномерные оценки скорости сходимости для интегрального индекса баланса // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 33–39. doi: 10.14357/19922264240105. EDN: WNUUHY.
  9. Кривенко М. П. Оценивание параметров смеси нормальных многомерных распределений с ограничениями на ковариационные матрицы // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 2. С. 2–8. doi: 10.14357/19922264250201. EDN: YJOPVN.
  10. Kudryavtsev A. A., Shestakov O. V. The estimators of the bent, shape and scale parameters of the gamma-exponential distribution and their asymptotic normality // Mathematics, 2022. Vol. 10. Iss. 4. Art. 619. 17 p. doi: 10.3390/math10040619. EDN: LJCECS.
  11. Kendall M. G., Stuart A. The advanced theory of statistics. — 3rd ed. — London, U.K.: Griffin, 1969. Vol. 1. 433 p.
  12. Bryc W., Smolenski W. Moment conditions for almost sure convergence of weakly correlated random variables // P. Am. Math. Soc., 1993. Vol. 119. No. 2. P. 629–635. doi: 10.2307/2159950.
  13. Кудрявцев А. А., Шестаков О. В., Шоргин С. Я. Метод оценивания параметров изгиба, формы и масштаба гамма-экспоненциального распределения // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 3. С. 57–62. doi: 10.14357/19922264230308. EDN: IXMPXH.
  14. Kudryavtsev A. A., Shestakov O. V. Limit distributions for the estimates of the digamma distribution parameters constructed from a random size sample // Mathematics, 2023. Vol. 11. Iss. 8. Art. 1778. 13 p. doi: 10.3390/math11081778. EDN: UFWBAK.
  15. Serfling R. J. Approximation theorems of mathematical statistics. — New York, NY: John Wiley & Sons, Inc., 2002. 371 p.
  16. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1972. 285 с. (Jenkins G. M., Watts D. G. Spectral analysis and its applications. — San Francisco, CA, USA: Holden-Day, 1968. 552 p.)
  17. Ибрагимов И. А. Замечание о центральной предельной теореме для зависимых случайных величин // Теория вероятностей и её применения, 1975. Т. 20. Вып. 1. С. 134–140.

Поступила в редакцию 27.02.2026

Принята к публикации 15.05.2026

## ASYMPTOTIC PROPERTIES OF DIGAMMA DISTRIBUTION PARAMETER ESTIMATES CONSTRUCTED FROM A SAMPLE WITH WEAKLY DEPENDENT COMPONENTS

A. A. Kudryavtsev<sup>1,2</sup> and O. V. Shestakov<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

<sup>2</sup>Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

<sup>3</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The paper considers the digamma distribution, special cases of which can be represented as a generalized gamma distribution and a generalized beta distribution of the second kind. The strong consistency and asymptotic normality of digamma distribution parameter estimates obtained using a modified method of moments based on sample cumulants are proved in the case of weakly dependent sample components. Estimates of three unknown parameters (the characteristic exponent, shape parameters, and scale parameters) are considered for fixed concentration parameters. Estimation of the latter is not considered due to the nontrivial nature of the inversion of polygamma functions. The formulated statements pertain to a limited set of values of the estimated parameters; however, they can be easily extended to the general case using an estimation algorithm detailed in the authors’ previous cited papers. The proof of the main statement is based on a sufficient condition for weak convergence of functions of asymptotically normal vectors. The results of this paper can be used to describe a wide class of distributions arising in the description of processes modeled by distributions with nonnegative, unbounded support.

**Keywords:** weak dependence; parameter estimation; digamma distribution; mixed distributions; method of moments; cumulants; asymptotic normality

**DOI:** 10.14357/19922264260206

**EDN:** UOBWDQ

## Acknowledgments

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation's part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the Agreement No. 075-15-2025-345.

## References

1. Amoroso, L. 1925. Ricerche intorno alla curva dei redditi. *Ann. Mat. Pur. Appl.* 2:123–159. doi: 10.1007/BF02409935.
2. Kritsky, S. N., and M. F. Menkel. 1946. O priemakh issledovaniya sluchaynykh kolebaniy rechnogo stoka [Methods of investigation of random fluctuations of river flow]. *Trudy NIU GUGMS Ser. IV* [GUGMS Research Institutions Proceedings, Ser. IV] 29:3–32.
3. Kritsky, S. N., and M. F. Menkel. 1948. Vybory krivyykh raspredeleniya veroyatnostey dlya raschetov rechnogo stoka [Selection of probability distribution curves for river flow calculations]. *Izvestiya AN SSSR. Otd. tekhn. nauk* [Herald of the Russian Academy of Sciences. Technical Sciences] 6:15–21.
4. McDonald, J. J. 1984. Some generalized functions for the size distribution of income *Econometrica* 52(3):647–665. doi: 10.2307/1913469.
5. Kudryavtsev, A. A., Yu. N. Nedolivko, and O. V. Shestakov. 2022. Main probabilistic characteristics of the digamma distribution and the method of estimating its parameters. *Moscow University Computational Mathematics Cybernetics* 46(2):81–88. doi: 10.3103/s0278641922020054. EDN: DPBUQJ.
6. Kudryavtsev, A. A. 2019. O predstavlenii gamma-eksponentsial'nogo i obobshchennogo otritsatel'nogo binomial'nogo raspredeleniy [On the representation of gamma-exponential and generalized negative binomial distributions]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(4):76–80. doi: 10.14357/19922264190412. EDN: YTZLNY.
7. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2023. Metod otsenivaniya parametrov gamma-eksponentsial'nogo raspredeleniya po vyborke so slabo zavisimymi komponentami [A method for estimating parameters of the gamma-exponential distribution from a sample with weakly dependent components]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):58–63. doi: 10.14357/19922264230308. EDN: PEXTVK.
8. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2024. Ravnomyernye otsenki skorosti skhodimosti dlya integral'nogo indeksa balansa [Uniform convergence rate estimates for the integral balance index]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):33–39. doi: 10.14357/19922264240105. EDN: WNUUHY.
9. Krivenko, M. P. 2025. Otsenivanie parametrov smesi normal'nykh mnogomernykh raspredeleniy s ogranicheniyami na kovariatsionnye matritsy [Estimation of parameters of a mixture of normal multivariate distributions with constraints on covariance matrices]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(2):2–8. doi: 10.14357/19922264250201. EDN: YJOPVN.
10. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2022. The estimators of the bent, shape and scale parameters of the gamma-exponential distribution and their asymptotic normality. *Mathematics* 10(4):619. 17 p. doi: 10.3390/math10040619. EDN: LJCECS.
11. Kendall, M. G., and A. Stuart. 1967. *The advanced theory of statistics*. 3rd ed. London, U.K.: Charles Griffin Co. Vol. 1. 433 p.
12. Bryc, W., and W. Smolenski. 1993. Moment conditions for almost sure convergence of weakly correlated random variables. *P. Am. Math. Soc.* 119(2):629–635. doi: 10.2307/2159950.
13. Kudryavtsev, A. A., O. V. Shestakov, and S. Ya. Shorgin. 2021. Metod otsenivaniya parametrov izgiba, formy i masshtaba gamma-eksponentsial'nogo raspredeleniya [A method for estimating bent, shape and scale parameters of the gamma-exponential distribution]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(3):57–62. doi: 10.14357/19922264230308. EDN: IXMPXH.
14. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2023. Limit distributions for the estimates of the digamma distribution parameters constructed from a random size sample. *Mathematics* 11(8):1778. 13 p. doi: 10.3390/math11081778. EDN: UFWBAK.
15. Serfling, R. J. 2002. *Approximation theorems of mathematical statistics*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc. 371 p.
16. Jenkins, G. M., and D. G. Watts. 1968. *Spectral analysis and its applications*. San Francisco, CA: Holden-Day. 552 p.
17. Ibragimov, I. A. 1975. A note on the central limit theorems for dependent random variables. *Theor. Probab. Appl.* 20(1):135–141. doi: 10.1137/1120011.

Received February 27, 2026

Accepted May 15, 2026

## Contributors

**Kudryavtsev Alexey A.** (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov

Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; aakudryavtsev@cs.msu.ru

**Shestakov Oleg V.** (b. 1976) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; leading scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; oshestakov@cs.msu.su

# ПОИСК АНОМАЛИЙ В СЕТЕЦЕНТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

А. А. Грушо<sup>1</sup>, Н. А. Грушо<sup>2</sup>, М. И. Забежайло<sup>3</sup>, А. А. Зацаринный<sup>4</sup>, В. О. Писковский<sup>5</sup>

**Аннотация:** Применение сетецентрических технологий в системах управления и поддержки принятия решений определяется концепцией развития управления и контроля периферийных узлов сетецентрической системы (СЦС), а также условиями обеспечения информационной безопасности. Вопросы безопасности в СЦС имеют целый ряд специфических особенностей. Главную цель Центра в СЦС можно описать как управляющую причину, состоящую из свойств, которые в конечном итоге порождают действия во всей системе. Управляющая причина объединяет в себе множество свойств. Они определяют параметры подчиненных узлов СЦС, служащих одновременно производными причинами. Рассмотрены проблемы мониторинга аномалий в СЦС при выполнении основной задачи, поставленной Центром для периферийных узлов. Выделены три типа аномалий: (1) искажение свойств следствий производных причин, порождающих действия по выполнению планов Центра; (2) наличие препятствий при выполнении узлами действий в интересах Центра; (3) повышенный расход ресурсов, что может привести к замедлению или остановке выполнения на удаленном узле действий в интересах Центра. Наибольшие сложности связаны с выявлением аномалий первого типа.

