

Информатика и её применения

Том 20 Выпуск 1 Год 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Мультипликативное управление выходом по квадратичному критерию: динамическое программирование и оптимальное решение А. В. Босов, И. В. Урюпин	2
Методы нормальной фильтрации для наблюдаемых эрмитарных стохастических систем, не разрешенных относительно производных И. Н. Сеницын	12
Оптимальное по быстродействию управление подвижным объектом на плоском маршруте А. С. Бортакровский, И. В. Урюпин	19
О дисперсионно-сдвиговых смесях нормальных законов как стационарных распределениях стохастического разностного уравнения со случайными коэффициентами В. Ю. Королев, Н. Р. Романюк	30
Методы порождения метрик на множествах объектов в контексте топологической теории анализа данных. Часть 1. Метрики на основе расстояний между значениями признаков И. Ю. Торшин	39
Математическая модель для анализа фазы передачи данных в системах интернета вещей А. В. Дараселия, К. А. Левкович, Э. С. Сопин, Ш. Пракаш, В. О. Бегишев	45
Функциональные характеристики вершинных кластеров многопользовательской сетевой системы Ю. Е. Малашенко, И. А. Назарова	55
Упорядочение многомерных лонгитюдных данных на основе коинтеграционного анализа М. П. Кривенко	64
О реляционной форме решения сетевых коалиционных игр Н. С. Васильев	73
Об авторах	83
Правила подготовки рукописей	84
Requirements for manuscripts	87

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫХОДОМ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ: ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ*

А. В. Босов¹, И. В. Урюпин²

Аннотация: Решается задача оптимального управления квазилинейным выходом стохастической дифференциальной системы, возмущаемым диффузионным процессом Ито. В отличие от традиционной постановки аддитивного управления предполагается, что управляемый линейный выход содержит мультипликативное управление, формируя квазилинейную дифференциальную систему с обратной связью. Постановка использует квадратичный критерий общего вида, формирующий цели управления, идентичные модели с аддитивным управлением. Это позволяет сравнить варианты управления как архитектурные решения в одинаковых приложениях. Акцент сделан на двух мультипликативных вариантах, когда управление служит множителем либо состояния, либо неконтролируемого возмущения. Оставшийся третий вариант мультипликативного по выходу управления формирует билинейную систему, исследование которой требует другой методики. Для решения используется метод динамического программирования. Так же как и в аддитивной модели, удастся найти функцию Беллмана в форме квадратичного по выходу функционала. При этом решение, описываемое тремя коэффициентами функции Беллмана, в варианте мультипликативного по состоянию управления оказывается существенно сложнее, что делает актуальным вопрос синтеза практически реализуемых аппроксимаций. Вариант управления, мультипликативного по возмущению, существенно проще, но его практическая востребованность ограничена.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение; оптимальное управление; квазилинейные системы; мультипликативное управление; динамическое программирование; функция Беллмана; уравнение Риккати; линейные уравнения параболического типа

DOI: 10.14357/19922264260101

EDN: VPIYMP

1 Введение

Методы и алгоритмы оптимального управления [1] — типичный инструмент стохастической теории. Практические приложения оптимальное стохастическое управление находит в большом числе прикладных областей. Наиболее востребованной методикой было, есть и, по-видимому, будет оставаться LQ-управление (линейно-квадратичное), включающее линейную модель с аддитивным управлением и квадратичный целевой функционал [2, 3]. Однако достаточно много остается приложений, в которых линейная и аддитивная модель управления не позволяют адекватно отобразить реальную архитектуру технических решений. К числу таких относятся модели с общим признаком: управление действует мультипликативно, а не аддитивно. Ситуаций таких действительно много, а управление может умножаться на что угодно: на переменную состояния, на шум, на выход, даже на управление. Это существенно усложняет поведение системы и делает ее нелинейной, но при

этом часть привлекательных LQ-свойств сохраняется, что можно использовать для нахождения если и не всегда оптимального решения, то хотя бы эффективного приближенного управления.

Фундаментальные исследования таких задач ведутся давно и успешно [4–10]. Вместе с тем помимо теоретической есть значительная практическая востребованность мультипликативных управлений. Для ее иллюстрации приведем некоторые примеры тех задач и соответствующих архитектурных решений, которые известны из практики. По-видимому, наиболее распространены билинейные системы, в которых управление — множителем при переменной состояния. Такие задачи возникают, когда управляющим воздействием служат коэффициент роста (контроль популяции, финансы), коэффициент масштаба (управление динамикой роботов, жесткостью/податливостью, скоростью химической реакции) [11]. Технически аналогичны билинейные системы с управлением, мультипликативным по выходу. Но характерные приложения такой архитектуры по большей части связаны с на-

* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ABosov@frccsc.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, uryupin93@yandex.ru

блюдениями, например в управлении чувствительностью измерительного оборудования, в частности в радарх, лидарах, камерах с контролируемым разрешением, а также в медицинских датчиках, где управление — это коэффициент усиления [12].

Очень похожая модель, но принципиально иная архитектура в задачах, когда управление умножается на наблюдения. Здесь, например, речь может идти о выборе типа сенсора, т. е. об определении той части состояния, которая будет наблюдаться. Здесь появляются очень современные приложения, например активное восприятие (камеры, радары, сканеры), экономические панели (выбор индикаторов), робототехника (поле зрения, фокус, разрешение) [13].

Немного отличаются билинейные системы, в которых управление умножается на матрицу состояния, влияя на фазовый вектор опосредованно. Такие архитектуры есть в моделях полетов и аэродинамики, управления роботами через механизмы приводов, в задачах подбора параметров электросети, в экономических моделях (налоги/тарифы) [14]. Хотя внешне обе билинейные модели примерно одинаковы, вторая архитектура более специфична — это линейная система, где управление «выбирает» матрицу, по которой эволюционирует состояние.

Не самая очевидная архитектура получается, когда управление умножается на шум. Но и этот вариант имеет практическую ценность. Он встречается при управлении системами с нестабильной связью, контроле ошибок в каналах связи, в системах с параметрическим разбросом, в задачах портфельного управления с рисковым усилением (финансы) [15].

Наиболее специфическим вариантом может оказаться умножение управления на управление (имеет место при управлении двигателями, некоторыми роботизированными комплексами, энергетическими системами) [16] и модель переменной динамики, когда управление меняет саму структуру системы, «выбирает» модель (переключение режимов движения в авиации, включение/отключение электрических/коммуникационных линий, в гибридных непрерывно-дискретных системах) [17].

Исследование, начатое в данной статье, следует в русле перечисленных архитектурных концепций мультипликативного управления. Формулировка типичной задачи аддитивного управления выходом, поставленная в [18], обязана прикладным задачам управления внешними и внутренними ресурсами информационной системы [19, 20], применительно к которым более гармоничные архитектурные решения должны быть мультипликативными, а не аддитивными (например, определение объема ресурса в процентах от текущей потребности, а не

добавкой фиксированного размера). Создание нужной для этого теории и методологии составляет предмет представленного исследования. Дополнительно отметим цель сравнить модели и реализации традиционного аддитивного управления, найденного в [18] и изученного в [21], и мультипликативного управления, которому посвящена данная статья.

2 Модели мультипликативного управления и постановка задачи

Для постановки и исследования целевой задачи воспроизводится логика и порядок исследования [18]. Будем следовать максимально возможной альтернативности моделей, определяющих в итоге архитектуру конечного решения. Для этого отдельно рассмотрим варианты мультипликативного управления, акцентируясь на конкретном множителе, без обсуждения смешанных стратегий, таких как, например, аддитивное + билинейное по состоянию управление. На практике такие архитектуры встречаются редко, а технические детали затрудняют анализ ключевых свойств решений. Более того, чтобы в результате акцентировать внимание именно на сравнении алгоритмов управления, ограничимся предположением, что все случайные функции, имеющиеся в моделях, скалярные. Такое упрощение позволит разгрузить выкладки и итоговые выражения от не самых существенных деталей и сосредоточиться на главной задаче — сравнить реализации и разные архитектуры систем управления.

Система управления имеет состояние y_t , описываемое стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dy_t = A_t(y_t) dt + \Sigma_t(y_t) dv_t, \quad y_0 = Y. \quad (1)$$

Здесь возмущение v_t — стандартный винеровский процесс; начальное условие Y — случайная величина с конечным вторым моментом; функции сноса и диффузии A_t и Σ_t удовлетворяют условиям Ито существования единственного сильного (потраекторного) решения:

$$\begin{aligned} |A_t(y)| + |\Sigma_t(y)| &\leq C(1 + |y|), \\ |A_t(y_1) - A_t(y_2)| + |\Sigma_t(y_1) - \Sigma_t(y_2)| &\leq C|y_1 - y_2|, \\ 0 \leq t \leq T, \quad y_1, y_2 &\in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

В ключевых исследованиях по аддитивному управлению и квадратичному критерию такое состояние часто интерпретируется как сложный, коррелированный шум [22, 23]. Но в рамках данного исследования эта функция будет предполагаться известной, т. е. задача управления рассматривается в постановке с полной информацией. Одна-

ко, ориентируясь в дальнейшем на использование принципа разделения в постановке с косвенными наблюдениями, такую интерпретацию y_t также можно учитывать. Основная цель функционирования моделируемой системы определяется выходной переменной z_t , квазилинейно связанной с состоянием y_t . Уравнение, определяющее z_t , может иметь одну из трех форм:

$$dz_t = a_t u_t y_t dt + b_t z_t dt + \sigma_t dw_t; \quad (2)$$

$$dz_t = a_t y_t dt + b_t z_t dt + \sigma_t u_t dw_t; \quad (3)$$

$$dz_t = a_t y_t dt + b_t u_t z_t dt + \sigma_t dw_t \quad (4)$$

с начальным условием $z_0 = Z$. Здесь возмущение w_t — не зависящий от v_t , Y и Z стандартный винеровский процесс; Z — гауссовская (в дальнейшем это предположение понадобится для решения задачи в постановке с неполной информацией о состоянии y_t) случайная величина с конечным вторым моментом; u_t — допустимое неупреждающее управление [1], качество которого определяется целевым функционалом (см. подробнее [18, 24])

$$J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T (S_t (s_t y_t - g_t z_t - h_t u_t)^2 + G_t z_t^2 + H_t u_t^2) dt \right\}, \quad (5)$$

где S_t, G_t и H_t — неотрицательные функции $0 \leq t < T$; $\mathbb{E}\{x\}$ — математическое ожидание x . Отметим, что для простоты в целевой функции отсутствует терминальное слагаемое, что общности рассуждений не мешает.

Следуя принятой терминологии введения, варианты расположения u_t в (2)–(4) отвечают разным типам мультипликативных управлений: множитель состояния y_t (билинейная система); множитель возмущения w_t (мультипликативный шум); множитель выхода z_t (билинейная по выходу система). Повторим, что в рамках многомерной модели все три случая могут быть объединены, а в рамках реализуемых архитектур решений — нет. При этом целевой функционал (5) как раз может быть одинаковым для разных архитектур управления. Более того, сравнивать (2)–(4) имеет смысл с типовой моделью аддитивного управления (см. подробнее [18, 24]):

$$dz_t = a_t y_t dt + b_t z_t dt + c_t u_t dt + \sigma_t dw_t.$$

Класс U_0^T допустимых управлений составляют управления с полной обратной связью, т. е. в предположении полной информации о состоянии y_t и выходе z_t . Таким образом, это функции вида $u_t = u_t(y, z)$ при условии, что соответствующая ре-

ализация $u_t = u_t(y_t, z_t)$ обеспечивает выполнение условий существования z_t для $u_t \in U_0^T$. Формальное описание класса допустимых управлений нужно дополнить предположением об ограниченности функций a_t, b_t и σ_t : $|a_t| + |b_t| + |\sigma_t| \leq C$ для всех $0 \leq t \leq T$ и о кусочной непрерывности всех функций $a_t, b_t, \sigma_t, s_t, g_t, h_t, S_t, G_t$ и H_t , что обеспечит выполнение типовых условий существования решений дифференциальных уравнений, получаемых далее.

Решаемой задачей ставится поиск u_t^* -допустимого управления, доставляющего минимум квадратичному функционалу $J(U_0^T)$.

3 Оптимальное уравнение

3.1 Управление динамического программирования

Решение ищется для функции Беллмана

$$V_t(y, z) = \inf_{U_t^T} \mathbb{E} \left\{ \int_t^T L_\tau(y_\tau, z_\tau) d\tau \middle| \mathcal{F}_t^{y, z} \right\},$$

где через L_t обозначено ядро целевого функционала (5)

$$L_t(y_t, z_t) = S_t (s_t y_t - g_t z_t - h_t u_t)^2 + G_t z_t^2 + H_t u_t^2,$$

а через $\mathcal{F}_t^{y, z}$ — σ -алгебра, порожденная y_τ и z_τ , $0 \leq \tau \leq t$, $\mathbb{E}\{\cdot | \mathcal{F}\}$ — оператор условного математического ожидания относительно \mathcal{F} .

Предполагая $V_t(y, z)$ непрерывно дифференцируемой по t и дважды непрерывно дифференцируемой по y, z , в качестве достаточного условия оптимальности рассматривается уравнение динамического программирования [25, 26] (это более общая форма, чем уравнение из [1], использованное для нахождения аддитивного управления в [18]):

$$\begin{aligned} \min_u \left[\frac{1}{2} \left(\Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial y^2} + \sigma_t^2(u^2) \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial z^2} \right) + \right. \\ \left. + A_t(y) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial y} + (a_t(u)y + b_t(u)z) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} + \right. \\ \left. + S_t (s_t y - g_t z - h_t u)^2 + G_t z^2 + H_t u^2 \right] = \\ = - \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial t}. \quad (6) \end{aligned}$$

В записи (6) объединены все три варианта модели (2)–(4) с помощью символов (u^2) и (u) : подразумевается, что в уравнении (2) надо считать $\sigma_t^2(u^2) = \sigma_t^2$ и $b_t(u) = b_t$, в уравнении (3) — $a_t(u) = a_t$

и $b_t(u) = b_t$, а в уравнении (4) — $\sigma_t^2(u^2) = \sigma_t^2$ и $a_t(u) = a_t$.

Решается (6) с конечным условием $V_T(y, z) = 0$, так как в целевой функции нет терминального слагаемого. Как и в случае с аддитивным управлением, в поставленной задаче линейность, точнее квазилинейность, выхода и квадратичность критерия дают те же преимущества, что и в классической задаче LQ [2], а именно: позволяют сразу определить вид оптимального управления и фактические условия его существования. Далее уже отдельно рассматриваем каждый случай (2)–(4).

3.2 Управление, мультипликативное по состоянию

Первым рассмотрим вариант модели (2). Сохраняя в (6) под знаком \min_u только члены, зависящие от u , получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial y^2} + \sigma_t^2 \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial z^2} \right) + \\ & + A_t(y) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial y} + b_t z \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} + \\ & + S_t(s_t y - g_t z)^2 + G_t z^2 + \\ & + \min_u \left[\left(a_t y \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} - 2S_t(s_t y - g_t z) h_t \right) u + \right. \\ & \left. + (S_t h_t^2 + H_t) u^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

откуда в предположении $S_t h_t^2 + H_t > 0$ следует, что существует оптимальное управление, которое определяется равенством

$$\begin{aligned} u_t^* &= u_t^*(y, z) = -\frac{1}{2} (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} \times \\ & \times \left(a_t y \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} - 2S_t(s_t y - g_t z) h_t \right) \quad (7) \end{aligned}$$

и доставляет минимум соответствующему слагаемому, равный

$$-\frac{1}{4} (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} \left(a_t y \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} - 2S_t(s_t y - g_t z) h_t \right)^2.$$

Таким образом, функция Беллмана описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial y^2} + \sigma_t^2 \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial z^2} \right) + \\ & + A_t(y) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial y} + b_t z \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} + S_t(s_t y - g_t z)^2 + \\ & + G_t z^2 - \frac{1}{4} (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} \times \\ & \times \left(a_t y \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} - 2S_t(s_t y - g_t z) h_t \right)^2 = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Возводя в квадрат последнее слагаемое, перепишем (8) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial y^2} + \sigma_t^2 \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial z^2} \right) + \\ & + A_t(y) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial y} + (b_t z + \\ & + (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t y S_t(s_t y - g_t z) h_t) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} + \\ & + \left(S_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) (s_t y - g_t z)^2 + G_t z^2 - \\ & - \frac{1}{4} (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t^2 y^2 \left(\frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} \right)^2 = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Решение (9) будем искать в виде

$$\begin{aligned} V_t(y, z) &= \alpha_t(y) z^2 + \beta_t(y) z + \gamma_t(y), \\ \alpha_T &= \beta_T(y) = \gamma_T(y) = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

т.е. аналогично решению задачи с аддитивным управлением [18] $V_t(y, z)$ ищется в форме квадратичной по переменной z функции с коэффициентами $\alpha_t(y)$, $\beta_t(y)$ и $\gamma_t(y)$, уравнения для которых и составляют оптимальное решение поставленной задачи управления. Отметим отличие от аддитивной модели: все три коэффициента — функции y , для аддитивного управления $\alpha_t(y) = \alpha_t$ — решение обыкновенного уравнения Риккати.

Из (7) получаем оптимальное управление u_t^* в форме обратной связи по y_t, z_t

$$\begin{aligned} u_t^* &= u_t^*(y, z) = -\frac{1}{2} (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} \times \\ & \times (a_t y (2\alpha_t(y) z + \beta_t(y)) - 2S_t(s_t y - g_t z) h_t). \quad (11) \end{aligned}$$

Подставляем $V_t(y, z) = \alpha_t(y) z^2 + \beta_t(y) z + \gamma_t(y)$ в (9):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_t(y)}{\partial t} z^2 + \frac{\partial \beta_t(y)}{\partial t} z + \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial t} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\Sigma_t^2(y) \left(\frac{\partial^2 \alpha_t(y)}{\partial y^2} z^2 + \frac{\partial^2 \beta_t(y)}{\partial y^2} z + \frac{\partial^2 \gamma_t(y)}{\partial y^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2\sigma_t^2 \alpha_t(y) \right) + \\ & + A_t(y) \left(\frac{\partial \alpha_t(y)}{\partial t} z^2 + \frac{\partial \beta_t(y)}{\partial t} z + \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial t} \right) + \\ & + (b_t z + (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t y S_t(s_t y - g_t z) h_t) \times \\ & \times (2\alpha_t(y) z + \beta_t(y)) + \\ & + \left(S_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) (s_t y - g_t z)^2 + G_t z^2 - \\ & - \frac{1}{4} (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t^2 y^2 (2\alpha_t(y) z + \beta_t(y))^2 = 0. \end{aligned}$$

Далее выделяем слагаемые при степенях z^2 , z^1 и z^0 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_t(y)}{\partial y} z^2 + \frac{\partial \beta_t(y)}{\partial t} z + \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 \alpha_t(y)}{\partial y^2} z^2 + \\ & + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 \beta_t(y)}{\partial y^2} z + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 \gamma_t(y)}{\partial y^2} + \sigma_t^2 \alpha_t(y) + \\ & + A_t(y) \frac{\partial \alpha_t(y)}{\partial y} z^2 + A_t(y) \frac{\partial \beta_t(y)}{\partial y} z + A_t(y) \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial y} + \\ & + 2\alpha_t(y) \left(b_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t y S_t h_t g_t \right) z^2 + \\ & + \left(2\alpha_t(y) (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t y^2 S_t h_t s_t + \right. \\ & + \beta_t(y) \left(b_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t y S_t h_t g_t \right) \left. \right) z + \\ & + \beta_t(y) (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t y^2 S_t h_t s_t + \\ & + \left(S_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) g_t^2 z^2 - \\ & - 2 \left(S_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) s_t g_t y z + \\ & + \left(S_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) s_t^2 y^2 + \\ & + G_t z^2 - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t^2 y^2 \alpha_t^2(y) z^2 - \\ & - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t^2 y^2 \alpha_t(y) \beta_t(y) z - \\ & - \frac{1}{4} (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t^2 y^2 \beta_t^2(y) = 0, \end{aligned}$$

группируем их и получаем следующие уравнения

– для $\alpha_t(y)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_t(y)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 \alpha_t(y)}{\partial y^2} + A_t(y) \frac{\partial \alpha_t(y)}{\partial y} + \\ & + 2\alpha_t(y) \left(b_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t y S_t h_t g_t \right) + \\ & + \left(S_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) g_t^2 + G_t - \\ & - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t^2 y^2 \alpha_t^2(y) = 0; \quad (12) \end{aligned}$$

– для $\beta_t(y)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \beta_t(y)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 \beta_t(y)}{\partial y^2} + A_t(y) \frac{\partial \beta_t(y)}{\partial y} + \\ & + 2\alpha_t(y) (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t y^2 S_t h_t s_t + \\ & + \beta_t(y) \left(b_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t y S_t h_t g_t \right) - \\ & - 2 \left(S_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) s_t g_t y - \\ & - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t^2 y^2 \alpha_t(y) \beta_t(y) = 0; \quad (13) \end{aligned}$$

– для $\gamma_t(y)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 \gamma_t(y)}{\partial y^2} + \sigma_t^2 \alpha_t(y) + \\ & + A_t(y) \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial y} + \beta_t(y) (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t y^2 S_t h_t s_t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left(S_t - (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) s_t^2 y^2 - \\ & - \frac{1}{4} (S_t h_t^2 + H_t)^{-1} a_t^2 y^2 \beta_t^2(y) = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Поясним, что представляют собой эти уравнения.

В предположении, что известны $\alpha_t(y)$ и $\beta_t(y)$, (14) представляет собой параболическое уравнение (линейное уравнение в частных производных второго порядка). Это уравнение однородно по $\gamma_t(y)$, что может немного облегчить его численное решение, хотя для реализации управления (11) этого не требуется, только для вычисления функции Беллмана (10). Это типовое уравнение, и хорошо известны эффективные методы его решения, например сеточными методами или путем компьютерного моделирования на основании формулы Фейнмана–Каца.

В предположении, что известна $\alpha_t(y)$, уравнение (13) — такое же параболическое уравнение. Единственное отличие — оно неоднородно, есть слагаемое с $\beta_t(y)$. А вот уравнение (12) собственного названия не имеет. Формально это просто нелинейное уравнение в частных производных второго порядка. В нем, однако, можно увидеть два «ядра». Одно — это такие же производные параболического уравнения, второе — это слагаемое с $\alpha_t^2(y)$, которое вместе с $\partial \alpha_t(y)/\partial t$ составляет структуру обыкновенного дифференциального уравнения Риккати. Решать это уравнение много сложнее, но для большинства содержательных практических моделей его можно будет упростить, оставив только одно «ядро». Для этого можно будет ограничиться либо стационарной аппроксимацией (отсутствием зависимости $\alpha_t(y)$ от t), либо моделями, в которых $\alpha_t(y)$ линейно по y .

Итог рассуждениям этого раздела подводит следующая теорема.

Теорема 1. Пусть для диффузионного процесса (1) выполнены условия Ито, для процесса (2) ограничены и кусочно-непрерывны коэффициенты, уравнения (12)–(14) имеют ограниченные решения для $0 \leq t \leq T$. Тогда минимум функционалу (5) доставляет оптимальное управление (11), где $y = u_t$, $z = z_t^*$, z_t^* — решение (2) при $u_t = u_t^*$.

3.3 Управление, мультипликативное по возмущению

Второй вариант управления — модель (3) с множителем при возмущении w_t . Физическое содержание такой архитектуры, упомянутое во введении,

состоит в управлении уровнем неопределенности. Квадратичный критерий с таким целевым назначением связать непросто. Более ясный смысл такое архитектурное решение может иметь, если отказаться от предположения о центрированности w_t . Тогда при наличии известного постоянного смещения получается управление, которое влияет на выход как традиционное аддитивное, но с эффектом увеличения неопределенности. Оптимальное управление здесь должно взвешенно оказывать влияние на выходную переменную, например в стабилизации выхода около некоторого целевого значения, но при этом «не раскачивать» систему большими возмущениями, провоцируемыми большими управляющими воздействиями. Такой вариант нетрудно будет реализовать, комбинируя два контура управления, аддитивный и мультипликативный. Поэтому здесь ограничимся только исходным вариантом управляющего множителя при стандартном винеровском процессе.

Решение получим так же, как и в предыдущей модели (2). Используя (6), оставим под знаком \min_u только члены, зависящие от u :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial y^2} + A_t(y) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial y} + \\ & + (a_t y + b_t z) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} + S_t (s_t y - g_t z)^2 + G_t z^2 + \\ & + \min_u \left[-2S_t (s_t y - g_t z) h_t u + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial z^2} + S_t h_t^2 + H_t \right) u^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

откуда в предположении

$$\frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial z^2} + S_t h_t^2 + H_t > 0$$

следует, что существует оптимальное управление, которое определяется равенством

$$u_t^* = u_t^*(y, z) = \left(\frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 v_t(y, z)}{\partial z^2} + S_t h_t^2 + H_t \right)^{-1} \times S_t (s_t y - g_t z) h_t \quad (15)$$

и доставляет минимум соответствующему слагаемому в уравнении Беллмана, равный

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial z^2} + S_t h_t^2 + H_t \right)^{-1} (S_t (s_t y - g_t z) h_t)^2.$$

Таким образом, функция Беллмана описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial y^2} + A_t(y) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial y} + \\ & + (a_t y + b_t z) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} + S_t (s_t y - g_t z)^2 + G_t z^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial z^2} + S_t h_t^2 + H_t \right)^{-1} \times \\ & \times (S_t (s_t y - g_t z) h_t)^2 = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

Возводя в квадрат последнее слагаемое, перепишем (16) в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial y^2} + A_t(y) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial y} + \\ & + (a_t y + b_t z) \frac{\partial V_t(y, z)}{\partial z} + \\ & + \left(S_t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 V_t(y, z)}{\partial z^2} + S_t h_t^2 + H_t \right)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) \times \\ & \times (s_t y - g_t z)^2 + G_t z^2 = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Решение (17) будем искать в виде

$$V_t(y, z) = \alpha_t z^2 + \beta_t(y) z + \gamma_t(y),$$

$$\alpha_T = \beta_T(y) = \gamma_T(y) = 0,$$

т.е. аналогично модели (2) с той разницей, что α_t не зависит от y . При этом само оптимальное управление u_t^* , определенное выражением (15), таково:

$$u_t^* = u_t^*(y, z) = 2 \left(\sigma_t^2 \alpha_t + S_t h_t^2 + H_t \right)^{-1} S_t (s_t y - g_t z) h_t. \quad (18)$$

Подставляем $V_t(y, z) = \alpha_t z^2 + \beta_t(y) z + \gamma_t(y)$ в (17):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} z^2 + \frac{\partial \beta_t(y)}{\partial t} z + \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial t} + \\ & + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \left(\frac{\partial^2 \beta_t(y)}{\partial y^2} z + \frac{\partial^2 \gamma_t(y)}{\partial y^2} \right) + \\ & + A_t(y) \left(\frac{\partial \beta_t(y)}{\partial y} z + \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial y} \right) + \\ & + (a_t y + b_t z) (2\alpha_t z + \beta_t(y)) + \\ & + \left(S_t + \frac{1}{2} \left(\sigma_t^2 \alpha_t + S_t h_t^2 + H_t \right)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) \times \\ & \times (s_t y - g_t z)^2 + G_t z^2 = 0. \end{aligned}$$

Далее выделяем слагаемые при степенях z^2 , z^1 и z^0 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} z^2 + \frac{\partial \beta_t(y)}{\partial t} z + \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 \beta_t(y)}{\partial y^2} z + \\ & + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 \gamma_t(y)}{\partial y^2} + A_t(y) \frac{\partial \beta_t(y)}{\partial y} z + A_t(y) \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial y} + \\ & + 2\alpha_t b_t z^2 + (2\alpha_t a_t y + b_t \beta_t(y)) z + a_t y \beta_t(y) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(S_t + \frac{1}{2} (\sigma_t^2 \alpha_t + S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) s_t^2 y^2 + \\
 & + \left(S_t + \frac{1}{2} (\sigma_t^2 \alpha_t + S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) g_t^2 z^2 - \\
 & - 2 \left(S_t + \frac{1}{2} (\sigma_t^2 \alpha_t + S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) s_t y g_t z + \\
 & \qquad \qquad \qquad + G_t z^2 = 0,
 \end{aligned}$$

группируем их и получаем следующие уравнения

– для α_t :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} + 2\alpha_t b_t + \left(S_t + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (\sigma_t^2 \alpha_t + S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) g_t^2 + G_t = 0; \quad (19)
 \end{aligned}$$

– для β_t :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \beta_t(y)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 \beta_t(y)}{\partial y^2} + A_t(y) \frac{\partial \beta_t(y)}{\partial y} + \\
 & \quad + 2\alpha_t a_t y + b_t \beta_t(y) - 2 \left(S_t + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (\sigma_t^2 \alpha_t + S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) s_t y g_t = 0; \quad (20)
 \end{aligned}$$

– для γ_t :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma_t^2(y) \frac{\partial^2 \gamma_t(y)}{\partial y^2} + A_t(y) \frac{\partial \gamma_t(y)}{\partial y} + \\
 & \quad + a_t y \beta_t(y) + \left(S_t + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (\sigma_t^2 \alpha_t + S_t h_t^2 + H_t)^{-1} S_t^2 h_t^2 \right) s_t^2 y^2 = 0. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Обратим внимание, что в этой модели оптимальное решение получилось даже проще, чем в аддитивном случае. Для его реализации нужен только один коэффициент α_t , само управление линейно, но α_t описывается обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением (19), и это не уравнение Риккати.

Уравнения (20) и (21) — параболические, второе однородно по $\gamma_t(y)$, но реализация u_t^* в этой модели не требует решения их обоих. Правда, ожидать от этой архитектуры эффективности в типичных для квадратичной задачи целях не приходится. Итог раздела подводит теорема.

Теорема 2. Пусть для диффузионного процесса (1) выполнены условия Ито, для процесса (3) ограничены и кусочно-непрерывны коэффициенты, уравнения (19)–(21) имеют ограниченные решения для $0 \leq t \leq T$. Тогда минимум функционалу (5) доставляет оптимальное управление (18), где $y = y_t$, $z = z_t^*$, z_t^* — решение (3) при $u_t = u_t^*$.

3.4 Управление, мультипликативное по выходу

Формально только вариант управления (4) приводит к системе, называемой билинейной, точнее билинейной по выходу. Исследования таких моделей, в частности существование решения в обобщенной задаче LQ-управления, имеют давнюю историю [27]. То, что оптимальное управление существует, но нелинейно по состоянию и нелинейно само уравнение динамического программирования, очевидно, требует других подходов к поиску его решения. Исследование этого вопроса в рассматриваемой задаче целесообразно представить отдельной работой.

4 Заключение

Рассмотренная задача оптимизации — типичное обобщение квадратичного управления в линейно-аддитивной модели в мультипликативной постановке. Как и с рассмотренным ранее аддитивным вариантом, используемая общая форма квадратичного критерия позволит ставить такие задачи, как отслеживание выходом состояния системы или, по-другому, стабилизации состояния около выхода. При этом конкретные прикладные цели позволяют обосновать некоторые упрощения в оптимальном решении. Это принципиально для модели с мультипликативным по состоянию управлением и будет еще более важным в модели, билинейной по выходу.

Еще один важный акцент в дальнейшем будет нужен для моделей с косвенными наблюдениями. В таких задачах на первый план выйдет задача фильтрации состояния системы, на решение которой мультипликативное управление принципиального влияния не оказывает. Таким образом, можно будет сравнивать архитектуры управления и в моделях с полной информацией, и в предположении косвенных зашумленных наблюдений.

Литература

1. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / Пер. с англ. — М.: Мир, 1978. 316 с. (Fleming W. H., Rishel R. W. Deterministic and stochastic optimal control. — New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1975. 222 p. doi: 10.1007/978-1-4612-6380-7.)
2. Athans M. Editorial on the LQG problem // IEEE T. Automat. Contr., 1971. Vol. 16. No. 6. P. 528–552. doi: 10.1109/TAC.1971.1099845.
3. Девис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление / Пер. с англ. — М.: Наука, 1984. 206 с. (Davis M. H. A. Linear estimation and stochastic control. — London: Chapman and Hall, 1977. 224 p.)

4. *D'Alessandro P., Isidori A., Ruberti A.* Realization and structure theory of bilinear dynamical systems // *SIAM J. Control*, 1974. Vol. 12. No. 3. P. 517–535. doi: 10.1137/0312040.
5. *Willsky A. S., Marcus S. I.* Analysis of bilinear noise models in circuits and devices // *J. Frankl. Inst.*, 1976. Vol. 301. No. 1-2. P. 103–122. doi: 10.1016/0016-0032(76)90135-6.
6. *Bagchi A., Schilperoort T.* Optimal linear stochastic control for systems with multiplicative noise // *IEEE T. Automat. Contr.*, 1980. Vol. 25. No. 5. P. 1005–1007. doi: 10.1109/TAC.1980.1102479.
7. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. — SIAM studies in applied mathematics ser. — Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1994. Vol. 15. 193 p.
8. *Пакушин П. В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. — М.: Физматлит, 1994. 304 с. EDN: ULTSFL.
9. *Pardalos P. M., Yatsenko V. A.* Optimization and control of bilinear systems: Theory, algorithms, and applications. — Springer optimization and its applications ser. — New York, NY, USA: Springer, 2008. Vol. 11. 370 p. doi: 10.1007/978-0-387-73669-3.
10. *Шайкин М. Е.* Стохастические задачи H_∞ и H_2/H_∞ управления // *Автоматика и телемеханика*, 2009. № 2. С. 3–34.
11. *Piechotka U., Frank P. M.* Controllability of bilinear systems — a survey and some new results // *IFAC Proceedings Volumes*, 1990. Vol. 22. No. 3. P. 23–28. doi: 10.1016/S1474-6670(17)53604-6.
12. *Ding C.* Survey on progress and prospect of sensor management // *Systems Engineering Electronics*, 2020. Vol. 42. No. 12. P. 2761–2770. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2020.12.12.
13. *Kreucher C., Kastella K., Hero A. O.* Sensor management using an active sensing approach // *Signal Process.*, 2005. Vol. 85. No. 3. P. 607–624. doi: 10.1016/j.sigpro.2004.11.004.
14. *Hoffmann C., Werner H.* A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations // *IEEE T. Contr. Syst. T.*, 2015. Vol. 23. No. 2. P. 416–433. doi: 10.1109/TCST.2014.2327584.
15. *Zhang H., Li L., Xu J., Fu M.* Linear quadratic regulation and stabilization of discrete-time systems with delay and multiplicative noise // *IEEE T. Automat. Contr.*, 2015. Vol. 60. No. 10. P. 2599–2613. doi: 10.1109/TAC.2015.2411911.
16. *Hu T., Lin Z.* Control systems with actuator saturation: Analysis and design. — Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2001. 392 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0205-9.
17. *Lin H., Antsaklis P. J.* Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results // *IEEE T. Automat. Contr.*, 2009. Vol. 54. No. 2. P. 308–322. doi: 10.1109/TAC.2008.2012009.
18. *Босов А. В., Стефанович А. И.* Управление выходом стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию. I. Оптимальное решение методом динамического программирования // *Информатика и её применения*, 2018. Т. 12. Вып. 3. С. 99–106. doi: 10.14357/19922264180314. EDN: MAGBSH.
19. *Босов А. В.* Задачи анализа и оптимизации для модели пользовательской активности. Часть 2. Оптимизация внутренних ресурсов // *Информатика и её применения*, 2012. Т. 6. Вып. 1. С. 19–26. EDN: OZHDPР.
20. *Босов А. В.* Задачи анализа и оптимизации для модели пользовательской активности. Часть 3. Оптимизация внешних ресурсов // *Информатика и её применения*, 2012. Т. 6. Вып. 2. С. 14–21. EDN: OZIOKD.
21. *Босов А. В., Стефанович А. И.* Управление выходом стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию. III. Анализ свойств оптимального управления // *Информатика и её применения*, 2019. Т. 13. Вып. 3. С. 41–49. doi: 10.14357/19922264190307.
22. *Helmes K., Rishel R.* The solution of a partially observed stochastic optimal control problem in terms of predicted miss // *IEEE T. Automat. Contr.*, 1992. Vol. 37. No. 9. P. 1462–1464. doi: 10.1109/9.159594.
23. *Rishel R.* A strong separation principle for stochastic control systems driven by a hidden Markov model // *SIAM J. Control Optim.*, 1994. Vol. 32. Iss. 4. P. 1008–1020. doi: 10.1137/S0363012992232233.
24. *Босов А. В.* Задача управления линейным выходом нелинейной неуправляемой стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию // *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2021. № 5. С. 52–73. doi: 10.31857/S000233882104003X. EDN: UNAKTT.
25. *Yong J., Zhou X. Y.* Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations. — Stochastic modelling and applied probability ser. — New York, NY, USA: Springer, 1999. Vol. 43. 439 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1466-3.
26. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov processes and viscosity solutions. — Stochastic modelling and applied probability ser. — 2nd ed. — New York, NY, USA: Springer, 2006. Vol. 25. 429 p. doi: 10.1007/0-387-31071-1.
27. *Athans M., Falb P. L.* Optimal control. An introduction to the theory and its applications. — New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1966. 879 p.