**Ключевые слова:** информационная безопасность; сетецентрические системы; аномалии; выявление аномалий

**DOI:** 10.14357/19922264260207

**EDN:** PPXIOI

## 1 Введение

В настоящее время в мировой практике разработки и развития информационно-управляющих систем получает широкое распространение концепция СЦС. В СССР Н. В. Огарков [1] фактически придумал концепцию сетецентрической войны. Но первыми к массовой разработке и практическому осуществлению этой концепции приступили в США в 1990-х гг. При этом американцы прямо признают авторство Н. В. Огаркова.

Сетецентрический подход естественным образом наследует активно используемые еще в программно-целевом методе планирования и управления [2] идеи последовательного разворачивания цели в иерархию подцелей вплоть до уровня исполнимых мероприятий, что позволяло обратным «проходом» по построенному сетецентрическому графу формировать план и программу достижения поставленной глобальной цели. Аналогичные соображения лежат и в основе механизма планирования в области управления проектами [3].

Широкое применение сетецентрических технологий в системах управления и поддержки принятия решений во многом определяется концепцией развития системы управления и контроля перифе-

рийных узлов СЦС, формирования непротиворечивой управленческой деятельности органов управления, условиями обеспечения информационной безопасности [4].

Вопросы безопасности в сетецентрических системах имеют целый ряд специфических особенностей [5]. Заметим, что в работах по программно-целевому методу планирования и управления вопросы безопасности фактически не поднимались, хотя они имеют ту же природу, что и в СЦС управления. Рассмотрим одну из таких особенностей. Анализ данных мониторинга информационной безопасности основывается на обнаружении аномалий в «нормальном» процессе работы информационной системы. Собственно «природа» аномалий в СЦС порождает такие же задачи, которые аналогичны тем, что характерны и для идентификации аномалий в системах управления, реализующих программно-целевой метод.

Поскольку СЦС представляет собой управляющую систему, то в подчиненные ветви передаются задания для каждого периферийного узла, которые в совокупности реализуют главную идею, разработанную в управляющей системе (Центр). Поэтому необходимо построить модель, позволяющую

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, grusho@yandex.ru

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, info@itake.ru

<sup>3</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, m.zabezhailo@yandex.ru

<sup>4</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, AZatsarinny@ipiran.ru

<sup>5</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, vvp80@yandex.ru

в Центре отслеживать правильное развитие идеи Центра и сформировать признаки аномалий.

Механизм управления в СЦС может быть описан в терминах причинно-следственных взаимосвязей разработанной в Центре главной идеи с заданиями, которые следует исполнять вдоль всей иерархии периферийных узлов сетевой управляющей системы. При этом задачи, требующие решения при движении вниз по этой управленческой иерархии, можно рассматривать как последовательно возникающие следствия из задач, актуальных для предыдущих узлов. Критически значимую роль для корректной работы такой системы реализации следствий главной идеи Центра играют идентификация и устранение возможных аномалий в штатном режиме такого «разворачивания» следствий.

Графические представления для систем причинно-следственных связей в анализируемых данных активно используются уже несколько десятилетий (см., например, [6, 7]). При этом не менее долгую историю имеет использование так называемых контрафактуальных рассуждений [8], позволяющих идентифицировать факторы, которые действительно оказывают влияние на изучаемый эффект. В настоящее время графические представления — активно используемый инструментальный причинно-следственного анализа данных (см., например, [9–11]).

Особая роль в использовании восстанавливаемых из данных причинно-следственных зависимостей отводится процедурам интеграции (data fusion) анализируемых данных [12], а также объяснения порождаемых в процессе их анализа выводов и заключений (см., например, [13, 14]), причем при формировании объяснений подход на базе причинно-следственных зависимостей позволяет избежать ряда коллизий, характерных для некоторых других популярных подходов [15].

Сегодня подход на основе причинно-следственных связей активно используется в широком спектре приложений в системах поддержки принятия решений [16], а также различных рекомендательных системах [17, 18]. Высокую результативность этот подход демонстрирует и в таких специальных областях, как противодействие мошенничеству в финансовой сфере [19] и кибербезопасность [20].

## 2 Математическая модель аномалий

Определим конечное множество характеристик, из которых строятся конечные множества, которые будем называть свойствами. Описание СЦС удобно вести на языке свойств. В свою очередь, свой-

ства могут порождать действия, причиной которых они служат. Простейшие причинно-следственные связи определяются так, что причина детерминированно порождает следствия, если существует физическая связь причины и следствия. Действия можно рассматривать как последовательность конечной длины из свойств, порожденных причиной.

Главную идею Центра можно описать как управляющую причину, состоящую из свойств, которые в конечном итоге порождают действия во всей системе. Управляющая причина состоит из множества отдельных свойств, которые сами служат причинами множеств свойств подчиненных узлов СЦС, служащих одновременно производными причинами. Таким образом, подчиненными узлами управляют производные причины, которые вместе с главной причиной представляют собой транзитивные причины [21, 22]. Поэтому можно считать, что свойства производных причин являются также следствиями главной причины. В периферийных узлах формируются свойства, которые являются следствиями производных причин и представимы в языках каждого узла. (Упрощенная постановка аналогичной задачи рассматривалась в задаче анализа Big Data при поиске инсайдера [23]. Однако система взаимодействия Центра с узлами здесь не рассматривалась, т. е. общая постановка задачи была другой.) Эти свойства порождают действия, которые реализуют часть действий Центра, касающихся каждого узла. Для контроля за развитием событий Центр мониторит эти действия путем сбора информации о следствиях производных причин. (В работе [24] уже рассматривалась аналогичная, однако более простая схема подобных действий.) Это дает возможность отслеживать следствия порожденных в узлах производных причин непосредственно механизмами Центра. Очевидно, что при хорошей защищенности периферийного узла и его связи с Центром по данным мониторинга противоречия между главной причиной и свойствами производных причин невозможны (свойство транзитивных причинно-следственных связей). Однако реально в периферийных узлах свойства, являющиеся одновременно следствиями как главных, так и производных причин, могут искажаться [9, 10, 25, 26]. Тогда искаженные свойства производных причин должны выявляться как механизмами мониторинга производных причин, так и механизмами мониторинга Центра. Это важно, так как указанные следствия порождают действия, необходимые Центру. Мониторинг следствий производных причин должен выявлять различия правильных следствий производных причин и их искажения.

В таком различии появление информации об искажении следствий производных причин появляет-

ся в центре безопасности СЦС, т. е. в таком случае появляется противоречие действий узлов с концепцией Центра, или присутствие противоречий в следствиях производных причин с главной причиной в Центре. Это один тип аномалий в СЦС.

Появление таких аномалий имеет следующую природу. В локальных узлах могут возникать свои локальные причины, свойства которых могут воздействовать на свойства производных причин. Например, могут изымать характеристики в свойствах производных причин и тем самым не давать реализовать действия, которые должны порождаться производными причинами. Тогда искажения свойств следствий производных причин появляются в ходе мониторинга правильных свойств и возникает аномалия указанного типа. Аномалии требуют дополнительных исследований на предмет возможной враждебности их свойств.

Другим вариантом аномалии могут стать действия, порожденные локальными причинами в узлах и конфликтующие с действиями, порожденными производными причинами. Однако такие конфликтующие действия могут быть только препятствиями на пути развития действий, порожденных производными причинами. Отслеживание таких аномалий возможно только при наличии механизмов выявления торможения действий или помех порожденными производными причинами. Но такой механизм может быть также встроен в свойства, порождающие легальные действия. Поскольку мешающие действия обязательно замедляют действия, порожденные производными причинами, то такие аномалии можно выявлять измерением времени действия. Для этого в свойствах производных причин маркируется время старта действия и его длительность (или метки времени определенных этапов действия). Эта информация должна входить в данные мониторинга. Замедления, превышающие пороги, означают аномалию второго типа.

### 3 Алгоритмы поиска аномалий

Аномалии первого типа порождаются искажением свойств производных причин. Если в Центре создана база данных свойств производных причин, то мониторинг свойств производных причин можно проводить сравнением свойств в указанной базе данных со свойствами производных причин, полученных с помощью мониторинга. Отсюда следует следующее утверждение.

**Утверждение 1.** *Алгоритм выявления искаженных свойств производных причин в Центре может быть построен на основе сравнения «плана» и «факта»*

*в разворачивании графа причинно-следственных связей в СЦС.*

Недостаток этого алгоритма — его сложность. Хотя сравнение (так называемый мэтчинг) записей «плана» и «факта» в базе данных (БД) — полиномиально-сложная процедура, при больших размерах сравниваемых файлов требуются процедуры оптимизации и сокращения перебора вариантов. Поэтому при построении безопасности СЦС целесообразно построить систему тестов, ориентированную на группы свойств производных причин, снижающие сложность перебора свойств с помощью БД [27]. Примером такого тестирования могут служить действия, порожденные производными причинами. В самом деле, такое сокращение возможно при порождении действий на удаленных узлах с помощью производных причин. Работа теста в этом случае основана на получении узлом результатов цифрового моделирования начала действий с правильными свойствами, т. е. необходимо предварительное создание цифрового «двойника», на котором моделируются действия, порождаемые свойствами производных причин. При этом выявленные с помощью цифровых «двойников» неправильно развивающиеся действия означают аномалию в виде наличия искаженных свойств, которые требуют проведения в Центре более сложного анализа на предмет выявления первопричин аномалии этого типа. Использование цифровых «двойников» позволяет использовать интеллектуальный анализ данных и машинное обучение в процессе поиска аномалий. Скорость выявления аномалий первого типа напрямую связана с машинным обучением работы цифровых «двойников». В частности, такие задачи можно решать с помощью технологий искусственных нейронных сетей.

Выявление аномалий второго типа можно организовать с помощью меток времени, как это было отмечено выше.

**Утверждение 2.** *Аномалии второго типа эффективно выявляются с помощью меток времени.*

### 4 Ресурсное обеспечение

Признаки, сходные с аномалиями, могут появиться, если реализация действий упирается в дефицит ресурсов для их реализации. Такая ситуация может возникнуть, например, когда на локальном узле самостоятельно формируют дополнительные действия для реализации поставленных Центром задач. Дефицит ресурсов может проявиться не сразу. Однако мониторинг недостатка ресурсов также может быть выявлен с помощью меток времени,

которые показывают торможение или остановку действий. При этом решение проблемы недостатка ресурсов может занять много времени и негативно воздействовать на реализацию главной цели. Поэтому расход ресурсов необходимо отслеживать постоянно и с помощью цифрового двойника вычислять прогноз на период времени, необходимый для пополнения ресурсов.

## 5 Заключение

В работе рассмотрены проблемы мониторинга аномалий в СЦС при выполнении основной задачи, поставленной Центром для периферийных узлов. Выделены три типа аномалий:

- (1) искажение свойств следствий производных причин, порождающих действия по выполнению планов Центра;
- (2) наличие препятствий при выполнении узлами действий в интересах Центра;
- (3) повышенный расход ресурсов, что может привести к замедлению или остановке выполнения действий на удаленном узле в интересах Центра.

Наибольшие сложности связаны с выявлением аномалий первого типа. Для решения подобных задач предложено создание цифрового двойника действий, порожденных главной причиной, который служит тестом правильного развития событий. Реализация этого решения требует применения технологий машинного обучения и нейронных сетей для быстрого анализа развития действий.

Аналогичные проблемы возникают с построением прогноза использования ресурсов в действиях узлов СЦС.

Выявление аномалий недостаточно для выявления первопричин нарушений выполнения задач, порожденных действиями в интересах главной причины [28]. Анализ данных для выявления первопричин представляется самостоятельной сложной задачей.

## Литература

1. Сетевая война: чему научил советский маршал Огарков армию США // Русская семерка, 4 января 2025. <https://dzen.ru/a/Z3lduCbJ0lJCzqY>.
2. Поспелов Г. С., Ириков В. А. Программно-целевое планирование и управление. — М.: Советское радио, 1976. 440 с.
3. A guide to the project management body of knowledge (PMBOK® Guide). — 7th ed. — Newtown Square, PA, USA: Project Management Institute, 2021. 370 p.

4. Grusho A., Timonina E., Shorgin S. Vulnerabilities of a network management system // Прикладные проблемы в теории вероятностей и математической статистике в области телекоммуникаций: Тр. XI Международного семинара / Под ред. Д. Аранити, К. Е. Самуйлова, С. Я. Шоргина. — М.: РУДН, 2017. С. 9. EDN: ZVLOQR.
5. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Смирнов Д. В., Тимонина Е. Е., Шоргин С. Я. О безопасной архитектуре вычислительной системы на основе микросервисов // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 4. С. 87–92. doi: 10.14357/19922264220413. EDN: SUBXMB.
6. Pearl J. Causal diagrams for empirical research // Biometrika, 1995. Vol. 82. Iss. 4. P. 669–688. doi: 10.2307/2337329.
7. Pearl J. Structural and probabilistic causality // Psychol. Learn. Motiv., 1996. Vol. 34. P. 393–435. doi: 10.1016/S0079-7421(08)60566-6.
8. Balke A., Pearl J. Probabilistic evaluation of counterfactual queries // 12th National Conference on Artificial Intelligence Proceedings. — Menlo Park, CA, USA: MIT Press, 1994. Vol. I. P. 230–237.
9. Mohan K., Pearl J., Tian J. Graphical models for inference with missing data // Adv. Neur. In., 2013. Vol. 26. P. 1277–1285.
10. Pearl J. The seven tools of causal inference, with reflections on machine learning // Commun. ACM, 2019. Vol. 62. Iss. 3. P. 54–60. doi: 10.1145/3241036.
11. Mohan K., Pearl J. Graphical models for processing missing data // J. Am. Stat. Assoc., 2021. Vol. 116. Iss. 534. P. 1023–1037. doi: 10.1080/01621459.2021.1874961.
12. Bareinboim E., Pearl J. Causal inference and the data-fusion problem // P. Natl. Acad. Sci. USA, 2016. Vol. 113. Iss. 27. P. 7345–7352. doi: 10.1073/pnas.1510507113.
13. Halpern J. Y., Pearl J. Causes and explanations: A structural-model approach — Part I: Causes // Brit. J. Philos. Sci., 2005. Vol. 56. P. 843–887.
14. VanderWeele T. J. Explanation in causal inference: Methods for mediation and interaction. — New York, NY, USA: Oxford University Press, 2015. 706 p.
15. Huang X., Marques-Silva J. The inadequacy of Shapley values for explainability. — Cornell University, 2023. 26 p. arXiv:2302.08160 [cs.LG].
16. Gurevich G., Kliger D., Weiner B. The role of attribution of causality in economic decision making // J. Socio-Econ., 2012. Vol. 41. Iss. 4. P. 439–444. doi: 10.1016/j.socsc.2011.07.005.
17. Wang Y., Liang D., Charlin L., Blei D. M. Causal inference for recommender systems // 14th Conference on Recommender Systems Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 2020. P. 426–431. doi: 10.1145/3383313.3412225.
18. Gao C., Zheng Yu, Wang W., Feng F., He X., Li Y. Causal inference in recommender systems: A survey and future directions. — Cornell University, 2022. 32 p. arXiv: 2208.12397 [cs.IR].
19. Vivek Y., Ravi V., Mane A. A., Naidu L. R. Explainable artificial intelligence and causal inference based ATM fraud detection. — Cornell University, 2022. 34 p. arXiv:2211.10595 [cs.LG].

20. Abel S., Tang Y., Singh J., Paek P. Applications of causal modeling in cybersecurity: An exploratory approach // *Advances Science Technology Engineering Systems J.*, 2020. Vol. 5. Iss. 3. P. 380–387. doi: 10.25046/aj050349.
21. Грушо А.А., Грушо Н.А., Забейхайло М.И., Зацаринный А.А., Тимонина Е.Е., Шоргин С.Я. Анализ цепочек причинно-следственных связей // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 68–74. doi: 10.14357/19922264220209. EDN: HPSLTU.
22. Weinberg A. I., Premebida C., Faria D. R. Causality from bottom to top: A survey // *Mach. Learn.*, 2025. Vol. 114. Art. 234. 37 p. doi: 10.1007/s10994-025-06855-5.
23. Грушо А.А., Забейхайло М.И., Смирнов Д.В., Тимонина Е.Е. Модель множества информационных пространств в задаче поиска инсайдера // *Информатика и её применения*, 2017. Т. 11. Вып. 4. С. 65–69. doi: 10.14357/19922264170408. EDN: ZXWUOP.
24. Грушо А.А., Грушо Н.А., Забейхайло М.И., Кульченков В.В., Тимонина Е.Е., Шоргин С.Я. Причинно-следственные связи в задачах классификации // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 43–49. doi: 10.14357/19922264230106. EDN: DTQZPK.
25. Грушо А.А., Грушо Н.А., Забейхайло М.И., Зацаринный А.А., Тимонина Е.Е., Шоргин С.Я. Задача классификации в условиях искаженных причинно-следственных связей // *Системы и средства информатики*, 2023. Т. 33. № 1. С. 59–67. doi: 10.14357/08696527230106. EDN: CJKRRR.
26. Грушо А.А., Грушо Н.А., Забейхайло М.И., Кульченков В.В., Тимонина Е.Е. Косвенные признаки в задачах классификации данных большой размерности с помощью причинно-следственных связей // *Информатика и её применения*, 2025. Т. 19. № 4. С. 72–77. doi: 10.14357/19922264250408. EDN: UZKQSR.
27. Грушо А.А., Грушо Н.А., Забейхайло М.И., Тимонина Е.Е. Удаленный мониторинг рабочих процессов // *Информатика и её применения*, 2021. Т. 15. Вып. 3. С. 2–8. doi: 10.14357/19922264210301. EDN: VWANOS.
28. Грушо А.А., Грушо Н.А., Забейхайло М.И., Тимонина Е.Е. Локализация исходной причины аномалии // *Проблемы информационной безопасности. Компьютерные системы*, 2020. № 4. С. 9–16. EDN: JXHQTU.