Поступила в редакцию 12.12.2025

Принята к публикации 15.02.2026

MULTIPLICATIVE OUTPUT CONTROL UNDER A QUADRATIC CRITERION: DYNAMIC PROGRAMMING AND THE OPTIMAL SOLUTION

A. V. Bosov and I. V. Uryupin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper addresses an optimal control problem for a quasi-linear output of a stochastic differential system driven by an Ito diffusion process. In contrast to the traditional additive control formulation, the controlled linear output is assumed to include multiplicative control resulting in a quasi-linear differential system with feedback. The problem is formulated using a general quadratic performance criterion which defines control objectives identical to those in the additive control model. This allows for a direct comparison of control strategies as alternative architectural solutions within the same application context. The study focuses on two multiplicative control configurations: one where the control acts as a multiplier of the system state, and another where it multiplies an uncontrolled disturbance. The third possible case — output-multiplicative control — leads to a bilinear system; since its analysis requires a different methodological framework, it is excluded from this study. The solution is derived using a dynamic programming approach. Similar to the additive control case, the Bellman function is shown to take a quadratic form with respect to the output variable. However, in the state-multiplicative control configuration, the solution — characterized by three coefficients of the Bellman function — is substantially more complex. This complexity motivates the problem of synthesizing practically implementable approximations. While the disturbance-multiplicative control case is considerably simpler, its practical relevance is found to be limited.

Keywords: stochastic differential equation; optimal control; quasi-linear systems; multiplicative control; dynamic programming; Bellman function; Riccati equation; linear parabolic equations

DOI: 10.14357/19922264260101

EDN: VPIYMP

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (CKP “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

References

1. Fleming, W. H., and R. W. Rishel. 1975. *Deterministic and stochastic optimal control*. New York, NY: Springer-Verlag. 222 p. doi: 10.1007/978-1-4612-6380-7.
2. Athans, M. 1971. Editorial on the LQG problem. *IEEE T. Automat. Contr.* 16(6):528–552. doi: 10.1109/TAC.1971.1099845.
3. Davis, M. H. A. 1977. *Linear estimation and stochastic control*. London: Chapman and Hall. 224 p.
4. D’Alessandro, P., A. Isidori, and A. Ruberti. 1974. Realization and structure theory of bilinear dynamical systems. *SIAM J. Control* 12(3):517–535. doi: 10.1137/0312040.
5. Willsky, A. S., and S. I. Marcus. 1976. Analysis of bilinear noise models in circuits and devices. *J. Frankl. Inst.* 301(1-2):103–122. doi: 10.1016/0016-0032(76)90135-6.
6. Bagchi, A., and T. Schilperoort. 1980. Optimal linear stochastic control for systems with multiplicative noise. *IEEE T. Automat. Contr.* 25(5):1005–1007. doi: 10.1109/TAC.1980.1102479.
7. Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. 1994. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM studies in applied mathematics ser. Philadelphia, PA: SIAM. Vol. 15. 193 p.
8. Pakshin, P.V. 1994. *Diskretnye sistemy so sluchaynymi parametrami i strukturoy* [Discrete systems with random parameters and structure]. Moscow: Fizmatlit. 304 p. EDN: ULTSFL.
9. Pardalos, P. M., and V.A. Yatsenko. 2010. *Optimization and control of bilinear systems: Theory, algorithms, and applications*. Springer optimization and its applications ser. New York, NY: Springer. Vol. 11. 370 p. doi: 10.1007/978-0-387-73669-3.
10. Shaikin, M. E. 2009. Stochastic problems in H_∞ and H_2/H_∞ control. *Automat. Rem. Contr.* 70(2):173–202. doi: 10.1134/S0005117909020015. EDN: LLTVED.
11. Piechotka, U., and P. M. Frank. 1990. Controllability of bilinear systems — a survey and some new results. *IFAC Proceedings Volumes* 22(3):23–28. doi: 10.1016/S1474-6670(17)53604-6.
12. Ding, C. 2020. Survey on progress and prospect of sensor management. *Systems Engineering Electronics* 42(12):2761–2770. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2020.12.12.

13. Kreucher, C., K. Kastella, and A. O. Hero. 2005. Sensor management using an active sensing approach. *Signal Process.* 85(3):607–624. doi: 10.1016/j.sigpro.2004.11.004.
14. Hoffmann, C., and H. Werner. 2015. A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. *IEEE T. Contr. Syst. T.* 23(2):416–433. doi: 10.1109/TCST.2014.2327584.
15. Zhang, H., L. Li, J. Xu, and M. Fu. 2015. Linear quadratic regulation and stabilization of discrete-time systems with delay and multiplicative noise. *IEEE T. Automat. Contr.* 60(10):2599–2613. doi: 10.1109/TAC.2015.2411911.
16. Hu, T., and Z. Lin. 2001. *Control systems with actuator saturation: Analysis and design*. Boston, MA: Birkhäuser. 392 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0205-9.
17. Lin, H., and P.J. Antsaklis. 2009. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE T. Automat. Contr.* 54(2):308–322. doi: 10.1109/TAC.2008.2012009.
18. Bosov, A. V., and A. I. Stefanovich. 2018. Upravlenie vykhodom stokhasticheskoy differentsial'noy sistemy po kvadraticnomu kriteriyu. I. Optimal'noe reshenie metodom dinamicheskogo programmirovaniya [Stochastic differential system output control by the quadratic criterion. I. Dynamic programming and optimal solution]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(3):99–106. doi: 10.14357/19922264180314. EDN: MAGBSH.
19. Bosov, A. V. 2012. Zadachi analiza i optimizatsii dlya modeli pol'zovatel'skoy aktivnosti. Chast' 2. Optimizatsiya vnutrennikh resursov [Analysis and optimization problems for some users activity model. Part 2. Internal resources optimization]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 6(1):19–26. EDN: OZHDPP.
20. Bosov, A. V. 2012. Zadachi analiza i optimizatsii dlya modeli pol'zovatel'skoy aktivnosti. Chast' 3. Optimizatsiya vneshnikh resursov [Analysis and optimization problems for some users activity model. Part 3. External resources optimization]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 6(2):14–21. EDN: OZIOKD.
21. Bosov, A. V., and A. I. Stefanovich. 2019. Upravlenie vykhodom stokhasticheskoy differentsial'noy sistemy po kvadraticnomu kriteriyu. III. Analiz svoystv optimal'nogo upravleniya [Stochastic differential system output control by the quadratic criterion. III. Optimal control properties analysis]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(3):41–49. doi: 10.14357/19922264190307. EDN: KJDISR.
22. Helmes, K., and R. Rishel. 1992. The solution of a partially observed stochastic optimal control problem in terms of predicted miss. *IEEE T. Automat. Contr.* 37(9):1462–1464. doi: 10.1109/9.159594.
23. Rishel, R. 1994. A strong separation principle for stochastic control systems driven by a hidden Markov model. *SIAM J. Control Optim.* 32(4):1008–1020. doi: 10.1137/S0363012992232233.
24. Bosov, A. V. 2021. The problem of controlling the linear output of a nonlinear uncontrollable stochastic differential system by the square criterion. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 60(5):719–739. doi: 10.1134/S1064230721040031. EDN: ESNC SX.
25. Yong, J., and X. Y. Zhou. 1999. *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations*. New York, NY: Springer. 439 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1466-3.
26. Fleming, W. H., and H. M. Soner. 2006. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. Stochastic modelling and applied probability ser. New York, NY: Springer. Vol. 25. 429 p. doi: 10.1007/0-387-31071-1.
27. Athans, M., and P. L. Falb. 1966. *Optimal control: An introduction to the theory and its applications*. New York, NY: McGraw-Hill. 879 p.

Received December 12, 2025

Accepted February 15, 2025

Contributors

Bosov Alexey V. (b. 1969) — Doctor of Science in technology, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; ABosov@frccsc.ru

Uryupin Ilya V. (b. 1993) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, junior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; uryupin93@yandex.ru

МЕТОДЫ НОРМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ НАБЛЮДАЕМЫХ ЭРЕДИТАРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

И. Н. Сеницын*

Аннотация: Рассмотрены аналитические методы синтеза нормальных условно-оптимальных и субоптимальных фильтров (НУОФ и НСОФ) по среднеквадратичному критерию (т. е. в смысле В. С. Пугачёва) для обработки информации в задачах реального времени во взаимосвязанных наблюдаемых эредитарных стохастических системах (ЭСтС), не разрешенных относительно производных (НРОП). Дан краткий обзор публикаций по анализу, моделированию и фильтрации в эредитарных функционально-дифференциальных и интегро-дифференциальных стохастических системах (СтС). В основу методов НУОФ положена двойная процедура приведения ЭСтС НРОП к конечно-дифференциальным СтС совместно с методами нормальной аппроксимации и статистической линеаризации. Излагаются аналитические методы первого и второго этапов приведения. Для НСОФ и приведенных ЭСтС НРОП использованы НСОФ первого и второго типа. Изучены особенности НУОФ и НСОФ для типовых ЭСтС НРОП. Сформулированы направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: нормальный субоптимальный фильтр (НСОФ); нормальный условно-оптимальный фильтр (НУОФ); стохастический процесс (СтП); эредитарные стохастические системы, не разрешенные относительно производных (ЭСтС НРОП)

DOI: 10.14357/19922264260102

EDN: WOQCNT

1 Введение

Следуя [1–4], рассмотрим ЭСтС, описываемые функционально-дифференциальными и интегро-дифференциальными стохастическими уравнениями, приводимыми к стохастическим конечно-дифференциальным уравнениям Ито. Для ЭСтС, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями с гладкими нелинейностями, использовался метод дифференцирования по обобщенной формуле Ито [1, 3]. Для негладких нелинейностей применялась регрессионная линеаризация. Такие подходы позволили открыть и описать новые специфические стохастические эредитарные свойства ЭСтС НРОП.

Теория условно-оптимальной нелинейной фильтрации в среднеквадратичном смысле (по В. С. Пугачёву) стохастических процессов (СтП), описываемых явными стохастическими дифференциальными уравнениями, нашла практическое применение при решении задач обработки информации в реальном масштабе времени. Для неявных дифференциальных СтС, допускающих приведение к явным дифференциальным, развиты соответствующие методы условно-оптимальной фильтрации В. С. Пугачёва. Так, в [1–4] разработаны математические модели наблюдаемых СтС НРОП, приводимых к дифференциальным, для задач фильтрации и экстраполяции, получены базовые

уравнения нелинейных условно-оптимальных фильтров (УОФ), а также субоптимальных фильтров (СОФ) первого и второго типа.

Рассмотрим для задач реального времени развитие методов нормальной условно-оптимальной и субоптимальной нелинейной фильтрации по среднеквадратичному критерию для обработки информации во взаимосвязанных наблюдаемых ЭСтС НРОП, приводимых к конечно-дифференциальным СтС.

2 Уравнения наблюдаемых эредитарных стохастических систем

Сначала рассмотрим следующую неявную векторную функционально-дифференциальную ЭСтС:

$$\Phi(\dot{X}_t, X_{t_0}^t, U_t, t) = 0, \quad X(t_0) = X_0. \quad (1)$$

Здесь $\Phi(\dot{X}_t, X_{t_0}^t, U_t, t)$ — детерминированная функция отмеченных переменных размерности n^Φ ; X_t и \dot{X}_t — вектор состояния размерности n^X и его среднеквадратичная производная в момент времени t ; $X_{t_0}^t = \{X_\tau : t_0 \leq \tau < t\}$ — среднеквадратичные функционалы на интервале времени $[t_0, t)$; U_t — вектор размерности n^U стохастических возму-

*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, isinitsin@frccsc.ru

шений, определяемый стохастическим дифференциальным уравнением Ито вида

$$dU_t = a^U(U_t, t) dt + b^U(U_t, t) dW_0 + \int_{R_0^q} c^U(U_t, t, \rho) P^0(t, d\rho), \quad U(t_0) = U_0, \quad (2)$$

где $a^U(U_t, t)$, $b^U(U_t, t)$ и $c^U(U_t, t, \rho)$ — функции отмеченных переменных размерности $(n^U \times 1)$, $(n^{W_0} \times n^U)$ и $(n^U \times 1)$; $W_0 = W_{0t}$ — винеровский СтП размерности n^{W_0} и интенсивности $\nu^U = \nu^U(t)$; $P^0 = P^0(t, d\rho)$ — пуассоновский СтП, независимый от W_0 и имеющий независимые значения на непесекающихся множествах пространства R_0^q с выколотым началом.

Наряду с представлением (2) в задачах практики пользуются линейным стохастическим уравнением нормального (гауссовского) формирующего фильтра вектора возмущения U_t :

$$\dot{U}_t = \bar{a}^U U_t + \bar{b}^U V_0, \quad U(t_0) = U_0, \quad (3)$$

где \bar{a}^U и \bar{b}^U — векторно-матричные коэффициенты; $V_0 = V_{0t}$ — нормальный (гауссовский) белый шум с интенсивностью $\bar{\nu}_0$.

Для учета в (1) эрдитарности в виде $X_{t_0}^t$, следуя [1, 3], положим

$$X_{t_0}^t = Z(t) = \int_{t_0}^t F(t, \tau, X(\tau), Z(\tau)) d\tau, \quad (4)$$

потребовав для физически реализуемых ЭСтС от функции $F = F(t, \tau, X(\tau), Z(\tau))$ затухания при $t \rightarrow \infty$. В этом случае различают два представления для функции F в (4).

Первое представление основано на формулах

$$F(t, \tau, x, z, \tau) = w(t, \tau) F_1(x, z, \tau),$$

где $w(t, \tau) = 0$ для $t > \tau$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w_{kh}(t, \tau)| d\tau < \infty \quad (k = \overline{1, n^X}, \quad h = \overline{1, n^Z}),$$

причем $w(t, \tau)$ служит весовой функцией линейной дифференциальной системы

$$\dot{\zeta} = \alpha \zeta + \alpha_1 \xi.$$

Здесь α и α_1 — некоторые матрицы; ξ — входной сигнал. Тогда z определяется уравнениями:

$$z = \beta z', \quad \dot{z}' = \alpha z' + \alpha_1 F_1(x, z, t), \quad z'(t_0) = 0.$$

В результате ЭСтС НРОП приводится к следующей дифференциальной СтСНРОП (теорема 2.1):

$$\begin{aligned} \Phi_1(\dot{X}_t, X_t, Z_t, U_t, t) &= 0, \quad Z_t = \beta Z'_t; \\ \dot{Z}'_t &= \alpha Z'_t + \alpha_1 F_1(X_t, Z_t, t); \\ Z(t_0) &= Z_0, \quad Z'(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Вторым типом подынтегральной функции в (4) может служить функция следующего вида:

$$F(t, \tau, x, z) = \psi(t) F_2(x, z, \tau),$$

где $\psi = \psi(t)$ — известная матричная функция времени; $F_1 = F_1(x, z, \tau)$ — известная векторная функция указанных аргументов, а переменная z определяется уравнениями

$$z = \psi z', \quad \dot{z}' = F_2(x, z, t), \quad z'(t_0) = 0.$$

Таким образом, ЭСтС НРОП заменяется следующей ЭСтС НРОП (теорема 2.2):

$$\begin{aligned} \Phi_2(\dot{X}_t, X_t, Z_t, t, U_t) &= 0; \\ \dot{Z}'_t &= F_2(X_t, Z_t, t, U_t); \\ Z &= \psi Z', \quad Z(t_0) = Z_0, \quad Z'(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Для гладких НРОП-функций путем дифференцирования уравнений теоремы 2.1 по обобщенной формуле Ито [1, 2] ℓ раз до появления винеровских и пуассоновских белых шумов получим уравнения:

$$\dot{\Phi}_1 = 0, \dots, \Phi_1^{(\ell)} = 0. \quad (5)$$

Далее образуем составной вектор Y_t , включающий вектор состояния X_t размерности n^X , вектор вспомогательных переменных \bar{X}_t размерности $n^{\bar{X}}$, определяемый уравнениями (5), и вектор Z'_t размерности $n^{Z'}$:

$$Y_t = \left[X_t^T \bar{X}_t^T Z_t'^T \right]^T.$$

Тогда ЭСтС НРОП (1), (2) будет описываться следующей системой векторных конечно-дифференциальных уравнений для векторов Y_t и U_t (теорема 2.3):

$$\Psi_1^Y = 0, \quad dY_t = a_1^Y dt + b_1^Y dW_0 + \int_{R_0^q} c_1^Y P^0(t, d\rho),$$

а также (2) или (3) для вектора возмущений U_t . Здесь функции Ψ^Y , a_1^Y , b_1^Y и c_1^Y определяются теоремами 2.1 и 2.2.

Аналогично на основе теоремы 2.2 получаются уравнения теоремы 2.4:

$$\Psi_2^Y = 0, \quad dY_t = a_0^Y dt + b_2^Y dW_0 + \int_{R_0^q} c_2^Y P^0(t, d\rho),$$

а также уравнения (2) или (3) для вектора возмущений U_t .

Замечание 2.1. В прикладных задачах для негладких известных функций НРОП применяют сначала статистическую линеаризацию (1), затем теоремы 2.1 и 2.2.

Замечание 2.2. Случай, когда известная функция Φ в (1) зависит от производных r -го порядка, приводится к предыдущему случаю путем дополнительного расширения вектора состояния.

3 Нормальная условно-оптимальная нелинейная фильтрация

В задачах фильтрации при условиях теорем 2.1–2.3 обычно принимается, что объектовая ЭСтС НРОП допускает приведение к явной конечно-дифференциальной СтС, измерительная система вполне наблюдаема, причем уравнение наблюдения разрешено относительно вектора наблюдения. Введем новые обозначения для составных векторов состояния объекта X_t , вспомогательного вектора Z'_t и системы наблюдения Y_t . Тогда в качестве приведенных уравнений состояния объекта и наблюдений будем рассматривать для приведенных конечно-дифференциальных СтС следующие уравнения (**теорема 3.1**):

$$\left. \begin{aligned} \Psi^{\text{ПП}}(X_t, Z'_t, t) &= 0; \\ \dot{X}_t &= \varphi^{\text{ПП}}(X_t, Y_t, t) + \psi^{\text{ПП}}(X_t, Y_t, t)V; \\ \dot{Y}_t &= \varphi_1(X_t, Y_t, t) + \psi_1(X_t, Y_t, t)V, \quad V = \dot{W}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь $\varphi^{\text{ПП}}$ и $\psi^{\text{ПП}}$ получаются в результате двойного приведения ЭСтС НРОП к СтС НРОП, затем СтС НРОП к конечно-дифференциальной СтС, если принять негауссовский белый шум в виде

$$V = \dot{W}, \quad W(t) = W_0(t) + \int_{R_0^q} c(\rho)P^0(t, d\rho), \quad (7)$$

где $c(\rho)$ — векторная функция размерности $(n^W \times 1)$ q -мерного аргумента ρ , а интеграл при любом $t \geq t_0$ представляет собой стохастический интеграл по центрированной пуассоновской мере P^0 , независимой от СтП W_0 и имеющей независимые значения на непересекающихся множествах. Интенсивность $\nu = \nu(t)$ СтП $W(t)$ в этом случае определяется формулой:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \nu_0(t) + \nu'(t), \\ \nu'(t) &= \int_{R_0^q} c(\rho)c(\rho)^T \nu_P(t, \rho) d\rho, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\nu_0(t)$ и $\nu_P(t, \rho)$ — интенсивности СтП W_0 и P^0 .

Введем составной нормальный вектор

$$Z_t = \left[Y_t^T X_t^T \hat{X}_t^T \right]^T$$

и его одномерную характеристическую функцию

$$\begin{aligned} g_1(\lambda; t) &= \exp \left\{ i\lambda^T m_t - \frac{1}{2} \lambda^T K_t \lambda \right\}, \\ g_1(\lambda; t_0) &= g_0(\lambda), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь m_t^Z и K_t^Z — вектор математического ожидания и ковариационная матрица вектора Z_t . Зададим НУОФ следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \Psi^{\text{ПП}}(\hat{X}_t, \hat{Z}'_t, t) &= 0; \\ \dot{\hat{X}}_t &= \alpha_t \xi(Y_t, \hat{X}_t, t) + \beta_t \eta(Y_t, \hat{X}_t, t) \dot{Y}_t + \gamma_t, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где \hat{X}_t и \hat{Z}'_t — оценки X_t и Z'_t ; $\xi(Y_t, \hat{X}_t, t)$ и $\eta(Y_t, \hat{X}_t, t)$ — известные структурные функции; α_t , β_t и γ_t определяются известными формулами [3]:

$$\begin{aligned} \alpha_t m_1 + \beta_t m_2 + \gamma_t &= m_0, \quad m_0 = M_N \varphi^{\text{ПП}}, \\ m_1 &= M_N \xi, \quad m_2 = M_N \eta \varphi_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_t \kappa_{11} + M_N (\hat{X}_t - X_t) (\xi^T \alpha_t^T + \gamma_t^T) \frac{\partial \xi^T}{\partial \hat{X}_t} &= \\ &= \kappa'_{01} - \beta_t \kappa'_{21}, \quad \kappa_{11} = M_N (\xi - m_1) \xi^T, \end{aligned}$$

$$\kappa'_{01} = \kappa_{01} + M_N (X_t - \hat{X}_t) \frac{\partial \xi^T}{\partial t} +$$

$$\begin{aligned} &+ M_N \left\{ (X_t - \hat{X}_t) \left[\varphi_1^T - \int_{R_0^q} c(\rho)^T \nu_P(t, \rho) d\rho \varphi_1^T \right] + \right. \\ &+ \left. \psi^{\text{ПП}} \nu_0 \varphi_1^T - \beta_t \eta \psi_1 \nu_0 \varphi_1^T \right\} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \xi^T + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} M_N (X_t - \hat{X}_t) \left\{ \text{tr} \left[\psi_1 \nu_0 \varphi_1^T \left(\frac{\partial}{\partial y} + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + 2\eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \frac{\partial^T}{\partial y} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\left. \left. + \text{tr} \left[\beta_t \eta \psi_1 \nu_0 \varphi_1^T \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \frac{\partial^T}{\partial \hat{X}_t} \right] \right\} \xi^T +$$

$$+ \int_{R_0^q} M_N \left[X_t - \hat{X}_t + (\psi^{\text{ПП}} - \beta_t \eta \psi_1) c(\rho) \right] \times$$

$$\begin{aligned} &\times \left[\xi(Y_t + \psi^{\text{ПП}} c(\rho)), \hat{X}_t + (\beta_t \eta \psi_1 c(\rho), t)^T - \xi^T \right]^T \times \\ &\quad \times \nu_P(t, \rho) d\rho, \end{aligned}$$

$$\kappa'_{21} = M_N (\eta \varphi_1 - m_2) \xi^T,$$

$$\kappa_{01} = M_N (\varphi^{\text{ПП}} - m_0) \xi^T; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\beta_t &= \kappa_{02}\kappa_{22}^{-1}, \\ \kappa_{02} &= M_N(X_t - \hat{X}_t)\varphi_1^T \eta^T + M_N \psi^{\text{ПП}} \nu \psi_1^T \eta^T, \\ \kappa_{22} &= M_N \eta \psi_1 \nu \psi_1^T \eta^T,\end{aligned}$$

где M_N — символ математического ожидания для нормального распределения.

Далее решим уравнения (6) и (10) методом нормальной аппроксимации [1, 3]. В результате придем к следующим уравнениям:

$$\Psi_0^{\text{ПП}} = 0, \quad \dot{m}_t^Z = B_1 = M_N a^{\text{ПП}}, \quad m_{t_0}^Z = m_0^Z; \quad (12)$$

$$\begin{aligned}k_1^{\Psi X} K_t^X + k_1^{\Psi Z'} K_t^{XZ'} &= 0, \\ k_1^{\Psi X} K_t^{XZ'} + k_1^{\Psi Z'} K_t^{Z'} &= 0, \\ \dot{K}_t^Z = B_2 = B_{21} + B_{21}^T + B_{22}, \quad K_{t_0}^Z &= K_0^Z.\end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned}B_{21} &= M_N a^{\text{ПП}} \left(Z_t^T - m_t^T \right) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial m_t} \right) B_1^T \right]^T K_t^Z, \\ a^{\text{ПП}} &= \begin{bmatrix} \varphi_1^{\text{ПП}} \\ \varphi^{\text{ПП}} \\ \alpha_t \xi + \beta_t \eta \varphi_1 + \gamma_t \end{bmatrix}; \\ B_{22} &= M_N b^{\text{ПП}T} \nu(t) b^{\text{ПП}}, \quad b^{\text{ПП}} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi^{\text{ПП}} \\ \beta_t \eta \psi_1 \end{bmatrix};\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

m_t^Z и K_t^Z — параметры нормального распределения; $\Psi_0^{\text{ПП}}$; $k_1^{\Psi X}$ и $k_1^{\Psi Z'}$ — коэффициенты статистической линеаризации функции $\Psi^{\text{ПП}}$; K^X и K^{XZ} — ковариационные матрицы.

Ковариационная матрица R_t ошибки $\hat{X}_t - X_t = \tilde{X}_t$ НУОФ для приведенной ЭСтС НРОП удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению [3]:

$$\begin{aligned}\dot{R}_t = B_3 = \\ = M_N \left[(X_t - \hat{X}_t) \varphi^{\text{ПП}T} + \varphi^{\text{ПП}} (X_t^T - \hat{X}_t^T) - \right. \\ \left. - \beta_t \eta \psi_1 \nu(t) \psi_1^T \eta^T \beta_t^T \psi^{\text{ПП}} \nu(t) \psi^{\text{ПП}T} \right].\end{aligned} \quad (15)$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.2. В условиях теорем 2.1–2.4 и 3.1, если взаимосвязанная наблюдаемая негауссовская ЭСтС НРОП приводима к конечно-дифференциальной (6)–(9), тогда НУОФ определяется (9), (12), (13), (14), (15) при соответствующих начальных условиях.

Для приведенной гауссовской ЭСтС НРОП соответствующие уравнения для НУОФ (теорема 3.3) определяются теоремой 3.2, если пренебречь интегральными членами в (11) и положить $\nu(t) = \nu_0(t)$.

Замечание 3.1. В условиях теорем 3.1 и 3.2, когда функции приведенных систем $\varphi^{\text{ПП}}$, $\psi^{\text{ПП}}$, φ_1 и ψ_1 ,

а также структурные функции ξ , η и γ не зависят от Y , достаточно знать параметры нормального распределения только переменных X_t и \hat{X}_t .

Замечание 3.2. При синтезе НУОФ используют только априорные данные и не опираются на результаты наблюдений. Поэтому их надо выполнять для каждой конкретной задачи (или класса задач) лишь один раз — при синтезе фильтра. Практическое применение НУОФ при каждом конкретном эксперименте требует только решения уравнения НУОФ при известных функциях времени α_t , β_t и γ_t .

Замечание 3.3. В общем случае НУОФ хуже оптимального, но зато легко реализуем. Если оптимальный фильтр в каком-либо классе допустимых фильтров удовлетворяет уравнениям теорем 3.1 и 3.2 при каких-нибудь функциях времени α_t , β_t и γ_t , то по теории НУОФ будем иметь именно этот фильтр.

Замечание 3.4. Теория НУОФ также дает возможность оценивать не все компоненты состояния приведенной системы, а только некоторые из них. Для этого достаточно взять структурные функции ξ и η зависящими от соответствующих компонент вектора \hat{Y}_t . Так, взяв ξ и η зависящими лишь от Y_t и оценок неизвестных параметров приведенной системы, можно оценивать только параметры приведенной системы, не оценивая ее состояние. В таких случаях будут получаться НУОФ, порядок которых меньше размерности вектора состояния приведенной системы.

Замечание 3.5. Линейные НУОФ, когда структурные функции в (10) $\xi = \xi(y, \hat{x}, t) = [y^T \hat{x}^T]^T$ и $\eta(y, \hat{x}, t) = I_{n_y}$, могут применяться для обработки информации в гладких гауссовских и негауссовских взаимозависимых объектовых и системах наблюдения. Для негладких наблюдаемых объектов в прикладных задачах достаточно провести регрессионную линеаризацию нелинейных функций. В этом случае коэффициенты линеаризации будут зависеть от m_t и K_t .

4 Нормальная субоптимальная нелинейная фильтрация

Только в случае гауссовских белых шумов, применяя к приведенным уравнениям (6) теорию НСОФ [3] первого типа, получим следующие результаты (теорема 4.1):

$$\begin{aligned}\Psi^{\text{ПП}}(\hat{X}_t, \hat{X}_t) = 0, \quad \dot{\hat{X}}_t = f^{\text{ПП}}(\hat{X}_t, R_t, t) + \\ + h^{\text{ПП}}(\hat{X}_t, R_t, t) \left[\dot{Y}_t - f^{\text{ПП}(1)}(\hat{X}_t, R_t, t) \right],\end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_t = & \{ f^{\text{III}(2)}(\hat{X}_t, R_t, t) - \\ & - h^{\text{III}}(\hat{X}_t, R_t, t)(\psi_1 \nu \psi_1^T)(t) h^{\text{III}}(\hat{X}_t, R_t, t)^T \} + \\ & + \sum_{r=1}^{n_y} \rho_r^{\text{III}}(\hat{X}_t, R_t, t) \left[\dot{Y}_r - f_r^{\text{III}(1)}(\hat{X}_t, R_t, t) \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$f^{\text{III}}(\hat{X}_t, R_t, t) = [(2\pi)^n |R_t|]^{-1/2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\text{III}}(x, t) \exp \left\{ -\frac{(x^T - \hat{X}_t^T) R_t^{-1} (x - \hat{X}_t)}{2} \right\} dx;$$

$$\begin{aligned} f^{\text{III}(1)}(\hat{X}_t, R_t, t) &= \left\{ f_r^{(1)}(\hat{X}_t, R_t, t) \right\} = \\ &= [(2\pi)^{n_x} |R_t|]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, t) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(x^T - \hat{X}_t^T) R_t^{-1} (x - \hat{X}_t)}{2} \right\} dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^{\text{III}}(\hat{X}_t, R_t, t) &= \left\{ [(2\pi)^{n_x} |R_t|]^{-1/2} \times \right. \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} [x \varphi_1(x, t)^T + (\psi^{\text{III}} \nu \psi_1^T)(x, t)] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(x^T - \hat{X}_t^T) R_t^{-1} (x - \hat{X}_t)}{2} \right\} dx - \\ &\left. - \hat{X}_t f^{\text{III}(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t)^T \right\} (\psi_1 \nu \psi_1^T)^{-1}(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{\text{III}(2)}(\hat{X}_t, R_t, t) &= [(2\pi)^{n_x} |R_t|]^{-1/2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (x - \hat{X}_t) \varphi^{\text{III}}(x, t)^T + \right. \\ &\left. + \varphi^{\text{III}}(x, t) (x^T - \hat{X}_t^T) + (\psi^{\text{III}} \nu \psi_1^T)(x, t) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(x^T - \hat{X}_t^T) R_t^{-1} (x - \hat{X}_t)}{2} \right\} dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_r^{\text{III}}(\hat{X}_t, R_t, t) &= [(2\pi)^{n_x} |R_t|]^{-1/2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (x - \hat{X}_t) (x^T - \hat{X}_t^T) a_r^{\text{III}}(x, t) + \right. \\ &\left. + (x - \hat{X}_t) b_r^{\text{III}}(x, t)^T (x^T - \hat{X}_t^T) + b_r^{\text{III}}(x, t) (x^T - \hat{X}_t^T) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(x^T - \hat{X}_t^T) R_t^{-1} (x - \hat{X}_t)}{2} \right\} dx \quad (r = \overline{1, n_y}), \end{aligned}$$

где a_r^{III} — r -й элемент матрицы-строки $(\varphi_1^T - \hat{\varphi}_1^T)(\psi_1 \nu \psi_1^T)^{-1}$; b_{kr}^{III} — элемент k -й строки и r -го столбца матрицы $\psi^{\text{III}} \nu \psi_1^T (\psi_1 \nu \psi_1^T)^{-1}$; b_r — r -й столбец матрицы $\psi^{\text{III}} \nu \psi_1^T (\psi_1 \nu \psi_1^T)^{-1}$; $b_r^{\text{III}} = [b_{1r}^{\text{III}} \dots b_{pr}^{\text{III}}]^T$ ($r = \overline{1, n_y}$).

Для явных гладких дифференциальных СтС среди СОФ второго типа наиболее распространен обобщенный фильтр Калмана–Бьюси (ОФКБ) и фильтры второго порядка [3]. Применяя теорию ОФКБ к линеаризованным приведенным уравнениям, придем к следующим результатам.

Теорема 4.2. Если приведенные уравнения нелинейной гауссовской дифференциальной СтС (16), (17) допускают линеаризацию в окрестности неизвестной оценки \hat{X}_t и матрица $\sigma_1 = (\psi_1 \nu \psi_1^T)$ невырождена, то уравнения

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{III}}(\hat{X}_t, \hat{X}_t) &= 0, \quad \dot{\hat{X}}_t = \varphi^{\text{III}}(\hat{X}_t, t) + \\ &+ h^{\text{III}}(\hat{X}_t, R_t, t) \left[\dot{Y}_t - \varphi_1(\hat{X}_t, t) \right], \\ \dot{R}_t &= \left\{ \varphi_x^{\text{III}}(\hat{X}_t, t)^T R_t + R_t \varphi_x^{\text{III}}(\hat{X}_t, t) + \right. \\ &+ (\psi_1 \nu \psi_1^T)(\hat{X}_t, t) - \\ &\left. - h^{\text{III}}(\hat{X}_t, R_t, t) (\psi_1 \nu \psi_1^T)(t) h^{\text{III}}(\hat{X}_t, R_t, t)^T \right\} dt, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_x^{\text{III}} &= \frac{\partial}{\partial X_t} \varphi^{\text{III}}(X_t, t)^T; \quad \varphi_{1x} = \frac{\partial}{\partial X_t} \varphi_1(X_t, t)^T; \\ h^{\text{III}}(\hat{X}_t, R_t, t) &= \left\{ R_t \varphi_{1x}(\hat{X}_t, t) + \right. \\ &\left. + (\psi^{\text{III}} \nu \psi_1^T)(\hat{X}_t, t) \right\} (\psi_1 \nu \psi_1^T)^{-1}(Y_t, t), \end{aligned}$$

при соответствующих начальных условиях определяют субоптимальный ОФКБ.

Замечание 4.1. Ковариационная матрица ошибки в уравнениях СОФ может и не быть близкой к апостериорной ковариационной матрице ошибки фильтрации. Это не дает возможности оценивать точность СОФ второго типа заранее. Вычислять апостериорную ковариационную матрицу ошибки можно каждый раз только в процессе фильтрации.

5 Заключение

Для задач обработки информации в реальном времени в предположении, что наблюдения влияют на эрдитарный объект наблюдения, для многомерных объектовых ЭСтС НРОП, приводимых к конечно-дифференциальным СтС, разработаны методы синтеза НУОФ. Такие фильтры основаны на

среднеквадратичной оптимизации. Большую практическую ценность представляют НУОФ в случае, когда объектовые приведенные функции не зависят от результатов наблюдений.

Для гауссовских ЭСтС НРОП небольшого порядка, приведенных к явным, разработана теория НСОФ по среднеквадратичному критерию двух типов [3]. Субоптимальные фильтры второго типа, в отличие от фильтров первого типа, предназначены для решения задач реального времени, но не позволяют оценивать точность фильтрации заранее.

Практический интерес представляет развитие НУОФ и НСОФ для запаздывающих наблюдений [5–7], а также приводимых ЭСтС [8–11].

Полученные методы допускают обобщение на случай приводимых ЭСтС НРОП, зависящих от случайных параметров, определяемых каноническими представлениями СтП (каноническими разложениями и интегральными каноническими представлениями), а также случайных НРОП функций Φ в (1).

Литература

1. Пугачёв В. С., Синицын И. Н. Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2000; 2004. 1000 с.
2. Синицын И. Н. Фильтры Калмана и Пугачёва. — 2-е изд. — М.: Логос, 2007. 776 с.
3. Синицын И. Н. Методы условно-оптимальной фильтрации и экстраполяции в наблюдаемых неявных стохастических системах // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 2–9. doi: 10.14357/19922264240401. EDN: TFPJYK.
4. Синицын И. Н. Методы нормальной субоптимальной фильтрации в наблюдаемых неявных гауссовских стохастических системах // Системы и средства информатики, 2025. Т. 35. № 1. С. 41–58. doi: 10.14357/08696527250102. EDN: GFRDWH.
5. Босов А. В. Оптимальная фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 8–17. doi: 10.14357/19922264230302. EDN: CFVYJM.
6. Босов А. В. Анализ использования доплеровских измерений для идентификации параметров движения по наблюдениям со случайными запаздываниями // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 33–43. doi: 10.14357/19922264250105. EDN: MZKWC1.
7. Босов А. В., Урюпин И. В. Модифицированный вариант расширенного фильтра Калмана по методу линейных псевдонаблюдений // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 2. С. 17–26. doi: 10.14357/19922264250203 EDN: ZOVFSQ.
8. Финогенко И. А. К вопросу о решениях функционально-дифференциальных включений // Прикладная математика и пакеты прикладных программ. — Иркутск: СЭИСО АН СССР, 1980. С. 95–107.
9. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1981. 448 с.
10. Финогенко И. А. О неявных функционально-дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве // Динамика нелинейных систем. — Новосибирск: Наука, 1983. С. 151–164.
11. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. 280 с.

Поступила в редакцию 11.12.2025

Принята к публикации 15.02.2026

NORMAL FILTERING METHODS FOR OBSERVED HEREDITARY STOCHASTIC SYSTEMS WITH UNSOLVED DERIVATIVES

I. N. Sinitsyn

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper presents analytical synthesis methods for normal conditionally optimal and suboptimal filters (NCOF and NSOF) based on the mean-square criterion (i. e., in the Pugachev sense). These methods are developed for information processing in interconnected, observable hereditary stochastic systems with unsolved derivatives (HStSUSD). A brief survey of publications on the analysis, modeling, and nonlinear filtration in HStSUSD is also provided. The NCOF are based on a dual procedure of HStSUSD reduction to finite-differential stochastic systems using the methods of normal approximation and statistical linearization. The analytical reduction methods of first and second stages are discussed. To illustrate the approach, examples are presented where NSOF for HStSUSD is generalized through the application of the second-stage Kalman–Bucy filtering techniques. The NCOF and NSOF peculiarities for real time filtering in reducible HStSUSD are outlined. Future generalizations are discussed.

Keywords: hereditary stochastic systems with unsolved derivatives (HStSUSD); normal conditionally optimal filter (NCOF); normal supoptimal filter (NSOF); stochastic process (StP)

DOI: 10.14357/19922264260102

EDN: WOQCHT

References

1. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 2001. *Stochastic systems. Theory and applications*. Singapore: World Scientific. 908 p.
2. Sinitsyn, I. N. 2007. *Fil'try Kalmana i Pugacheva* [Kalman and Pugachev filters]. 2nd ed. Moscow: Logos. 776 p.
3. Sinitsyn, I. N. 2024. Metody uslovno-optimal'noy fil'tratsii i ekstrapolyatsii v nablyudayemykh neyavnykh stokhasticheskikh sistemakh [Conditionally optimal filtering and extrapolation methods for observable implicit stochastic systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):2–9. doi: 10.14357/19922264240401. EDN: TFPJYK.
4. Sinitsyn, I. N. 2025. Metody normal'noy suboptimal'noy fil'tratsii v nablyudaemykh neyavnykh gaussovskikh stokhasticheskikh sistemakh [Normal suboptimal filtering methods in implicit observable Gaussian stochastic systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(1):41–58. doi: 10.14357/08696527250102. EDN: GFRDWH.
5. Bosov, A. V. 2023. Optimal'naya fil'tratsiya sostoyaniya nelineynoy dinamicheskoy sistemy po nablyudeniym so sluchaynymi zapazdyvaniyami [Nonlinear dynamic system state optimal filtering by observations with random delays]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):8–17. doi: 10.14357/19922264230302. EDN: CFVYJM.
6. Bosov, A. V. 2025. Analiz ispol'zovaniya doplerovskikh izmereniy dlya identifikatsii parametrov dvizheniya po nablyudeniym so sluchaynymi zapazdyvaniyami [Doppler measurements application analysis to identify motion parameters from observations with random delays]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(1):33–43. doi:10.14357/19922264250105. EDN: MZKWCI.
7. Bosov, A. V., and I. V. Uryupin. 2025. Modifitsirovanny variant rasshirennogo fil'tra Kalmana po metodu lineynykh psevdonablyudeniy [A modified extended Kalman filter by the linear pseudomeasurement method]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(2):17–26. doi: 10.14357/19922264250203. EDN: ZOVFSQ.
8. Finogenko, I. A. 1980. K voprosu o resheniyakh funktsional'no-differentsial'nykh vkluycheniy [On the issue of solutions of functional-differential inclusions]. *Prikladnaya matematika i pakety prikladnykh program* [Applied mathematics and application software packages]. Irkutsk: SEISO AN SSSR. 95–107.
9. Kolmanovskiy, V. B., and V. R. Nosov. 1981. *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyykh sistem s posledstviem* [Stability and periodic modes of regulated systems with consequences]. Moscow: Nauka. 448 p.
10. Finogenko, I. A. 1983. O neyavnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniyakh v banakhovom prostranstve [On implicit functional differential equations in a Banach space]. *Dinamika nelineynykh sistem* [Dynamics of nonlinear systems]. Novosibirsk: Nauka. 151–164.
11. Azbelev, N. V., V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatulina. 1991. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of functional differential equations]. Moscow: Nauka. 280 p.

Received December 11, 2025

Accepted February 15, 2026

Contributor

Sinitsyn Igor N. (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; isinitsin@freccsc.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ПОДВИЖНЫМ ОБЪЕКТОМ НА ПЛОСКОМ МАРШРУТЕ

А. С. Бортакoвский¹, И. В. Урюпин²

Аннотация: Рассматривается задача наискорейшего передвижения объекта управления по заданному плоскому маршруту. Маршрут представляет собой непрерывную кривую, составленную из типовых участков — отрезков, дуг окружностей и т. п. При этом допускаются негладкие соединения с угловыми точками. По мере прохождения маршрута происходят изменения (переключения) модели системы управления, так как уравнения движения системы на разных типовых участках отличаются. Общими в задаче быстрогодействия остаются ограничения на величины линейной скорости и ускорения, а также на величину угловой скорости при поворотах на дугах окружностей или на месте. Из-за переключений рассматриваемая задача не сводится к классической задаче быстрогодействия системы управления. В статье получено решение поставленной задачи. Оптимальное управление на маршруте получается при оптимальном прохождении всех его типовых участков. Для этого на каждом участке ограниченной кривизны надо максимизировать модуль линейной скорости, а при поворотах на месте в угловых точках — модуль угловой скорости. Эффективность предлагаемого подхода демонстрируется на модельных примерах.

Ключевые слова: переключаемая модель движения; плоский маршрут; быстрогодействие

DOI: 10.14357/19922264260103

EDN: XSPJAH

1 Введение

Задачи быстрогодействия относятся к классическим задачам оптимального управления [1]. Их практическое применение связано, в частности, с планированием строительства дорог [2, 3], разработкой маршрутов движения транспортных средств [4, 5], решением логистических задач [6] и т. п. При планировании маршрутов плоского движения объектов управления применяются разные модели динамических систем. Чаще других используется машина Маркова–Дубинса или ее модификации [7–10]. Эти модели применяются для описания движения автомобилей, беспилотных летательных аппаратов, роботов-доставщиков и др. При этом минимизируется время перемещения объекта управления из заданного начального состояния в заданное конечное. На практике задачи быстрогодействия усложняются промежуточными условиями. Например, заданы точки, через которые должна пройти траектория движения [11, 12], или области, в которых движение запрещено [13]. Представляют интерес задачи быстрогодействия с выбором маршрута движения по заданным промежуточным точкам. Например, задача коммивояжера Дубинса [14].

В статье поставлена задача наискорейшего перемещения объекта управления по заданному плоскому маршруту. Эта задача отличается от класси-

ческой задачи быстрогодействия, поскольку процесс управления частично задан. Траектория движения на плоскости должна совпадать с заданным маршрутом. Формально поставленная задача не относится к задачам оптимального управления [1]. Однако она имеет большое прикладное значение. На практике путь движения объекта управления, как правило, заранее задан. Например, известны маршруты грузовых и пассажирских перевозок автомобильным, железнодорожным, морским и авиационным транспортом, пути следования роботов-доставщиков и т. п. Поэтому возникает задача наискорейшего прохождения заданного маршрута.

Особенность рассматриваемой задачи заключается в наличии у маршрута угловых точек, в которых объект управления совершает поворот на месте [15, 16]. Как правило, такие движения не рассматриваются в классических задачах быстрогодействия, поскольку кривизна траектории в угловых точках не определена. Однако на практике подвижные объекты, совершающие повороты на месте, встречаются часто. Например, гусеничный транспорт, строительные машины, роботы-доставщики, мультикоптеры, вертолеты и т. п. Для математического описания движения таких объектов управления необходимо использовать переключаемые системы (switched systems), в процессе функционирования которых меняется модель движения [17–19].

¹Московский авиационный институт; Национальный исследовательский технологический университет МИСИС, asbortakov@mail.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, uryupin93@yandex.ru

В статье разработана методика решения задачи быстрогодействия для произвольного плоского маршрута, который составлен из отрезков и дуг окружностей. При этом не исключаются негладкие соединения с угловыми точками, в которых объект управления совершает поворот на месте. Переключаемая модель допускает движение с ограниченной по величине линейной скоростью. Угловая скорость и линейное ускорение, ограниченные по модулю, служат управлениями. Эффективность применяемой методики демонстрируется на модельных примерах.

2 Постановка задачи

Рассматривается задача быстрогодействия динамической системы управления, совершающей движение по заданному маршруту. Определим сначала допустимые маршруты, а затем процессы управления.

2.1 Маршрут движения

Пусть на координатной плоскости Oxy задан маршрут, который представляет собой криволинейную ломаную

$$A_0 A_1 \dots A_N. \quad (1)$$

Каждое звено $A_{i-1} A_i$, $i = \overline{1, N}$, ломаной представляет собой либо отрезок, либо дугу окружности. Соединение звеньев может быть негладким. В этом случае маршрут будет иметь угловые точки. Предполагаем, что известны координаты вершин A_0, A_1, \dots, A_N ломаной, радиусы и центры окружностей для дуг. Порядок вершин ломаной определяет ориентацию маршрута. Начальная точка — A_0 , конечная — A_N . Все вершины ломаной (1) различные, за исключением, быть может, начальной и конечной точек, которые могут совпадать, если маршрут замкнутый.

Для параметрического представления маршрута (1) можно использовать натуральный параметр s — длину пути, отсчитываемую от начальной точки A_0 . Тогда путь будет задаваться непрерывной вектор-функцией

$$r = r(s), \quad s_{i-1} \leq s \leq s_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где s_i — значение параметра, соответствующее вершине A_i . Иначе говоря, s_i — суммарная длина ломаной от A_0 , причем $s_0 = 0$. Производная $r'(s)$ по параметру определена и непрерывна на каждом отрезке $[s_{i-1}, s_i]$, включая односторонние производные $r'(s_{i-1} + 0)$, $r'(s_i - 0)$ на концах отрезка.

Поскольку отрезки и дуги окружностей — регулярные кривые, то $|r'(s)| \equiv 1$. В вершинах ломаной функция (2) непрерывна, а ее производная $r'(s)$ может иметь разрыв: $r'(s_i - 0) \neq r'(s_i + 0)$, т. е. единичные векторы $r'(s_i - 0)$ и $r'(s_i + 0)$ имеют разное направление (угол между ними ненулевой). Такую вершину будем называть угловой точкой маршрута.

2.2 Уравнения движения

Пусть на промежутке $[0, T]$ движение динамической системы описывается уравнениями [16]

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \cos \gamma(t); & \dot{y}(t) &= v(t) \sin \gamma(t); \\ \dot{v}(t) &= w(t); & \dot{\gamma}(t) &= \omega(t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь x и y — плоские координаты положения системы управления; γ — угол направления движения, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс; v и w и ω — величины линейной скорости, касательного ускорения и угловой скорости радиус-вектора $r(t) = (x(t), y(t))$ соответственно. Управление осуществляется выбором ускорения w и угловой скорости ω , которые ограничены по модулю:

$$|w(t)| \leq W; \quad |\omega(t)| \leq \Omega. \quad (4)$$

Величина линейной скорости также ограничена:

$$0 \leq v(t) \leq V. \quad (5)$$

Максимальные допустимые значения W , Ω и V заданы. Ограничения (4) — геометрические, а (5) — фазовое [18].

Начальное состояние и конечное положение объекта управления определяются условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0; & y(0) &= y_0; & v(0) &= 0; & \gamma(0) &= \gamma_0; \\ x(T) &= x_N; & y(T) &= y_N; & v(T) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Система начинает движение в точке покоя $A_0(x_0, y_0)$ и заканчивает, останавливаясь в точке $A_N(x_N, y_N)$. Направление $\gamma(T)$ в конечный момент времени произвольное.

Рассмотрим уравнения движения *переключаемой* модели подвижного объекта в задаче прохождения заданного маршрута (1). В отличие от модели (3), изменение направления движения переключаемой модели допускается только на дугах окружностей и в угловых точках ломаной (1), включая точку старта O . Поэтому движение переключаемой модели представляет собой чередование прямолинейных участков и поворотов. Переход от одного участка к другому считаем переключением. Запишем уравнения движения на разных участках.

Прямолинейное движение описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = v(t) \cos \gamma; \quad \dot{y}(t) = v(t) \sin \gamma; \quad \dot{v}(t) = w(t), \quad (7)$$

которые получаются из (3) при $\omega(t) \equiv 0$. Направление γ в (7) постоянное. Ограничения на ускорение в (4) и на линейную скорость в (5) остаются без изменений:

$$|w(t)| \leq W; \quad 0 \leq v(t) \leq V. \quad (8)$$

Траекторию прямолинейного движения (7) будем обозначать Λ .

Движение по дуге окружности радиуса R описывается уравнениями (3) с дополнительным смешанным ограничением [18]

$$v(t) = \omega(t)R. \quad (9)$$

Условия (4) остаются без изменений, а условие (5) с учетом равенства (9) дополняется еще одним неравенством и принимает вид:

$$0 \leq v(t) \leq V_R, \quad (10)$$

где $V_R = \min\{V, \Omega R\}$. Здесь ΩR — величина линейной скорости при повороте с максимальной угловой скоростью Ω . Траекторию движения (8) по дуге окружности будем обозначать X .

Поворот на месте описывается уравнениями (3) при $v(t) \equiv 0$:

$$\dot{x}(t) = 0; \quad \dot{y}(t) = 0; \quad \dot{\gamma}(t) = \omega(t). \quad (11)$$

Величина угловой скорости служит управлением, ограниченным по модулю:

$$|\omega(t)| \leq \Omega. \quad (12)$$

Других ограничений нет, так как остальные неравенства в (4) и (5) при нулевой линейной скорости выполняются. Угол $\gamma(t)$ в (11) показывает направление виртуального прямолинейного движения, если бы линейная скорость в момент t была отлична от нулевой. Траекторию движения (11) будем обозначать Π .

Участки прямолинейного движения и повороты соединяются непрерывным образом:

$$\begin{aligned} x(\tau - 0) &= x(\tau); & y(\tau - 0) &= y(\tau); \\ v(\tau - 0) &= v(\tau); & \gamma(\tau - 0) &= \gamma(\tau). \end{aligned}$$

Здесь τ — момент переключения, в который изменяется тип движения: прямолинейное движение (Λ) меняется на поворот по окружности (X) или поворот на месте (Π) или, наоборот, поворот меняется прямолинейным движением.

Таким образом, движение переключаемой модели объекта управления при прохождении маршрута (1) представляет собой чередование типовых движений: прямолинейного, криволинейного и поворотов на месте.

2.3 Допустимые процессы управления

Допустимый процесс управления системой (3) представляет собой совокупность абсолютно непрерывной траектории $(x(\cdot), y(\cdot), v(\cdot), \gamma(\cdot))$ и ограниченного измеримого управления $(w(\cdot), \omega(\cdot))$, которые почти всюду на промежутке $[0, T]$ удовлетворяют уравнениям (3) с начальными и конечными условиями (6), при всех $t \in [0, T]$ — ограничениям (4) и (5). Такие процессы с абсолютно непрерывными траекториями и ограниченными измеримыми управлениями, как правило, рассматриваются в классических задачах оптимального управления [1], в частности в задачах быстродействия.

Допустимые процессы управления на заданном маршруте отличаются от классических и относятся к процессам управления переключаемых или гибридных систем. В самом деле, допустимым процессом управления переключаемой модели на заданном маршруте (1) считаем процесс управления, состоящий из N участков, движение на каждом из которых удовлетворяет одной из систем уравнений (7), (3), (11), причем траектория системы непрерывна, а ее проекция $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq T$, на плоскость Oxy совпадает с маршрутом. Иначе говоря, путь $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq T$, является параметрическим представлением кривой (1):

$$\begin{aligned} r(s(t)) &= (x(t), y(t)), \\ s(t) &= \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13) \end{aligned}$$

Последнее условие ограничивает множество допустимых управлений переключаемой модели. В самом деле, кривая (маршрут) как класс эквивалентных путей может иметь разные параметрические представления. Каждое допустимое управление определяет, согласно уравнениям движения, один путь из этого класса. Все допустимые управления порождают эквивалентные пути, относящиеся к заданной кривой (маршруту). Можно сказать, что заданный маршрут ограничивает множество допустимых процессов переключаемой модели по сравнению с множеством допустимых процессов управления системой (3).

2.4 Функционал качества управления

Качество допустимого процесса управления оценивается его продолжительностью T . На множестве допустимых процессов управления переключаемой модели требуется найти наименьшее время T , а также процесс управления, при котором это время достигается, т. е. решить задачу быстрогодействия

$$T \rightarrow \min \quad (14)$$

переключаемой модели на заданном маршруте. Заметим, что время передвижения по маршруту включает также время поворотов на месте в угловых точках, когда радиус-вектор $r(s(t)) = (x(t), y(t))$ положения системы не меняется, а линейная скорость равна нулю.

В разд. 2.3 было показано, что множество допустимых процессов управления переключаемой системой является подмножеством множества допустимых процессов управления системой (3), что обусловлено ограничением (13) на прохождение заданного маршрута. Поэтому задача быстрогодействия на заданном маршруте отличается от классической задачи быстрогодействия — минимизации времени перемещения системы (3) из заданного начального состояния в заданное конечное положение (6).

Маршрут (1) можно дополнить промежуточными точками — остановками, в которых система неподвижна. В прикладных задачах дополнительные остановки необходимы на заправочных станциях, в пунктах погрузочно-разгрузочных работ, местах отдыха и т. п. Время, проведенное на остановках, добавляется к времени перемещения системы по маршруту. Заметим, что угловые точки отличаются от остановок. В угловых точках положение системы на координатной плоскости постоянно, но угол направления меняется.

Отметим еще, что начальную точку следует считать угловой, если в начальный момент времени направление γ_0 виртуального прямолинейного движения не совпадает с направлением скорости изменения радиус-вектора кривой: $r'(+0) \neq (\cos \gamma_0, \sin \gamma_0)$. В этом случае движение системы начинается с поворота на месте, который заканчивается в момент t при достижении равенства $r'(+0) = (\cos \gamma(t), \sin \gamma(t))$.

Начальные и конечные условия могут отличаться от (6). Например, величины линейных скоростей в начале и в конце движения могут быть отличны от нуля или вообще не заданы. В последнем случае они относятся к параметрам управления и находятся при минимизации (14). В конечный момент времени может быть задан угол $\gamma(T)$ направления движения. Если он отличается от направления вектора $r'(s_N - 0)$, то последнюю вершину A_N лома-

ной (1) нужно считать угловой точкой и выполнить в ней соответствующий поворот на месте.

3 Оптимизация типовых участков допустимого процесса управления

Как определено в разд. 2.3, допустимый процесс управления переключаемой системой состоит из конечного числа типовых участков, каждый из которых — либо прямолинейное движение (**A**), либо поворот по окружности (**X**), либо поворот на месте (**П**). Получим для участков каждого типа оптимальное по быстродействию управление. Эти задачи решаются просто, исходя из принципа максимальной скорости. Оптимальность полученного решения подтверждается применением принципа максимума Понтрягина [1].

3.1 Прямолинейное движение

Пусть движение системы на промежутке времени $[0, T]$ описывается уравнениями (7) с ограничениями (8):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \cos \gamma; \quad \dot{y}(t) = v(t) \sin \gamma; \quad \dot{v}(t) = w(t), \\ |w(t)| &\leq W, \quad 0 \leq v(t) \leq V. \end{aligned} \quad (15)$$

Начальное и конечное состояния заданы:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0; \quad y(0) = y_0; \quad v(0) = v_0; \\ x(T) &= x_T; \quad y(T) = y_T; \quad v(T) = v_T, \end{aligned} \quad (16)$$

причем прямая, проходящая через точки (x_0, y_0) и (x_T, y_T) на координатной плоскости Oxy , составляет с осью абсцисс угол γ .

Требуется найти наименьшее значение времени T и управление, при котором оно достигается, т. е. решить задачу быстрогодействия $T \rightarrow \min$.

Сделаем замену переменных, полагая

$$z(t) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2}.$$

Тогда задача (15), (16) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= v(t); \quad \dot{v}(t) = w(t), \quad |w(t)| \leq W, \quad 0 \leq t \leq T; \\ z(0) &= 0; \quad v(0) = v_0; \\ z(T) &= \sqrt{(x_T - x_0)^2 + (y_T - y_0)^2}; \quad v(T) = v_T, \\ T &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Минимальное время достигается при наибольшей скорости. Поэтому оптимальное управление

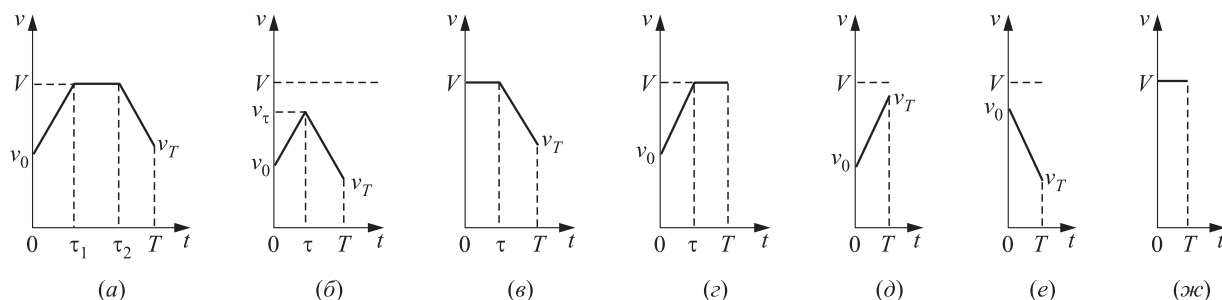


Рис. 1 Графики изменения скорости

состоит из участка разгона, когда ускорение максимальное $w = W$, участка движения с постоянной скоростью ($w = 0$) и участка торможения при $w = -W$. График изменения скорости представлен на рис. 1, а. В частных случаях участков может быть меньше. Например, если максимальная скорость V не достигается, то останутся два участка — разгон и торможение, а участка равномерного движения не будет (см. рис. 1, б). При $v_0 = V$ или $v_T = V$ также остаются два участка (см. рис. 1, в или рис. 1, г соответственно). Один участок разгона (рис. 1, д) или торможения (рис. 1, е) с максимальным по модулю ускорением получается при $|v_T - v_0| = WT$, а один участок равномерного движения (см. рис. 1, ж) будет при $v_0 = v_T = V$.

В случаях (а), (в) и (г) оптимальность указанного управления можно подтвердить, применяя необходимые условия оптимальности [18], причем фазовое ограничение можно исключить, согласно [19]; в случае (б) можно использовать принцип максимума [1], поскольку фазового ограничения нет; в остальных случаях допустимое управление определяется однозначно почти всюду на $[0, T]$.

Получим в каждом случае (а)–(ж) время оптимального движения. Начнем с последнего случая. Ускорение на отрезке нулевое: $w(t) = 0, 0 \leq t \leq T$. Поэтому из равенства $S = VT$ находим

$$T_{\text{ж}} = \frac{S}{V}. \quad (17)$$

В случаях (д) и (е) движение происходит с максимальным по модулю ускорением $|w(t)| = W$, поэтому

$$T_{e,d} = \frac{|v_T - v_0|}{W}. \quad (18)$$

Рассмотрим случай (з). Разгон до максимальной скорости V выполняется за время τ с максимальным ускорением $w(t) = W$. Затем ускорение нулевое. Записываем систему уравнений:

$$V = v_0 + W\tau; \quad S = \frac{v_0 + V}{2} \tau + V(T - \tau).$$

Подставляя $\tau = (V - v_0)/W$ во второе уравнение, выражаем время

$$T_z = \frac{2SW + (V - v_0)^2}{2VW}. \quad (19)$$

Аналогичный результат получаем в случае (б):

$$T_b = \frac{2SW + (V - v_\tau)^2}{2VW}. \quad (20)$$

В случае (б) разгон выполняется в течение времени τ с максимальным ускорением $w(t) = W$, а торможение — с минимальным ускорением $w(t) = -W, \tau \leq t \leq T$. Записываем систему уравнений

$$\begin{aligned} v_\tau &= v_0 + W\tau; \\ v_T &= v_\tau - W(T - \tau); \\ S &= \frac{v_0 - v_\tau}{2} \tau + \frac{v_\tau + v_T}{2} (T - \tau). \end{aligned}$$

Выражаем из первого уравнения τ , из второго — разность $T - \tau$. Подставляем эти выражения в третье уравнение, из которого находим максимальную скорость

$$v_\tau = \sqrt{SW + \frac{v_0^2 + v_T^2}{2}}. \quad (21)$$

Минимальное время движения вычисляется по формуле

$$T_b = \frac{2v_\tau - v_0 - v_T}{W}. \quad (22)$$

В случае (а) система сначала разгоняется до максимальной скорости за время τ_1 с максимальным ускорением: $w(t) = W, 0 \leq t \leq \tau_1$; затем движется равномерно: $w(t) = 0, \tau_1 \leq t \leq \tau_2$, а на последнем участке тормозит: $w(t) = -W, \tau_2 \leq t \leq T$. Записываем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} V &= v_0 + W\tau_1, \quad v_T = V - W(T - \tau_2), \\ S &= \frac{v_0 + V}{2} \tau_1 + V(\tau_2 - \tau_1) + \frac{V + v_T}{2} (T - \tau_2). \end{aligned}$$

Выражаем τ_1 и τ_2 из первых двух уравнений и подставляем в третье. Откуда находим

$$T_a = \frac{1}{VW} [v_\tau^2 + V^2 - V(v_0 + v_T)], \quad (23)$$

где v_τ — скорость (21).

Обозначим через

$$\bar{w} = \frac{v_T - v_0}{T}$$

среднее ускорение на отрезке. Выражаем из условия

$$S = \frac{(v_0 + v_T)T}{2}$$

время и подставляем в среднее ускорение:

$$\bar{w} = \frac{v_T^2 - v_0^2}{2S}. \quad (24)$$

Допустимые процессы управления удовлетворяют условию

$$|\bar{w}| \leq W, \quad (25)$$

так как модуль ускорения не больше W . Если неравенство (25) не выполняется, то задача быстрогодействия прямолинейного движения не имеет решения.

Случаи (а) и (б) отличаются достижением максимальной скорости. Если

$$v_\tau \leq V, \quad (26)$$

то оптимальное управление соответствует случаю (б), иначе случаю (а). Остальные случаи (в)—(ж) различаются по скоростям на концах промежутков.

3.2 Движение по окружности

Пусть на промежутке времени $[0, T]$ движение по окружности радиуса R описывается уравнениями (3) с ограничениями (4), (9) и (10).

Начальное и конечное состояния заданы:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0; \quad y(0) = y_0; \quad v(0) = v_0; \quad \gamma(0) = \gamma_0; \\ x(T) &= x_T; \quad y(T) = y_T; \quad v(T) = v_T; \quad \gamma(T) = \gamma_T. \end{aligned}$$

При этом точки (x_0, y_0) и (x_T, y_T) лежат на одной окружности заданного радиуса R . Величины начальной v_0 и конечной v_T линейной скорости не превосходят V_R .

Минимальное время поворота достигается при наибольшей допустимой величине линейной скорости, как и в случае прямолинейного движения. Поэтому графики изменения величины линейной

скорости при движении по окружности такие же, как на рис. 1, если заменить величину V величиной V_R . Минимальное время в случаях (а)—(ж) находится по формулам (17)—(20), (22) и (23) соответственно, в которых $S = |\gamma_T - \gamma_0|R$ и $V = V_R$. Условие (25) существования решения остается неизменным.

3.3 Поворот на месте

Пусть движение системы на промежутке времени $[0, T]$ описывается уравнениями (11) с ограничением (12).

Начальное и конечное состояния заданы:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0; \quad y(0) = y_0; \quad \gamma(0) = \gamma_0; \\ x(T) &= x_0; \quad y(T) = y_0; \quad \gamma(T) = \gamma_T. \end{aligned}$$

Удалив постоянные координаты x и y , получаем задачу быстрогодействия

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \omega(t), \quad |\omega(t)| \leq \Omega; \\ \gamma(0) &= \gamma_0; \quad \gamma(T) = \gamma_T; \\ T &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Решение задачи очевидно: угловая скорость должна быть максимальной по модулю

$$\omega(t) = \Omega \operatorname{sign}(\gamma_T - \gamma_0).$$

Поэтому минимальное время T_{Π} поворота на месте

$$T_{\Pi} = \frac{|\gamma_T - \gamma_0|}{\Omega}.$$

Этот результат можно получить, используя принцип максимума [1].

Таким образом, получено оптимальное управление на типовых участках Λ , X и Π траектории переключаемой системы. Заметим, что поворот на месте с угловой скоростью Ω является допустимым процессом. Прямолинейное движение и движение по окружности допустимо только при условии (25). Это ограничение нужно учитывать при нахождении оптимального процесса.

4 Построение оптимального процесса управления

Предлагается следующий порядок решения поставленной задачи быстрогодействия.

1. Задаем величины линейной скорости в вершинах ломаной (1). В угловых точках линейные скорости нулевые. В каждой неугловой точке выбираем наименьшую величину линейной скорости из двух максимально допустимых линейных скоростей на соединяемых звеньях.

2. Вычисляем по формуле (24) средние ускорения на каждом звене ломаной. Если хотя бы на одном звене среднее ускорение по модулю превышает допустимое $|\bar{w}| \leq W$, то необходимо снижать линейные скорости, заданные в п. 1. На участках недопустимого разгона (при $\bar{w} > W$) надо уменьшить конечную линейную скорость, на участках недопустимого торможения (при $\bar{w} < -W$) — начальную, чтобы получить равенство $|\bar{w}| = W$. Коррекцию участков разгона нужно проводить последовательно, начиная с первого, а участков торможения — начиная с последнего.
3. Увеличить скорость прохождения «медленных» участков, доводя модуль ускорения до максимально допустимого значения. Если на отрезке или дуге среднее ускорение меньше допустимого ($|\bar{w}| < W$), то на этом участке вместо постоянного ускорения \bar{w} нужно выполнить разгон–торможение по правилам (а) или (б), описанным в разд. 3.1 и 3.2. В результате получаем время движения и оптимальное управление на каждом звене ломаной.
4. В угловых точках выполняется поворот на месте. Время поворота и направление находятся согласно разд. 3.3.
5. Вычисляем минимальное время прохождения маршрута, складывая время движения по всем звеньям ломаной и время всех поворотов на месте.

Реализация предлагаемой методики решения не требует значительных вычислительных ресурсов. Время численного решения пропорционально числу звеньев ломаной (1).

5 Пример

Пусть на координатной плоскости Oxy заданы точки $A(1; 0)$, $B(2; 1)$ и $C(0; 1)$. Замкнутый маршрут $OABCO$ составлен из отрезков OA , BC и CO и дуги AB окружности с центром $(2; 0)$, составляющей $3\pi/2$ рад. На рис. 2 маршрут изображен полужирными линиями, направление движения указано стрелками, повороты в угловых точках A и C — дугами. Движение переключаемой модели описано в разд. 3. Максимально допустимые значения параметров: $V = 2,5$; $W = 1$; $\Omega = \pi$. Начальное состояние и конечное положение модели — нулевые: $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $v(0) = 0$; $\gamma(0) = 0$; $x(T) = 0$; $y(T) = 0$; $v(T) = 0$. Требуется найти наименьшее время T прохождения маршрута и соответствующее оптимальное управление, т. е. решить задачу быстродействия.

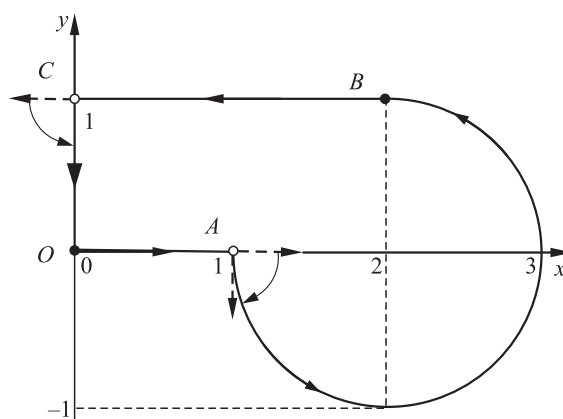


Рис. 2 Маршрут движения управляемого объекта

Составляем оптимальный процесс управления согласно методике, описанной в разд. 4.

1. Задаем нулевые линейные скорости в угловых точках $V_A = 0$ и $V_C = 0$, а также в начальной и конечной точке $V_O = 0$. Определяем скорость в точке B . Максимальная величина линейной скорости на дуге окружности $V_R = \min\{V, \Omega R\} = \min\{2,5; \pi\} = 2,5$. Максимальная линейная скорость на отрезке BC равна $V = 2,5$. Поэтому скорость в точке B такая же, т. е. $V_B = 2,5$.
2. Вычисляем по формуле (24) средние ускорения на участках движения: $\bar{w}_{OA} = 0$; $\bar{w}_{AB} = 25/(12\pi) < 1$; $\bar{w}_{BC} = -25/16 = -1,5625 < -1$; $\bar{w}_{CO} = 0$. На участке BC ускорение недопустимо. Поэтому снижаем скорость в точке B до значения $V_B = 2$. При этом ускорение на участке BC станет допустимым $\bar{w}_{BC} = -1$. Таким образом, после коррекции $V_B = 2$.
3. Увеличиваем скорость прохождения «медленных» участков, доводя модуль ускорения до максимально допустимого значения. На отрезках OA и OC среднее ускорение нулевое. По формуле (21) находим максимальную $v_\tau = 1$. Условие (26) выполняется. Следовательно, время движения на этих участках вычисляется по формуле (22), как в случае (б):

$$T_{OA} = T_{CO} = 2.$$

На дуге AB максимальная скорость $v_\tau = \sqrt{1,5\pi + 2}$. Эта величина больше $V = 2,5$. Поэтому оптимальное время вычисляем по формуле (23), как в случае (а):

$$T_{AB} = \frac{1}{2,5} (1,5\pi + 2 + 2,5^2 - 2,5 \cdot 2) = 0,6\pi + 1,3.$$

На отрезке BC максимальная скорость $v_T = 2 < V$. Поэтому время находим по формуле (22), как в случае (б): $T_{BC} = 2$. Добавляя время $T_A = T_C = 0,5$ двух поворотов в точках A и C , получаем

$$T = 2 + 0,5 + 0,6\pi + 1,3 + 2 + 0,5 + 2 = 8,3 + 0,6\pi.$$

Таким образом, минимальное время прохождения маршрута $T = 8,3 + 0,6\pi$. Оптимальное управление на участках OA , BC и CO соответствует случаю (б) в разд. 3.1, на AB — случаю (а) в разд. 3.2, повороты на месте в точках A и C — разд. 3.3.

6 Заключение

В работе поставлена и решена задача быстродействия управляемого объекта на заданном плоском маршруте, составленном из отрезков и дуг окружностей. Особенность маршрута заключается в наличии угловых точек, в которых объект управления поворачивает на месте. Адекватное математическое описание движения по такому маршруту получается в классе переключаемых систем. При этом охватывается широкий класс подвижных объектов — от гусеничных машин и роботов-доставщиков до мультикоптеров.

Применение разработанной методики возможно для решения логистических задач, связанных с комбинаторным выбором кратчайшего пути, например в задаче коммивояжера. Предложенный подход может служить основой для сравнения, верификации и анализа новых свойств в более сложных системах. Например, в задачах стабилизации и слежения в условиях стохастических возмущений [20–23] или для валидации приближенных алгоритмов, основанных на методах машинного обучения [24, 25], исследования которых в последнее время набирают все большую популярность.

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. 393 с.
2. Марков А. А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьковского математического общества. Сер. 2, 1889. Т. 1. № 6. С. 250–276.
3. Dubins L. E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Am. J. Math., 1957. Vol. 79. No. 3. P. 497–516. doi: 10.2307/2372560.
4. Бронштейн Е. М., Зелев П. А. Об оптимальной доставке грузов транспортным средством с учетом зависимости стоимости перевозок от загрузки транспортных средств по нескольким циклическим маршрутам // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 4. С. 53–57. doi: 10.14357/19922264140407. EDN: TFYRLX.
5. Babel L. Coordinated target assignment and UAV path planning with timing constraints // J. Intell. Robot. Syst., 2019. Vol. 94. No. 3–4. P. 857–869. doi: 10.1007/s10846-018-0910-9.
6. Буянов М. В., Иванов С. В., Кибзун А. И., Наумов А. В. Развитие математической модели управления грузоперевозками на участке железнодорожной сети с учетом случайных факторов // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 4. С. 85–93. doi: 10.14357/19922264170411. EDN: ZXWUPT.
7. Sussmann H. J. The Markov–Dubins problem with angular acceleration control // IEEE Decis. Contr. P., 1997. Vol. 3. P. 2639–2643. doi: 10.1109/CDC.1997.657778.
8. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематический обзор, 2002. Т. 90. С. 5–189.
9. Бердышев Ю. И. Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса // Тр. ИММ УрО РАН, 2016. Т. 22. № 1. С. 26–35. EDN: VPKYOZ.
10. Пацко В. С., Федотов А. А. Трехмерное множество достижимости для машины Дубинса: сведение общего случая ограничений на повороты к каноническому // Изв. РАН. ТиСУ, 2023. № 4. С. 25–49. doi: 10.31857/S0002338823030113.
11. Бердышев Ю. И. Нелинейные задачи последовательного управления и их приложения. — Екатеринбург: УрО РАН, 2015. 193 с.
12. Chen Z., Shima T. Shortest Dubins paths through three points // Automatica, 2019. Vol. 105. P. 368–375. doi: 10.1016/j.automatica.2019.04.007.
13. Бортаковский А. С., Урюпин И. В. Оптимизация маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий // Труды МАИ, 2020. Вып. 113. Ст. 14. 34 с. doi: 10.34759/trd-2020-113-17.
14. Isaacs J. T., Hespanha J. P. Dubins traveling salesman problem with neighborhoods: A graph-based approach // Algorithms, 2013. Vol. 6. No. 1. P. 84–99. doi: 10.3390/a6010084.
15. Бортаковский А. С. Оптимальные по быстродействию траектории плоского движения с неограниченной кривизной // Изв. РАН. ТиСУ, 2022. № 4. С. 38–48. doi: 10.31857/S0002338822040035.
16. Бортаковский А. С., Урюпин И. В. Быстродействие гибридной модели машин Дубинса с однократным раз-

- делением объектов управления // Изв. РАН. ТиСУ, 2024. № 1. С. 74–90. doi: 10.31857/S0002338824010063.
17. Liberzon D. Switching in systems and control. — Systems & control: Foundations & applications ser. — Boston, MA, USA: Birkhauser, 2003. Vol. 190. 233 p.
 18. Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. — М.: Изд-во МГУ, 2004. 168 с.
 19. Бортакровский А. С. Применение условий оптимальности для гибридных систем к задачам управления с фазовыми ограничениями // Проблемы математического анализа, 2025. Вып. 131. С. 5–19.
 20. Босов А. В. Управление линейным выходом марковской цепи по квадратичному критерию. Случай полной информации // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 19–26. doi: 10.14357/19922264220203. EDN: FEQKUN.
 21. Шнурков П. В. Решение задачи оптимального управления запасом непрерывного продукта в стохастической модели регенерации со случайными стоимостными характеристиками // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 48–56. doi: 10.14357/19922264230407. EDN: WHZRNY.
 22. Босов А. В. Управление линейным выходом автономной дифференциальной системы по квадратичному критерию на бесконечном горизонте // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 18–25. doi: 10.14357/19922264240103. EDN: UEESFO.
 23. Босов А. В. Стабилизация траектории линейной системы со скачкообразным дрейфом при целочисленных ограничениях на управление // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 3. С. 10–18. doi: 10.14357/19922264250302. EDN: YZEHCC.
 24. Danik Y., Dmitriev M. Symbolic Padé representation of stabilizing regulators for a class of nonlinear control systems with a parameter // Procedia Comput. Sci., 2021. Vol. 186. P. 154–160. doi: 10.1016/j.procs.2021.04.133.
 25. Diveev A., Sofronova E. Optimal control problem and its solution in class of feasible control functions by advanced model of control object // Mathematics, 2025. Vol. 13. Iss. 4. Art. 674. 17 p. doi: 10.3390/math13040674.