Поступила в редакцию 13.03.2026

Принята к публикации 15.05.2026

---

## SEARCH FOR ANOMALIES IN NETWORK-CENTRIC CONTROL SYSTEMS

A. A. Grusho, N. A. Grusho, M. I. Zabezhalo, A. A. Zatsarinny, and V. O. Piskovski

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The use of network-centric technologies in control and decision support systems is determined by the concept of development of control and monitoring of peripheral nodes of the network-centric system (SCS) and the conditions for ensuring information security. Security issues in SCS have a number of specific features. The main goal of the Center can be described as a controlling cause consisting of properties that ultimately generate actions throughout the system. The control cause consists of a plurality of separate properties which themselves serve as the causes for sets of properties of slave SCS nodes functioning simultaneously as derived causes. The paper discusses problems of monitoring anomalies in the SCS when performing the main task set by the Center for peripheral nodes. Three types of anomalies were identified: (i) distortion of the properties of the consequences of derivative causes that give rise to actions to implement the plans of the Center; (ii) presence of obstacles when performing actions by nodes in the interests of the Center; and (iii) increased resource consumption which may slow down or stop the execution of actions at the remote node in the interests of the Center. The greatest difficulties are associated with the identification of anomalies of the first type.

**Keywords:** information security; network-centric systems; anomalies; detection of anomalies

**DOI:** 10.14357/19922264260207

**EDN:** PPXIOI

## References

1. Roshchepiy, I. 04.01.2025. Setetsentricheskaya voyna: chemu nauchil sovetskiy marshal Ogarkov armiyu SShA [Network-centric warfare: What Marshal of the Soviet Union Ogarkov taught the U.S. Army]. *Russkaya semerka* [Russian Seven]. Available at: <https://russian7.ru/post/setecentricheskaya-voyna-chemu-nauchil-s/>; <https://dzen.ru/a/Z3lduCbJ0lJCzqY> (accessed May 29, 2026).
2. Pospelov, G.S., and V.A. Irikov. 1976. *Programmno-tselevoe planirovanie i upravlenie* [Program and target planning and management]. Moscow: Sovetskoe radio [Soviet radio]. 440 p.

3. A guide to the project management body of knowledge (PMBOK® Guide). 2021. 7th ed. Newtown Square, PA: Project Management Institute. 370 p.
4. Grusho, A., E. Timonina, and S. Shorgin. 2017. Vulnerabilities of a network management system. *Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics into Telecommunications: 11th Workshop (International) on Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics into Telecommunications Proceedings*. Eds. D. Araniti, K. E. Samuylov, and S. Ya. Shorgin. Moscow: RUDN. 9. EDN: ZVLOQR.
5. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, D. V. Smirnov, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2022. O bezopasnoy arkhitekture vychislitel'noy sistemy na osnove mikroservisov [About the secure architecture of a microservice-based computing system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(4):87–92. doi: 10.14357/19922264220413. EDN: SUBXMB.
6. Pearl, J. 1995. Causal diagrams for empirical research. *Biometrika* 82(4):669–688. doi: 10.2307/2337329.
7. Pearl, J. 1996. Structural and probabilistic causality. *Psychol. Learn. Motiv.* 34:393–435. doi: 10.1016/S0079-7421(08)60566-6.
8. Balke, A., and J. Pearl. 1994. Probabilistic evaluation of counterfactual queries. *12th National Conference on Artificial Intelligence Proceedings*. Menlo Park, CA: MIT Press. I:230–237.
9. Mohan, K., J. Pearl., and J. Tian. 2013. Graphical models for inference with missing data. *Adv. Neur. In.* 26:1277–1285.
10. Pearl, J. 2019. The seven tools of causal inference, with reflections on machine learning. *Commun. ACM* 62(3):54–60. doi: 10.1145/3241036.
11. Mohan, K., and J. Pearl. 2021. Graphical models for processing missing data. *J. Am. Stat. Assoc.* 116(534):1023–1037. doi: 10.1080/01621459.2021.1874961.
12. Bareinboim, E., and J. Pearl. 2016. Causal inference and the data-fusion problem. *P. Natl. Acad. Sci. USA* 113(27):7345–7352. doi: 10.1073/pnas.1510507113.
13. Halpern, J. Y., and J. Pearl. 2005. Causes and explanations: A structural-model approach — Part I: Causes. *Brit. J. Philos. Sci.* 56(4):843–887.
14. VanderWeele, T. J. 2015. *Explanation in causal inference: Methods for mediation and interaction*. New York, NY: Oxford University Press. 706 p.
15. Huang, X., and J. Marques-Silva. 2023. The inadequacy of Shapley values for explainability. Cornell University. 26 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2302.08160> (accessed May 29, 2026).
16. Gurevich, G., D. Kliger, and B. Weiner. 2012. The role of attribution of causality in economic decision making. *J. Socio-Econ.* 41(4):439–444. doi: 10.1016/j.socsc.2011.07.005.
17. Wang, Y., D. Liang, L. Charlin, and D. M. Blei. 2020. Causal inference for recommender systems. *14th Conference on Recommender Systems Proceedings*. New York, NY: ACM. 426–431. doi: 10.1145/3383313.3412225.
18. Gao, C., Yu Zheng, W. Wang, F. Feng, X. He, and Y. Li. 2022. Causal inference in recommender systems: A survey and future directions. Cornell University. 32 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2208.12397> (accessed May 29, 2026).
19. Vivek, Y., V. Ravi, A. A. Mane, and L. R. Naidu. 2022. Explainable artificial intelligence and causal inference based ATM fraud detection. Cornell University. 34 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2211.10595> (accessed May 29, 2026).
20. Abel, S., Y. Tang, J. Singh, and P. Paek. 2020. Applications of causal modeling in cybersecurity: An exploratory approach. *Advances Science Technology Engineering Systems J.* 5(3):380–387. doi: 10.25046/aj050349.
21. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, A. A. Zatsarinny, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2022. Analiz tsepochek prichinno-sledstvennykh svyazey [Cause-and-effect chain analysis]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):68–74. doi: 10.14357/19922264220209. EDN: HPSLTU.
22. Weinberg, A. I., C. Premebida, and D. R. Faria. 2025. Causality from bottom to top: A survey. *Mach. Learn.* 114:234. 37 p. doi: 10.1007/s10994-025-06855-5.
23. Grusho, A. A., M. I. Zabezhailo, D. V. Smirnov, and E. E. Timonina. 2017. Model' mnozhestva informatsionnykh prostranstv v zadache poiska insaydera [The model of the set of information spaces in the problem of insider detection]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(4):65–69. doi: 10.14357/19922264170408. EDN: ZXWUOP.
24. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, V. V. Kulchenkov, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2023. Prichinno-sledstvennyye svyazi v zadachakh klassifikatsii [Causal relationships in classification problems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(1):43–49. doi: 10.14357/19922264230106. EDN: DTQZPK.
25. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, A. A. Zatsarinny, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2023. Zadacha klassifikatsii v usloviyakh iskazhennykh prichinno-sledstvennykh svyazey [The classification problem in conditions of distorted cause-and-effect relationships]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 33(1):59–67. doi: 10.14357/08696527230106. EDN: CJKRRR.
26. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, V. V. Kulchenkov, and E. E. Timonina. 2025. Kosvennyye priznaki v zadachakh klassifikatsii dannykh bol'shoy razmernosti s pomoshch'yu prichinno-sledstvennykh svyazey [Indirect properties in classification of large data with the help of cause-and-effect relationships]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(4):72–77. doi: 10.14357/19922264250408. EDN: UZKQSR.
27. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, and E. E. Timonina. 2021. Udalennyy monitoring rabochikh protsessov [Remote monitoring of workflows]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(3):2–8. doi: 10.14357/19922264210301. EDN: VWANOS.

28. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhalo, and E. E. Timonina. 2020. Lokalizatsiya iskhodnoy prichiny anomalii [Root cause anomaly localization]. *Problemy informatsionnoy bezopasnosti. Komp'yuternye sistemy* [Problems of Information Security. Computer Systems] 4:9–16. EDN: JXHQTY.

Received March 13, 2026

Accepted May 15, 2026

## Contributors

**Grusho Alexander A.** (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; grusho@yandex.ru

**Grusho Nikolai A.** (b. 1982) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 avilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; info@itake.ru

**Zabezhalo Michael I.** (b. 1956) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; m.zabezhalo@yandex.ru

**Zatsarinny Alexander A.** (b. 1951) — Doctor of Science in technology, professor, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences; 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; AZatsarinny@frcsc.ru

**Piskovski Viktor O.** (b. 1963) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences; 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; vvp80@yandex.ru

# ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ $M/G/1$ С СОБЫТИЙНО-ЗАВИСИМЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ПОСТУПЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ КРИТИЧЕСКОЙ ЗАГРУЗКИ\*

А. К. Берговин<sup>1</sup>, В. Г. Ушаков<sup>2</sup>

**Аннотация:** Изучена одноканальная система массового обслуживания с неограниченным числом мест для ожидания и произвольным распределением времени обслуживания, в которой интенсивность пуассоновского входящего потока зависит от последнего события в системе: поступления заявки или завершения обслуживания. Входящие потоки такой структуры позволяют моделировать ситуацию, в которой поведение входящего потока зависит от функционирования системы. В качестве математического аппарата исследования используется метод дополнительных компонент, с помощью которого было найдено распределение числа требований в системе в нестационарном режиме, а как следствие — и в стационарном. В силу того что большинство реальных систем оказываются высоконагруженными, возникает необходимость исследовать характеристики системы в условиях критической загрузки, поэтому вторая часть работы посвящена этой задаче. По результатам исследования поведения длины очереди в условиях критической загрузки найдено предельное распределение числа требований в системе в явном виде.

**Ключевые слова:** пуассоновский поток; событийно-зависимая интенсивность; длина очереди; метод дополнительных компонент; критическая загрузка

DOI: 10.14357/19922264260208

EDN: BBPGWM

## 1 Введение

В условиях современного телекоммуникационного рынка клиенты часто сталкиваются с очередями при подключении к различным сервисам, будь то линии технической поддержки, онлайн-сервисы или обработка запросов в мобильных приложениях. В этих случаях пользователи принимают решение: присоединиться к очереди или отказаться от обслуживания. Основными факторами, влияющими на выбор пользователя, выступают как длина очереди, так и особенности предоставляемых услуг, а также временные характеристики обслуживания. В реальных условиях клиенты часто ориентируются на последние наблюдаемые события, такие как завершение обслуживания предыдущего запроса или поступление нового. Эти события оказывают значительное влияние на восприятие времени ожидания и могут влиять на решение о продолжении ожидания. В частности, последняя информация о завершении обслуживания или поступлении нового запроса может создавать у клиента иллюзию того, что система работает быстрее или медленнее, чем это соответствует действительности. Например, если клиент наблюдает, что после завершения об-

служивания очередь быстро сокращается, он может предположить, что система работает эффективно, и, следовательно, принять решение о присоединении к очереди. В то же время, если завершение обслуживания вызвало временное увеличение очереди, пользователь может решить, что дальнейшее ожидание будет длительным и отказаться от присоединения. Этот феномен связан с когнитивными искажениями в принятии решений, когда последнее событие воспринимается как основа для оценки качества системы обслуживания, что может быть далеко от реальной картины. Для систем массового обслуживания, включая телекоммуникационные сервисы, важно понимать влияние таких искажений на поведение клиентов, поскольку это может существенно повлиять на их восприятие качества и решение о дальнейшем участии в процессе обслуживания. Несмотря на то что наблюдаемые события (например, время обслуживания или число обслуженных клиентов) могут не быть объективными индикаторами качества, они оказывают значительное влияние на восприятие системы.

Данное исследование посвящено анализу такого поведения клиентов в системах массового обслужи-

\* Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по Соглашению № 075-15-2025-345.

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, кафедра математической статистики; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, alexey.bergovin@gmail.com

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, кафедра математической статистики; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, vgushakov@mail.ru

вания, где решение о присоединении или отказе от очереди зависит от последнего наблюдаемого события, будь то завершение обслуживания или поступление нового запроса. Система, аналогичная рассматриваемой, была изучена методом вложенных цепей Маркова в [1]. Данная статья использует другой математический аппарат для изучения распределения системы — метод дополнительных компонент, таким образом удается найти распределение в нестационарном режиме. Исследованию систем с зависимыми от событий параметрами посвящено достаточно много работ (см., например, [2–4]). Исследования [5–11], в свою очередь, демонстрируют другие возможные подходы к решению схожих задач. Второй результат работы — изучение поведения длины очереди в условиях критической загрузки системы. Рассматриваемая постановка задачи о критической загрузке восходит к работе [12], примером исследования служит [13].

## 2 Описание модели. Вспомогательные результаты

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с неограниченным числом мест для ожидания. Входящий поток требований — пуассоновский с интенсивностью  $a_1$  или  $a_2$  в зависимости от того, какое событие было последним: поступление или завершение обслуживания требования. Длительности обслуживания требований независимы и одинаково распределены случайные величины (СВ) с функцией распределения (ФР)  $B(x)$  и плотностью распределения  $b(x)$  соответственно.

Введем следующие случайные процессы:

$L(t)$  — число требований в системе в момент времени  $t$ ;

$x(t)$  — время, прошедшее с начала обслуживания требования, находящегося на приборе в момент  $t$ ;

$j(t) = \begin{cases} 1, & \text{если интенсивность потока равна } a_1; \\ 2, & \text{если интенсивность потока равна } a_2. \end{cases}$

Будем предполагать, что в начальный момент времени  $t = 0$  система свободна, а интенсивность входящего потока равна  $a_2$ .

Пусть

$$P_j(n, x, t) = \frac{d}{dx} \mathbf{P}(L(t) = n, x(t) < x, j(t) = j), \quad n \geq 1,$$

$$P_{0j}(t) = \mathbf{P}(L(t) = 0, j(t) = j),$$

$$p_j(z, x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} e^{-st} P_j(n, x, t) dt,$$

$$p_{0j}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_{0j}(t) dt,$$

$$p(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{P}(L(t) = n) dt,$$

$$\beta(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dB(t), \quad \beta_k = \int_0^{\infty} t^k dB(t), \quad \eta(x) =$$

$$= \frac{b(x)}{1 - B(x)}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

$$\rho = 1 - a_1\beta_1 + (1 - \beta(a_2))(a_1a_2^{-1} - 1).$$

**Лемма 1.** Уравнение

$$z = \beta(s + a_2) +$$

$$+ \frac{a_2 z}{a_1 - a_1 z - a_2} (\beta(s + a_2) - \beta(s + a_1 - a_1 z))$$

имеет единственное решение  $z = \pi(s)$ ,  $|\pi(s)| \leq 1$  при  $\operatorname{Re} s > 0$ . Если  $\rho \geq 0$ , то  $\pi(+0) = 1$ , в противном случае  $\pi(+0) < 1$ .

**Доказательство.** Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1 в [14, гл. 4, § 1].

## 3 Основные результаты

**Теорема 1.**

$$p(z, s) = p_{02}(s) + \frac{1 - \beta(s + a_1 - a_1 z)}{s + a_1 - a_1 z} p_1(z, 0, s) +$$

$$+ \left( \frac{a_2 z}{a_1 - a_1 z - a_2} \left( \frac{1 - \beta(s + a_2)}{s + a_2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1 - \beta(s + a_1 - a_1 z)}{s + a_1 - a_1 z} \right) + \frac{1 - \beta(s + a_2)}{s + a_2} \right) p_2(z, 0, s),$$

где

$$p_1(z, 0, s) = a_2 z p_{02}(s);$$

$$p_2(z, 0, s) = \left( 1 - z^{-1} \beta(s + a_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{a_2}{a_1 - a_1 z - a_2} (\beta(s + a_2) - \beta(s + a_1 - a_1 z)) \right)^{-1} \times$$

$$\times (1 - (s + a_2 - a_2 \beta(s + a_1 - a_1 z)) p_{02}(s));$$

$$p_{02}(s) = (s + a_2 - a_2 \beta(s + a_1 - a_1 \pi(s)))^{-1}.$$

**Доказательство.** Прямые уравнения Колмогорова для марковского случайного процесса  $(L(t), x(t), j(t))$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(n, x, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(n, x, t)}{\partial x} &= -(a_1 + \eta(x))P_1(n, x, t) + \\ &+ (1 - \delta_{n1})(P_1(n-1, x, t)a_1 + P_2(n-1, x, t)a_2), \\ \frac{\partial P_2(n, x, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(n, x, t)}{\partial x} &= -(a_2 + \eta(x))P_2(n, x, t), \\ P_1(n, 0, t) &= \delta_{n1}P_{02}(t)a_2, \\ P_2(n, 0, t) &= \int_0^\infty P_2(n+1, x, t)\eta(x)dx + \\ &+ \int_0^\infty P_1(n+1, x, t)\eta(x)dx, \\ \frac{dP_{02}(t)}{dt} &= -a_2P_{02}(t) + \int_0^\infty P_2(1, x, t)\eta(x)dx + \\ &+ \int_0^\infty P_1(1, x, t)\eta(x)dx, \quad P_{01}(t) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial p_1(z, x, s)}{\partial x} = -(s + a_1 - a_1z + \eta(x)) \times p_1(z, x, s) + a_2zp_2(z, x, s), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2(z, x, s)}{\partial x} &= \\ &= -(s + a_2 + \eta(x))p_2(z, x, s) + a_2zp_2(z, x, s), \quad (2) \end{aligned}$$

$$p_1(z, 0, s) = a_2zp_{02}(s), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} p_2(z, 0, s) &= z^{-1} \int_0^\infty p_1(z, x, s)\eta(x)dx + \\ &+ z^{-1} \int_0^\infty p_2(z, x, s)\eta(x)dx + 1 - (s + a_2)p_{02}(s). \quad (4) \end{aligned}$$