Поступила в редакцию 18.11.2025

Принята к публикации 15.02.2026

THE TIME-OPTIMAL PROBLEM FOR A SWITCHED MODEL OF A CONTROL PLANT ON A PLANAR ROUTE

A. S. Bortakovskii^{1,2} and I. V. Uryupin³

¹Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation

²National University of Science and Technology “MISIS,” 4 bld. 1 Leninskiy Prosp., Moscow 119049, Russian Federation

³Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper addresses the time-optimal control problem for a mobile object moving along a prescribed planar route. The route is defined as a continuous curve composed of standard segments (straight lines, circular arcs, etc.) and may contain nonsmooth junctions at angular points. During motion, the control system model undergoes changes (switches) due to differences in the equations of motion across distinct segment types. General constraints across the entire time-optimal problem include limits on linear velocity, linear acceleration, and angular velocity during turns. Due to these switches, the problem cannot be reduced to a classical time-optimal control formulation. A solution to the stated problem is derived in the article. The optimal control along the entire route is achieved through optimal traversal of all its standard segments. This requires maximizing the magnitude of linear velocity on each segment of bounded curvature and maximizing the magnitude of angular velocity during on-the-spot turns at angular points. The effectiveness of the proposed approach is validated through numerical simulations.

Keywords: switchable model; time-optimal problem; planar motion

DOI: 10.14357/19922264260103

EDN: XSPJAH

References

1. Pontryagin, L. S., V.G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. 1961. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Fizmatgiz. 393 p.
2. Markov, A. A. 1889. *Neskol'ko primerov resheniia osobogo roda zadach o naibol'shikh i naimen'shikh velich-*

- nakh [Some examples of the solution of a special kind of problem on greatest and least quantities]. *Soobshcheniya Khar'kovskogo matematicheskogo obshchestva. Ser. 2* [Communications of the Khar'kov Mathematical Society. Ser. 2] 1(6):250–276.
3. Dubins, L. E. 1957. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *Am. J. Math.* 79(3):497–516. doi: 10.2307/2372560.
 4. Bronstein, E. M., and P. A. Zelyov. 2014. Ob optimal'noy dostavke gruzov transportnym sredstvom s uchetom zavisimosti stoimosti perevozok ot zagruzki transportnykh sredstv po neskol'kim tsiklicheskim marshrutam [About optimum delivery of freights by the vehicle taking into account dependence of cost of transportations on loading of vehicles on several cyclic routes]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 8(4):53–57. doi: 10.14357/19922264140407. EDN: TFYRLX.
 5. Babel, L. 2019. Coordinated target assignment and UAV path planning with timing constraints. *J. Intell. Robot. Syst.* 94(3-4):857–869. doi: 10.1007/s10846-018-0910-9.
 6. Buyanov, M. V., S. V. Ivanov, A. I. Kibzun, and A. V. Naumov. 2017. Razvitie matematicheskoy modeli upravleniya gruzoperevozkami na uchastke zheleznodorozhnoy seti s uchetom sluchaynykh faktorov [Development of the mathematical model of cargo transportation control on a railway network segment taking into account random factors]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(4):85–93. doi: 10.14357/19922264170411. EDN: ZXWUPT.
 7. Sussmann, H. J. 1997. The Markov–Dubins problem with angular acceleration control. *IEEE Decis. Contr. P.* 3:2639–2643. doi: 10.1109/CDC.1997.657778.
 8. Zelikin, M. I., and V. F. Borisov. 2003. Optimal chattering feedback control. *J. Mathematical Sciences* 114:1227–1344. doi: 10.1023/A:1022082011808.
 9. Berdyshev, Yu. I. 2016. On the time-optimal control of a generalized Dubins car. *P. Steklov Inst. Math.* 295(1):S14–S22.
 10. Patsko, V. S., and A. A. Fedotov. 2023. Three-dimensional reachability set for a Dubins car: Reduction of the general case of rotation constraints to the canonical case. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 62(3):445–468. doi: 10.1134/s1064230723030115.
 11. Berdyshev, Yu. I. 2015. *Nelineynye zadachi posledovatel'nogo upravleniya i ikh prilozhenie* [Nonlinear problems in sequential control and their application]. Ekaterinburg: UrO RAN. 193 p.
 12. Chen, Z., and T. Shima. 2019. Shortest Dubins paths through three points. *Automatica* 105:368–375. doi: 10.1016/j.automatica.2019.04.007.
 13. Bortakovskii, A. S., and I. V. Uryupin. 2020. Optimizatsiya marshrutov nepreryvno-diskretnogo dvizheniya upravlyaemykh ob'ektov pri nalichii prep'yatstviy [Routes optimization of continuous-discrete movement of controlled objects in the presence of obstacles]. *Trudy MAI* [MAI Proceedings] 113:14. 34 p. doi: 10.34759/trd-2020-113-17.
 14. Isaacs, J. T., and J. P. Hespanha. 2013. Dubins traveling salesman problem with neighborhoods: A graph-based approach. *Algorithms* 6:84–99. doi: 10.3390/a6010084.
 15. Bortakovskii, A. S. 2022. Fastest planar motion trajectories with unlimited curvature. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 61(4):512–522. doi: 10.1134/s1064230722040037. EDN: VGGBLR.
 16. Bortakovskii, A. S., and I. V. Uryupin. 2024. Researching performance of the dubins vehicle's hybrid model with a single separation of the control objects. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 63(1):88–103. doi: 10.1134/S1064230724700072.
 17. Liberzon, D. 2003. *Switching in systems and control*. Systems & control: Foundations & applications ser. Boston, MA: Birkhauser. Vol. 190. 233 p.
 18. Milyutin, A. A., A. V. Dmitruk, and N. P. Osmolovskii. 2004. *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [Maximum principle in optimal control]. Moscow: MSU. 168 p.
 19. Bortakovskii, A. S. 2025. Application of optimality conditions for hybrid systems to control problems with phase constraints. *J. Mathematical Sciences* 294(2):105–123. doi: 10.1007/s10958-025-08085-5. EDN: WLYHLZ.
 20. Bosov, A. V. 2022. Upravlenie lineynym vykhodom markovskoy tsepi po kvadratischnomu kriteriyu. Sluchay polnoy informatsii [Linear output control of Markov chain by square criterion. Complete information case]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):19–26. doi: 10.14357/19922264220203. EDN: FEQKUN.
 21. Shnurkov, P. V. 2023. Reshenie zadachi optimal'nogo upravleniya zapasom nepreryvnogo produkta v stokhasticheskoy modeli regeneratsii so sluchaynymi stoimostnyimi kharakteristikami [Solution of the problem of optimal control of the stock of a continuous product in a stochastic model of regeneration with random cost characteristics]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):48–56. doi: 10.14357/19922264230407. EDN: WHZRNy.
 22. Bosov, A. V. 2024. Upravlenie lineynym vykhodom avtonomnoy differentsial'noy sistemy po kvadratischnomu kriteriyu na beskonechnom gorizonte [Autonomous differential system linear output control by square criterion on an infinite horizon]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):18–25. doi: 10.14357/19922264240103. EDN: UEESFO.
 23. Bosov, A. V. 2025. Stabilizatsiya traektorii lineynoy sistemy so skachkoobraznym dreyfom pri tselochislennykh ogranicheniyakh na upravlenie [Stabilization of the trajectory of a linear system with jumping drift under integer control constraints]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(3):10–18. doi: 10.14357/19922264250302. EDN: YZEHCC.
 24. Danik, Y., and M. Dmitriev. 2021. Symbolic Padé representation of stabilizing regulators for a class of nonlinear control systems with a parameter. *Procedia Comput. Sci.* 186:154–160. doi: 10.1016/j.procs.2021.04.133.

25. Diveev, A., and E. Sofronova. 2025. Optimal control problem and its solution in class of feasible control functions by advanced model of control object. *Mathematics* 13(4):674. 17 p. doi: 10.3390/math13040674.

Received November 18, 2025

Accepted February 15, 2026

Contributors

Bortakovskii Alexander S. (b. 1957) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; National University of Science and Technology “MISIS,” 4 bld. 1 Leninskiy Prosp., Moscow 119049, Russian Federation; asbortakov@mail.ru

Uryupin Ilya V. (b. 1993) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, junior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; uryupin93@yandex.ru

О ДИСПЕРСИОННО-СДВИГОВЫХ СМЕСЯХ НОРМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ КАК СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

В. Ю. Королев¹, Н. Р. Романюк²

Аннотация: Показано, что произвольная дисперсионно-сдвиговая смесь нормальных законов может быть стационарным распределением стохастического разностного уравнения — схемы авторегрессии первого порядка — со случайными коэффициентами. Приведен пример того, как могут выглядеть (случайные) коэффициенты дрейфа и диффузии для того, чтобы конкретная смесь была стационарным распределением. Показано, что одно и то же стационарное распределение может возникать при разных формах коэффициентов. В терминах близости коэффициентов приведены некоторые оценки близости распределений случайных последовательностей, задаваемых авторегрессией первого порядка. Показано, что стационарный режим процесса авторегрессии первого порядка со случайными коэффициентами обладает свойством устойчивости в том смысле, что малые отклонения функции распределения начального элемента авторегрессионной последовательности от стационарного распределения, соответствующего данным коэффициентам, гарантируют малые отклонения функции распределения величины остальных элементов последовательности от этого распределения.

Ключевые слова: стохастическое разностное уравнение; авторегрессия первого порядка со случайными коэффициентами; стационарное распределение; дисперсионно-сдвиговая смесь нормальных законов

DOI: 10.14357/19922264260104

EDN: ZSEJYN

1 Введение

Будем считать, что все случайные величины заданы на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Символ \circ обозначает произведение независимых случайных величин. Индикатор события (множества) B обозначается символом $\mathbb{I}(B)$. Стандартную нормальную функцию распределения обозначим $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Любую случайную величину с функцией распределения $\Phi(x)$ будем обозначать X . Очевидно, функция распределения случайной величины $\sigma X + a$, где $\sigma > 0$, $a \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$P(\sigma X + a < x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

В дальнейшем будем иметь дело с ситуацией, когда σ может быть равной нулю. В таком случае бу-

дем считать, что указанная функция распределения совпадает с индикатором множества (a, ∞) .

Рассмотрим последовательность случайных величин $\{Y_n\}_{n \geq 1}$, где Y_1 — некоторая случайная величина, а для $n \geq 1$ величины Y_n связаны рекуррентным соотношением (стохастическим разностным уравнением)

$$Y_{n+1} = Y_n + \alpha_{n+1}(Y_n) + \beta_{n+1}(Y_n) \circ X_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\alpha_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественная функция; $\beta_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — положительная функция для каждого $n \in \mathbb{N}$, а X_1, X_2, \dots — независимые случайные величины, имеющие одинаковое стандартное нормальное распределение. Соотношение (1) представляет собой частный случай процесса авторегрессии первого порядка со случайными коэффициентами.

Последовательности вида (1) рассматривались, например, в работах [1–3]. В указанных работах при весьма жестких условиях исследовались вопросы существования и единственности последователь-

*Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по Соглашению № 075-15-2025-345.

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский математический центр «Фундаментальная и прикладная математика», vkorolev@cs.msu.ru

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, nikita200993@gmail.com

ностей, удовлетворяющих (1), и наличия у этих решений марковского свойства. Статья [4] посвящена обсуждению некоторых условий существования нетривиального стационарного распределения для последовательности (1).

Очевидный пример существования стационарного распределения таков. Пусть $\gamma \in (0, 1)$. Предположим, что случайная величина Y_1 имеет стандартное нормальное распределение, $\alpha_n(u) = (\gamma - 1)u$ и $\beta_n(u) \equiv \sqrt{1 - \gamma^2}$, $u \in \mathbb{R}$, $n = 2, 3, \dots$. Тогда, как легко видеть, стационарным распределением последовательности $\{Y_n\}$ будет стандартное нормальное.

В статье [4] показано, что возможен и нетривиальный набор условий, при которых стационарным распределением последовательности $\{Y_n\}$ будет распределение Лапласа. В работе [5] показано, что стационарным распределением процесса (1) может быть произвольная масштабная смесь нормальных законов.

В недавней статье [6] замечено, что процессы авторегрессии со случайными коэффициентами типа (1) могут успешно описывать часто наблюдаемое явление аномальной диффузии, когда вроде бы есть все предпосылки того, чтобы наблюдаемый временной ряд представлял собой броуновское движение, однако распределения реально наблюдаемых приращений имеют более тяжелые хвосты, нежели имеющиеся у нормального (гауссова) закона, но убывающие не степенным образом, как у чисто аномальной диффузии (обусловленной отсутствием вторых моментов инкрементов), а экспоненциально, как у распределения Лапласа [6–10]. Поэтому исследование моделей процессов, обосновывающих наличие не-гауссовых распределений (в частности, лапласовских) у приращений наблюдаемых процессов наряду с практическим (физическим) представляет несомненный теоретический интерес.

Обозначим $P_n(x) = P(Y_n < x)$. Тогда из (1) вытекает, что

$$P_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - u - \alpha_{n+1}(u)}{\beta_{n+1}(u)}\right) dP_n(u). \quad (2)$$

Заметим, что в смеси (2) характеристики ядра — сдвиг и масштаб нормальной функции распределения — зависят от одного и того же параметра u , по которому проводится смешивание.

В 1970–1980-х гг. в работах О.-Е. Барндорф-Нильсена и его коллег [11–13] было введено понятие дисперсионно-сдвиговой смеси нормальных законов (normal variance-mean mixture) как довольно гибкого обобщения нормального распределения.

Пусть $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \sigma < \infty$, $G(x)$ — функция распределения, все точки роста которой сосредоточены на \mathbb{R}_+ . Дисперсионно-сдвиговой смесью нормальных законов называется функция распределения

$$F(x) = \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{x - \beta - \alpha z}{\sigma\sqrt{z}}\right) dG(z), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Обратим внимание, что в соотношении (3), как и в имеющей формально более общий вид смеси (2), смешивание также происходит одновременно и по параметру сдвига, и по параметру масштаба, но в (3) эти параметры связаны жесткой зависимостью, при которой параметры положения (*сдвига*) смешиваемых нормальных законов пропорциональны их *дисперсиям*. Именно поэтому смеси вида (3) называются *дисперсионно-сдвиговыми*.

Если X и U — независимые случайные величины с функциями распределения $\Phi(x)$ и $G(x)$ (при этом, очевидно, $P(U \geq 0) = 1$), а Y — случайная величина, удовлетворяющая соотношению

$$Y \stackrel{d}{=} \sigma X \circ \sqrt{U} + \alpha U + \beta,$$

то $P(Y < x) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Легко убедиться, что если $EU < \infty$, то

$$EY = \beta + \alpha EU,$$

а если при этом и $EU^2 < \infty$, то

$$EY^2 = \beta^2 + (\sigma^2 + 2\alpha\beta)EU + \alpha^2 EU^2;$$

$$DY = \alpha^2 DU + \sigma^2 EU.$$

Класс дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных законов очень широк. Модель (3) очень гибкая и позволяет описать практически любые распределения, представляющие реальный практический интерес, в том числе несимметричные (скошенные). В частности, вид (3) имеют обобщенные гиперболические и обобщенные дисперсионные гамма-распределения, успешно применяемые в самых разных областях, см., например, списки библиографии в [14] и [15]. В указанных работах приведена аргументация в пользу того, чтобы считать обобщенные гиперболические и обобщенные дисперсионные гамма-распределения *практически* универсальными моделями.

В настоящей статье результаты работы [5] будут распространены на произвольные дисперсионно-сдвиговые смеси нормальных законов и будет продемонстрировано, что произвольная дисперсионно-сдвиговая смесь нормальных законов может быть стационарным распределением стохастического разностного уравнения — схемы авторегрессии первого порядка — со случайными коэффициентами. Будет приведен пример того, как

должны выглядеть (случайные) коэффициенты дрейфа и диффузии для того, чтобы конкретная смесь была стационарным распределением.

2 Основные результаты

Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b \in (0, \infty)$, Z — произвольная невырожденная положительная случайная величина с функцией распределения $F_Z(x)$, $F_Z(0+) = 0$. Рассмотрим функцию распределения

$$F(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x-ay}{b\sqrt{y}}\right) dF_Z(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

где $a \in \mathbb{R}$, $0 < b < \infty$.

Покажем, что функция распределения (4) может быть стационарным распределением последовательности (1) при специальном выборе коэффициентов α_n и β_n .

Задача поиска стационарного распределения последовательности (1) сводится к следующей: найти функцию $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ и случайную величину Y (точнее, функцию распределения $F_Y(x) = P(Y < x)$) такие, что

$$Y \stackrel{d}{=} bX \circ \sqrt{g(Y)} + ag(Y)$$

или, что то же самое,

$$F_Y(x) \equiv \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x-ag(y)}{b\sqrt{g(y)}}\right) dF_Y(y).$$

Хорошо известно, что для любой положительной случайной величины Z существует последовательность дискретных (простых!) случайных величин $\{Z_n\}_{n \geq 1}$, сходящаяся к Z при $n \rightarrow \infty$ всюду. Примером такой последовательности может служить последовательность случайных величин, определяемых следующим образом:

$$Z_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}\left(\left\{\omega : \frac{k-1}{2^n} \leq Z(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\}\right) + n\mathbb{I}\{\omega : Z(\omega) \geq n\}, \quad \omega \in \Omega, n \geq 1$$

(см., например, [16]). Положим

$$p_1^{(n)} = P\left(0 < Z < \frac{1}{2^n}\right), \\ p_k^{(n)} = P\left(\frac{k-1}{2^n} \leq Z < \frac{k}{2^n}\right), \quad k = \overline{2, n2^n}, \\ p_{n2^n+1}^{(n)} = P(Z \geq n).$$

Обозначим

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x); \\ F_n(x) = P(bX \circ \sqrt{Z_n} + aZ_n < x).$$

Очевидно, что

$$F_n(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x-ay}{b\sqrt{y}}\right) dF_{Z_n}(y) = p_1^{(n)}\mathbb{I}(x > 0) + \\ + \sum_{k=2}^{n2^n} p_k^{(n)} \Phi\left(\frac{2^n x - a(k-1)}{2^{n/2} b \sqrt{k-1}}\right) + \\ + \left(1 - \sum_{k=1}^{n2^n} p_k^{(n)}\right) \Phi\left(\frac{x-an}{b\sqrt{n}}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть Y — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Функция распределения $F(x)$ непрерывна (абсолютно непрерывна) и монотонно возрастает, поэтому определена непрерывная и строго монотонная обратная функция $F^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$. Для каждого $n \geq 1$ введем множества

$$B_1^{(n)} = \{y : -\infty < y < F^{-1}(p_1^{(n)})\}, \\ B_k^{(n)} = \left\{y : F^{-1}(p_1^{(n)} + \dots + p_{k-1}^{(n)}) \leq y < F^{-1}(p_1^{(n)} + \dots + p_k^{(n)})\right\}, \quad k = \overline{2, n2^n}, \\ B_{n2^n+1}^{(n)} = \left\{y : y \geq F^{-1}(p_1^{(n)} + \dots + p_{n2^n}^{(n)})\right\}.$$

Легко проверить, что при каждом $n \geq 1$

$$B_k^{(n)} \cap B_m^{(n)} = \emptyset \text{ при } k \neq m \text{ и } \bigcup_{k=1}^{n2^n+1} B_k^{(n)} = \mathbb{R}.$$

Положим

$$g_n(y) = \frac{1}{2^n} \mathbb{I}(y \in B_1^{(n)}) + \\ + \sum_{k=2}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}(y \in B_k^{(n)}) + n\mathbb{I}(y \in B_{n2^n+1}^{(n)}), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Несложно видеть, что при каждом $n \geq 1$

$$F_n(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x-ay}{b\sqrt{y}}\right) dF_{Z_n}(y) = \\ = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x-ag_n(y)}{b\sqrt{g_n(y)}}\right) dF(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Остается доказать, что так как

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z\right) = 1,$$

то предел $g(y)$ существует, и если Y — случайная величина с функцией распределения $F(x)$, то $Z \stackrel{d}{=} g(Y)$ и

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{x - ag_n(y)}{b\sqrt{g_n(y)}}\right) dF(y) = \\ &= \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{x - ag(y)}{b\sqrt{g(y)}}\right) dF(y), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

С этой целью заметим, что в силу строгой монотонности функции F^{-1} при каждом $n \geq 1$ имеем: если $k < m$ и $0 < y_1 \in B_k^{(n)}$, $0 < y_2 \in B_m^{(n)}$, то $y_1 < y_2$ и $g_n(y_1) < g_n(y_2)$. Если же обе точки y_1 и y_2 лежат в каком-то одном из множеств $B_k^{(n)}$, то, очевидно, $g_n(y_1) = g_n(y_2)$, т.е. функция $g_n(y)$ не убывает при $y > 0$. Из определения функций $g_n(y)$ следует, что для любого фиксированного y (даже «сколь угодно близкого к $-\infty$ ») существует некоторое конечное $n_0 = n_0(y) > 1$ такое, что числовая последовательность $\{g_n(y)\}_{n \geq n_0}$ будет монотонно возрастающей.

Предположим, что существует конечное число $y \in \mathbb{R}$ такое, что $g_n(y) \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Но по определению функции $g_n(y)$ это возможно, только если $\inf_n \inf\{B_{n2^n}^{(n)} \cup B_{n2^n+1}^{(n)}\} < \infty$, для чего необходимо, чтобы существовало конечное число x_0 такое, что $F(x) = 1$ при $x \geq x_0$. Однако, будучи смесью нормальных законов, в которой смешивающее распределение не сосредоточено в нуле, функция распределения $F(x)$ такова, что $0 < F(x) < 1$ при любом $x \in (-\infty, \infty)$. Таким образом, в каждой точке $y \in (0, \infty)$ последовательность $g_n(y)$ ограничена. Следовательно, она имеет предел, т.е. предел (5) существует. Более того, поскольку $Z_n \stackrel{d}{=} g_n(Y)$ для любого n по построению и $Z_n \rightarrow Z$ с вероятностью единица, то

$$Z = \text{a. s. } \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \stackrel{d}{=} \text{a. s. } \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(Y) \stackrel{d}{=} g(Y).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой дисперсионно-сдвиговой смеси нормальных распределений (4) существует функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - ag(y)}{b\sqrt{g(y)}}\right) dF(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Замечание 1. Если в соотношении (4) функция распределения $F_Z(x)$ непрерывна и строго монотонна, то существует непрерывная и строго монотонная обратная функция F_Z^{-1} и введенная в (5) функция $g(y)$ имеет вид:

$$g(y) = F_Z^{-1}(F(y)), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Действительно, если Y — случайная величина с функцией распределения $F(x)$ (см. (4)), то случайная величина $F(Y)$ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$ и, следовательно, случайная величина $F_Z^{-1}(F(Y))$ имеет функцию распределения F_Z , т.е. $g(Y) \stackrel{d}{=} Z$.

Замечание 2. Поскольку $F(Y) \stackrel{d}{=} 1 - F(Y)$, функция $g^*(y) = F_Z^{-1}(1 - F(y))$, $y \in \mathbb{R}$, также обладает всеми свойствами функции $g(y)$, требуемыми в рассматриваемой задаче, т.е. $g(Y) \stackrel{d}{=} g^*(Y)$. Поэтому одному и тому же стационарному распределению могут соответствовать разные коэффициенты α_n и β_n . Более того, множества $B_k^{(n)}$ также можно выбирать по-разному. Таким образом, вообще говоря, однозначно восстановить коэффициенты α_n и β_n по распределению F нельзя. Однако, как известно, дисперсионно-сдвиговые смеси нормальных законов идентифицируемы (см., например, [14]). Поэтому, зная $F(x)$, можно однозначно восстановить смешивающее распределение $F_Z(u)$ в соотношении (4) или найти его аппроксимацию с помощью приближения $F(x)$ конечной смесью нормальных законов (см., например, [17]).

Теорема 2. Пусть функция распределения $F(x)$ имеет вид (4), в котором функция распределения F_Z непрерывна и строго монотонна. Предположим, что в соотношении (1) коэффициенты α_n и β_n имеют вид:

$$\alpha_n(u) = aF_Z^{-1}(F(u)) - u, \quad \beta_n(u) = b\sqrt{F_Z^{-1}(F(u))}, \\ u \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

Тогда функция распределения $F(x)$ соответствует стационарному распределению последовательности (1).

Пример 1. Рассмотрим несимметричное распределение Лапласа, функция распределения $L(x)$ которого имеет вид:

$$L(x) = \begin{cases} \frac{a_1}{a_1 + a_2} e^{a_2 x}, & x \leq 0; \\ 1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2} e^{-a_1 x}, & x > 0, \end{cases}$$

где a_1 и a_2 — конечные положительные числа. Можно убедиться, что для функции распределения $L(x)$ справедливо представление (4) с

$$a = \frac{a_2 - a_1}{2a_1a_2}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2a_1a_2}}$$

и $F_Z(z) = 1 - e^{-z}$, т.е.

$$L(x) = \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{2a_1a_2x - (a_2 - a_1)z}{\sqrt{2a_1a_2z}}\right) e^{-z} dz, \quad x \in \mathbb{R}$$

(см., например, [18, разд. 12.7.7]). Следуя сказанному в замечании 1, заключаем, что $L(x)$ соответствует стационарному распределению последовательности (1) с

$$\alpha_n(u) + u = \begin{cases} \frac{a_2 - a_1}{2a_1a_2} \ln\left(1 + \frac{a_1e^{a_2u}}{a_1 + a_2 - a_1e^{a_2u}}\right), & u \leq 0; \\ \frac{a_2 - a_1}{2a_1a_2} \ln\left(1 - \frac{a_2e^{-a_1u}}{a_1 + a_2 + a_2e^{-a_1u}}\right), & u > 0; \end{cases}$$

$$\beta_n(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2a_1a_2}} \sqrt{\ln\left(1 + \frac{a_1e^{a_2u}}{a_1 + a_2 - a_1e^{a_2u}}\right)}, & u \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2a_1a_2}} \sqrt{\ln\left(1 - \frac{a_1e^{-a_1u}}{a_1 + a_2 + a_2e^{-a_1u}}\right)}, & u > 0. \end{cases}$$

Случай симметричного распределения Лапласа ($a_1 = a_2 = 1$) подробно рассмотрен в работе [4].

Рассмотрим условия сходимости распределения $P_n(x) = P(Y_n < x)$ к стационарному распределению последовательности (1).

Лемма 1. Пусть $\alpha(u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\beta(u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — некоторая функция. Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sup_x \left| P_{n+1}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x - \alpha(u)}{\beta(u)}\right) dP_n(u) \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \frac{|Y_n + \alpha_{n+1}(Y_n) - \alpha(Y_n)|}{\beta(Y_n)} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \mathbb{E} \left| \max\left\{ \frac{\beta_{n+1}(Y_n)}{\beta(Y_n)}, \frac{\beta(Y_n)}{\beta_{n+1}(Y_n)} \right\} - 1 \right|. \end{aligned}$$

Доказательство. Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} \left| P_{n+1}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x - \alpha(u)}{\beta(u)}\right) dP_n(u) \right| &= \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - u - \alpha_{n+1}(u)}{\beta_{n+1}(u)}\right) dP_n(u) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x - \alpha(u)}{\beta(u)}\right) dP_n(u) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - u - \alpha_{n+1}(u)}{\beta_{n+1}(u)}\right) dP_n(u) - \right. \\ &\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x - u - \alpha_{n+1}(u)}{\beta(u)}\right) dP_n(u) \right| + \\ &+ \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - u - \alpha_{n+1}(u)}{\beta(u)}\right) dP_n(u) - \right. \\ &\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x - \alpha(u)}{\beta(u)}\right) dP_n(u) \right| \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2. \quad (6) \end{aligned}$$

Обозначим $y = y(x, u) = x - u - \alpha_{n+1}(u)$. С помощью неравенства (3.3) из книги [19, с. 143] получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Phi\left(\frac{y}{\beta_{n+1}(u)}\right) - \Phi\left(\frac{y}{\beta(u)}\right) \right| dP_n(u) \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \max\left\{ \frac{\beta_{n+1}(u)}{\beta(u)}, \frac{\beta(u)}{\beta_{n+1}(u)} \right\} - 1 \right| dP_n(u) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \mathbb{E} \left| \max\left\{ \frac{\beta_{n+1}(Y_n)}{\beta(Y_n)}, \frac{\beta(Y_n)}{\beta_{n+1}(Y_n)} \right\} - 1 \right|. \quad (7) \end{aligned}$$

Рассмотрим I_2 . С помощью неравенства (3.4) из книги [19, с. 143] получаем

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Phi\left(\frac{y}{\beta(u)}\right) - \right. \\ &\left. - \Phi\left(\frac{y + u + \alpha_n(u) - \alpha(u)}{\beta(u)}\right) \right| dP_n(u) \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u + \alpha_{n+1}(u) - \alpha(u)|}{\beta(u)} dP_n(u) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \frac{|Y_n + \alpha_{n+1}(Y_n) - \alpha(Y_n)|}{\beta(Y_n)}. \quad (8) \end{aligned}$$

Теперь утверждение леммы следует из (7), (8) и (6). Лемма доказана.

Замечание 3. Из доказательства леммы 1 вытекает, что справедлива более грубая оценка

$$\begin{aligned} \sup_x \left| P_{n+1}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \left(\frac{x - \alpha(u)}{\beta(u)} \right) dP_n(u) \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_u \frac{|u + \alpha_{n+1}(u) - \alpha(u)|}{\beta(u)} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \sup_u \left| \max \left\{ \frac{\beta_{n+1}(u)}{\beta(u)}, \frac{\beta(u)}{\beta_{n+1}(u)} \right\} - 1 \right|. \end{aligned}$$

Эта оценка менее устойчива по отношению к поведению хвостов распределений случайных величин Y_n , так как приписывает одинаковую важность всем возможным значениям этих случайных величин независимо от их вероятностей (сколь бы малыми эти вероятности ни были).

В качестве $\alpha(u)$ и $\beta(u)$, фигурирующих в лемме 1, рассмотрим функции $\alpha(u) = ag(u)$ и $\beta(u) = b\sqrt{g(u)}$ и предположим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{|Y_n + \alpha_{n+1}(Y_n) - ag(Y_n)|}{b\sqrt{g(Y_n)}} = 0; \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \max \left\{ \frac{\beta_{n+1}(Y_n)}{b\sqrt{g(Y_n)}}, \frac{b\sqrt{g(Y_n)}}{\beta_{n+1}(Y_n)} \right\} - 1 \right| = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что условия (9) и (10) вытекают из более сильных условий

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{|u + \alpha_n(u) - ag(u)|}{b\sqrt{g(u)}} &= 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \max \left\{ \frac{\beta_n(u)}{b\sqrt{g(u)}}, \frac{b\sqrt{g(u)}}{\beta_n(u)} \right\} - 1 \right| &= 0. \end{aligned}$$

Замечание 4. Очевидно, что если условие (10) выполнено, то условие (9) эквивалентно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{|Y_n + \alpha_{n+1}(Y_n) - ag(Y_n)|}{\beta_{n+1}(Y_n)} = 0,$$

которое, естественно, вытекает из более сильного условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{|u + \alpha_n(u) - ag(u)|}{\beta_n(u)} = 0.$$

Теорема 3. Пусть Z — произвольная положительная случайная величина с функцией распределения $F_Z(x)$. Рассмотрим функцию распределения F , определяемую соотношением (4). Пусть $g(u)$ — функция, построенная в соответствии с алгоритмом, описанным выше. Предположим, что выполнены условия (9) и (10) и для каждого $x \in \mathbb{R}$ существует предел

$$P_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x).$$

Тогда масштабная смесь нормальных законов с функцией распределения (4) является стационарным распределением последовательности (1), т. е. $P_\infty = F$.

Доказательство непосредственно вытекает из условий (9), (10) и леммы 1 с $\alpha(u) \equiv ag(u)$ и $\beta(u) \equiv b\sqrt{g(u)}$.

Пусть $F(x)$ — дисперсионно-сдвиговая смесь нормальных законов, задаваемая формулой (4). Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sup_x |P_n(x) - F(x)|; \\ \delta_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_u \frac{|u + \alpha_{n+1}(u) - ag(u)|}{b\sqrt{g(u)}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \sup_u \left| \max \left\{ \frac{\beta_{n+1}(u)}{b\sqrt{g(u)}}, \frac{b\sqrt{g(u)}}{\beta_{n+1}(u)} \right\} - 1 \right|. \end{aligned}$$

Теорема 4. Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\Delta_{n+1} \leq \delta_{n+1} + \Delta_n.$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2 в [4].

Замечание 5. Предположим, что $\delta_n = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из теоремы 2 вытекает, что $\Delta_n \leq \Delta_1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, при $\alpha_n(u) \equiv ag(u) - u$ и $\beta_n(u) \equiv b\sqrt{g(u)}$ стационарный режим процесса Y_n обладает устойчивостью: малые отклонения функции распределения случайной величины Y_1 от функции распределения (4) гарантируют малые отклонения функции распределения величины Y_n от функции распределения (4) при любом n .

Литература

1. Donati-Martin C. Equations differentielles stochastiques dans \mathbb{R} avec conditions aux bords // Stochastics Stochastics Reports, 1991. Vol. 35. Iss. 3. P. 143–173. doi: 10.1080/17442509108833697.
2. Nualart D., Pardoux E. Boundary value problems for stochastic differential equations // Ann. Probab., 1991. Vol. 19. No. 3. P. 1118–1144. doi: 10.1214/aop/1176990337.
3. Ferrante M., Nualart D. On the Markov property of a stochastic difference equation // Stoch. Proc. Appl., 1994. Vol. 52. Iss. 2. P. 239–250. doi: 10.1016/0304-4149(94)90027-2.
4. Belyaev K. P., Korolev V. Yu., Romanjuk N. R. On the Laplace distribution as a stationary distribution for the stochastic difference equation with random coefficients // Lobachevskii J. Mathematics, 2025. Vol. 46. Iss. 6. P. 2748–2757. doi: 10.1134/S1995080225608161. EDN: FWUGTV.
5. Королев В. Ю., Романюк Н. Р. О стационарных распределениях стохастического разностного уравне-

- ния со случайными коэффициентами // Вестник Московского университета. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2025. Вып. 3. С. 42–45. doi: 1055959/MSU/0137-0782-15-2025-49-3-42-45. EDN: MFGQIP.
6. Ślęzak J., Burnecki K., Metzler R. Random coefficient autoregressive processes describe Brownian yet non-Gaussian diffusion in heterogeneous systems // *New J. Phys.*, 2019. Vol. 21. Art. 073056. 18 p. doi: 10.1088/1367-2630/ab3366.
 7. Wang B., Anthony S., Bae S., Granick S. Anomalous yet Brownian // *P. Natl. Acad. Sci. USA*, 2009. Vol. 106. No. 36. Art. 15160-4. doi: 10.1073/pnas.0903554106.
 8. Harper S., Crawford J. W., Young I. M. Anomalous diffusion of heterogeneous populations characterized by normal diffusion at the individual level // *J. R. Soc. Interface*, 2009. Vol. 6. No. 30. P. 111–122. doi: 10.1098/rsif.2008.0261.
 9. Wang B., Kuo J., Bae S., Granick S. When Brownian diffusion is not Gaussian // *Nat. Mater.*, 2012. Vol. 11. P. 481–485. doi: 10.1038/nmat3308.
 10. Bhattacharya S., Sharma D., Saurabh S., De S., Sain A., Nandi A., Chowdhury A. Plasticization of poly(vinylpyrrolidone) thin films under ambient humidity: Insight from single-molecule tracer diffusion dynamics // *J. Phys. Chem. B*, 2013. Vol. 117. P. 7771–7782. doi: 10.1021/jp401704e.
 11. Barndorff-Nielsen O. E. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size // *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.*, 1977. Vol. 353. P. 401–419. doi: 10.1098/rspa.1977.0041.
 12. Barndorff-Nielsen O. E. Hyperbolic distributions and distributions of hyperbolae // *Scand. J. Stat.*, 1978. Vol. 5. No. 3. P. 151–157.
 13. Cherstvy A. G., Nagel O., Beta C., Metzler R. Non-Gaussianity, population heterogeneity, and transient superdiffusion in the spreading dynamics of amoeboid cells // *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2018. Vol. 20. No. 35. P. 23034–23054. doi: 10.1039/c8cp04254c.
 14. Королев В. Ю. Обобщенные гиперболические распределения как предельные для случайных сумм // *Теория вероятностей и её применения*, 2013. Т. 58. Вып. 1. С. 117–132. doi: 10.4213/tvp4496. EDN: RLSFET.
 15. Закс Л. М., Королев В. Ю. Обобщенные дисперсионные гамма-распределения как предельные для случайных сумм // *Информатика и её применения*, 2013. Т. 7. Вып. 1. С. 105–115. EDN: QCJCQT.
 16. Ширяев А. Н. *Вероятность*. — М.: Наука, 1989. 640 с.
 17. Карпов К., Королев В., Sukhareva N. Statistical separation of mixtures in the problem of reconstruction of the coefficients of an Itô stochastic process-type model of interplanetary magnetic flux density: ℓ_2 -distance minimization vs likelihood maximization // *Russ. J. Numer. Anal. M.*, 2025. Vol. 40. No. 1. P. 17–31. doi: 10.1515/rnam-2025-0002. EDN: GVGOKO.
 18. Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я. *Математические основы теории риска*. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2011. 620 с. EDN: UGLGSX.
 19. Петров В. В. *Суммы независимых случайных величин*. — М.: Наука, 1972. 416 с.