Общее решение системы уравнений (1), (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} p_1(z, x, s) &= (1 - B(x)) \left( \frac{a_2z}{a_1 - a_1z - a_2} \left( e^{-(s+a_2)x} - \right. \right. \\ &\left. \left. - e^{-(s+a_1-a_1z)x} \right) p_2(z, 0, s) + \right. \\ &\left. + e^{-(s+a_1-a_1z)x} p_1(z, 0, s) \right); \quad (5) \end{aligned}$$

$$p_2(z, x, s) = (1 - B(x))e^{-(s+a_2)x}p_2(z, 0, s). \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (3) и (4), получаем

$$\begin{aligned} &\left( 1 - z^{-1}\beta(s + a_2) - \frac{a_2}{a_1 - a_1z - a_2} \times \right. \\ &\left. \times (\beta(s + a_2) - \beta(s + a_1 - a_1z)) \right) p_2(z, 0, s) = \\ &= 1 - (s + a_2 - a_2\beta(s + a_1 - a_1z))p_{02}(s); \quad (7) \\ p_1(z, 0, s) &= a_2zp_{02}(s). \end{aligned}$$

В силу леммы 1 левая часть (7) обращается в 0 при  $z = \pi(s)$ . Следовательно,

$$p_{02}(s) = (s + a_2 - a_2\beta(s + a_1 - a_1\pi(s)))^{-1}.$$

Теперь утверждение теоремы следует из равенства

$$p(z, s) = p_{02}(s) + \int_0^\infty p_1(z, x, s)dx + \int_0^\infty p_2(z, x, s)dx.$$

**Теорема 2.** Если  $\rho > 0$ , то существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(L(t) = n) = p_n$ , причем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty z^n p_n &= p_0 + \frac{1 - \beta(a_1 - a_1z)}{a_1 - a_1z} a_2z p_0 + \\ &+ \left( \frac{a_2z}{a_1 - a_1z - a_2} \left( \frac{1 - \beta(a_2)}{a_2} - \frac{1 - \beta(a_1 - a_1z)}{a_1 - a_1z} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1 - \beta(a_2)}{a_2} \right) p_2(z), \end{aligned}$$

где

$$p_0 = \frac{a_1(1 - a_2\beta_1) + (a_2 - a_1)\beta(a_2)}{a_1 + (a_2 - a_1)(1 + a_2\beta_1)\beta(a_2)};$$

$$\begin{aligned} p_2(z) &= \left( 1 - z^{-1}\beta(a_2) - \right. \\ &\left. - \frac{a_2}{a_1 - a_1z - a_2} (\beta(a_2) - \beta(a_1 - a_1z)) \right)^{-1} \times \\ &\times (1 - (a_2 - a_2\beta(a_1 - a_1z))p_0). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Утверждения теоремы следуют из леммы 1, теоремы 1 и равенств

$$\sum_{n=0}^\infty z^n p_n = \lim_{s \rightarrow 0} sp(z, s).$$

**Замечание.** Другое доказательство теоремы 2 содержится в [1].

## 4 Предельная теорема при критической загрузке

В этом разделе будет изучено поведение случайного процесса  $L(t)$  при одновременном стремлении времени  $t$  к бесконечности и загрузки  $a_1\beta_1 - (1 - \beta(a_2)) (a_1a_2^{-1} - 1)$  к единице.

Рассматривается последовательность систем обслуживания (схема серий), параметры которых зависят от их номера в последовательности, причем существуют два момента ФР времени обслуживания и справедливы разложения

$$\beta^{(n)}(s) = 1 - \beta_1^{(n)}s + \frac{\beta_2^{(n)}}{2}s^2 + o_n(s^2), \quad (8)$$

где  $o_n(s^2)/s^2 \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 0$  равномерно по  $n$ . Кроме того, существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_i^{(n)} = a_i^*, \quad i = 1, 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_j^{(n)} = \beta_j^*, \quad j = 1, 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{(n)} = 0,$$

причем для любого  $n$  справедливо неравенство  $\rho^{(n)} > 0$ .

В дальнейшем верхний индекс  $n$  (номер в серии) для сокращения записи будет опускаться, а  $\lim$  будет означать  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ .

**Лемма 2.** *Справедливы следующие разложения:*

$$\pi(s\rho^\alpha) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{s\beta_1}{v}} \rho^{\alpha/2} + o(\rho^{\alpha/2}), & \alpha < 2; \\ 1 - \frac{\sqrt{1+4vs\beta_1}-1}{2v} \rho + o(\rho), & \alpha = 2; \\ 1 - s\beta_1\rho^{\alpha-1} + o(\rho^{\alpha-1}), & \alpha > 2. \end{cases}$$

**Доказательство.** Пусть  $\varphi(s) = 1 - \pi(s)$ . Тогда в силу леммы 1 при  $\alpha > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \varphi(s\rho^\alpha) &= 1 - \beta(s\rho^\alpha + a_1\varphi(s\rho^\alpha)) + \\ &+ \frac{(a_1 - a_2)\varphi(s\rho^\alpha)}{a_1\varphi(s\rho^\alpha) - a_2} (\beta(s\rho^\alpha + a_1\varphi(s\rho^\alpha)) - \\ &- \beta(s\rho^\alpha + a_2)). \end{aligned}$$

Отсюда, используя разложения (8), получаем

$$v\varphi^2(s\rho^\alpha) + \rho\varphi(s\rho^\alpha) - \beta_1s\rho^\alpha + o(\varphi^2(s\rho^\alpha)) = 0, \quad (9)$$

где

$$v = \frac{a_1^2\beta_2}{2} + a_1 \left( \frac{1 - \beta(a_2)}{2a_2} - \beta_1 \right) \left( \frac{a_1}{a_2} - 1 \right).$$

Рассматривая три случая:  $\alpha < 2$ ,  $\alpha = 2$  и  $\alpha > 2$ , из (9) получаем утверждения леммы.

Пусть

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\alpha}{2}, & \alpha \leq 2; \\ 1, & \alpha > 2, \end{cases} \quad v^* = \lim v.$$

**Теорема 3.**

$$\lim \mathbf{P} \left( \rho^\gamma L \left( \frac{t}{\rho^\alpha} \right) < x \right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x\sqrt{\beta_1^*(2v^*t)^{-1}}} e^{-(u^2/2)} du, & \alpha < 2; \\ 1 - \frac{e^{-x(v^*)^{-1}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-h_1+xh_2}^\infty e^{-y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{h_1+xh_2}^\infty e^{-y^2} dy, & \alpha = 2; \\ 1 - e^{-x(v^*)^{-1}}, & \alpha > 2, \end{cases}$$

где  $h_1 = \sqrt{t(4v^*\beta_1^*)^{-1}}$ ;  $h_2 = \sqrt{\beta_1^*(4tv^*)^{-1}}$

**Доказательство.** Так как

$$\int_0^\infty e^{-st} \mathbf{E}(\exp(-u\rho^\gamma L(t/\rho^\alpha))) dt = \rho^\alpha p(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha),$$

то для доказательства теоремы достаточно найти предел последовательности  $\rho^\alpha p(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)$  и обратить предельные преобразования Лапласа и Лапласа–Стилтьеса.

Из равенств

$$\begin{aligned} s\rho^\alpha + a_2 - a_2\beta(s\rho^\alpha + a_1 - a_1\pi(s\rho^\alpha)) &= \\ &= a_1a_2\beta_1(1 - \pi(s\rho^\alpha)) + o(1 - \pi(s\rho^\alpha)), \\ \lim \frac{1 - \beta(s\rho^\alpha + a_1 - a_1e^{-u\rho^\gamma})}{s\rho^\alpha + a_1 - a_1e^{-u\rho^\gamma}} &= \beta_1 \end{aligned}$$

и леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} \lim \rho^\alpha p(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) &= \\ &= \beta_1 \lim \rho^\alpha p_2(e^{-u\rho^\gamma}, 0, s\rho^\alpha). \end{aligned} \quad (10)$$

Далее,

$$\begin{aligned} 1 - (s\rho^\alpha + a_2 - a_2\beta(s\rho^\alpha + a_1 - \\ - a_1e^{-u\rho^\gamma})) p_{02}(s\rho^\alpha) &= \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{s\beta_1v^{-1}} - u}{\sqrt{s\beta_1v^{-1}}} + o(1), & \alpha < 2; \\ \frac{(\sqrt{1+4vs\beta_1}-1)(2v)^{-1} - u}{(\sqrt{1+4vs\beta_1}-1)(2v)^{-1}} + o(1), & \alpha = 2; \\ -u(s\beta_1)^{-1}\rho^{2-\alpha} + o(\rho^{2-\alpha}), & \alpha > 2; \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$$1 - e^{u\rho^\gamma} \beta(s\rho^\alpha + a_2) - \frac{a_2}{a_1 - a_1 e^{-u\rho^\gamma} - a_2} \times \\ \times \left( \beta(s\rho^\alpha + a_2) - \beta(s\rho^\alpha + a_1 - a_1 e^{-u\rho^\gamma}) \right) = \\ = \beta_1 s \rho^\alpha - u \rho^{\gamma+1} - v u^2 \rho^{2\gamma} + o(\rho^\alpha). \quad (12)$$

Из (10)–(12) следует, что

$$\lim \rho^\alpha p \left( e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha \right) = \\ = \begin{cases} \left( s \left( 1 + u \sqrt{\frac{v^*}{s\beta_1^*}} \right) \right)^{-1}, & \alpha < 2; \\ \left( s \left( 1 + \frac{2v^*u}{1 + \sqrt{4v^*\beta_1^*s + 1}} \right) \right)^{-1}, & \alpha = 2; \\ (s(v^*u + 1))^{-1}, & \alpha > 2. \end{cases}$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

## 5 Заключение

В работе была исследована однолинейная система массового обслуживания с неограниченным числом мест для ожидания и произвольным распределением времени обслуживания требования. Входящий поток — пуассоновский, но его интенсивность зависит от события, которое произошло в системе последним. Используя метод дополнительных компонент, удалось найти распределение числа требований в системе в нестационарном режиме. Как следствие, найдено распределение в стационарном режиме. Дополнительно исследован вопрос о поведении длины очереди в условиях критической загрузки системы, найдено предельное распределение числа требований в системе.

## Литература

1. Legros B.  $M/G/1$  queue with event-dependent arrival rates // Queueing Syst., 2018. Vol. 89. No. 3. P. 269–301. doi: 10.1007/s11134-017-9557-7.
2. Bekker R., Borst S.C., Boxma O.J., Kella O. Queues with workload-dependent arrival and service rates // Queueing Syst., 2004. Vol. 46. P. 537–556. doi: 10.1023/B:QUES.0000027998.95375.ee.
3. Boxma O.J., Kaspi H., Kella O., Perry D. On/off storage systems with state-dependent input, output, and switching rates // Probab. Eng. Inform. Sc., 2005. Vol. 19. No. 1. P. 1–14. doi: 10.1017/S0269964805050011.
4. Boxma O.J., Vlasiou M. On queues with service and interarrival times depending on waiting times // Queueing Syst., 2007. Vol. 56. P. 121–132. doi: 10.1007/s11134-007-9011-3.
5. Агаларов Я. М. Об оптимизации работы резервного прибора в многолинейной системе массового обслуживания // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 89–95. doi: 10.14357/19922264230112. EDN: FCYDUT.
6. Самуйлов А. К., Платонова А. А., Шоргин В. С., Гайдамака Ю. В. К моделированию эффектов обслуживания многоадресного трафика в сетях 5G NR // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 71–77. doi: 10.14357/19922264230210. EDN: SLMGZU.
7. Зорин А. В. К определению периода занятости при не-локальном описании потоков // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 45–51. doi: 10.14357/19922264240306. EDN: YKSIBJ.
8. Синицын И. Н. Методы вероятностного и статистического моделирования неявных стохастических систем // Системы и средства информатики, 2024. Т. 35. № 3. С. 48–66. doi: 10.14357/08696527240305. EDN: RTNRUZ.
9. Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. О диспетчеризации в одном классе двухфазных систем массового обслуживания // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 29–47. doi: 10.14357/08696527230303. EDN: KGCBFL.
10. Сопин Э. С., Назарьин А. И., Шоргин С. Я. Разработка модели для расчета производительности планирования передач в сетях 5G NR с учетом сигнального трафика // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 3. С. 46–54. doi: 10.14357/19922264250306. EDN: EMAQVK.
11. Кривенко М. П. ARIMA-моделирование последовательности времен пребывания в системе массового обслуживания // Системы и средства информатики, 2025. Т. 35. № 3. С. 90–104. doi: 10.14357/08696527250306. EDN: KSPKSG.
12. Прохоров Ю. В. Переходные явления в процессах массового обслуживания // Литовский математический сборник, 1963. Т. 3. С. 199–206. doi: 10.15388/LMJ.1963.19422.
13. Берговин А. К., Ушаков В. Г. О длине очереди в системе со смешанными приоритетами в условиях критической загрузки // Вестник Московского университета. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2024. № 3. С. 54–59. doi: 10.55959/MSU/0137-0782-15-2024-47-3-54-59. EDN: EMAQVK.
14. Матвеев В. Ф., Ушаков В. Г. Системы массового обслуживания. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1984. 240 с.

Поступила в редакцию 22.02.2026

Принята к публикации 15.05.2026

# ANALYSIS OF AN $M/G/1$ QUEUE WITH EVENT-DEPENDENT ARRIVAL RATES UNDER HEAVY TRAFFIC CONDITION

A. K. Bergovin<sup>1,2</sup> and V. G. Ushakov<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

<sup>2</sup>Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

<sup>3</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** A single-server queueing system with an unlimited waiting capacity and arbitrary service time distribution is studied, in which the arrival rate of the Poisson input process depends on the last event in the system: an arrival or a service completion. Input flows of this structure make it possible to model situations where the behavior of the incoming flow depends on the system’s operation. The method of supplementary components serves as the mathematical apparatus of the study, with the help of which the distribution of the number of customers in the system was found in the nonstationary regime and, as a consequence, in the stationary regime as well. Given that most real-world systems are heavily loaded, there arises a need to investigate the system’s characteristics under critical load conditions; therefore, the second part of the paper is devoted to this task. Based on the analysis of the queue-length behavior under critical load, the limiting distribution of the number of customers in the system is obtained in explicit form.

**Keywords:** Poisson flow; event-dependent rate; queue length; supplementary variable method; heavy traffic

**DOI:** 10.14357/19922264260208

**EDN:** BBPGWM

## Acknowledgments

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the Agreement No. 075-15-2025-345.

## References

- Legros, B. 2018.  $M/G/1$  queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Sy.* 89(3):269–301. doi: 10.1007/s11134-017-9557-7.
- Bekker, R., S. C. Borst, O. J. Boxma, and O. Kella. 2004. Queues with workload-dependent arrival and service rates. *Queueing Syst.* 46:537–556. doi: 10.1023/B:QUES.0000027998.95375.ee.
- Boxma, O. J., H. Kaspi, O. Kella, and D. Perry. 2005. On/off storage systems with state-dependent input, output, and switching rates. *Probab. Eng. Inform. Sc.* 19(1):1–14. doi:10.1017/S0269964805050011.
- Boxma, O. J., and M. Vasiou. 2007. On queues with service and interarrival times depending on waiting times. *Queueing Syst.* 56:121–132. doi: 10.1007/s11134-007-9011-3.
- Agalarov, Ya. M. 2023. Ob optimizatsii raboty rezervnogo pribora v mnogolineynoy sisteme massovogo obsluzhivaniya [Optimization of a queue-length dependent additional server in the multiserver queue]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(1):89–95. doi: 10.14357/19922264230112. EDN: FCYDUT.
- Samoylov, A. K., A. A. Platonova, V. S. Shorgin, and Yu. V. Gaidamaka. 2023. K modelirovaniyu effektivov obsluzhivaniya mnogoadresnogo trafika v setyakh 5G NR [On modeling the effects of multicast traffic servicing in 5G NR networks]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):71–77. doi: 10.14357/19922264230210. EDN: SLMGZU.
- Zorine, A. V. 2024. K opredeleniyu perioda zanyatosti pri nelokal’nom opisanii potokov [Towards a definition of a busy period under nonlocal description of input flows]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):45–51. doi: 10.14357/19922264240306. EDN: YKSIBJ.
- Sinitsyn, I. N. 2024. Metody veroyatnostnogo i statisticheskogo modelirovaniya neyavnykh stokhasticheskikh sistem [Probabilistic and statistical modeling methods for implicit stochastic systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(3):48–66. doi: 10.14357/08696527240305. EDN: RTNRUZ.
- Kononov, M. G., and R. V. Razumchik. 2024. O dispatcherizatsii v odnom klasse dvukhfaznykh sistem massovogo obsluzhivaniya [On one problem of load balancing in two-phase tandem queues]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):52–58. doi: 10.14357/19922264240407. EDN: KGCBFL.
- Sopin, E. S., A. I. Nazarin, and S. Ya. Shorgin. 2025. Razrabotka modeli dlya rascheta proizvoditel’nosti planirovaniya peredach v setyakh 5G NR s uchetom sig-