Поступила в редакцию 09.12.2025

Принята к публикации 15.02.2026

ON NORMAL VARIANCE-MEAN MIXTURES AS STATIONARY DISTRIBUTIONS OF A STOCHASTIC DIFFERENCE EQUATION WITH RANDOM COEFFICIENTS

V. Yu. Korolev^{1,2,3} and N. R. Romanyuk¹

¹Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

²Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

³Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract: It is shown that an arbitrary normal variance-mean mixture can be a stationary distribution of a stochastic difference equation (that is, in the first-order autoregressive scheme) with random coefficients. An example is presented of what the random drift and diffusion coefficients should look like in order that a specified mixture is a stationary distribution. It is demonstrated that one and the same stationary distribution can occur with different forms of the coefficients. In terms of the closeness of coefficients, some estimates are presented for the closeness of the distributions of random autoregressive sequences of the first order. It is also shown that the stationary mode of

the first-order autoregressive process with random coefficients possesses the property of stability in the sense that small deviations of the distribution of the initial term of the autoregressive sequence from the stationary distribution corresponding to the given coefficients guarantee small deviations of the distributions of the rest terms of the sequence from this distribution.

Keywords: stochastic difference equation with random coefficients; first-order autoregression with random coefficients; stationary distribution; normal variance-mean mixture

DOI: 10.14357/19922264260104

EDN: ZSEJYN

Acknowledgments

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the Agreement No. 075-15-2025-345

References

1. Donati-Martin, C. 1991. Equations différentielles stochastiques dans \mathbb{R} avec conditions aux bords. *Stochastics Stochastics Reports* 35(3):143–173. doi: 10.1080/17442509108833697.
2. Nualart, D., and E. Pardoux. 1991. Boundary value problems for stochastic differential equations. *Ann. Probab.* 19(3):1118–1144. doi: 10.1214/aop/1176990337.
3. Ferrante, M., and D. Nualart. 1994. On the Markov property of a stochastic difference equation. *Stoch. Proc. Appl.* 52(2):239–250. doi: 10.1016/0304-4149(94)90027-2.
4. Belyaev, K. P., V. Yu. Korolev, and N. R. Romanyuk. 2025. On the Laplace distribution as a stationary distribution for the stochastic difference equation with random coefficients. *Lobachevskii J. Mathematics* 46(6):2748–2757. doi: 10.1134/S1995080225608161. EDN: FWUGTV.
5. Korolev, V. Yu., and N. R. Romanyuk. 2025. On stationary distributions of a stochastic random difference equation. *Moscow University Computational Mathematics Cybernetics* 49(3):216–219. doi: 10.3103/S027864192570013X. EDN: GJEINW.
6. Ślęzak, J., K. Burnecki, and R. Metzler. 2019. Random coefficient autoregressive processes describe Brownian yet non-Gaussian diffusion in heterogeneous systems. *New J. Phys.* 21:073056. 18 p. doi: 10.1088/1367-2630/ab3366.
7. Wang, B., S. Anthony, S. Bae, and S. Granick. 2009. Anomalous yet Brownian. *P. Natl. Acad. Sci. USA* 106(36):15160–4. 5 p. doi: 10.1073/pnas.0903554106.
8. Hapca, S., J. W. Crawford, and I. M. Young. 2009. Anomalous diffusion of heterogeneous populations characterized by normal diffusion at the individual level. *J. R. Soc. Interface* 6(30):111–122. doi: 10.1098/rsif.2008.0261.
9. Wang, B., J. Kuo, S. Bae, and S. Granick. 2012. When Brownian diffusion is not Gaussian. *Nat. Mater.* 11(6):481–485. doi: 10.1038/nmat3308.
10. Bhattacharya, S., D. Sharma, S. Saurabh, S. De, A. Sain, A. Nandi, and A. Chowdhury. 2013. Plasticization of poly(vinylpyrrolidone) thin films under ambient humidity: Insight from single-molecule tracer diffusion dynamics. *J. Phys. Chem. B* 117:7771–7782. doi: 10.1021/jp401704e.
11. Barndorff-Nielsen, O. E. 1977. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.* 353:401–419. doi:10.1098/rspa.1977.0041.
12. Barndorff-Nielsen, O. E. 1978. Hyperbolic distributions and distributions of hyperbolae. *Scand. J. Stat.* 5(3):151–157.
13. Cherstvy, A. G., O. Nagel, C. Beta, and R. Metzler. 2018. Non-Gaussianity, population heterogeneity, and transient superdiffusion in the spreading dynamics of amoeboid cells. *Phys. Chem. Chem. Phys.* 20(35):23034–23054. doi: 10.1039/c8cp04254c.
14. Korolev, V. Yu. 2014. Generalized hyperbolic laws as limit distributions for random sums. *Theor. Probab. Appl.* 58(1):63–75. doi: 10.1137/S0040585X97986400.
15. Zaks, L. M., and V. Yu. Korolev. 2013. Obobshchennye dispersionnyye gamma-raspredeleniya kak predel'nye dlya sluchaynykh summ [Generalized variance-gamma distributions as limit laws for random sums]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 7(1):105–115. EDN: QCJCQT.
16. Shiryaev, A. N. 1996. *Probability*. 2nd ed. Berlin – New York: Springer. 623 p.
17. Karpov, K., V. Korolev, and N. Sukhareva. 2025. Statistical separation of mixtures in the problem of reconstruction of the coefficients of an Itô stochastic process-type model of interplanetary magnetic flux density: ℓ_2 -distance minimization vs likelihood maximization. *Russ. J. Numer. Anal. M.* 40(1):17–31. doi: 10.1515/rnam-2025-0002. EDN: GVGOKO.
18. Korolev, V. Yu., V. E. Bening, and S. Ya. Shorgin. 2011. *Matematicheskie osnovy teorii riska* [Mathematical foundations of risk theory]. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit. EDN: UGLGSX.
19. Petrov, V. V. 1975. *Sums of independent random variables*. New York, NY: Springer. 348 p. doi:10.1007/978-3-642-65809-9.

Received December 9, 2025

Accepted February 15, 2026

Contributors

Korolev Victor Yu. (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, head of department, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44- 2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; vkorolev@cs.msu.su

Romanyuk Nikita R. (b. 1993) — PhD student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; nikita200993@gmail.com

МЕТОДЫ ПОРОЖДЕНИЯ МЕТРИК НА МНОЖЕСТВАХ ОБЪЕКТОВ В КОНТЕКСТЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АНАЛИЗА ДАННЫХ. ЧАСТЬ 1. МЕТРИКИ НА ОСНОВЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ЗНАЧЕНИЯМИ ПРИЗНАКОВ

И. Ю. Торшин¹

Аннотация: Метрические функции расстояния на множествах объектов широко используются в различных алгоритмах машинного обучения. Порождение таких метрик для каждой конкретной прикладной задачи представляет собой нетривиальную проблему. Как правило, исследователи ограничиваются перебором известных эмпирических метрик и в ряде случаев настройкой параметров таковых. В настоящей работе сформулированы несколько теоретических направлений, разрабатываемых в контексте топологической теории анализа данных (ТТАД). Эти направления включают использование метрик на основе расстояний между значениями признаков, многомерных пространств, следствий теоремы П. С. Урысона о погружении, решетки комбинаций значений признаков. В рамках предлагаемых теоретических построений становится возможной систематизация порождения проблемно-ориентированных метрик на множествах объектов (ρ_Q -метрик). Представлены результаты систематического анализа теоретического направления, связанного с использованием метрик на множествах значений признаков (ρ_L -метрик) для определения ρ_Q -метрик. Экспериментальное тестирование различных ветвей предлагаемого формализма планируется представить в последующих публикациях.

Ключевые слова: топологический анализ данных; функции расстояния на объектах; алгебраический подход к конструированию алгоритмов; теория анализа значений признаков

DOI: 10.14357/19922264260105

EDN: ZTDPJO

1 Введение

Важное направление интеллектуального анализа данных (ИАД) — разработка и практическое применение методов, основанных на измерении расстояния между объектами, исследуемыми в соответствующих задачах распознавания, классификации, прогнозирования и др. Очевидно, что результат работы таких алгоритмов в существенной мере зависит от качества используемых функций расстояния (которые зачастую являются метриками). Поэтому систематизация подходов к порождению и настройке метрик на множествах объектов, хоть и носит вспомогательный характер, остается задачей с существенной теоретической и практической ценностью.

В настоящей работе изучение способов введения метрик на объектах проводится методами ТТАД, развиваемой в контексте алгебраического подхода к распознаванию научной школы академиков РАН Ю. И. Журавлёва и К. В. Рудакова [1, 2]. Подход ТТАД [3–5] основан на применении методов различных разделов дискретной математики (топология, теория решеток, алгебра логики, теория категорий и др.) к различным задачам ИАД. В рамках алгебраического подхода ТТАД разрабатывает-

ся совместно со смежным направлением, теорией классификации значений признаков [3].

В ТТАД систематически проработаны методы порождения и настройки метрик на значениях признаков. На основе теоремы о регулярности и нормальности топологических пространств был проведен анализ возможностей метризации пространства значений признаков [5, 6], результаты которого существенно дополняют теорию локальных и универсальных ограничений [7] с точки зрения практических приложений.

В то же время в повседневной практике ИАД гораздо чаще используются метрики, оценивающие расстояния между объектами в множестве исходных описаний объектов X (ρ_Q -метрики), а не между значениями признаков (ρ_L -метрики). Общеизвестным употреблением ρ_Q -метрик стали алгоритмы типа k -ближайших соседей и более сложные вариации этих алгоритмов, практическую ценность которых для решения конкретных прикладных задач трудно оспорить [8].

Как правило, используемые в практике ИАД ρ_Q -метрики носят эмпирический характер и не отличаются существенной степенью теоретической проработки. Поэтому систематизация воз-

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, itorshin@frccsc.ru

можных подходов к порождению проблемно-ориентированных ρ_Q -метрик и к настройке их параметров характеризуется и теоретической, и практической значимостью. В цикле работ, который начинается с настоящей статьи, планируется проведение теоретико-экспериментальных исследований ρ_Q -метрик в ТТАД.

2 Основные перспективы введения метрик на множествах объектов в рамках топологического подхода

Напомним базовую терминологию ТТАД [3–6]. Множество *исходных описаний* объектов $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_{N_0}\}$, $\mathbf{X} \subseteq S$. Функции $\Gamma_k : S \rightarrow \mathbf{I}_k$ ($\mathbf{I}_k = \{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots, \lambda_{k_b}, \dots\}$ — множество значений признака) вычисляют значения *элементарных признаков* объектов, так что описанию $x_i \in \mathbf{X}$ сопоставлен объект $q_i = D(x_i)$, $D(x_i) = (\Gamma_1(x_1) \times \dots \times \Gamma_k(x_i) \times \dots \times \Gamma_{n+l}(x_i))_\Delta$, $k = \overline{1, n+l}$, n — число признаков, l — число целевых переменных ($\Gamma_t(x)$), $t = \overline{n+1, n+l}$, так что $Q = \varphi(\mathbf{X}) = \{D(x_i) | x_i \in \mathbf{X}\}$. Множества $\{\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x))\}$ формируют предбазу топологии $T(\mathbf{X})$. При условии регулярности \mathbf{X}/Q по Журавлёву ($\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{X})) = \mathbf{X}$) топологии $T(\mathbf{X})$ изоморфны множеству элементов булевой решетки $L(T(\mathbf{X}))$ и подмножеству точек метрического пространства значений признаков $M_L(L(T(\mathbf{X})), \rho_L)$, $\rho_L : L^2 \rightarrow R^+$.

В настоящей серии статей планируется теоретическая и экспериментальная проработка нескольких фундаментально различных подходов к порождению ρ_Q -метрик на основе: (I) ρ_L -метрик для измерения расстояний между множествами $\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_i))$; (II) многомерного пространства; (III) анализа следствий теоремы П. С. Урысона о погружении [9]; (IV) рассмотрения решетки комбинаций значений признаков $Lf(T(\mathbf{X}))$. В настоящей статье представлены результаты анализа первого подхода.

3 Подход I: порождение ρ_Q -метрик посредством ρ_L -метрик

Данный подход представляется наиболее естественным в контексте уже разработанных элементов формализма ТТАД. В самом деле, для исходных описаний объектов $x_i, x_j \in \mathbf{X}$ в проблемной области посредством функций Γ_k задаются элементарные признаковые описания объектов $q_i = D(x_i)$, $q_j = D(x_j)$. При регулярности \mathbf{X}/Q

функции полного прообраза $\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_i))$ проецируют объекты q_i и q_j в решетку $L(T(\mathbf{X}))$ так, что каждый из объектов однозначно описан уникальным набором из n множеств $\Gamma(x_i) = \{\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_i))\}$, $\Gamma(x_j) = \{\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_j))\}$.

Вследствие общего индекса k каждому из множеств $\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_i))$ однозначно сопоставлено множество $\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_j))$. Поэтому расстояние ρ_Q между объектами можно рассматривать как функционал от массива n расстояний $\rho_L(x_i, x_j) = \{\rho_{L\vec{v}}(\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_i)), \Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_j))), k = \overline{1, n}\}$, где \vec{v} — набор значений параметров ρ_L -метрики. Методы введения проблемно-ориентированных ρ_L -метрик были детально проработаны ранее в контексте анализа следствий теоремы о регулярности и нормальности [6] с использованием общей топологии [10] и теории решеток [11]; эмпирические методы введения описаны в работе [12].

При подходе к вычислению ρ_Q посредством $\rho_{L\vec{v}}$ для $x_i, x_j \in \mathbf{X}$ заданы множества $\Gamma(x_i)$ и $\Gamma(x_j)$ и вычислен массив расстояний $\rho_L(x_i, x_j)$, $|\Gamma(x_i)| = |\Gamma(x_j)| = |\rho_L(x_i, x_j)| = n$. Параметрические функционалы $\rho_{Q\vec{w}} : L^n \rightarrow [0..1]$ различаются: (1) учетом порядка элементарных признаков; (2) диапазоном сопоставления элементов $\Gamma(x_i)$ и $\Gamma(x_j)$ (поэлементное либо попарное).

4 Функционалы для вычисления ρ_Q без учета порядка элементарных признаков

Порядок признаков в функционале ρ_Q либо не учитывается, либо учитывается, что дает два комплементарных исследовательских направления. В двух следующих разделах рассмотрено направление, которое обозначим как I.1: признаки Γ_k не различаются по порядку, т. е. перестановка любой пары признаков не меняет значение функционала ρ_Q . Данное направление, соответствующее симметрическим универсальным ограничениям [7], можно условно назвать *коммутативным учетом элементарных признаков*.

5 Функционалы ρ_Q с коммутативным учетом элементарных признаков и с поэлементным сопоставлением множеств в $\Gamma(x_i)$ и $\Gamma(x_j)$

В рамках этого подхода при вычислении ρ_Q расстояния $\rho_{L\vec{v}}$ вычисляются только между эле-

ментами множеств $\Gamma(x_i)$ и $\Gamma(x_j)$ с одинаковыми значениями k с образованием массива расстояний $\rho_L(x_i, x_j)$. Различия в формируемых таким образом функционалах обусловлены способами учета весов элементарных признаков w_k и способами «агрегации» элементарных признаков. Наиболее очевидным подходом представляется использование аддитивных (квазилинейных) моделей с корректирующей операцией:

$$\rho_{Q\bar{w}}(x_i, x_j) = f_\theta \left(\sum_{k=1}^n w_k \rho_{L\bar{v}}(\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_i)), \Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_j))) \right), \quad (1)$$

где f_θ — модуль суммы, сумма квадратов, квадратный корень из суммы квадратов, та или иная элементарная функция, опорные функции (в виде полиномов над различными базисами) и др. Простейший случай — булевы Γ_k .

Теорема 1. Если все элементарные признаки Γ_k булевы, то при любой ρ_L при линейной f_θ в выражении (1) получаемая таким образом $\rho_{Q\bar{w}}(x_i, x_j)$ эквивалентна взвешенной метрике Хэмминга.

Доказательство проводится на основании аксиом метрики.

Следствие 1. Если все Γ_k -признаки булевы, то все различия между ρ_Q обусловлены только выбором весов и f_θ , но не ρ_L .

Следствие 2. Если хоть один из Γ_k -признаков не булев, то выбор ρ_L дает нетривиальный эффект на значения ρ_Q (число значений расстояния между соответствующими множествами $\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(\lambda_{kb}))$ превышает 2).

Следствие 3. Если в ρ_Q для каждого k своя ρ_L , то произвольный выбор ρ_L для k -й позиции соответствует тому или иному выбору весов во взвешенной метрике Хэмминга.

Теорема 1 со следствиями не только указывает на взаимосвязь функционалов вида (1) с уже известными метриками на пространстве объектов, но и указывает на полезность функционалов (1) для более сложных случаев — разнородных признаков описаний.

Выражение (1) также интересно тем, что линейризуемые f_θ (включая полиномиальные определения f_θ над различными базисами) делают возможной настройку весов ρ_Q -метрики по заданной экспертной метрике посредством процедур наподобие метода наименьших квадратов.

Другой способ агрегации ρ_L -расстояний в списке расстояний $\rho_L(x_i, x_j)$ — введение соответствующих эмпирических функций распределения

(ЭФР) [13]. Для множества чисел A определим ЭФР $\hat{\Phi}(x)A = \sup |\{B \subseteq A | \forall \beta \in B : \beta \leq x\}| / n$, $x \in R$ (кратко — $\hat{\Phi}A$); функцию плотности обозначим $\hat{\phi}A$. Определив оператор вычисления математического ожидания $\hat{\mu}$, оператор стандартного отклонения $\hat{\sigma}$ [1], вычислим $\hat{\mu}\hat{\Phi}\rho_L(x_i, x_j)$, $\hat{\sigma}\hat{\Phi}\rho_L(x_i, x_j)$, другие моменты, значения ЭФР $\hat{\Phi}(x)\rho_L(x_i, x_j)$ и $\hat{\phi}(x)\rho_L(x_i, x_j)$ при разных x , которые могут быть использованы для порождения ρ_Q -функционалов: в частности, в квазилинейной форме, подобной (1). Например, $\hat{\mu}\hat{\Phi}\rho_L(x_i, x_j)$ — частный случай функционала с одинаковыми весами элементарных признаков (1).

Более сложные варианты порождения $\rho_{Q\bar{w}}$ с коммутативным учетом Γ_k и с поэлементным сопоставлением $\Gamma(x_i)$ и $\Gamma(x_j)$ могут и не использовать список $\rho_L(x_i, x_j)$. Например, ρ_Q -метрика может быть введена на основе коммутативных синтетических числовых признаков $\Gamma_{k'}$, прогнозирующих для объектов x_i и x_j значения Γ_t по наборам множеств $\Gamma(x_i)$, $\Gamma(x_j)$ [6]. Метрика ρ_Q вводится через разность значений $\Gamma_{k'}(x_i)$ и $\Gamma_{k'}(x_j)$ с функцией f_θ в виде модуля или квадрата:

$$\rho_{Q\bar{w}}(x_i, x_j) = f_\theta(\Gamma_{k'}(x_i) - \Gamma_{k'}(x_j)). \quad (2)$$

Поскольку цепи регулярной решетки $L(T(\mathbf{X}))$ соответствуют произвольным последовательностям линейно упорядоченных объектов множества \mathbf{X} , то такие функционалы по построению являются метриками [13].

6 Функционалы ρ_Q с коммутативным учетом элементарных признаков и с попарным сопоставлением множеств из $\Gamma(x_i)$ и $\Gamma(x_j)$

Выше были рассмотрены подходы к порождению ρ_Q посредством поэлементного сопоставления множеств в массивах $\Gamma(x_i)$ и $\Gamma(x_j)$. Альтернативой служит попарное сопоставление множеств из массивов $\Gamma(x_i)$ и $\Gamma(x_j)$, т.е. для порождения ρ_Q рассматриваются все пары расстояний $\rho_{L12}(x_i, x_j) = \{\rho_L(\Gamma_{k_1}^{-1}(\Gamma_{k_1}(x_i)), \Gamma_{k_2}^{-1}(\Gamma_{k_2}(x_j))), k_1, k_2 = \overline{1, n}\}$. Для любого x_i также определен список расстояний $\rho_{L12}(x_i) = \{\rho_L(\Gamma_{k_1}^{-1}(\Gamma_{k_1}(x_i)), \Gamma_{k_2}^{-1}(\Gamma_{k_2}(x_i))), k_1 = \overline{1, n-1}; k_2 = \overline{k_1+1, n}\}$, отражающий «взаимодействия» между значениями признаков.

Список ρ_{L12} можно использовать для порождения ρ_Q в той же манере, как и при поэлементном сопоставлении множеств $\Gamma(x_i)$ и $\Gamma(x_j)$, а именно:

заменяя список $\rho_L(x_i, x_j)$ в выражении (1) на список $\rho_{L12}(x_i, x_j)$, получаем новую разновидность ρ_Q . Заменяя $\hat{\Phi}(x)\rho_L(x_i, x_j)$ на $\hat{\Phi}(x)\rho_{L12}(x_i, x_j)$, можно использовать все предложенные выше варианты порождения ρ_Q .

ρ_Q -расстояние между объектами q_i, q_j может быть определено и как функционал от списков $\rho_{L12}(x_i)$ и $\rho_{L12}(x_j)$. В частности, для применения полуэмпирических метрик на векторах (корреляционное расстояние, угол между векторами и др.) списки расстояний $\rho_{L12}(x_i)$ и $\rho_{L12}(x_j)$ могут рассматриваться как векторы. Вычисление ЭФР $\hat{\Phi}(x)\rho_{L12}(x_i)$ и $\hat{\Phi}(x)\rho_{L12}(x_j)$ сопоставляет каждому объекту соответствующую ЭФР, что позволяет определять ρ_Q посредством полуэмпирических и настраиваемых «универсальных» расстояний между функциями (метрики Золотарёва, Круглова, Бурби–Рао и др.) [6, 11].

7 Функционалы для вычисления ρ_Q с учетом порядка элементарных признаков

При некоммутативном учете Γ_k (направлении I.2) признаки Γ_k различаются по порядку, т. е. перестановка любой пары признаков в общем случае должна приводить к изменению значения ρ_Q между парой объектов. Некоммутативный учет признаков представляет собой аналог функциональных универсальных ограничений в категориальном подходе К. В. Рудакова [7]. Порождение метрик в рамках этого подхода имеет смысл, когда множества $\Gamma_{k_1}^{-1}(\Gamma_{k_1}(x_i))$ формируются для объектов особой структуры, при которой определен порядок элементарных признаков. Наглядный пример — символичные последовательности в биоинформатике и в анализе текстов; определенный порядок признаков возникает при анализе изображений и сигналов.

Порождение ρ_Q -метрик типа I.2 может проводиться как посредством поэлементного сопоставления множеств из $\Gamma(x_i)$ и $\Gamma(x_j)$ (прежде всего с использованием массива расстояний $\rho_L(x_i, x_j)$), так и попарным сопоставлением множеств из $\Gamma(x_i)$ и $\Gamma(x_j)$ (на основе массивов расстояний $\rho_{L12}(x_i, x_j)$, $\rho_{L12}(x_i)$ и $\rho_{L12}(x_j)$). К соответствующим массивам расстояний применяется n -арная, n^2 -арная или $n(n-1)$ -арная функция \mathbf{f}_θ , так что $\rho_Q(x_i, x_j) = \mathbf{f}_\theta(\rho_L(x_i, x_j))$, $\rho_Q(x_i, x_j) = \mathbf{f}_\theta(\rho_{L12}(x_i, x_j))$ и др. Некоммутативность функционала для ρ_Q подразумевает несимметричность функции \mathbf{f}_θ . Некоммутативными могут быть и синтетические признаки в (2).

К данной разновидности порождения ρ_Q можно отнести реализации \mathbf{f}_θ нейросетями различной архитектуры посредством полиномов различных степеней и другие корректирующие операции «нижнего уровня» (т. е. прилагаемые к расстояниям, однозначно сопоставляемым с конкретными элементарными признаками Γ_k или с их попарными комбинациями). Такие реализации ρ_Q -метрик требуют особого контроля обобщающей способности соответствующих алгоритмов распознавания/классификации [14].

Естественным ограничением всех рассмотренных способов определения ρ_Q -метрик выступает требование выполнимости аксиом метрики. В ряде случаев (например, для (2)) метрические свойства очевидны, в некоторых случаях могут быть продемонстрированы аналитически. В общем случае доказать локальные метрические свойства возможно посредством комбинаторного тестирования неравенства треугольника и других аксиом метрики на конкретных множествах прецедентов.

8 Заключение

Сформулированы четыре фундаментальных направления развития соответствующих теорий для определения метрик на множествах объектов посредством (1) ρ_L -метрик, (2) многомерных пространств различной природы, (3) анализа следствий теоремы П. С. Урысона о погружении и (4) решетки комбинаций значений признаков. Детально разобрано первое направление, в рамках которого предложены ρ_Q -функционалы с коммутативным/некоммутативным учетом элементарных признаков при поэлементном/попарном сопоставлении элементов решетки $L(T(\mathbf{X}))$. Проведение соответствующих вычислительных экспериментов планируется в последующих статьях.

Литература

1. Журавлёв Ю. И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов, часть I // Кибернетика, 1977. № 4. С. 5–17.
2. Журавлёв Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики, 1978. Вып. 33. С. 5–68.
3. Torshin I. Y., Rudakov K. V. On the theoretical basis of metric analysis of poorly formalized problems of recognition and classification // Pattern Recognition Image Analysis, 2015. Vol. 25. No.4. P. 577–587. doi: 10.1134/S1054661815040252. EDN: UWEXTB.
4. Торшин И. Ю. О порождении синтетических признаков на основе опорных цепей и произвольных метрик в рамках топологического подхода к анализу данных. Часть 1. Включение в формализм эмпирических функций расстояния // Информатика

- и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 71–77. doi: 10.14357/19922264240110. EDN: RIVOXR.
5. Торшин И. Ю. Метризация дискретных топологических пространств в контексте теории решеток. Часть 2. Практический анализ следствий теоремы о регулярности и нормальности // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 2. С. 55–62. doi: 10.14357/19922264250207. EDN: JTNKFQ.
 6. Торшин И. Ю. Метризация дискретных топологических пространств в контексте теории решеток. Часть 1. О нормальности пространств // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 82–88. doi: 10.14357/19922264250111. EDN: SAWKMO.
 7. Рудаков К. В. О симметрических и функциональных ограничениях для алгоритмов классификации // Докл. Акад. наук СССР, 1987. Т. 297. Вып. 1. С. 43–46.
 8. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. H. The elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction. — New York, NY, USA: Springer, 2009. 745 p. doi: 10.1007/978-0-387-84858-7.
 9. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в общую теорию множеств и функций. — М.: ГИТТЛ, 1948. 308 с.
 10. Munkres J. R. Topology. — 2nd ed. — Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, Inc., 2000. 537 p.
 11. Биркгоф Г. Теория решеток / Пер. с англ. В. Н. Са-лий. — М.: Наука, 1984. 566 с. (Birkhoff G. Lattice theory. — 3rd ed. — AMS colloquium publications ser. — Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 1967. Vol. 25. 418 p.)
 12. Деца Е. И., Деца М. М. Энциклопедический словарь расстояний / Пер. с англ. — М.: Наука, 2008. 444 с. (Deza E. I., Deza M. M. Dictionary of distances. — Amsterdam, Netherlands: North-Holland, Elsevier, 2006. 412 p. doi: 10.1016/B978-0-44452087-6.X5000-8.)
 13. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — 6-е изд. — М.: Наука, 1989. 624 с.
 14. Воронцов К. В. Комбинаторная теория надежности обучения по прецедентам: Дис. . . . докт. физ.-мат. наук. — М.: ВЦ РАН, 2010. 271 с.

Поступила в редакцию 13.12.2025

Принята к публикации 15.02.2026

METHODS FOR GENERATING METRICS ON OBJECT SETS IN THE CONTEXT OF THEORY OF TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS. PART 1. METRICS BASED ON DISTANCES BETWEEN FEATURE VALUES

I. Yu. Torshin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Distance metrics on object sets are widely used in various machine learning algorithms. However, generating such metrics for specific application tasks is a nontrivial challenge. Typically, researchers are limited to selecting from established empirical metrics and, in some cases, fine-tuning their parameters. The paper proposes several theoretical approaches developed within the context of topological data analysis. These approaches include metrics derived from distances between feature values, analysis of multidimensional spaces, the implications of Urysohn’s embedding theorem, and the introduction of a lattice of feature combinations. The proposed framework enables the systematic generation of problem-oriented metrics on object sets (ρ_Q -metrics). The paper presents a rigorous analysis of the theoretical transition from metrics on feature value sets (ρ_L -metrics) to α -metrics. Experimental validation of the various branches of the proposed formalism is deferred to future publications.

Keywords: topological data analysis; distance functions on objects; algebraic approach to algorithm design; theory of feature value analysis

DOI: 10.14357/19922264260105

EDN: ZTDPJO

References

1. Zhuravlev, Yu. I. 1977. Correct algebras over sets of incorrect (heuristic) algorithms. I. *Cybernetics* 13(4):483–494.
2. Zhuravlev, Yu. I. 1978. Ob algebraicheskom podkhode k resheniyu zadach raspoznavaniya i klassifikatsii [On the algebraic approach to solving recognition and classification tasks]. *Problemy kibernetiki* [Problems of Cybernetics] 33:5–68.
3. Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2015. On the theoretical basis of metric analysis of poorly formalized problems of recognition and classification. *Pat-*

- tern *Recognition Image Analysis* 25(4):577–587. doi: 10.1134/S1054661815040252. EDN: UWEXTB.
4. Torshin, I. Yu. 2024. O porozhdenii sinteticheskikh priznakov na osnove opornykh tsepey i proizvol'nykh metrik v ramkakh topologicheskogo podkhoda k analizu dannykh. Chast' 1. Vkluchenie v formalizm empiricheskikh funktsiy rasstoyaniya [On the generation of synthetic features based on support chains and arbitrary metrics within a topological approach to data analysis. Part 1. Inclusion of empirical distance functions into the formalism]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):71–77. doi: 10.14357/19922264240110. EDN: RIVOXR.
 5. Torshin, I. Yu. 2025. Metrizatsiya diskretnykh topologicheskikh prostranstv v kontekste teorii reshetok. Chast' 2. Prakticheskiy analiz sledstviy teoremy o regul'yarnosti i normal'nosti [Metrization of discrete topological spaces in the context of lattice theory. Part 2. Practical analysis of the consequences of the theorem on regularity and normality]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(2):55–62. doi: 10.14357/19922264250207. EDN: JTNKFQ.
 6. Torshin, I. Yu. 2025. Metrizatsiya diskretnykh topologicheskikh prostranstv v kontekste teorii reshetok. Chast' 1. O normal'nosti prostranstv [Metrization of discrete topological spaces in the context of lattice theory. Part 1. On the normality of spaces]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 19(1):82–88. doi: 10.14357/19922264250111. EDN: CAWKMO.
 7. Rudakov, K. V. 1988. Symmetric and functional constraints for classification algorithms. *Soviet Mathematics Doklady* 36(3):428–431.
 8. Hastie, T., R. Tibshirani, and J. H. Friedman. 2009. *The elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction*. New York, NY: Springer. 745 p. doi: 10.1007/978-0-387-84858-7.
 9. Aleksandrov, P. S., and A. N. Kolmogorov. 1948. *Vvedenie v obshchuyu teoriyu mnozhestv i funktsiy* [Introduction to the general theory of sets and functions]. Moscow: GITTL. 308 p.
 10. Munkres, J. R. 2000. *Topology*. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc. 537 p.
 11. Birkhoff, G. 1967. *Lattice theory*. 3rd ed. AMS colloquium publications ser. Providence, RI: American Mathematical Society. Vol. 25. 418 p.
 12. Deza, E. I., and M. M. Deza. 2006. *Dictionary of distances*. Amsterdam, Netherlands: North-Holland, Elsevier. 412 p. doi: 10.1016/B978-0-44452087-6.X5000-8.
 13. Kolmogorov, A. N., and S. V. Fomin. 1989. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. 6th ed. Moscow: Nauka. 624 p.
 14. Vorontsov, K. V. 2010. *Kombinatornaya teoriya nadezhnosti obucheniya po pretsedentam* [Combinatorial theory of reliability of precedents-based learning]. D.Sc. Diss. Moscow: VC RAN. 271 p.

Received December 13, 2025

Accepted February 15, 2026

Contributor

Torshin Ivan Y. (b. 1972) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, Candidate of Science (PhD) in chemistry, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str, Moscow 119333, Russian Federation; itorshin@frcsc.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА ФАЗЫ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В СИСТЕМАХ ИНТЕРНЕТА ВЕЩЕЙ*

А. В. Дараселия¹, К. А. Левкович², Э. С. Сопин³, Ш. Пракаш⁴, В. О. Бегишев⁵

Аннотация: Разработана математическая модель функционирования сотового интернета вещей (Cellular Internet-of-Things, CIoT) систем массового межмашинного взаимодействия (massive Machine-Type Communications, mMTC), предназначенная для анализа фазы передачи данных. Фаза случайного доступа рассматривается как механизм формирования входного потока и детально не исследуется. Основное внимание уделяется описанию процессов обслуживания восходящего и нисходящего трафика на фазе передачи данных с учетом ограниченных частотно-временных ресурсов. Модель учитывает асинхронную генерацию пакетов IoT-устройствами, а также поступление нисходящего трафика в виде групповых обновлений программного обеспечения (ПО). Для анализа используется марковская модель с дискретным временем, позволяющая получить стационарные характеристики системы. На основе аналитических выражений рассчитывается среднее число пакетов в системе, средняя задержка передачи и коэффициент загрузки ресурсов. Численные результаты демонстрируют чувствительность задержек к параметрам трафика и показывают, что фиксированное распределение ресурсов между фазами обслуживания приводит к снижению эффективности. Полученные выводы обосновывают необходимость адаптивного распределения ресурсов в CIoT-сетях стандартов 5G/6G.

Ключевые слова: 5G; 6G; mMTC; CIoT; передача данных; задержка; выделение ресурсов

DOI: 10.14357/19922264260106

EDN: ANNNCT

1 Введение

Системы 5G/6G должны поддерживать три категории услуг: расширенную мобильную широкополосную связь (Enhanced Mobile Broadband, eMBB), сверхнадежную связь с малой задержкой (Ultra Reliable Low Latency Communications, URLLC) и массовое межмашинное взаимодействие (mMTC). Рынок сотового интернета вещей (CIoT), относящегося к категории mMTC-услуг, активно растет, что сопровождается появлением новых отраслевых сценариев с более жесткими требованиями к задержкам и надежности связи по сравнению с существующими классическими mMTC-системами [1]. Современные «умные» оконечные устройства (ОУ) должны поддерживать не только асинхронную передачу данных в восходящем направлении, но и регулярное получение обновлений ПО в нисходящем направлении, что предъявляет высокие требования к гибкости планирования ресурсов в канале.

В качестве технологической основы для mMTC сегодня используются стандарты узкополосно-

го интернета вещей (Narrowband IoT, NB-IoT) и LTE-M (Long-Term Evolution for Machines), которые реализуют двухэтапную процедуру обслуживания устройств: фазу случайного доступа и фазу передачи данных [2]. На фазе передачи данных применяется ортогональное частотное мультиплексирование с множественным доступом (OFDMA, Orthogonal Frequency Division Multiple Access) для обслуживания как восходящего, так и нисходящего трафика. Ключевым элементом, определяющим производительность фазы случайного доступа систем mMTC, становится протокол случайного доступа, тогда как влияние других параметров развертывания сети и моделей поведения пользователей, как правило, менее существенно [3–6].

Обзор литературы показывает, что большинство исследований сфокусировано на анализе только одной из фаз. В частности, для протокола случайного доступа многоканальная ALOHA, используемого в NB-IoT, известно, что оптимальная вероятность передачи, обеспечивающая наилучшую производительность, обратно пропорциональна числу активных ОУ [7], для которого предложены различ-

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-19-00804, <https://rscf.ru/project/24-19-00804/>.

¹ Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, daraselia-av@rudn.ru

² Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, 1142240199@rudn.ru

³ Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, sopin-es@rudn.ru

⁴ Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, 1042225181@rudn.ru

⁵ Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, begishev-vo@rudn.ru

ные аппроксимации [8, 9]. Применительно к NB-IoT показано, что пакетный характер поступлений снижает пропускную способность, а для смешанных потоков были получены оценки средней задержки. Также разработаны адаптивные алгоритмы настройки параметров случайного доступа и аналитические методы оценки суммарной задержки [10–12].

Ряд работ посвящен исследованию пропускной способности, совместному развертыванию LTE и NB-IoT [13], совместному анализу фаз доступа и передачи данных для систем на базе IEEE 802.16 и других архитектур [14], а также методам распределения ресурсов и обеспечения совместной работы mMTC и сервисов для абонентов [15]. Схожая задача распределения ресурсов возникает в сети радиодоступа пятого поколения «Новое радио» (5G New Radio, 5G NR), в частности ресурсов физического канала управления нисходящего канала связи и канала передачи данных [16] и ресурсов, выделяемых на восходящую и нисходящую передачу при оценке средней задержки доставки пакета [17]. При этом в литературе отсутствуют комплексные исследования, учитывающие обе фазы для сценариев с «умными» ОУ, которым необходимо получать обновления ПО в нисходящем направлении.