- nal'nogo trafika [Model development for performance of transmission scheduling in 5G New Radio networks under signaling and user traffic constraints]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(3):46–54. doi: 10.14357/19922264250306. EDN: EMAQVK.
11. Krivenko, M. P. 2025. ARIMA-modelirovanie posledovatel'nosti vremen prebyvaniya v sisteme massovogo obsluzhivaniya [ARIMA-modeling of the sequence of sojourn times in queueing systems]. *Sistemy i sredstva informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(3):90–104. doi: 10.14357/08696527250306. EDN: KSPKSG.
  12. Prokhorov, Yu. V. 1963. Transient phenomena in queueing processes. *Lith. Math. J.* 3(1):199–205. doi: 10.15388/LMJ.1963.19422.
  13. Bergovin, A. K., and V. G. Ushakov. 2024. On the length of a queue in a mixed priority system under conditions of critical loading. *Moscow University Computational Mathematics Cybernetics* 48(3):184–189. doi: 10.3103/S0278641924700122. EDN: GHTECA.
  14. Matveev, V. F., and V. G. Ushakov. 1984. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya* [Queueing systems]. Moscow: M. V. Lomonosov Moscow State University Publ. 240 p.

Received March 6, 2026

Accepted May 15, 2026

## Contributors

**Bergovin Alexey K.** (b. 1995) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, assistant professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; junior scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; alexey.bergovin@gmail.com

**Ushakov Vladimir G.** (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; vgushakov@mail.ru

**Берговин Алексей Константинович** (р. 1995) — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; младший научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

**Борисов Андрей Владимирович** (р. 1965) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

**Виноградов Дмитрий Вячеславович** (р. 1964) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Грабовой Андрей Валериевич** (р. 1997) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории № 42 «Интеллектуальный анализ данных» Института проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук; доцент кафедры интеллектуальных систем Физтех-школы прикладной математики и информатики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета)

**Грушо Александр Александрович** (р. 1946) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Грушо Николай Александрович** (р. 1982) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Дорин Даниил Дмитриевич** (р. 2002) — студент магистратуры кафедры интеллектуальных систем Физ-

тех-школы прикладной математики и информатики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета)

**Забезайло Михаил Иванович** (р. 1956) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Зацаринный Александр Алексеевич** (р. 1951) — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Киселев Никита Сергеевич** (р. 2002) — студент магистратуры кафедры интеллектуальных систем Физтех-школы прикладной математики и информатики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета)

**Кудрявцев Алексей Андреевич** (р. 1978) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

**Куринов Юрий Николаевич** (р. 2002) — студент магистратуры факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

**Пантелеев Андрей Владимирович** (р. 1955) — доктор физико-математических наук, профессор, и.о. заведующего кафедрой «Математическая кибернетика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

**Писковский Виктор Олегович** (р. 1963) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Ушаков Владимир Георгиевич** (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор кафед-

ры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Хвошнянская Елизавета Аркадьевна** (р. 2001) — ассистент кафедры «Математическая кибернетика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

**Чижов Иван Владимирович** (р. 1984) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационной безопасности факультета вычислительной математики и кибернетики Московского

государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Шестаков Олег Владимирович** (р. 1976) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; ведущий научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

---

## Правила подготовки рукописей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

---

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Если при подготовке статьи авторы использовали инструменты на основе искусственного интеллекта, они обязаны включить эту информацию в текст статьи.

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации предоставленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.
3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам.  
Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.
5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.
6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи обязательно.

7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — A4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 10 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны оформления представлены в интернете:

[http://www.ipiran.ru/journal/template\\_jiep\\_ssi\\_2024.zip](http://www.ipiran.ru/journal/template_jiep_ssi_2024.zip)

8. Статья должна содержать следующую информацию на *русском и английском языках*:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием почтового адреса организации и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:  
[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp) и  
[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01\\_eng/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp);
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами;
- источники финансирования работы (ссылки на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.).

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний. Если источник имеет DOI и/или EDN, то их необходимо указывать.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала;
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://www.translit.net/ru/bgn/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Ниже приведены примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”.

**Описание статьи из журнала:**

Zagurenko, A. G., V. A. Korotovskikh, A. A. Kolesnikov, A. V. Timonov, and D. V. Kardymon. 2008. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizayna gidrorazryva plasta [Technical and economic optimization of the design of hydraulic fracturing]. *Neftyanoe hozyaystvo* [Oil Industry] 11:54–57.

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

**Описание статьи из электронного журнала:**

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

**Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):**

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’—kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel—composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem”* [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]. 593:125–130.

**Описание материалов конференций:**

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

**Описание книги (монографии, сборники):**

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Latyshev, V. N. 2009. *Tribologiya rezaniya. Kn. 1: Friksionnye protsessy pri rezanii metallov* [Tribology of cutting. Vol. 1: Frictional processes in metal cutting]. Ivanovo: Ivanovskii State Univ. 108 p.

**Описание переводной книги** (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (*Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. Vibration problems in engineering. — 4th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 1974. 521 p.*)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. New York: Wiley. 521 p.

**Описание неопубликованного документа:**

Latypov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004 (unpubl.). *Geologiya i dobycha (NGT GiD)* [Geology and production (NGT GiD)]. Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198.

**Описание интернет-ресурса:**

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

**Описание диссертации или автореферата диссертации:**

Semenov, V. I. 2003. *Matematicheskoe modelirovaniye plazmy v sisteme kompaktnyy tor* [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. Moscow. D.Sc. Diss. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. *Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa* [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

**Описание ГОСТа:**

GOST 8.586.5-2005. 2007. *Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichstva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv* [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publs. 10 p.

**Описание патента:**

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. *Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya* [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- указывать в тексте письма название статьи, авторов и журнал, в который направляется статья;
- использовать attach (присоединение);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

12. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

**Адрес редакции журнала «Информатика и её применения»:**

Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН

Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05

e-mail: [ieep@frccsc.ru](mailto:ieep@frccsc.ru) (Стригина Светлана Николаевна)

<http://www.ipiran.ru/journal/issues/>

---

## Requirements for manuscripts submitted to Journal “Informatics and Applications”

---

Journal “Informatics and Applications” (Inform. Appl.) publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of informatics and its applications.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

The topics covered include the following areas:

- theoretical fundamentals of informatics;
- mathematical methods for studying complex systems and processes;
- information systems and networks;
- information technologies; and
- architecture and software of computational complexes and networks.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

***Agreement on the transfer of rights to publish:***

*“We, the undersigned authors of the manuscript “. . .”, pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Informatics and Applications” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations.*

*Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).*

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

If authors used artificial intelligence (AI)-based tools in preparing their manuscript, they must include this information in the text of the article.

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If the authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved for publication. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.
7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 10 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site:

[http://www.ipiran.ru/journal/template\\_iiep\\_ssi\\_2024.zip](http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip).

8. The articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author’s name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format (see site):

[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp) and

[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01\\_eng/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp);

- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae;
- indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.  
Important! Keywords must not be sentences; and
- Acknowledgments.

9. References. Russian references have to be presented both in English translation and Latin transliteration (refer <http://www.translit.net/ru/bgn/>).

Please take into account the following examples of Russian references appearance:

**Article in journal:**

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

**Journal article in electronic format:**

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

**Article from the continuing publication (collection of works, proceedings):**

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem”* [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]. 593:125–130.

**Conference proceedings:**

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma “Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol’zovaniya i povysheniya neftegazootdachi”* [6th Symposium (International) “New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact” Proceedings]. Moscow. 267–272.

**Books and other monographs:**

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

**Dissertation and Thesis:**

Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

**State standards and patents:**

GOST 8.586.5–2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichstva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publs. 10 p.

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

References in Latin transcription are presented in the original language.

References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets. All items from the reference list should be cited.

10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.

11. Submissions of files by e-mail must include:

- the journal title and author’s name in the “Subject” field;
- the article title, authors’ names, and the journal title, whereto the paper is being submitted, in the text of the email;
- an article and additional materials have to be attached using the “attach” function; and
- an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.

12. “Informatics and Applications” journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

**Editorial Board address:**

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia

Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05

e-mail: [iiep@frccsc.ru](mailto:iiep@frccsc.ru) (to Svetlana Strigina)

<http://www.ipiran.ru/english/journal.asp>