Таким образом, из представленного выше обзора видно, что ранее либо рассматривались модели mMTC без динамики поступления, либо их анализировали в рамках только одной из фаз.

В предыдущей работе авторов данной статьи [18] была предпринята попытка заполнить этот пробел, однако при анализе фазы передачи данных были искусственно введены ограничения на максимальное число пакетов. Вклад данной статьи заключается в устранении указанного искусственного ограничения за счет более детального и точного моделирования фазы передачи данных. Кроме того, предлагается метод нахождения стационарных характеристик эффективности обслуживания в этих условиях.

2 Модель системы

В данном разделе представлена модель системы, описывающая процесс генерации и обслуживания трафика с сетях CIoT, а также структуру распределения частотно-временных ресурсов между фазами случайного доступа и передачи данных.

Рассматривается сота, передача данных для которой осуществляется в пределах доступной полосы частот B и в кадрах длительностью Δ секунд. Каждый кадр делится на две последовательные фазы — случайного доступа и передачи данных. На фазе

передачи данных используется OFDMA, а совокупный частотно-временной ресурс $B\Delta$ выражается в единицах ресурсов (РЕ), каждая из которых соответствует временному интервалу, необходимому для передачи одного пакета.

На фазе случайного доступа организовано n_1 каналов, в каждом из которых предусмотрены l преамбул, так что общее их число равно $L = ln_1$. Каждое ОУ выбирает одну из преамбул случайным образом. Если несколько ОУ выбрали одну и ту же преамбулу, то возникает коллизия и передача откладывается до следующего кадра. Если больше никакое ОУ не выбрало эту же преамбулу, ОУ успешно завершает процедуру случайного доступа, после чего его пакеты поступают в очередь на передачу в фазе передачи данных и обслуживаются по дисциплине FCFS (First Come, First Served). На фазе передачи данных доступно W ресурсных единиц.

Рассматриваются два типа трафика. Поток первого типа генерируется ОУ, передающими пакеты в восходящем направлении. Поскольку ОУ функционируют асинхронно и требует одну РЕ, данный поток можно описать пуассоновским процессом с интенсивностью λ_r . Поток второго типа генерируется центром управления и поступает в нисходящем направлении. Он представляет собой смесь обновлений ПО и управляющей информации, использующих исключительно ресурсы фазы передачи данных. Поступление этого типа трафика описывается с помощью группового пуассоновского потока с интенсивностью λ_d , где вероятность поступления k групп пакетов за один кадр выражается как

$$\gamma_k = \frac{(\lambda_d \Delta)^k}{k!} e^{-\lambda_d \Delta},$$

а размер группы имеет распределение $\{l_k\}$, $k > 0$. Средний размер группы обозначается как $\bar{l} < \infty$.

В данной работе исследование будет сосредоточено на фазе передачи данных.

3 Описание модели фазы передачи данных

Для описания системы на фазе передачи данных рассматривается цепь Маркова (ЦМ) D_n (рис. 1). В каждом кадре k пакетов восходящей линии связи поступают с фазы случайного доступа с вероятностью θ_k , а s групп пакетов в нисходящем направлении поступают непосредственно в фазу передачи данных с вероятностью γ_s , при этом число пакетов в группе определяется рядом распределения l_r и за каждый кадр может быть передано не более W пакетов.

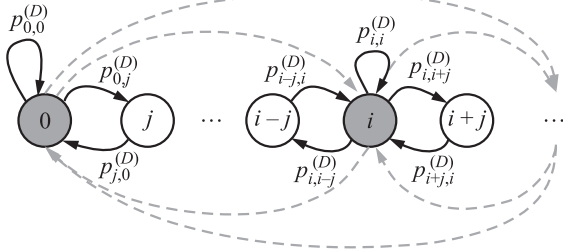


Рис. 1 Часть диаграммы переходов модели фазы дискретного времени

Отметим, что существуют два типа событий, которые могут вызвать переход состояния на фазе передачи данных:

- (1) поступление пакетов по восходящей линии от ОУ, успешно прошедших фазу случайного доступа;
- (2) поступление групп пакетов по нисходящей линии.

Для вычисления переходных вероятностей рассмотрим общий случай, когда оба события происходят одновременно. Предположим, что система находится в состоянии i , а в следующем кадре переходит в состояние j . Пусть с фазы случайного доступа поступили k пакетов, а по нисходящей линии — s групп, которые в сумме содержат r пакетов. Если $i \leq W$, в текущем кадре могут быть переданы все i пакетов из очереди. Следовательно, $r = j - k$. Если $i > W$, за кадр можно передать не более W пакетов, поэтому в очереди останутся $i - W$ пакетов. Следовательно, $r = j - i + W - k$. Учитывая описанные случаи, переходные вероятности на фазе передачи данных $p_{i,j}^{(D)} = P\{D_{n+1} = j | D_n = i\}$ можно представить в следующем виде:

$$p_{i,j}^{(D)} = \begin{cases} \sum_{k=0}^j \theta_k \sum_{s=0}^{j-k} \gamma_s l_{j-k}^{(s)}, & 0 \leq i < W, j \geq 0; \\ \sum_{k=0}^{j-i+W} \theta_k \sum_{s=0}^{j-i+W-k} \gamma_s l_{j-i+W-k}^{(s)}, & i \geq W, j \geq i - W, \end{cases} \quad (1)$$

где $l_i^{(s)}$ — вероятность того, что s групп всего содержат i пакетов; эти вероятности вычисляются как s -кратная свертка исходного распределения $\{l_j\}$.

С учетом переходных вероятностей (1) уравнения равновесия принимают вид:

$$q_k^{(D)} = \sum_{j=0}^{k+W} q_j^{(D)} p_{j,k}^{(D)}, \quad k \geq 0. \quad (2)$$

Дополнив систему (2) соответствующим условием нормировки, ее можно решить стандартными методами решения систем линейных уравнений, такими как итерационный метод Гаусса–Зейделя. Однако вычислительная сложность, связанная с решением системы (2), остается высокой для реалистичных чисел ОУ, которые должны поддерживаться системами mMTC. Для обеспечения вычислительно выполнимого решения используется метод производящих функций (ПФ).

Пусть $L(z)$ — ПФ распределения числа пакетов в группе, поступающей в нисходящем направлении, $\Theta(z)$ — ПФ распределения числа ОУ, успешно прошедших фазу случайного доступа, $Q(z)$ — ПФ стационарного распределения ЦМ $\{D_n\}$. Подставляя выражения (1) в (2), получаем, что ПФ $Q(z)$ имеет следующий вид:

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(D)} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{s=0}^{W-1} q_s^{(D)} \sum_{i=0}^k \theta_i \sum_{j=0}^{k-i} \gamma_j l_{k-i}^{(j)} + \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{s=W}^{k+W} q_s^{(D)} \sum_{i=0}^{k+W-s} \theta_i \sum_{j=0}^{k+W-s-i} \gamma_j l_{k+W-s-i}^{(j)}. \quad (3)$$

Утверждение 1. Производящая функция $Q(z)$ стационарного распределения ЦМ D_n имеет вид:

$$Q(z) = \frac{\sum_{n=0}^{W-1} q_n^{(D)} (z^W - z^n)}{(z^W e^{\lambda_d \Delta(1-L(z))} - \Theta(z)) / \Theta(z)}. \quad (4)$$

Доказательство приведено в приложении.

3.1 Метод расчета стационарных вероятностей на фазе передачи данных

Производящая функция (4) аналогична ПФ из [19] для системы $M|G|n|_{\infty}$, поэтому среднее число пакетов на фазе передачи можно найти аналогично. Поскольку ПФ аналитична внутри круга $z < 1$, то внутри круга $z < 1$ числитель и знаменатель (4) обращаются в ноль в одних и тех же точках.

Согласно теореме Руше, если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны внутри области D , ограниченной замкнутым контуром, непрерывны вплоть до границы D и на границе удовлетворяют условию $|f(z)| > |g(z)|$, то функции $f(z)$ и $f(z) - g(z)$ имеют одинаковое число нулей в области D с учетом кратности. Положим

$$f(z) = z^W e^{\lambda_d \Delta(1-L(z))}; \quad g(z) = \Theta(z).$$

Тогда $|f(z)| > |g(z)|$ на окружности $|z| = 1$, за исключением точки $z = 1$, в которой достигается равенство. Кроме того, производная $f(z) - g(z)$ в точке $z = 1$ имеет вид $W - \lambda_d \Delta L'(1) - \Theta'(1)$, что больше 0 в стационарном режиме. Поэтому найдется такое $\epsilon_1 > 0$, что для любого $0 < \epsilon < \epsilon_1$ выполнено неравенство

$$z^W e^{\lambda_d \Delta(1-L(z))} > \Theta(z)$$

для всех z , лежащих на окружности $|z| = 1 + \epsilon$. Но тогда в силу теоремы Руше число нулей функции $z^W e^{\lambda_d \Delta(1-L(z))} - \Theta(z)$ внутри круга $|z| = 1 + \epsilon$ (а в силу произвольности ϵ внутри круга $|z| \leq 1$) совпадает с числом нулей $z^W e^{\lambda_d \Delta(1-L(z))}$. Функция $z^W e^{\lambda_d \Delta(1-L(z))}$ имеет корень $z = 0$ кратности W . Единственный корень, лежащий на окружности $|z| = 1$, очевидно, $z_0 = 1$. Таким образом, необходимо определить все $W - 1$ решений (5), лежащих внутри круга $|z| < 1$:

$$z^W e^{\lambda_d \Delta(1-L(z))} - \Theta(z) = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь числитель (4). Так как $Q(z)$ аналитична внутри круга $|z| < 1$, то числитель (4) также обращается в ноль в точках z_1, \dots, z_{W-1} , и тем самым получаем $W - 1$ линейных уравнений для определения $q_i^{(D)}$, $i = \overline{0, W-1}$, а именно:

$$\sum_{n=0}^{W-1} q_n^{(D)} (z_i^W - z_i^n) = 0, \quad i = \overline{1, W-1}.$$

Отметим, что последний корень $z_0 = 1$ для $q_i^{(D)}$, $i = \overline{0, W-1}$, несуществен, поскольку при подстановке его в числитель (4) получается очевидное тождество. Используя правило Лопитала, получаем последнее уравнение в виде

$$\sum_{n=0}^{W-1} q_n^{(D)} \frac{W-n}{W - \lambda_d \Delta L'(1) - \Theta'(1)} = 1, \quad (6)$$

где

$$\Theta'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \theta_k = \bar{\theta}; \quad L'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k l_k = \bar{l}.$$

Однако при больших значениях W численное нахождение всех W корней трансцендентного уравнения (5) представляет существенную сложность. Поэтому предлагается иной метод вычисления стационарных вероятностей.

Более тщательный анализ вероятностей перехода $p_{i,j}^{(D)}$ (1) показывает, что все они могут быть выражены через одномерное распределение b_j , где

b_j — вероятность того, что ровно j новых пакетов поступает в одном кадре на фазе передачи данных:

$$b_j = \sum_{k=0}^j \theta_k \sum_{i=0}^{j-k} \gamma_{i,j-k}^{(i)}.$$

Тогда матрицу переходных вероятностей $\mathbf{P}^{(D)}$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{P}^{(D)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \dots \\ \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots \\ 0 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где размерность всех блочных матриц равна $W \times W$ и

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} b_{iW} & b_{iW+1} & \dots & b_{(i+1)W-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{iW} & b_{iW+1} & \dots & b_{(i+1)W-1} \end{pmatrix}, \quad i \geq 0;$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{W-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{W-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} b_{iW} & b_{iW+1} & \dots & b_{(i+1)W-1} \\ b_{iW-1} & b_{iW} & \dots & b_{(i+1)W-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{(i-1)W+1} & b_{(i-1)W+2} & \dots & b_{iW} \end{pmatrix}, \quad i \geq 1.$$

Из представления матрицы переходных вероятностей (7) следует, что она относится к классу матриц типа $M/G/1$. Ключевым шагом при вычислении стационарного распределения вероятностей для такого типа ЦМ становится вычисление матрицы \mathbf{G} , которая представляет собой минимальное неотрицательное решение следующего нелинейного матричного уравнения:

$$\mathbf{G} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}_i \mathbf{G}^i.$$

Для вычисления матрицы \mathbf{G} используется MAMSolver. Зная матрицу \mathbf{G} , можно вычислить стационарное распределение $\{q_n^{(D)}\}$, $n \geq 0$, используя матричную рекуррентную формулу из [20]. Однако сами стационарные вероятности не нужны. Они используются только для расчета характеристик системы. Для этого достаточно получить лишь первый вектор вероятностей

$$\mathbf{q}_0^{(D)} = \left(q_0^{(D)}, q_1^{(D)}, \dots, q_{W-1}^{(D)} \right),$$

элементы которого являются неизвестными коэффициентами ПФ $Q(z)$ (4). Следовательно, стационарные характеристики ЦМ D_n могут быть получены из ПФ.

Из вероятностного смысла матрицы \mathbf{G} следует, что стационарный вектор $\mathbf{q}^{(K)}$ неприводимой стохастической матрицы $\mathbf{K} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}_i \mathbf{G}^i$ совпадает с вектором $\mathbf{q}_0^{(D)}$ с точностью до нормировочной константы, т.е. $\mathbf{q}_0^{(D)} = C^{-1} \mathbf{q}^{(K)}$. Наконец подставляя полученные вероятности $q_j^{(K)}$ вместо $q_j^{(D)}$ в левую часть выражения (6), получаем нормировочную константу C в правой части.

3.2 Параметры производительности системы

Получив аналитические решения для ЦМ, можно оценить вероятностно-временные характеристики. Прежде всего среднее число пакетов на фазе передачи данных может быть получено как производная ПФ $Q(z)$ в точке $z = 1$.

Утверждение 2. Среднее число пакетов \bar{D} имеет вид:

$$\bar{D} = \bar{\theta} + \frac{\sum_{k=0}^{W-1} (W^2 - k^2) q_k^{(D)}}{2(W - \lambda_d \bar{l} - \bar{\theta})} + \frac{\bar{\theta}^{(2)} + \lambda_d \bar{l}^{(2)} - (W - \lambda_d \bar{l})^2}{2(W - \lambda_d \bar{l} - \bar{\theta})}. \quad (8)$$

Доказательство приведено в приложении.

Средняя задержка пакета выражается формулой

$$w_d = \frac{\bar{D}}{\theta + \lambda_d l \Delta} \Delta.$$

Наконец, получаем коэффициент загрузки U фазы передачи данных как

$$U = \frac{1}{W} \sum_{k=1}^{W-1} k q_k^{(D)} + \sum_{k=W}^{\infty} q_k^{(D)} = 1 - \sum_{k=0}^{W-1} \left(1 - \frac{k}{W}\right) q_k^{(D)}.$$

4 Численный пример

В данном разделе представлены численные результаты. Сначала анализируется производительность системы при неоптимизированном распределении ресурсов между фазами случайного доступа и передачи данных. Далее рассматривается оптимальная конфигурация, при которой ресурсы кадра оптимально распределяются между фазами случайного доступа и передачи данных. Параметры оптимального распределения ресурсов между фазами получены в предыдущей работе [18], точность математической модели которой была проверена с помощью имитационного моделирования [21]. Рассматриваемая схема развертывания описана в разд. 2, а параметры системы приведены в таблице.

Рассмотрим систему с фиксированным распределением ресурсов между фазами случайного доступа и передачи данных. Результаты по задержкам для обеих фаз показаны на рис. 2, а. Качественный анализ результатов показывает, что средняя задержка на фазе передачи данных заметно возрастает при увеличении частоты обновлений λ_d . В области малых λ_d система работает вблизи минимальной задержки, однако по мере роста объема нисходящего трафика начинается накопление пакетов и задержка увеличивается почти экспоненциально. Дополнительно видно влияние интенсивности восходящего трафика λ_r : при больших значениях λ_r рост задержки на фазе передачи данных начинается раньше, поскольку часть ресурсных единиц постоянно занята передачей в восходящем направлении. Таким образом, система с фиксированным распределением ресурсов оказывается чувствительной к изменению параметров трафика, что подчеркивает необходимость адаптивного выделения ресурсов между фазами случайного доступа и передачи данных.

Параметры системы по умолчанию

Переменная	Описание	Значение
B	Полоса пропускания	180 КГц
Δ	Длительность кадра	0,01 с
l	Число преамбул	12
P	Количество РЕ (размер пакета) в восходящем направлении	128 байт
W	Количество РЕ на фазе передачи данных	278 РЕ
n_1	Количество РЕ на фазе случайного доступа	14 РЕ
n	Общее количество RU в кадре	292 РЕ
λ_r	Интенсивность поступления пакетов в восходящем направлении	2000–5500 пак/с
λ_d	Частота обновлений ПО	0, 1, 5, 10 обнов/с
$\{\gamma_k\}$	Распределение числа обновлений за кадр	$\sim \text{Poisson}(\lambda_d \Delta)$
$\{l_j\}$	Распределение числа пакетов обновлений ПО в группе	$\sim \text{Binom}(750; 2/3)$
\bar{l}	Средний размер обновления ПО	500 РЕ

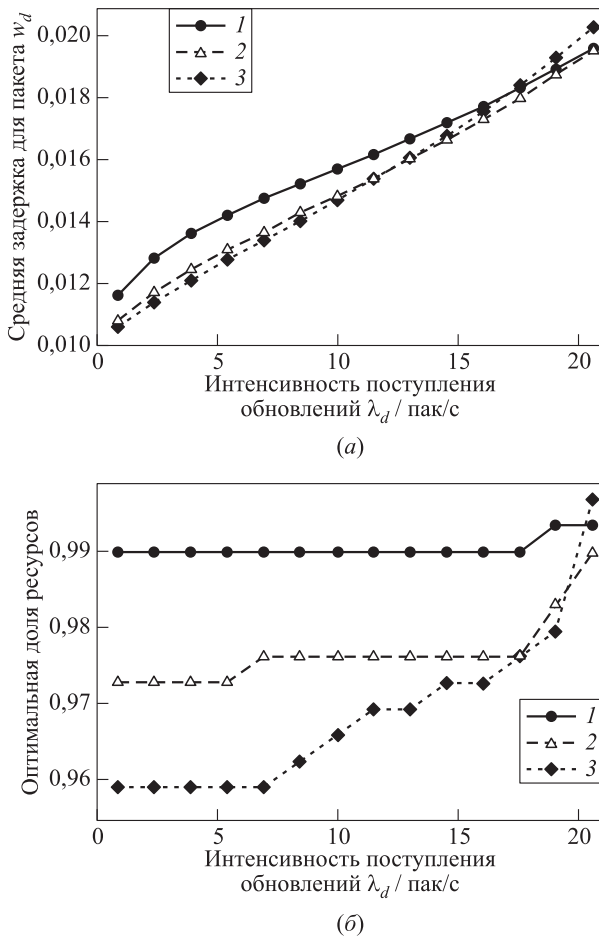


Рис. 2 Средняя задержка (а) и оптимальная доля ресурсов при минимизации задержки (б): 1 – $\lambda_r = 1000$; 2 – 3000; 3 – $\lambda_r = 5000$

Предлагаемая модель позволяет численно оптимизировать объем ресурсов, распределяемых между фазами случайного доступа и передачи данных, с учетом задержек пакетов. Далее рассмотрим производительность системы при оптимальном распределении ресурсов. Анализ графика на рис. 2, б показывает, что оптимальное распределение ресурсов довольно чувствительно к характеру трафика. При увеличении частоты обновлений λ_d системе требуется выделять больший объем ресурсов на фазе передачи данных, чтобы избежать накопления групповых пакетов и роста задержки w_d . Напротив, рост восходящего трафика λ_r приводит к снижению оптимальной доли ресурсов, выделяемых на фазу передачи данных, так как в этом случае возрастает необходимость обслуживать большее число запросов на фазе случайного доступа. Например, при $\lambda_r = 3000$ пак/с и $\lambda_d = 5$ обновл/с оптимальной оказывается доля ресурса, близкая к 0,97. Такая настройка позволяет поддерживать приемлемый уровень задержек даже при переменном харак-

тере поступления обновлений. В целом график на рис. 2, б показывает, что фиксированное распределение ресурса не подходит для широкого диапазона нагрузок — эффективной оказывается только адаптивная настройка, учитывающая текущее соотношение трафика восходящей и нисходящей линий связи.

5 Заключение

В статье предложена модель, объединяющая две фазы обслуживания трафика в системах mMTC: процедуру случайного доступа и передачу данных. В отличие от существующих подходов, в данной работе учитывается возможность групповых обновлений ПО, что важно для современных IoT-устройств, которым требуется не только отправлять данные, но и регулярно получать программные обновления.

Проведенный анализ показывает, что фиксированное распределение частотно-временного ресурса между фазами далеко не всегда оказывается оптимальным: даже небольшое изменение доли ресурсов, выделяемых фазе передачи данных, способно заметно снизить задержку передачи обновлений. Полученные результаты могут быть использованы для настройки NB-IoT и LTE-M в реальных промышленных развертываниях, а также для разработки алгоритмов динамического распределения ресурса в сетях 5G/6G.

Приложение

В этом приложении приводятся доказательства утверждений 1 и 2.

Доказательство утверждения 1

Рассмотрим отдельно правую и левую суммы в (3). Для левой суммы имеем:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{s=0}^{W-1} q_s^{(D)} \sum_{i=0}^k \theta_i \sum_{j=0}^{k-i} \gamma_j l_{k-i}^{(j)} = \\
 &= \sum_{s=0}^{W-1} q_s^{(D)} \Theta(z) e^{-\lambda_d \Delta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_d \Delta L(z))^j}{j!} = \\
 &= \Theta(z) e^{-\lambda_d \Delta (1-L(z))} \sum_{s=0}^{W-1} q_s^{(D)}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь правую сумму в (3). Имеем:

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{s=W}^{k+W} q_s^{(D)} \sum_{i=0}^{k+W-s} \theta_i \sum_{j=0}^{k+W-s-i} \gamma_j l_{k+W-s-i}^{(j)} = \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} q_{s+W}^{(D)} z^s \Theta(z) \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j (L(z))^j = \\
 &= \Theta(z) e^{-\lambda_d \Delta (1-L(z))} \sum_{s=0}^{\infty} q_{s+w}^{(D)} z^s. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Тогда, суммируя (9) и (10), получаем

$$Q(z) = \Theta(z)e^{-\lambda_d\Delta(1-L(z))} \left[\sum_{s=0}^{W-1} q_s^{(D)} + \frac{1}{z^W} \sum_{s=0}^{\infty} q_{s+W}^{(D)} z^{s+W} \right].$$

Преобразуя полученную ПФ следующим образом:

$$Q(z) = \frac{\Theta(z)}{e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))}} \left(\sum_{n=0}^{W-1} q_n^{(D)} + \frac{1}{z^W} \left(\sum_{s=W}^{\infty} q_s^{(D)} z^s \right) \right),$$

можем записать

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{\Theta(z)}{e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))}} \left(\sum_{n=0}^{W-1} q_n^{(D)} + \frac{1}{z^W} \left(Q(z) - \sum_{s=0}^{W-1} q_s^{(D)} z^s \right) \right) = \\ &= \frac{\Theta(z)}{e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))}} \sum_{n=0}^{W-1} q_n^{(D)} + \frac{\Theta(z)}{z^W e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))}} Q(z) - \\ &\quad - \frac{\Theta(z)}{z^W e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))}} \sum_{s=0}^{W-1} q_s^{(D)} z^s. \end{aligned}$$

Переносим $Q(z)\Theta(z)/(z^W e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))})$ в левую часть и получаем

$$\begin{aligned} Q(z) \left(1 - \frac{\Theta(z)}{z^W e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))}} \right) &= \\ &= \frac{\Theta(z)}{e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))}} \left(\sum_{n=0}^{W-1} q_n^{(D)} - \frac{1}{z^W} \sum_{s=0}^{W-1} q_s^{(D)} z^s \right). \end{aligned}$$

Наконец, получаем

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{\Theta(z)}{e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))}} \left(z^W \sum_{n=0}^{W-1} q_n^{(D)} - \sum_{n=0}^{W-1} q_n^{(D)} z^n \right) \times \\ &\quad \times \frac{e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))}}{z^W e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))} - \Theta(z)} = \\ &= \frac{\Theta(z) \sum_{n=0}^{W-1} q_n^{(D)} (z^W - z^n)}{z^W e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))} - \Theta(z)}. \end{aligned}$$

Доказательство утверждения 2

Среднее число пакетов на фазе передачи данных равно

$$\begin{aligned} \bar{D} &= Q'(1) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} Q'(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\left[z^W e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))} - \Theta(z) \right]^2} \times \\ &\quad \times \left(P'(z) \left[z^W e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))} - \Theta(z) \right] - \right. \\ &\quad \left. - P(z) \left[W z^{W-1} e^{\lambda_d\Delta(1-L(z))} - \Theta'(z) \right] \right), \quad (11) \end{aligned}$$

где $P(z) = \Theta(z) \sum_{i=0}^{W-1} q_i (z^W - z^i)$.

Тогда, дважды применив правило Лопиталья и используя определение моментов первого и второго порядка, таких как $\Theta''(1) = (\bar{\theta}^{(2)} - \bar{\theta})$ и $L''(1) = (\bar{l}^{(2)} - \bar{l})$, (11) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} Q'(1) &= \frac{1}{2(W - \lambda_d\Delta\bar{l} - \bar{\theta})} \left(\sum_{k=0}^{W-1} (W^2 - k^2) q_k^{(D)} \right) + \\ &\quad + \frac{\sum_{k=0}^{W-1} (W - k) q_k^{(D)}}{(W - \lambda_d\Delta\bar{l} - \bar{\theta})} \times \\ &\quad \times \left[\bar{\theta} + \frac{(\bar{\theta}^{(2)} + \lambda_d\Delta\bar{l}^{(2)} - (W - \lambda_d\Delta\bar{l})^2)}{2(W - \lambda_d\Delta\bar{l} - \bar{\theta})} \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Наконец, подставляя (6) в формулу (12), получаем (8).

Литература

1. *Stusek M., Stepanov N., Moltchanov D., Masek P., Mozny R., Turlikov A., Hosek J.* Optimizing NB-IoT communication patterns for permanently connected mMTC devices // IEEE Wireless Communications and Networking Conference Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2022. P. 1413–1418. doi: 10.1109/WCNC51071.2022.9771847.
2. *Маркова Е. В., Гольская А. А., Дзантиев И. Л., Гудкова И. А., Шоргин С. Я.* Сравнительный анализ показателей эффективности модели беспроводной сети межмашинного взаимодействия, работающей в рамках двух политик разделения радиоресурсов // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 1. С. 108–116. doi: 10.14357/19922264190115.
3. *Кочеткова И. А., Куцазли А. И., Харин П. А., Шоргин С. Я.* Модель схемы приоритетного доступа трафика URLLC и eMBB в сети пятого поколения в виде ресурсной системы массового обслуживания // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 87–92. doi: 10.14357/19922264210412. EDN: IOMPGI.
4. *Бесчастный В. А., Острикова Д. Ю., Шоргин С. Я., Молчанов Д. А., Гайдамака Ю. В.* Анализ плотности базовых станций 5G NR для предоставления услуг виртуальной и дополненной реальности // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 102–108. doi: 10.14357/19922264220213. EDN: VPIRYN.
5. *Сопин Э. С., Маслов А. Р., Шоргин В. С., Бегиев В. О.* Моделирование настойчивого поведения пользователей в сетях 5G NR с адаптацией скорости и блокировками // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 25–32. doi: 10.14357/19922264230304. EDN: ENSHKV.
6. *Иванова Д. В., Маркова Е. В., Шоргин С. Я., Гайдамака Ю. В.* Модели совместного обслуживания трафика eMBB и URLLC на основе приоритетов в промышленных развертываниях 5G NR // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 64–70. doi: 10.14357/19922264230409. EDN: JXCGXQ.

7. Galinina O., Turlikov A., Andreev S., Koucheryavy Y. Stabilizing multi-channel slotted ALOHA for machine-type communications // Symposium (International) on Information Theory Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2013. P. 2119–2123. doi: 10.1109/ISIT.2013.6620600.
8. Rivest R. Network control by Bayesian broadcast // IEEE T. Inform. Theory, 1987. Vol. 33. Iss. 3. P. 323–328. doi: 10.1109/TIT.1987.1057315.
9. Михайлов В. А. Геометрический анализ устойчивости цепей Маркова в R_+^n и его приложение к вычислению пропускной способности адаптивного алгоритма случайного множественного доступа // Проблемы передачи информации, 1988. Т. 24. № 1. С. 61–73. EDN: ZAGAAE.
10. Duan S., Shah-Mansouri V., Wang Z., Wong V. W. S. D-ACB: Adaptive congestion control algorithm for bursty M2M traffic in LTE networks // IEEE T. Veh. Technol., 2016. Vol. 65. Iss. 12. P. 9847–9861. doi: 10.1109/TVT.2016.2527601.
11. Jin H., Toor W. T., Jung B. C., Seo J. B. Recursive pseudo-Bayesian access class barring for M2M communications in LTE systems // IEEE T. Veh. Technol., 2017. Vol. 66. Iss. 9. P. 8595–8599. doi: 10.1109/TVT.2017.2681206.
12. Zhao X., Dai L. Connection-based ALOHA: Modeling, optimization, and effects of connection establishment // IEEE T. Wirel. Commun., 2023. Vol. 23. Iss. 2. P. 1008–1023. doi: 10.1109/TWC.2023.3284907.
13. Begishev V., Petrov V., Samuylov A., Moltchanov D., Andreev S., Koucheryavy Y., Samouylov K. Resource allocation and sharing for heterogeneous data collection over conventional 3GPP LTE and emerging NB-IoT technologies // Comput. Commun., 2018. Vol. 120. P. 93–101. doi: 10.1016/j.comcom.2018.01.009.
14. Stepanov N., Turlikov A., Begishev V. Balancing the data transmission and random access phases in 6G mMTC radio technologies // IEEE Commun. Lett., 2023. Vol. 27. Iss. 12. P. 3419–3423. doi: 10.1109/LCOMM.2023.3322598.
15. Wang T., Wang Y., Xu D., Wang Z. Resource allocation for mMTC/H2H coexistence with H₂N's success probability of data transmission // Wireless Communications and Networking Conference Proceedings. — IEEE, 2020. Art. 9120687. 6 p. doi: 10.1109/WCNC45663.2020.9120687.
16. Сопин Э. С., Назарьин А. И., Шоргин С. Я. Разработка модели для расчета производительности планирования передач в сетях 5G NR с учетом сигнального трафика // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 3. С. 46–54. doi: 10.14357/19922264250306. EDN: EMAQVK.
17. Мачнев Е. А., Морозова У. К., Бесчастный В. А., Шоргин В. С., Гайдамака Ю. В. Анализ задержек в сетях интегрированного доступа и транзита для сценария развертывания с линейной топологией // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 4. С. 26–34. doi: 10.14357/19922264250403. EDN: GM1YBJ.
18. Дараселия А. В., Сопин Э. С., Самуйлов К. Е., Кучерявый Е. А. Минимизация задержки в системах 5G/6G IoT с групповым поступлением в восходящем и нисходящем направлениях // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4 С. 59–67. doi: 10.14357/19922264240408. EDN: EBGJBJ.
19. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория вероятностей. Математическая статистика. — М.: Физматлит, 2005. 296 с.
20. Ramaswami V. A stable recursion for the steady state sector in Markov chains of $M/G/1$ type // Communications Statistics Stochastic Models, 1988. Vol. 4. Iss. 1. P. 183–188. doi: 10.1080/15326348808807077.
21. Старков Н. А., Левкович К. А., Дараселия А. В., Сопин Э. С. К разработке имитационной модели передачи трафика межмашинного взаимодействия в сети «Новое радио» // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: Мат-лы Всероссийской конф. с международным участием. — РУДН, 2025. С. 122–126.

Поступила в редакцию 20.11.2025

Принята к публикации 15.02.2026

MATHEMATICAL MODEL FOR THE ANALYSIS OF THE DATA TRANSMISSION PHASE IN INTERNET-OF-THINGS SYSTEMS

A. V. Daraseliya¹, K. A. Levkovich¹, E. S. Sopin^{1,2}, S. Prakash¹, and V. O. Begishev¹

¹Peoples' Friendship University of Russia, 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

²Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper develops a mathematical model for a massive machine-type communication (mMTC) system on Cellular Internet-of-Things (CIoT) designed for phase analysis of data transmission. The random access phase is treated as an input traffic generation mechanism and is not the subject of the detailed study. Instead, the focus is on the uplink and downlink traffic service processes accounting for limited frequency and time resources. The

model observes asynchronous packet generation by IoT devices as well as the emergence of new traffic in the form of group software updates. A Markov model with field-based tools is used for analysis allowing for the capture of stationary system characteristics. Analytical expressions are provided for the average number of packets, mean transmission delay, and resource utilization. Numerical results demonstrate that static resource allocation between transmission phases significantly limits system efficiency. These findings justify the necessity for adaptive resource management in 5G/6G CIoT networks.

Keywords: 5G; 6G; mMTC; CIoT; data transmission; delay; optimal resource allocation

DOI: 10.14357/19922264260106

EDN: ANNNCT

Acknowledgments

The research was funded by the Russian Science Foundation, project No. 24-19-00804, <https://rscf.ru/project/24-19-00804/>.

References

1. Stusek, M., N. Stepanov, D. Moltchanov, P. Masek, R. Mozny, A. Turlikov, and J. Hosek. 2022. Optimizing NB-IoT communication patterns for permanently connected mMTC devices. *Wireless Communications and Networking Conference Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 1413–1418. doi: 10.1109/WCNC51071.2022.9771847.
2. Markova, E. V., A. A. Golskaia, I. L. Dzantiev, I. A. Gudkova, and S. Ya. Shorgin. 2019. Sravnitel'nyy analiz pokazateley effektivnosti modeli besprovodnoy seti mezhmashinnogo vzaimodeystviya, rabotayushchey v ramkakh dvukh politik razdeleniya radioresursov [Comparative analysis of performance measures for a wireless machine-to-machine network model operating within two radio resource management policies]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(1):108–116. doi: 10.14357/19922264190115. EDN: SRXVZT.
3. Kochetkova, I. A., A. I. Kushchazli, P. A. Kharin, and S. Ya. Shorgin. 2021. Model' skhemy prioritetnogo dostupa trafika URLLC i eMBB v seti pyatogo pokoleniya v vide resursnoy sistemy massovogo obsluzhivaniya [Model for analyzing priority admission control of URLLC and eMBB communications in 5G networks as a resource queuing system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(4):87–92. doi:10.14357/19922264210412. EDN: IOMPGI.
4. Beschastnyi, V. A., D. Yu. Ostrikova, S. Ya. Shorgin, D. A. Moltchanov, and Yu. V. Gaidamaka. 2022. Analiz plotnosti bazovykh stantsiy 5G NR dlya predostavleniya uslug virtual'noy i dopolnennoy real'nosti [Density analysis of mmWave NR deployments for delivering scalable AR/VR video services]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):102–108. doi: 10.14357/19922264220213. EDN: VPIRYN.
5. Sopin, E. S., A. R. Maslov, V. S. Shorgin, and V. O. Begishev. 2023. Modelirovanie nastoychivogo povedeniya pol'zovateley v setyakh 5G NR s adaptatsiyey skorosti i blokirovkami [Modeling insistent user behavior in 5G New Radio networks with rate adaptation and blockage]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):25–32. doi: 10.14357/19922264230304. EDN: ENSHKV.
6. Ivanova, D. V., E. V. Markova, S. Ya. Shorgin, and Yu. V. Gaidamaka. 2023. Modeli sovместnogo obsluzhivaniya trafika eMBB i URLLC na osnove prioriteto v promyshlennykh razvertyvaniyakh 5G NR [Priority-based eMBB and URLLC traffic coexistence models in 5G NR industrial deployments]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):64–70. doi: 10.14357/19922264230409. EDN: JXCGXQ.
7. Galinina, O., A. Turlikov, S. Andreev, and Y. Koucheryavy. 2013. Stabilizing multi-channel slotted ALOHA for machine-type communications. *Symposium (International) on Information Theory Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 2119–2123. doi: 10.1109/ISIT.2013.6620600.
8. Rivest, R. 1987. Network control by Bayesian broadcast. *IEEE T. Inform. Theory* 33(3):323–328. doi: 10.1109/TIT.1987.1057315.
9. Mihajlov, V. 1988. Geometrical analysis of the stability of Markov chains in R_+^n and its application to throughput evaluation of the adaptive random multiple access algorithm. *Probl. Inf. Transm.* 24(1):47–56. EDN: HHHHDT.
10. Duan, S., V. Shah-Mansouri, Z. Wang, and V. W. S. Wong. 2016. D-ACB: Adaptive congestion control algorithm for bursty M2M traffic in LTE networks. *IEEE T. Veh. Technol.* 65(12):9847–9861. doi: 10.1109/TVT.2016.2527601.
11. Jin, H., W. T. Toor, B. C. Jung, and J.-B. Seo. 2017. Recursive pseudo-Bayesian access class barring for M2M communications in LTE systems. *IEEE T. Veh. Technol.* 66(9):8595–8599. doi: 10.1109/TVT.2017.2681206.
12. Zhao, X., and L. Dai. 2024. Connection-based ALOHA: Modeling, optimization, and effects of connection establishment. *IEEE T. Wirel. Commun.* 23(2):1008–1023. doi: 10.1109/TWC.2023.3284907.
13. Begishev, V., V. Petrov, A. Samuylov, D. Moltchanov, S. Andreev, Y. Koucheryavy, and K. Samouylov. 2018. Resource allocation and sharing for heterogeneous data collection over conventional 3GPP LTE and emerging NB-IoT technologies. *Comput. Commun.* 120:93–101. doi: 10.1016/j.comcom.2018.01.009.
14. Stepanov, N., A. Turlikov, and V. Begishev. 2023. Balancing the data transmission and random access phases in 6G mMTC radio technologies. *IEEE Commun. Lett.* 27(12):3419–3423. doi: 10.1109/LCOMM.2023.3322598.
15. Wang, T., Y. Wang, D. Xu and Z. Wang. 2020. Resource allocation for mMTC/H₂H coexistence with

- H₂H's success probability of data transmission. *Wireless Communications and Networking Conference Proceedings*. IEEE. Art. 9120687. 6 p. doi: 10.1109/WCNC45663.2020.9120687.
16. Sopin, E. S., A. I. Nazarin, and S. Ya. Shorgin. 2025. Razrabotka modeli dlya rascheta proizvoditel'nosti planirovaniya peredach v setyakh 5G NR s uchetom signal'nogo trafika [Model development for performance of transmission scheduling in 5G New Radio networks under signaling and user traffic constraints]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(3):46–54. doi: 10.14357/19922264250306. EDN: EMAQVK.
 17. Machnev, E. A., U. K. Morozova, V. A. Beschastnyi, V. S. Shorgin, and Yu. V. Gaidamaka. 2025. Analiz zaderzhek v setyakh integrirovannogo dostupa i tranzita dlya stsenariya razvertyvaniya s lineynoy topologiyey [On latency analysis in integrated access and backhaul deployments with linear topology]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(4):26–34. doi: 10.14357/19922264250403. EDN: GMIYBJ.
 18. Daraseliya, A. V., E. S. Sopin, K. E. Samuylov, and E. A. Koucheryavy. 2024. Minimizatsiya zaderzhki v sistemakh 5G/6G IoT s gruppovym postupleniem v voskhodyashchem i niskhodyashchem napravleniyakh [Minimizing latency in 5G/6G IoT systems with group admission in ascending and descending directions]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):59–67. doi: 10.14357/19922264240408. EDN: EBGJBZ.
 19. Bocharov, P. P., and A. V. Pechinkin. 2005. *Teoriya veroyatnostey. Matematicheskaya statistika* [Probability theory. Mathematical statistics]. Moscow: Fizmatlit. 296 p.
 20. Ramaswami, V. 1988. A stable recursion for the steady state sector in Markov chains of M/G/1 type. *Communications Statistics Stochastic Models* 4(1):183–188. doi: 10.1080/15326348808807077.
 21. Starkov, N. A., K. A. Levkovich, A. V. Daraseliya, and E. S. Sopin. 2025. K razrabotke imitatsionnoy modeli peredachi trafika mezhmashinnogo vzaimodeystviya v seti “Novoe radio” [Development of a simulation model for the transmission of machine-to-machine traffic in the New Radio network]. *Informatsionno-telekommunikatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotekhnologichnykh sistem: Mat-ly Vserossiyskoy konf. s mezhdunarodnym uchastiem* [All-Russian Conference with International Participation “Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems” Proceedings]. 122–126.

Received November 20, 2025

Accepted February 15, 2026

Contributors

Daraseliya Anastasia V. (b. 1994) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior lecturer, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; daraselia-av@rudn.ru

Levkovich Konstantin A. (b. 2001) — PhD student, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; 1142240199@pfur.ru

Sopin Eduard S. (b. 1987) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; sopin-es@rudn.ru

Shubham Prakash (b. 1996) — PhD student, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; 1042225181@rudn.ru

Begishev Vhacheslav O. (b. 1988) — Doctor of Science in technology, associate professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; begishev-vo@rudn.ru

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕРШИННЫХ КЛАСТЕРОВ МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СЕТЕВОЙ СИСТЕМЫ

Ю. Е. Малашенко¹, И. А. Назарова²

Аннотация: В рамках вычислительных экспериментов изучаются режимы передачи межузловых потоков и распределения ресурсов в многопользовательской сетевой системе. Вводится понятие вершинного кластера исходящих потоков. Для каждой вершины сети вычисляется и анализируется вектор исходящих межузловых потоков, передаваемых из узла-источника всем корреспондентам кластера одновременно. Исследуются два способа межузловой диспетчеризации — по кратчайшим маршрутам и по пути передачи максимального потока между адресатами. Для каждого кластера определяются относительные показатели загрузки ребер и удельных затрат ресурсов сети. На основе полученных численных характеристических значений проводится сравнительный многопараметрический анализ различных стратегий маршрутизации. Сопоставляются единичные нормированные векторы потоков при монопольной и совместной передаче из вершин-источников в узлы-приемники. Оценивается положение каждой центральной вершины кластера внутри сети. Расчеты проводились для сетей с различными структурными особенностями и одинаковой суммарной пропускной способностью ребер. Результаты экспериментов проиллюстрированы специальными диаграммами.

Ключевые слова: потоковая модель сети связи; вершинные кластеры; удельные затраты ресурсов

DOI: 10.14357/19922264260107

EDN: UYNUTF

1 Введение

В работе проводится сравнительный анализ функциональных характеристик сетевых многопользовательских телекоммуникационных систем. Исследуется распределение ресурсов сети при различных стратегиях управления межузловыми потоками. Вводится понятие вершинного кластера как совокупности пар узлов-корреспондентов, для которых выбранная вершина служит источником, а все другие — приемниками. В рамках вычислительных экспериментов для каждой вершины строится вектор исходящих межузловых потоков ко всем остальным узлам сети.

В предложенной модели пропускная способность ребер трактуется как ресурс, выделяемый для обеспечения передачи межузловых потоков. На первом этапе определяется распределение нагрузок на ребра, когда межузловой поток следует по кратчайшему пути соединения вершин. На основе полученных значений реберных нагрузок подсчитываются совокупные и удельные затраты ресурсов, необходимые для одновременной передачи всех исходящих единичных потоков из узла-источника ко всем корреспондентам по кратчайшим маршрутам.

На втором этапе для каждой пары узлов-корреспондентов независимо вычисляются максимальный поток и соответствующая загрузка ребер вдоль пути его следования. Для каждой вершины кластера

формируются характеристические векторы исходящих нормированных единичных потоков и реберных нагрузок. Определяется совокупная загрузка сети при одновременной передаче всех кластерных потоков между всеми парами вершин. Для каждого кластера подсчитываются минимальные и относительные оценки удельных ресурсных затрат для единичных межузловых потоков и маршрутизации максимальных потоков.

Предложенный подход позволяет количественно сравнивать диспетчерские стратегии и с помощью собранных данных о минимальных удельных затратах выявлять различия в распределении ресурсов в зависимости от способа управления. Числовые значения, полученные для «одинаковых» характеристических векторов единичных потоков с равным числом компонент, могут быть использованы для оценки нормативных величин исходящих межузловых потоков, которыми могут одновременно обмениваться все узлы со всеми корреспондентами без нарушения условий совместного соединения.

Данная работа продолжает исследования функциональных характеристик многопользовательских телекоммуникационных сетей при распределении ресурсов [1, 2]. Вычислительные эксперименты проводились в рамках методологии исследования операций [3, 4] на основе методов

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, malash09@ccas.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, irina-nazar@yandex.ru

потокowego программирования [5–7]. Процедуры поиска всех кратчайших путей, максимальных потоков для всех пар узлов и построение векторных многопараметрических характеристик имеют полиномиальные оценки вычислительных затрат [8]. Результаты экспериментов проиллюстрированы специальными диаграммами.

2 Математическая модель

Для описания многопользовательской сетевой системы связи воспользуемся следующей математической записью модели передачи многопродуктового потока (далее — М-модель). Сеть G задается множествами $\langle V, R, U, P \rangle$: узлов (вершин) сети $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$; неориентированных ребер $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$; ориентированных дуг $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$; пар узлов-корреспондентов $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и двоянные ребра.

Ребро $r_k \in R$ соединяет смежные вершины v_{n_k} и v_{j_k} . Каждому ребру r_k ставятся в соответствие две ориентированные дуги u_k и u_{k+E} из множества U . Дуги $\{u_k, u_{k+E}\}$ определяют прямое и обратное направление передачи потока по ребру r_k между концевыми вершинами v_{n_k}, v_{j_k} . Для каждой вершины v_n формируется список $K(n)$ номеров инцидентных ей ребер: $K(n) = \{k_1, k_2, \dots, k_{a(n)}\}$, где $a(n)$ — число инцидентных ребер для v_n .

В многопользовательской сети G рассматриваются $M = N(N-1)$ независимых, неважозаменяемых и равноправных межзловых потоков различных видов. Каждой паре узлов-корреспондентов p_m из множества P соответствуют: вершина-источник с номером s_m , из s_m входной поток m -го вида поступает в сеть; вершина-приемник с номером t_m , из t_m поток m -го вида покидает сеть.

Обозначим через z_m величину межзлового потока m -го вида, поступающего в сеть через узел с номером s_m и покидающего сеть из узла с номером t_m ; x_{mk} и $x_{m(k+E)}$ — поток m -го вида, который передается по дугам u_k и u_{k+E} согласно направлению передачи, $x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$; $S(v_n)$ — множество номеров исходящих дуг, по ним поток покидает узел v_n ; $T(v_n)$ — множество номеров входящих дуг, по ним поток поступает в узел v_n . Состав множеств $S(v_n)$ и $T(v_n)$ однозначно определяется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро $r_k \in R$ соединяет вершины с номерами n и j , такими что $n < j$. Тогда ориентированная дуга $u_k = (v_n, v_j)$, направленная из вершины v_n в v_j , считается *исходящей* из вершины v_n и ее номер k заносится

в множество $S(v_n)$, а дуга u_{k+E} , направленная из v_j в v_n , — *входящей* для v_n , и ее номер $k+E$ помещается в список $T(v_n)$. Дуга u_k является *входящей* для v_j , и ее номер k попадает в $T(v_j)$, а дуга u_{k+E} — *исходящей*, и номер $k+E$ вносится в список исходящих дуг $S(v_j)$.

Во всех узлах сети $v_n \in V, n = \overline{1, N}$, для каждого вида потока должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}; \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad n = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}, x_{mi} \geq 0, z_m \geq 0. \quad (1)$$

Величина z_m равна входному межзловому потоку m -го вида, проходящему от источника s_m к приемнику t_m пары p_m при распределении потоков $\{x_{mi}\} = \mathbf{x}$ по дугам сети.

Каждому ребру $r_k \in R$ приписывается неотрицательное число d_k — суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру r_k в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$ — положительные числа d_k . Вектор \mathbf{d} ограничивает сумму потоков всех видов, передаваемых по ребру r_k одновременно:

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E}. \quad (2)$$

Вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_E)$ с компонентами

$$y_k = \sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}), \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E},$$

характеризует *нагрузку* на ребра и определяет требования к пропускной способности — *ресурсам* — сети при передаче межзловых потоков $z_m, m = \overline{1, M}$.

Условия (1) и (2) задают множество допустимых значений вектора межзловых потоков $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$:

$$\mathcal{Z}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 \mid \exists \mathbf{x} \geq 0 : (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1), (2)}\}.$$

Для каждого узла $v_n \in V, n = \overline{1, N}$, вводится понятие *вершинного кластера* как подмножества

$P(v_n)$ пар-корреспондентов, для которых v_n служит узлом-источником:

$$P(v_n) = \{p_m | s_m = n, t_m \neq n, t_m = \overline{1, N}\},$$

и определяется список номеров $M(n)$ пар p_m , входящих в подмножество $P(v_n)$:

$$M(n) = \{m | p_m \in P(v_n)\}.$$

Для каждого $n, n = \overline{1, N}$, список $M(n)$ содержит $N - 1$ элемент.

Для каждого вершинного кластера рассматривается вектор исходящих из узла v_n межузловых потоков (далее — VMS-вектор, от английского vertex-multi-stream)

$$\vec{z}(n) = \{z_m | p_m \in P(v_n)\}.$$

3 Функциональные характеристики вершинных кластеров

Сравнительный анализ функциональных характеристик вершинных кластеров проводится в рамках вычислительных экспериментов. Анализируются затраты ресурсов — пропускной способности сети — при передаче предельно допустимых межузловых потоков. задается исходная сеть $G(0)$, пропускные способности $d_k(0), k = \overline{1, E}$, и предполагается, что между парой узлов $p_m \in P$ передается поток m -го вида. В исходной сети $G(0)$ для каждой фиксированной пары p_m независимо и последовательно подсчитывается максимальный поток z_m , передаваемый в монопольном режиме из s_m в t_m .

Задача. Для некоторого $p_m \in P$ найти

$$z_m^0(1) = \max_{z(d), x} z_m$$

при условиях (1), (2), $z_i = 0$ для $i \neq m, p_i \in P$.

Решением задачи являются величина максимального потока $z_m^0(1)$ для выделенной пары узлов-корреспондентов p_m , соответствующие значения дуговых потоков $x_{mk}^0(1) > 0, k = \overline{1, 2E}$. Определяются реберные нагрузки $y_k^0(1)$ и множество номеров ребер, для которых при передаче межузлового потока $z_m^0(1)$ величины $y_k^0(1)$ положительны:

$$L(m) = \left\{ k | y_k^0(1) = x_{mk}^0(1) + x_{m(k+E)}^0(1) > 0, k = \overline{1, E} \right\}.$$

Для каждой фиксированной пары p_m рассматривается набор ребер R_m , образующих маршруты передачи максимального потока $z_m^0(1)$ (далее —

MFT-маршрут, от англ. maximum flow transmission) из узла s_m в узел t_m :

$$R_m = \{r_k | k \in L(m), x_{mk}^0(1) + x_{m(k+E)}^0(1) = y_k^0(1), y_k^0(1) > 0\}.$$

После решения последовательности задач для всех $p_m \in P$ устанавливаются нормирующие коэффициенты

$$\omega_m^0(1) = \frac{1}{z_m^0(1)}, z_m^0(1) \neq 0, m = \overline{1, M}, \quad (3)$$

и нормированные дуговые потоки

$$x_{mk}^0 = \omega_m^0(1) x_{mk}^0(1), m = \overline{1, M}, k = \overline{1, 2E}. \quad (4)$$

Согласно условиям *нормировки* для дуговых потоков (3), при передаче всех x_{mk}^0 по ребрам сети межузловой поток z_m^0 из узла s_m в узел t_m равен единице для всех $p_m \in P$.

На основании решения задачи и условий нормировки (4) для каждого VMS-вектора вычисляется *нагрузка*

$$y^0(n) = \sum_{m \in M(n)} \sum_{k=1}^E (x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0), n = \overline{1, N},$$

на все ребра сети при одновременной передаче всех исходящих межузловых потоков $z_m^0 = 1, m \in M(n)$, из вершины кластера v_n (далее — NV-поток, от англ. normalized flows from the cluster vertex) по всем MFT-маршрутам. Формируется вектор $\{y^0(n)\} = y^0$.

4 Распределение ресурсов при передаче NV-потока по кратчайшим маршрутам

Для оценки минимальных удельных нагрузок для каждой пары узлов $p_m = (s_m, t_m), m = \overline{1, M}$, в сети $G(0)$ находятся все пути передачи m -го вида потока и содержащие минимальное число ребер SPT-маршруты (от англ. shortest path transmission), а также определяется множество наборов номеров дуг $H_m(1)$, которые входят в SPT-маршруты:

$$H_m(1) = \left\{ h_m^1(1), h_m^2(1), \dots, h_m^j(1), \dots, h_m^{J_m(1)}(1) \right\},$$

где $h_m^j(1)$ — список номеров дуг в j -м пути в сети $G(1)$ между узлами s_m и t_m ; $J_m(1)$ — число SPT-маршрутов для m -й пары.

Для пары $p_m, m = \overline{1, M}$, по всем маршрутам из списка $H_m(1)$ передается единичный межузловой поток, и для каждой k -й дуги, $k = \overline{1, 2E}$, подсчитывается значение индикаторной функции:

$$\eta_k^j(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in h_m^j(1); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для пары p_m подсчитываются дуговые потоки

$$x_{mk}^*(1) = \sum_{j=1}^{J_m(1)} \eta_k^j(m), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}. \quad (5)$$

Межузловой поток $z_m^*(1)$ по SPT-маршрутам между узлами s_m и t_m вычисляется по формулам (1) и (5). Рассчитывается нормирующий коэффициент

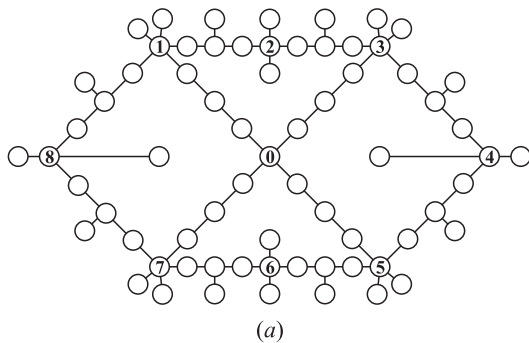
$$\omega_m^*(1) = \frac{1}{z_m^*(1)}, \quad z_m^*(1) \neq 0, \quad m = \overline{1, M},$$

и дуговые потоки $x_{mk}^* = \omega_m^* x_{mk}^*(1)$, $m = \overline{1, M}$, $k = \overline{1, 2E}$. При передаче всех потоков x_{mk}^* по ребрам сети из узла s_m в узел t_m межузловой поток $z_m^* = 1$ для всех $p_m \in P$. Распределение межузловых потоков $z_m^* = 1$ определяется с помощью SPT-маршрутов и дуговых потоков x_{mk}^* .

Для NV-потока по SPT-маршрутам из вершины кластера v_n величина

$$y^*(n) = \sum_{m \in M(n)} \sum_{k=1}^E (x_{mk}^* + x_{m(k+E)}^*), \quad n = \overline{1, N},$$

характеризует результирующую *нагрузку* на сеть. Величина $y^*(n)$ показывает, какая суммарная пропускная способность потребуется для одновременной передачи единичных межузловых потоков z_m^* и дуговых потоков x_{mk}^* , $m \in M(n)$, по SPT-маршрутам, т. е. характеризует объем ресурса, затраченного на передачу по сети NV-потока z_m^* . Формируется вектор $\{y^*(n)\} = y^*$.



5 Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводился на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1. В каждой сети имеются 69 узлов. Пропускные способности ребер $d_k(0)$ равномерно распределены на отрезке [900, 999]. В ходе исследования была сделана нормировка, и потому суммарная пропускная способность в обеих сетях одинакова:

$$\sum_{k=1}^E d_k(0) = D(0) = 68\,256.$$

В рамках модели отношение затраченного ресурса $y^{(\cdot)}(n)$ к сумме исходящих из узла кластера v_n межузловых потоков $z_m^{(\cdot)} = 1$,

$$w_n^{(\cdot)} = \frac{y^{(\cdot)}(n)}{\sum_{m \in M(n)} z_m^{(\cdot)}} = \frac{y^{(\cdot)}(n)}{N-1}, \quad n = \overline{1, N},$$

можно трактовать как удельные *затраты* ресурсов сети при передаче NV- потока.

Для всех кластеров $n = \overline{1, N}$ формируются массивы расчетных данных: загрузки $y^*(n)$ и $y^0(n)$, удельные затраты $w^*(n)$ и $w^0(n)$ для соответствующих NV-потоков $z^*(n)$ и $z^0(n)$, $n = \overline{1, N}$, в базовой и кольцевой сетях. Удельные затраты $w^{(\cdot)}(n)$ упорядочиваются по величине от больших к меньшим (по невозрастанию) и перенумеровываются согласно порядку

$$\{w^{(\cdot)}(i)\} : w^{(\cdot)}(i) \geq w^{(\cdot)}(i+1), \quad i = \overline{1, N}.$$

На рис. 2 представлены диаграммы удельных затрат $w^*(\cdot)$ для базовой и кольцевой сетей при передаче NV-потока по SPT-маршрутам. По вертикальной оси откладываются значения $w^*(\cdot)$, а по горизонтальной — относительные номера i/N , $i = \overline{1, N}$. Фактически на рис. 2 показано среднее число ребер

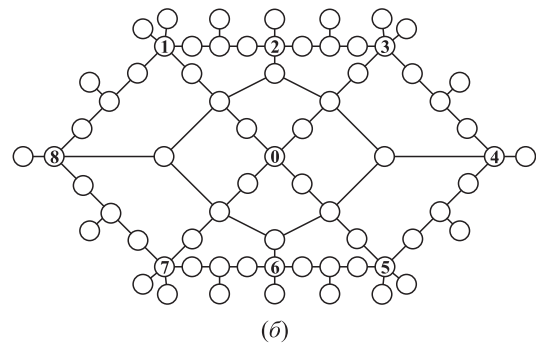


Рис. 1 Базовая (а) и кольцевая (б) сети

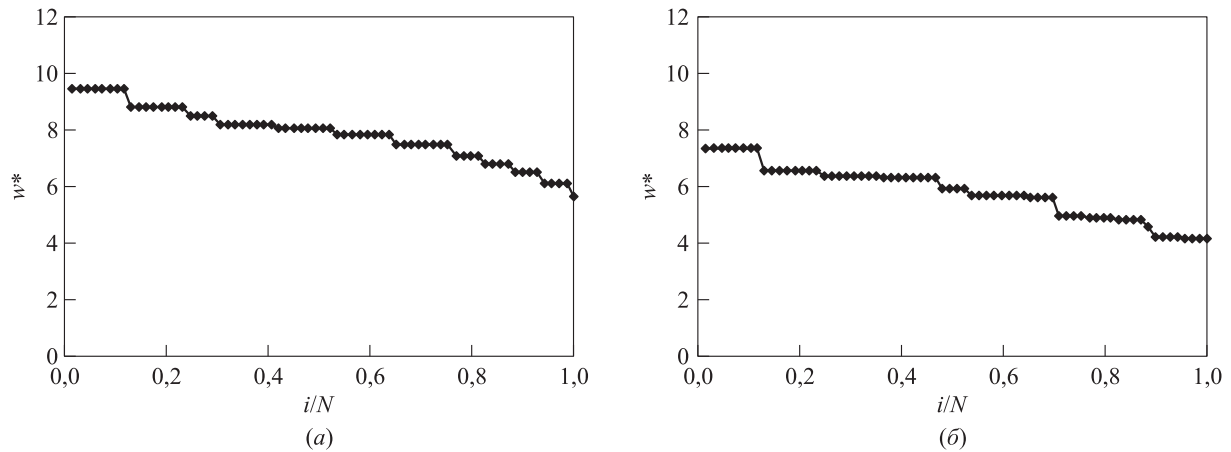


Рис. 2 Затраты на передачу потока по SPT-маршрутам в базовой (а) и кольцевой (б) сетях

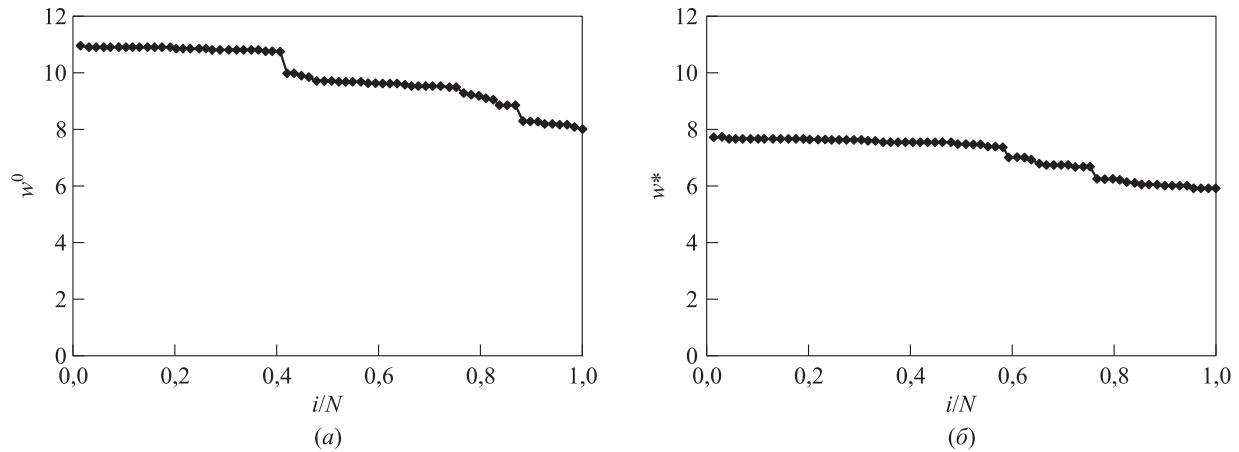


Рис. 3 Затраты на передачу потока по MFT-маршрутам в базовой (а) и кольцевой (б) сетях

в SPT-маршрутах передачи NV-потока из узла v_n для всех пар-корреспондентов. Для базовой сети (рис. 2, а) разброс значений от 6 до 9 ребер, а для кольцевой (рис. 2, б) — от 4 до 7. В кольцевой сети присутствует второе (внутреннее) кольцо из восьми ребер, что позволяет значительно снизить средние общие сетевые удельные затраты на передачу всех NV-потоков $z^*(m)$ с 8 ребер в базовой сети до 6 ребер в кольцевой.

На рис. 3 представлены удельные затраты при передаче NV-потока по MFT-маршрутам.

Для базовой сети разброс значений (рис. 3, а) от 8 до 11, для кольцевой (рис. 3, б) — от 6 до 8. При передаче максимальных потоков для каждой пары узлов используются много «обходных» маршрутов, что значительно увеличивает загрузку дополнительных ребер и повышает удельные затраты. Наличие дополнительных ребер в кольцевой сети позволяет увеличить объем максимальных потоков, кратчайшие и обходные маршруты имеют меньшее число ребер, чем в базовой. Результирующие показатели

удельных затрат значительно меньше для большего числа кластеров в кольцевой сети.

Диаграммы на рис. 4 позволяют сравнивать удельные затраты при различных способах маршрутизации для каждого кластера отдельно. На рис. 4 по горизонтальной оси откладываются значения удельных затрат $w^0(n)$, а по вертикальной — $w^*(n)$. Каждому квадратику (точке) на диаграмме соответствует NV-поток с координатами $\{w^0(n), w^*(n)\}$.

На рис. 4, а для базовой сети один кластер имеет минимальные значения пары $\{w^0(n), w^*(n)\}$, эта вершина расположена в центре сети. На рис. 4, б для кольцевой сети ближе к началу координат расположены пять узлов-кластеров центрального кольца. Все точки на рис. 4, отвечающие этим узлам, лежат ниже биссектрисы. Для всех NV-потоков как в базовой, так и в кольцевой сетях удельные затраты больше при MFT-маршрутизации.

Диаграммы на рис. 5 строятся на основании сравнительных показателей. Для каждого кластера вычисляется

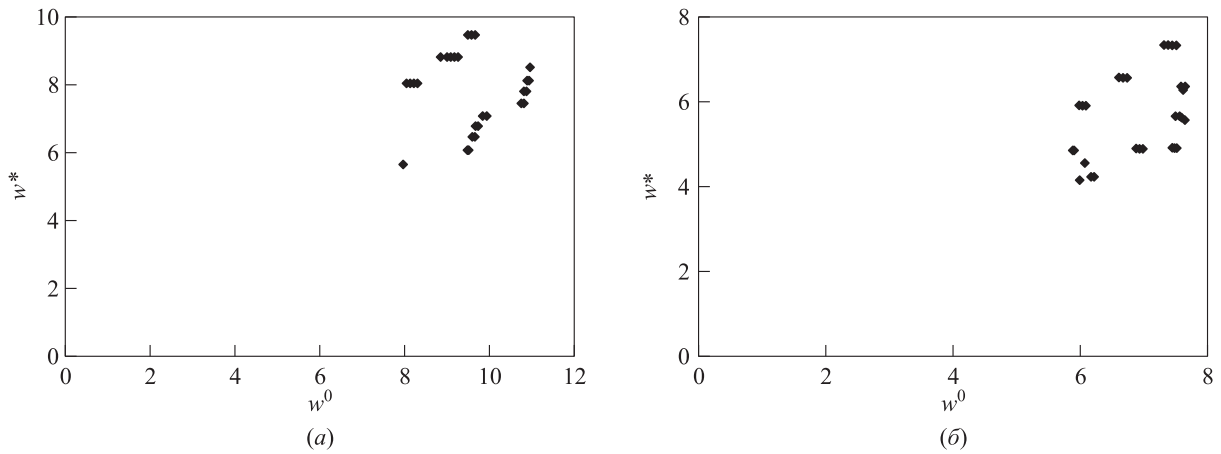


Рис. 4 Удельные затраты в базовой (а) и кольцевой (б) сетях

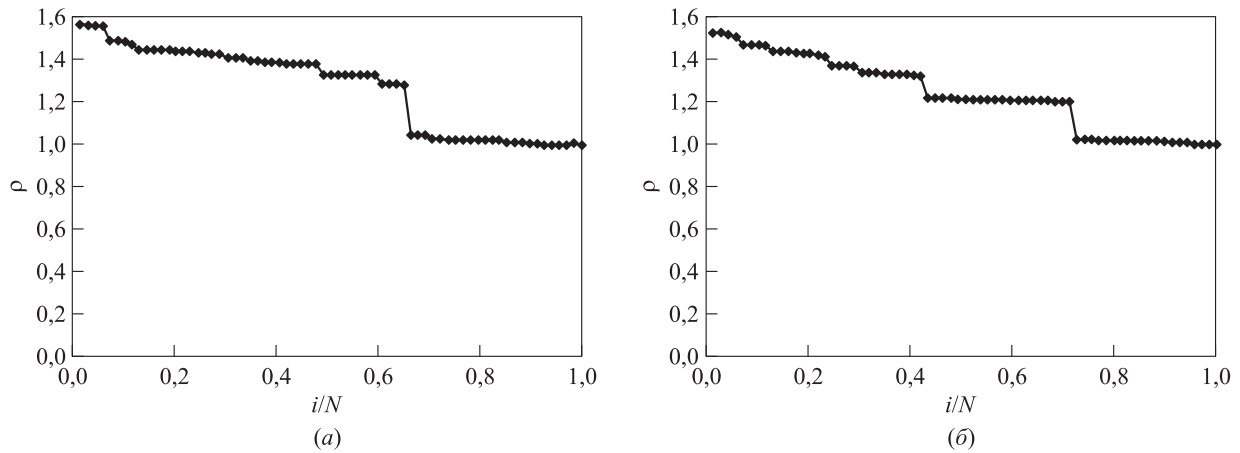


Рис. 5 Затраты при изменении способа маршрутизации в базовой (а) и кольцевой (б) сетях

$$\rho(n) = \frac{y^0(n)}{y^*(n)}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Значения $\rho(n)$ упорядочиваются по величине от больших к меньшим (по невозрастанию) и перенумеровываются согласно порядку

$$\{\rho(i)\} : \rho(i) \geq \rho(i + 1), \quad i = \overline{1, N}.$$

На рис. 5 представлены диаграммы $\rho(\cdot)$ для базовой (см. рис. 5, а) и кольцевой (см. рис. 5, б) сетей. По вертикальной оси откладываются значения $\rho(\cdot)$, а по горизонтальной — относительные номера i/N , $i = \overline{1, N}$. Диаграммы показывают, как увеличиваются удельные затраты на передачу NV-потока при изменении стратегии от SPT-маршрутизации к MFT-маршрутизации.

Для висячих узлов как в базовой, так и в кольцевой сетях для 30% VMS-потоков затраты не изменяются и $\rho(n) = 1$. Для кластеров, чьи источники располагаются в висячих узлах, изменение маршрутизации не влияет на удельные затраты при

передаче единичных потоков. Ход кривых на диаграммах с качественной точки зрения почти совпадает, и максимальные значения одинаковы — почти 1,55. В обеих сетях передача максимального потока приводит к увеличению длины маршрутов.

Диаграмма на рис. 6 позволяет сравнивать характеристики кластеров, связанные с NV-потоком из заданного узла, для базовой и кольцевой сетей. Обозначим $y_C^0(n)$ и $y_C^*(n)$ удельные затраты при передаче NV-потока в базовой (от англ. core), а $y_R^0(n)$ и $y_R^*(n)$ — удельные затраты в кольцевой (от англ. ring) сетях. На рис. 6 по вертикальной оси откладываются значения

$$\delta^*(n) = \frac{y_C^*(n)}{y_R^*(n)}, \quad n = \overline{1, N},$$

а по горизонтальной —

$$\delta^0(n) = \frac{y_C^0(n)}{y_R^0(n)}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Точки (квадратики) на рис. 6 соответствуют кластерам, расположенным в узле v_n в обеих сетях.

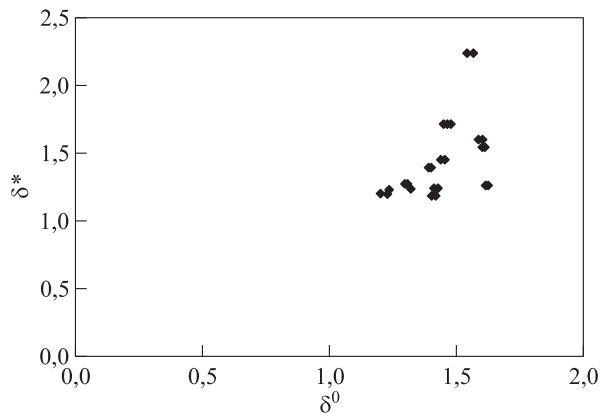


Рис. 6 Сравнение кластеров базовой и кольцевой сетей

В основном узлы-точки расположены в квадрате с координатами $(1; 1)$, $(1; 1,5)$, $(1,5; 1)$, $(1,5; 1,5)$. Таким образом, затраты на передачу VMS-поток для большинства узлов в базовой сети превышают не более чем наполовину соответствующие затраты в кольцевой.

В северо-восточном углу находятся 4 узла-точки, для которых число ребер в кратчайших маршрутах базовой сети в 2 раза превосходит аналогичное число ребер в кольцевой сети. В базовой сети присутствуют четыре висячие вершины, которые входят в состав центрального кольца кольцевой сети. Для кластеров, расположенных в указанных узлах кольцевой сети, маршруты передачи NV-потока значительно короче, чем в базовой. Такие узлы обладают значительным преимуществом, что подтверждается полученными функциональными характеристиками.

6 Заключение

Результаты вычислительных экспериментов позволяют оценить функциональные возможности сети при различных сценариях загрузки и маршрутизации. На этапе предпроектного анализа можно проследить взаимосвязь между расположением ключевых элементов внутри сети, например стриминговой платформы в данной вершине, и затратами ресурсов при передаче потока во все узлы-корреспонденты. Как отмечалось выше, использование кратчайших путей обеспечивает минимальные затраты, однако при увеличении потока может приводить к перегрузке сети. Применение альтернативных диспетчерских стратегий, в частности задействование реберно непересекающихся маршрутов следования максимального потока, дает возможность увеличить суммарный трафик и обес-

печить устойчивость сети при локальных перегрузках, сбоях или повреждениях.

Разработанная методика применима на ранних стадиях эскизного проектирования в условиях неопределенности. Исследования, представленные в работах [1, 2, 9–11], дополняют данный подход, предлагая уточненные модели распределения потоков и анализа пропускной способности в условиях динамически изменяющейся нагрузки.

Литература

1. Малащенко Ю. Е., Назарова И. А. Сравнительный анализ узловых мультипотоков в многопользовательской сетевой системе // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 40–45. doi: 10.14357/19922264240106. EDN: АКСМСQ.
2. Малащенко Ю. Е., Назарова И. А. Метрические оценки узловых мультипотоков в многопользовательской сетевой системе // Известия РАН. Теория и системы управления, 2024. № 3. С. 137–149. doi: 10.31857/S0002338824030145. EDN: UPKZWY.
3. Данскин Дж. М. Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения / Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1970. 200 с. (Danskin J. M. The theory of Max-Min and its application to weapons allocation problems. — Berlin: Springer-Verlag, 1970. 128 p. doi: 10.1007/978-3-642-46092-0.)
4. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971. 383 с.
5. Йенсен П., Барнес Д. Потокное программирование / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1984. 392 с. (Jensen P. A., Barnes J. W. Network flow programming. — New York, NY, USA: Wiley, 1980. 408 p.)
6. Лотов А. В., Поспелова И. И. Многокритериальные задачи принятия решений. — М.: Макс Пресс, 2008. 197 с.
7. Ogruczak W., Luss H., Pióro M., Nace D., Tomaszewski A. Fair optimization and networks: A survey // J. Appl. Math., 2014. Vol. 2014. Art. ID 612018. 25 p. doi: 10.1155/2014/612018.
8. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ / Пер. с англ. — 3-е изд. — М.: Вильямс, 2013. 1328 с. (Cormen T. H., Leiserson C. I., Rivest R. L., Stein C. Introduction to algorithms. — 3rd ed. — Cambridge, MA, USA: The MIT Press, 2009. 1313 p.)
9. Самуйлов А. К., Платонова А. А., Шоргин В. С., Гайдамака Ю. В. К моделированию эффектов обслуживания многоадресного трафика в сетях 5G NR // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 71–77. doi: 10.14357/19922264230210. EDN: SLMGZU.

10. Горшенин А. К., Горбунов С. А., Волканов Д. Ю. О кластеризации объектов сетевой вычислительной инфраструктуры на основе анализа статистических аномалий в трафике // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 76–87. doi: 10.14357/19922264230311. EDN: XHTMVI.
11. Острикова Д. Ю., Голос Е. С. Бесчастный В. А., Мачнев Е. А., Шоргин В. С., Гайдамака Ю. В. Метод оценки характеристик систем 5G/6G «новое радио» с учетом макро- и микромобильности пользователей // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 2. С. 32–39. doi: 10.14357/19922264240205. EDN: JCUFHS.

Поступила в редакцию 15.12.2025

Принята к публикации 15.02.2026

FUNCTIONAL CHARACTERISTICS OF VERTEX CLUSTERS OF A MULTIUSER NETWORK SYSTEM

Yu. E. Malashenko and I. A. Nazarova

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Within computational experiments, internodal transmission modes and resource distribution in a multiuser network system are investigated. The concept of a vertex cluster of outgoing flows is introduced. For each network vertex, the vector of outgoing internodal flows transmitted simultaneously from a source node to all cluster recipients is computed and analyzed. Two internodal dispatching methods are examined: shortest-path routing and maximum-flow routing between source–destination pairs. For each cluster, relative edge-utilization metrics and specific network resource consumption are determined. Based on the obtained numerical characteristics, a comparative multiparameter analysis of various routing strategies is performed. Furthermore, normalized flow vectors are compared for both individual and simultaneous transmission from source to destination. The position of each cluster’s central vertex within the network is evaluated. The calculations were performed for networks with different structural features and the same total capacity of edges. The experimental results are illustrated with special diagrams.

Keywords: streaming model of the communication network; vertex clusters; unit cost of resources

DOI: 10.14357/19922264260107

EDN: UYNUTF

References

1. Malashenko, Yu. E., and I. A. Nazarova. 2024. Sravnitel’nyy analiz uzlovykh mul’tipotokov v mnogopol’zovatel’skoy setevoy sisteme [Analysis of node multiflows in a multiuser network system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):40–45. doi: 10.14357/19922264240106. EDN: AKCMCQ.
2. Malashenko, Yu. E., and I. A. Nazarova. 2024. Metric estimates of the nodal multiflows in a multiuser network system. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 63(3):479–491. doi: 10.1134/S1064230724700357. EDN: SKDCXT.
3. Danskin, J. M. 1970. *The theory of Max-Min and its application to weapons allocation problems*. Berlin: Springer-Verlag. 128 p. doi: 10.1007/978-3-642-46092-0.
4. Germeyer, Yu. B. 1971. *Vvedenie v teoriyu issledovaniya operatsiy* [Introduction to operations research theory]. Moscow: Nauka. 383 p.
5. Jensen, P. A., and J. W. Barnes. 1980. *Network flow programming*. New York, NY: Wiley. 408 p.
6. Lotov, A. V., and I. I. Pospelova. 2008. *Mnogokriterial’nye zadachi prinyatiya resheniy* [Multicriteria decision making tasks]. Moscow: Maks Press. 197 p.
7. Ogryczak, W., H. Luss, M. Pióro, D. Nace, and A. Tomaszewski. 2014. Fair optimization and networks: A survey. *J. Appl. Math.* 2014:612018. 25 p. doi: 10.1155/2014/612018.
8. Cormen, T. H., C. I. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. 2009. *Introduction to algorithms*. 3rd ed. Cambridge, MA: The MIT Press. 1313 p.
9. Samoylov, A. K., A. A. Platonova, V. S. Shorgin, and Yu. V. Gaidamaka. 2023. K modelirovaniyu effektivov obsluzhivaniya mnogoadresnogo trafika v setyakh 5G NR [On modeling the effects of multicast traffic servicing in 5G NR networks]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):71–77. doi: 10.14357/19922264230210. EDN: SLMGZU.
10. Gorshenin, A. K., S. A. Gorbunov, and D. Yu. Volkanov. 2023. O klasterizatsii ob’ektov setevoy vychislitel’noy infrastruktury na osnove analiza statisticheskikh anomalii v trafike [Toward clustering of network computing infrastructure objects based on analysis of statistical anomalies in network traffic]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):76–87. doi: 10.14357/19922264230311. EDN: XHTMVI.
11. Ostriкова, D. Yu., E. S. Golos, V. A. Beschastnyi, E. A. Machnev, V. S. Shorgin, and Yu. V. Gaidamaka.

2024. Metod otsenki kharakteristik sistem 5G/6G “novoe radio” s uchetom makro- i mikromobil’nosti pol’zovateley [Assessing the characteristics of 5G/6G “new radio” sys-

tems with user’s macro- and micromobility]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(2):32–39. doi: 10.14357/19922264240205. EDN: JCUFHS.

Received December 15, 2025

Accepted February 15, 2026

Contributors

Malashenko Yuri E. (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; malash09@ccas.ru

Nazarova Irina A. (b. 1966) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; irina-nazar@yandex.ru

УПОРЯДОЧЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ЛОНГИТЮДНЫХ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ КОИНТЕГРАЦИОННОГО АНАЛИЗА

М. П. Кривенко¹

Аннотация: Особого внимания при обработке лонгитюдных данных заслуживают методы многомерного коинтеграционного анализа, используемые для выявления долгосрочных взаимосвязей между несколькими нестационарными временными рядами. В статье применительно к задачам эконометрики рассмотрено использование коинтеграционного анализа при ранжировании множества объектов на основе единственного показателя — степени связанности составляющих наблюдаемого многомерного временного ряда. При этом подходе естественной оказывается обработка пары временных рядов. Если их больше, то можно применять некоторое преобразование данных так, чтобы получить требуемую структуру объекта, или обратиться к многомерному коинтеграционному анализу с последующей постановкой задачи многомерного упорядочения. Данные для экспериментов содержали детализированные по регионам характеристики инвестиционной деятельности: инвестиции в основной капитал (Inv), валовой региональный продукт (Prod), численность занятых человек. Для нахождения коинтегрирующего вектора для данных каждого субъекта строится регрессия процесса Prod по Inv, для которой коэффициент при Inv можно интерпретировать как коэффициент связанности r процессов инвестиций и валового регионального продукта с последующим использованием данной характеристики в качестве показателя эффективности экономической деятельности, в частности строить рейтинг регионов. В ходе регрессионного анализа получается не только оценка r^* , но и становятся известными ее выборочные характеристики, т. е. становится возможным получить представление о значимости отличий отдельных значений r^* .

Ключевые слова: регрессионный анализ; ложная регрессия; коинтеграционный анализ; коэффициент связанности; региональная экономика; инвестиции; валовой региональный продукт; численность занятых человек; статистика с \mathbf{R} ; критерии стационарности; упорядочение объектов

DOI: 10.14357/19922264260108

EDN: KCLPVN

1 Введение

В ходе прикладных научных исследований часто возникает необходимость анализировать так называемые лонгитюдные данные, полученные в результате серии повторных экспериментов, которые проводятся на наборе объектов и приводят к измерениям ряда показателей. Подобные ситуации могут встретиться, например, в здравоохранении, медицине, экономике, социологии. Обычно временная составляющая устанавливает строгий и научно значимый порядок проведения экспериментов, так как ключевая цель исследований состоит в изучении эволюции ряда показателей с течением времени и в том, как соответствующие изменения зависят от специфических характеристик объекта исследований. При этом тщательный статистический анализ таких данных должен учитывать их групповой характер, т. е. допускать, что измерения в рамках отдельных объектов могут быть коррелированы, в то время как наблюдения от разных объектов рассматриваются как независимые. Дополнительная сложность возникает из-за того, что формируемые наборы данных часто сильно разбалансированы, т. е. число доступных

измерений и моменты времени, когда были сделаны измерения, часто существенно различаются для различных объектов.

В течение последних нескольких десятилетий в статистической литературе было предложено множество соответствующих моделей (см., например, [1]) и сделаны неоднократные попытки их систематизации (см., например, [2, 3]) преимущественно в интересах медицины и здравоохранения. При этом в первую очередь внимание было сосредоточено на анализе множества одномерных лонгитюдных данных просто потому, что наличие сложных лонгитюдных данных не обязательно требует построения для всех исходов общей модели. Но когда речь идет о многомерности, да еще с изменениями во времени, стратегия совместного моделирования неизбежна. Причина в том, что внимание исследователя сосредоточено не только на анализе зависимости между отдельными характеристиками, но и на исследовании связи их эволюций, а также на изучении того, как связь между различными исходами развивается с течением времени.

Отдельные модели для низкой размерности многомерных лонгитюдных данных могут быть свя-

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, mkkrivenko@ipiran.ru

заны в многомерную смешанную модель путем указания совместного распределения случайных исходов для каждой из лонгитюдных составляющих; однако по мере увеличения числа исходов вычислительная нагрузка быстро возрастает, что делает оценку (в частности, по методу максимального правдоподобия) непрактичной для долгосрочных ситуаций. Частично подобные проблемы проклятья размерности удается решить путем снижения размерности [4], и тогда получающиеся результаты с лихвой вознаграждают за преодоление возникающих трудностей. Также весьма распространен подход к парному моделированию, основанный на работе [5], в котором подгоняются все возможные двумерные смешанные модели, а вывод строится на основе тех или иных аргументов. Метод оказывается достаточно гибким в отношении типа лонгитюдных откликов, что позволяет аналитику рассматривать линейные смешанные модели, обобщенные линейные смешанные модели или нелинейные смешанные модели, а также комбинацию трех моделей одновременно. Удивительно, что в упомянутых обзорах оставлены без внимания методы многомерного коинтеграционного анализа, используемые в эконометрике для выявления долгосрочных взаимосвязей между несколькими нестационарными временными рядами.

2 Коинтеграционный анализ

Базовым далее служит определение: ряд x_t без детерминированной компоненты, который имеет стационарное обратимое представление ARMA (Autoregressive Moving Average) после дифференцирования d раз, называется интегрированным порядка d , что обозначается как $x_t \sim I(d)$. Коинтеграционный анализ [6] заключается в одновременном моделировании временных рядов и выводам о взаимосвязях между ними, если некоторые из них или все они представляют собой интегрированные процессы того или иного порядка. Необходимость прибегать к нему обычно иллюстрируется так называемой ложной регрессией (см., например, [7] или [8, разд. 4.1]), когда при совместном регрессионном анализе нестационарных временных рядов (например, при совместном исследовании во времени доходов и потребления, инвестиций и производимого продукта), для каждого из которых используется разностно-стационарная модель, возникающие ошибки обычно коррелируют. В этом случае статистики соответствующих критериев значимости искажаются так, что нулевая гипотеза излишне часто отвергается для заданного критического значения, т.е. становится реальным риск «ложной регрессии».

Идея двумерной коинтеграции заключается в том, чтобы найти линейную комбинацию между двумя $I(d)$ -составляющими, которая дает переменную с более низким порядком интегрированности, а именно [6]: компоненты вектора x_t коинтегрированы порядка (d, b) , что обозначается как $x_t \sim CI(d, b)$, если все компоненты x_t суть $I(d)$ и существует такой вектор $\alpha \neq \mathbf{0}$, что $z_t = \alpha'x_t \sim I(d - b)$, $b > 0$. Вектор α называют коинтегрирующим вектором.

Востребованность такой модели данных во многом объясняется возможностью обнаруживать реальные устойчивые долгосрочные связи между нестационарными переменными. В простом и, как оказывается, практичном случае $d = 1$, $b = 1$ существование коинтегрирующего вектора приводит к тому, что хотя отдельные ряды нестационарны, их некоторая комбинация стационарна и характеризуется возвратом среднего к его стабильному долгосрочному равновесию.

Для оценивания коинтегрирующего вектора α , а также моделирования в целом и в частности динамического поведения $I(d)$ -переменных авторы [6] предложили двухступенчатую методику. На первом шаге строится регрессия по переменным из набора $I(1)$:

$$y_t = \alpha_1 x_{t,1} + \alpha_2 x_{t,2} + \dots + \alpha_K x_{t,K} + z_t, \quad t = \overline{1, T},$$

где z_t означает ошибку. Оцененный $(K + 1)$ -мерный коинтегрирующий вектор α^* дается как $\alpha^* = (1, -\alpha_1^*, -\alpha_2^*, \dots, -\alpha_K^*)^T$, где коинтегрирующий вектор нормализован относительно зависимой переменной y_t . Поскольку обычная скорость сходимости выборочного смещения в случае $I(0)$ равна только $O_P(T^{-1/2})$, а для $I(1) - O_P(T^{-1})$, в [9] получающаяся оценка коинтегрирующего вектора методом наименьших квадратов характеризуется как «сверхсостоятельная». Кроме того, было показано, что предельное распределение не является нормальным; следовательно, как и в случае ложных регрессий, типичные статистики t и F неприменимы. Тем не менее в случае коинтегрированности остатки от этой статической регрессии z_t^* есть $I(0)$. Оказывается ли этот ряд стационарным (т.е. являются ли переменные коинтегрированными), предлагается проверять с помощью критериев единичного корня (особенности использования соответствующих критических значений рассматриваются в [8, разд. 4.2]). После того как нулевая гипотеза о единичном корне для ряда z_t^* отвергается (т.е. $z_t^* \sim I(0)$), следует второй шаг двухступенчатой процедуры, на котором специфицируется модель коррекции ошибок ЕСМ (Error Correction Model). Для двумерного случая,

когда рассматриваются коинтегрированные переменные $y_t \sim I(1)$ и $x_t \sim I(1)$, спецификация ЕСМ может иметь вид:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \psi_0 + \gamma_1 z_{t-1}^* + \sum_{i=1}^K \psi_{1,i} \Delta x_{t-i} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^L \psi_{2,i} \Delta y_{t-i} + \varepsilon_{1,t}; \\ \Delta x_t &= \xi_0 + \gamma_2 z_{t-1}^* + \sum_{i=1}^K \xi_{1,i} \Delta y_{t-i} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^L \xi_{2,i} \Delta x_{t-i} + \varepsilon_{2,t}, \end{aligned}$$

где z_t^* — оценка ошибки исходной статической регрессии; $\varepsilon_{1,t}$ и $\varepsilon_{2,t}$ обозначают процессы белого шума; Δ — разностный оператор первого порядка (в частности, $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$), коэффициенты γ ., ψ . и ξ . суть параметры модели. Каждое из указанных соотношений ЕСМ утверждает, что изменения в определенном ряде (в частности, y_t) объясняются его собственной историей, запаздывающими изменениями в другом ряде (x_t для y_t) и погрешностью долгосрочного равновесия z_{t-1}^* в предыдущем периоде.

Как можно заключить из этих уравнений и исходной регрессии, в случае двух коинтегрированных $I(1)$ -переменных причинность по Грейнджеру [10] должна существовать по крайней мере в одном направлении, т.е. поведение одной переменной может помочь предсказать другую.

В отличие от двумерного случая и единственного коинтегрирующего вектора, при размерности $n > 2$ вектора x_t^T может существовать до $n - 1$ различных линейных комбинаций, каждая из которых даст ряд с меньшим порядком интегрированности. Далее, если имеются несколько коинтегрирующих векторов, то произвольная линейная комбинация этих векторов тоже будет коинтегрирующим вектором (так как линейная комбинация стационарных рядов — тоже стационарный ряд). Соответственно, можно говорить о пространстве коинтегрирующих векторов. Размерность этого пространства называется рангом коинтеграции.

Для распространения на многомерный случай понятия коинтеграции и векторной модели коррекции ошибок VECM (Vector Error Correction Model) введенные понятия необходимо обобщить [11]. Ссылки на публикации, в которых были разработаны оценки максимального правдоподобия векторов коинтеграции для авторегрессионного процесса, приведены в [8, разд. 4.3], а подробное и лаконичное изложение этого подхода дано в монографии [12].

После того как ранг коинтеграции определен, могут быть оценены коинтегрирующие векторы и остальные параметры модели [8, формулы 4.15–4.18].

3 Количественный анализ инвестиций и валового продукта

Уровень и перспективы экономического развития страны во многом зависят от детализированных по регионам характеристик инвестиционной деятельности. К ее наиболее существенным индикаторам относятся три показателя: инвестиции в основной капитал; валовой региональный продукт; численность занятых человек. Для иллюстрации типичных исследований перечисленных показателей укажем три источника [13–15] и приведем описание возникающих ситуаций:

- (1) исследования на основе причинно-следственной связи инвестиции → продукт [14, 15] или продукт → инвестиции [13];
- (2) учет численности населения (только в [14]);
- (3) использование обычного регрессионного анализа без опасений возникновения ложной регрессии [14, 15], а также использование коинтеграционного анализа при моделировании без пояснений причин выбора именно его [13].

Официальная российская статистика предлагает обширную и подробную информацию, отражающую инвестиционную деятельность и ее результаты. В данной работе исходные данные для экспериментов формировались на основе статистических материалов Федеральной службы государственной статистики, сайт rosstat.gov.ru, и информации Единой межведомственной информационно-статистической системы, сайт fedstat.ru. Формирование сведений осуществлялось путем поиска по наборам ключевых слов с последующим ручным отбором документов, подходящих по годам и непротиворечивых по содержанию. При этом подчас приходилось объединять фрагменты различных таблиц. В результате пришлось ограничиться годами с 2016 по 2024 (всего 9 временных показаний), последний из которых не включал отсутствующую на сайтах информацию о валовом региональном продукте. Кроме этого было проведено сокращение общего официально существующего списка субъектов из-за отсутствия отдельных данных в исходных документах (например, для Донецкой Народной Республики) и в результате

объединения данных для отдельных частных позиций (например, три строки данных для субъектов «Ханты-Мансийский автономный округ – Югра», «Ямало-Ненецкий автономный округ», «Тюменская область без автономных округов» вошли в виде единой итоговой строки данных для субъекта «Тюменская область»). Такое усечение исходных данных привело в итоге к представлению информации о 82 субъектах из 89 существующих. Таким образом был сформирован Excel-файл IPEdata.xlsx (IPE, Investment–Product–Employee, инвестиции–продукт–занятые), включающий три таблицы, каждая размера 82×9 . Они содержали данные относительно:

- инвестиций в основной капитал в тысячах рублей (далее — таблица «Инвестиции», а соответствующий процесс для отдельного субъекта обозначен как Inv);
- валового регионального продукта в тысячах рублей (таблица «Продукты», процесс $Prod$);
- численности занятых в тысячах человек (таблица «Занятые»).

Источниками информации выступали:

- для таблицы «Инвестиции» — сайт fedstat.ru, для которого отбор по ключевым словам «инвестиции в основной капитал» привел к использованию документов сайта «Инвестиции в основной капитал (уточненные данные)» и «Инвестиции в основной капитал с 2017 г.»;
- для таблицы «Продукты» — сайт fedstat.ru, для которого отбор по ключевым словам «валовой региональный продукт» привел к использованию документа «Валовой региональный продукт в основных ценах (ОКВЭД 2)»;
- для таблицы «Занятые» — сайт rosstat.gov.ru, для которого отбор по ключевым словам «численность занятых» привел к использованию документа «Численность занятых в возрасте 15–72 лет и уровень занятости».

Ставилась задача выявления связи выбранных показателей между собой и, если она есть, исследование возможности ее использования для построения рейтингов субъектов. Особое внимание обращалось на обеспечение надежности применяемых статистических методов: анализ непротиворечивости исходных данных; выбор наиболее подходящих методов анализа данных; выяснение возникающих проблем при их применении к множеству объектов; формирование представления о возможностях программных средств коинтеграционного анализа платформы **R**.

Диапазон эффективного применения коинтеграционного анализа можно расширить за счет

преобразования исходных данных, которое в большинстве случаев не цель, а скорее средство для ее достижения. Конечная выгода обычно заключается не в том, чтобы преобразование достигало непосредственного результата, а скорее в том, чтобы оно позволяло сделать последующий анализ более простым, наглядным или точным. В этом смысле выбор конкретного преобразования часто не имеет значения; важно то, как это помогает в описании и интерпретации данных. Поэтому, если предоставляется возможность, разумно опробовать как варианты с преобразованиями, так и без них.

С учетом характера изменений значений отдельных признаков во времени выбор пал на логарифмическое преобразование. Это статистическая техника, применяемая к данным для уменьшения их изменчивости, устранения выбросов и приведения данных в соответствие с предположениями регрессионных моделей (постоянство дисперсии, нормальный или близкий к нему характер распределения). Преобразование применялось только к исходным данным. Заметим, что принятие логарифма определялось характером временных изменений данных, т.е. было в определенном смысле естественным. Кроме того, представление переменных в логарифмической форме придает при интерпретации параметрам модели данных смысл процентной эластичности [13].

Начнем с анализа связи между инвестициями в основной капитал и валовым региональным продуктом. Для нахождения коинтегрирующего вектора для данных каждого субъекта необходимо построить регрессию процесса $Prod$ по Inv , для которой коэффициент при Inv обозначим как r . С его помощью можно связать изменения значений Inv и $Prod$, т.е. интерпретировать r как коэффициент связанности процессов инвестиций и валового регионального продукта с последующим использованием данной характеристики в качестве показателя эффективности экономической деятельности.

Графический анализ данных Inv и $Prod$ свидетельствует о том, что соответствующим процессам свойственна изменчивость (преимущественно рост) значений во времени. Для формального подтверждения этого в рамках коинтеграционного анализа обычно используется критерий единичного корня Дики–Фуллера (конкретизация критерия здесь и далее осуществляется указанием соответствующей функции платформы **R**, в данном случае это `tseries::adf.test`). Соответствующая процедура основывается на таблице 4.2 значений эмпирических функций распределения [16], построенных для объемов выборки, не меньшего чем 25 (заметим,

что данное ограничение в \mathbf{R} не задокументировано). Понятно, что при обработке IPE-данных это не так.

В процессе анализа данных необходимость критерия единичного корня также возникает в ходе оценивания коинтегрирующего вектора как свидетельство его существования. Чтобы не усложнять ситуацию, пришлось отказаться от поддержки критерия Дики–Фуллера при малых объемах данных методами статистических испытаний и обратиться к доступным критериям стационарности общего характера. При этом фактически происходит отказ от необходимости различать разностно-стационарную и тренд-стационарную модели данных. Но на предварительном этапе коинтеграционного анализа важнее определиться относительно нестационарности рядов, а «результаты тестов единичных корней не обязательно дают ответ на один важный вопрос, а именно: какая теория распределения обеспечивает лучшее приближение малой выборки?» [17]. Тем более что на завершающем этапе коинтеграционного анализа возникает задача подтверждения стационарности остатков для линейной комбинации исходных временных рядов и согласно [18] эффективность статистического вывода будет выше при нулевой гипотезе именно о стационарности, а не о нестационарности.

Исходя из представления о требуемых свойствах процедур контроля стационарности, был сформирован первоначальный перечень соответствующих тестов: критерий Квятковского–Филлипса–Шмидта–Шина (`urca::ur.kpss`); критерий пространственной зависимости Брока–Дечерта–Шейнкмена (`tseries::bds.test`); ранговый критерий случайности Бартельса (`randtests::bartels.rank.test`); критерий тренда Бокса–Стюарта (`randtests::cox.stuart.test`); знаковый критерий (`randtests::difference.sign.test`); ранговый критерий Манна–Кендалла (`randtests::rank.test`); критерий серий Вальда–Вольфовица (`randtests::runs.test`); критерий точки поворота (`randtests::turning.point.test`). Среди них к приемлемым (т. е. имеющим возможность обрабатывать небольшие объемы данных и демонстрировать адекватную реакцию на параметры модели данных) можно отнести `difference.sign.test`, `rank.test`, `runs.test` и `turning.point.test`, среди которых на имеющихся данных сообразные (т. е. соответствующие задаваемым уровням значимости и адекватно реагирующие на действие разностного оператора) результаты показали `difference.sign.test` и `rank.test`.

В ходе исследований было необходимо определиться с заданием уровня значимости α . При малых объемах выборок становится нецелесообразным принимать незначительные значения α хотя

бы из-за того, что точных распределений статистик обычно нет. Еще одна особенность заключается в многократном использовании одних и тех же критериев значимости для фактически различных, дополняющих друг друга нулевых гипотез. Пусть есть нулевая гипотеза H_0 о стационарности, которая принимается с помощью некоторого критерия при уровне значимости α_S . Значение α_S выбирается малым, чтобы подчеркнуть тем самым важность H_0 . Этот же критерий используется и для установления нестационарности. Чтобы отразить смещение акцентов в рисках при выборе решения, надо задать так уровень значимости α_N , что $\alpha_N > \alpha_S$. Далее назначались значения $\alpha_N = 10\%$ (принятие решения о нестационарности рядов, участвующих в коинтеграционном анализе) и $\alpha_S = 5\%$ (принятие решения о стационарности остатков в регрессионном анализе).

Построение коинтегрирующего вектора для данных каждого субъекта включало проверку стационарности анализируемых рядов `Inv` и `Prod`, установление регрессионной зависимости `Prod` от `Inv`, проверку стационарности соответствующих остатков (ряда `Res`). Таблица 1 содержит абсолютные частоты встречаемости определенных результатов: S — принятие гипотезы о стационарности; N_D и N_I — отвержение гипотезы о стационарности с уточнением характера изменений, а именно: убывание/возрастание значений (соответственно D/I).

Таблица 1 Абсолютные частоты встречаемости характера изменений процессов `Inv` и `Prod`

Характер изменений	Временной ряд		
	<code>Inv</code>	<code>Prod</code>	<code>Re</code>
S	15	2	79
N_D	2	0	0
N_I	65	80	3

Как видно из табл. 1, всего для трех субъектов (их коды — 6, 29 и 69) остатки представляют собой нестационарные процессы типа N_I и в силу этого коинтегрирующих векторов не существует; по этой причине соответствующие данные из последующего анализа были исключены. Интересно указать, что для субъектов с кодами 6 и 29 в процессах инвестиций не зафиксированы значимые изменения, а для субъекта с кодом 69 при нестационарных рядах инвестиций и валового регионального продукта процесс остатков не стал стационарным. Как итог предлагаемая модель данных в перечисленных случаях не подходит. Но если все же обратиться к результатам регрессионного анализа, то соответствующий параметр, которому отвечает коэффициент связности, ожидаемо окажется нулевым (связь

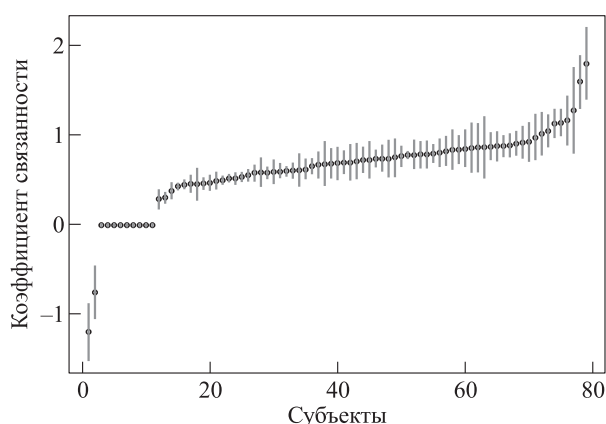


Рис. 1 Значения коэффициента связанности процессов *Inv* и *Prod* для отдельных субъектов

между изменениями анализируемых процессов не обнаруживается).

Упорядоченные по возрастанию оценки коэффициента связанности r^* для оставшихся 79 субъектов помечены точками и приведены на рис. 1. Напомним, что благодаря регрессионному анализу получается не только оценка r^* , но и становятся известными ее выборочные характеристики. Открывающиеся в связи с этим перспективы отражены на рис. 1:

- если прибегнуть к возможности проверить нулевую гипотезу о конкретном значении r , то с 95%-ной надежностью удастся выделить группу субъектов с нулевой связанностью инвестиций и валового продукта; на рис. 1 их номера с 3 по 11, а коды соответственно 8, 11, 35, 39, 49, 53, 65, 67 и 91;
- если использовать информацию об ошибках оценок r^* и добавить в виде вертикальных отрезков диапазон возможных значений (на рис. 1 это \pm стандартное отклонение), то можно получить представление о значимости отличий отдельных значений r^* .

Таким образом удастся построить коинтегрирующие векторы и извлечь информацию о степени обусловленности изменений валового продукта от изменений объема инвестиций, т. е. ответить на вопрос: насколько существенно увеличится валовой продукт при одном и том же приросте инвестиций? Это и есть коэффициент связанности r , с помощью значений которого субъекты могут быть упорядочены.

Чтобы привлечь дополнительную информацию о численности занятых и остаться в рамках двухмерного анализа, достаточно перейти к относительным величинам, поделив для каждого года выбранные

показатели на численность занятых, и для полученных временных рядов *Inv* и *Prod* заново повторить всю цепочку процедур обработки данных. Итоговые результаты сведены в табл. 2, которая оказалась схожей с табл. 1.

Теперь уже для четырех субъектов (с кодами 6, 8, 53 и 69) остатки представляют собой нестационарные процессы типа N_I (т. е. коинтегрирующих векторов не существует), в силу чего соответствующие данные исключаются. Упорядоченные по возрастанию оценки коэффициента связанности r^* для оставшихся 78 субъектов помечены точками и приведены на рис. 2.

Получив в результате перехода к относительным показателям иную ранжировку субъектов, естественно задаться вопросом, насколько она отличается от исходной, полученной без преобразований рядов *Inv* и *Prod*. Для сравнения двух упорядочений одних и тех же объектов используем коэффициент ранговой корреляции τ Кендалла (`stats::cor.test(..., method = "kendall")`), для корректного применения которого пришлось объединить множества исключаемых субъектов (теперь их коды суть 6, 8, 29, 53 и 69). Для имеющихся данных $\tau = 0,147$, что дает p -значение $\approx 6\%$ при проверке нулевой гипотезы о независимости двух перестановок. Таким образом, последовательности коэффициентов связанности, полученные для абсолютных и относительных измерений, выглядят

Таблица 2 Абсолютные частоты встречаемости характера изменений процессов *Inv* и *Prod*

Характер изменений	Временной ряд		
	<i>Inv</i>	<i>Prod</i>	<i>Re</i>
S	14	2	78
N_D	1	0	0
N_I	67	80	4

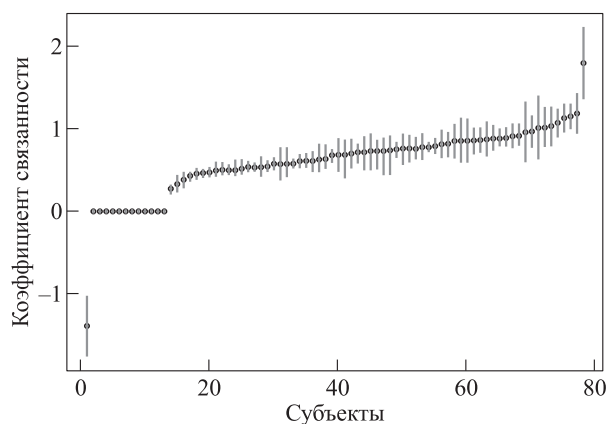


Рис. 2 Значения коэффициента связанности процессов *Inv* и *Prod* для отдельных субъектов

(при 5%-ном уровне значимости) скорее различны, чем схожими.

При визуальном сравнении рис. 1 и 2 обращает на себя внимание несколько меньший разброс возможных значений оценок коэффициентов связанности (длины вертикальных отрезков) для *Inu* и *Prod*, а также большее число субъектов с нулевым значением r^* , но считать эти суждения значимыми нет оснований.

Задействованный коинтеграционный анализ в дополнение к полученным результатам позволяет также:

- высказаться о преимуществах той или иной цепочки причинно-следственных связей между инвестициями и валовым продуктом на основе причинности по Грейнджеру;
- спрогнозировать отсутствующие значения валового продукта в 2024 г.

4 Заключение

Протяженность (лонгитюдность), многомерность, разбалансированность, ограниченность объема наблюдаемых данных создают существенные трудности при моделировании данных. Пополнение набора задач анализа данных новыми постановками (в частности, это упорядочение объектов в многомерном случае) усугубляет трудности построения статистического вывода на основании лонгитюдных данных. В статье применительно к задачам эконометрики обсуждено применение коинтеграционного анализа при ранжировании множества объектов на основе единственного показателя — степени связанности составляющих наблюдаемого многомерного временного ряда. При этом подходе естественным путем можно обрабатывать двухмерные объекты, т. е. пары временных рядов. Если их больше, то можно применять некоторое преобразование данных так, чтобы получить требуемую структуру объекта. Если же снижение размерности не приводит к нужному итогу, то можно обратиться к многомерному коинтеграционному анализу с последующей постановкой задачи многомерного упорядочения и разработкой методов ее решения. Последнее существенно зависит от знаний в той предметной области, для которой решается задача ранжирования, и соответственно требует специфических знаний.

Таким образом, рассмотрен научно обоснованный метод обработки сложных лонгитюдных данных, допускающих наличие нестационарности по времени, и на примере задачи упорядочения многомерных объектов продемонстрирована его плодотворность.

Литература

1. *Fitzmaurice G. M., Laird N. M., Ware J. H.* Applied longitudinal analysis. — 2nd ed. — Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2011. 752 p.
2. *Bandyopadhyay S., Ganguli B., Chatterjee A.* A review of multivariate longitudinal data analysis // *Stat. Methods Med. Res.*, 2011. Vol. 20. Iss. 4. P. 299–330. doi: 10.1177/0962280209340191.
3. *Verbeke G., Fieuws S., Molenberghs G., Davidian M.* The analysis of multivariate longitudinal data: A review // *Stat. Methods Med. Res.*, 2014. Vol. 23. Iss. 1. P. 42–59. doi: 10.1177/0962280212445834.
4. *Кривенко М. П.* Байесовская классификация серий многомерных данных // *Системы и средства информатики*, 2020. Т. 30. № 1. С. 34–45. doi: 10.14357/08696527200103. EDN: DSSUBO.
5. *Fieuws S., Verbeke G., Molenberghs G.* Random-effects models for multivariate repeated measures // *Stat. Methods Med. Res.*, 2007. Vol. 16. Iss. 5. P. 387–397. doi: 10.1177/0962280206075305.
6. *Engle R. F., Granger C. W. J.* Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing // *Econometrica*, 1987. Vol. 55. Iss. 2. P. 251–276. doi: 10.2307/1913236.
7. *Granger C. W. J., Newbold P.* Spurious regressions in econometrics // *J. Econometrics*, 1974. Vol. 2. Iss. 2. P. 111–120. doi: 10.1016/0304-4076(74)90034-7.
8. *Pfaff B.* Analysis of integrated and cointegrated time series with R. — 2nd ed. — New York, NY, USA: Springer, 2008. 190 p. doi: 10.1007/978-0-387-75967-8.
9. *Stock J. H.* Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors // *Econometrica*, 1987. Vol. 55. Iss. 5. P. 1035–1056. doi: 10.2307/1911260.
10. *Granger C. W. J.* Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // *Econometrica*, 1969. Vol. 37. Iss. 3. P. 424–438. doi: 10.2307/1912791.
11. *Campbell J. Y., Perron P.* Pitfalls and opportunities: What macroeconomists should know about unit roots // *NBER Macroecon. Annu.*, 1991. Vol. 6. P. 141–218.
12. *Johansen S.* Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models. — *Advanced texts in econometrics ser.* — Oxford: Oxford University Press, 1995. 280 p.
13. *Безбородова А. В.* Об эконометрической модели анализа и прогнозирования инвестиций в основной капитал // *Экономика, моделирование, прогнозирование*, 2008. Вып. 2. С. 302–309. EDN: CPTSUK.
14. *Беляничев В. Г., Савдерова А. Ф.* Оценка влияния инвестиций в основной капитал на объем валового регионального продукта // *Oeconomia et jus*, 2019. № 1. С. 15–21. EDN: ZALDPN.
15. *Долгунова А. Ц.* Оценка влияния инвестиций в основной капитал на экономический рост северных

- субъектов Российской Федерации // Статистика и экономика, 2023. Т. 20. № 6. С. 35–47. doi: 10.21686/2500-3925-2023-6-35-47. EDN: TXYLJJ.
16. Banerjee A., Dolado J. J., Galbraith J. W., Hendry D. F. Co-integration, error correction, and the econometric analysis of non-stationary data. — Oxford: Oxford University Press, 1993. 329 p.
17. Cochrane J. H. A critique of the application of unit root tests // J. Economic Dynamics Control, 1991. Vol. 15. Iss. 2. P. 275–284. doi: 10.1016/0165-1889(91)90013-Q.
18. Кривенко М. П. Сравнительный анализ тестов стабильности системы массового обслуживания // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 61–66. doi: 10.14357/19922264250108. EDN: XDTUNK.

Поступила в редакцию 22.12.2025

Принята к публикации 15.02.2026

ORDERING OF MULTIVARIATE LONGITUDINAL DATA BASED ON COINTEGRATION ANALYSIS

M. P. Krivenko

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: In the processing of longitudinal data, multivariate cointegration analysis methods deserve for special attention identifying long-term relationships between several nonstationary time series. In relation to the problems of econometrics, the article discusses the application of cointegration analysis to the ranking of objects based on a single indicator: the degrees of connectivity between the components of an observed multidimensional time series. With this approach, it is natural to process a couple of time series. For higher-dimensional cases, it is proposed to apply specific data transformations to obtain the required structure of the object or turn to multidimensional cointegration analysis followed by a multidimensional ordering problem formulation. The data for the experiments contained detailed characteristics of investment activity by region: investment in fixed assets (Inv), gross regional product (Prod), and number of employed people. To find a cointegrating vector for the data of each subject, a regression of the Prod process on Inv is constructed, for which the coefficient at Inv can be interpreted as the relate coefficient r processes of investment and gross regional product with the subsequent use of this characteristic as an indicator of the efficiency of economic activity, in particular, to build a rating of regions. In the course of regression analysis, not only an estimate of r^* is obtained but also its selective characteristics become known, i. e., it becomes possible to get an idea of the significance of differences between individual r^* values.

Keywords: regression analysis; spurious regression; cointegration analysis; relate coefficient; regional economy; investments; gross regional product; number of employed persons; statistics with \mathbf{R} ; tests for stationarity; object ordering

DOI: 10.14357/19922264260108

EDN: KCLPVN

References

1. Fitzmaurice, G. M., N. M. Laird, and J. H. Ware. 2011. *Applied longitudinal analysis*. 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley. 752 p.
2. Bandyopadhyay, S., B. Ganguli, and A. Chatterjee. 2011. A review of multivariate longitudinal data analysis. *Stat. Methods Med. Res.* 20(4):299–330. doi: 10.1177/0962280209340191.
3. Verbeke, G., S. Fieuws, G. Molenberghs, and M. Davidian. 2014. The analysis of multivariate longitudinal data: A review. *Stat. Methods Med. Res.* 23(1):42–59. doi: 10.1177/0962280212445834.
4. Krivenko, M. P. 2020. Bayesovskaya klassifikatsiya seriy mnogomernykh dannykh [Bayesian classification of serial multivariate data]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 30(1):34–45. doi: 10.14357/08696527200103. EDN: DSSUBO.
5. Fieuws, S., G. Verbeke, and G. Molenberghs. 2007. Random-effects models for multivariate repeated measures. *Stat. Methods Med. Res.* 16(5):387–397. doi: 10.1177/0962280206075305.
6. Engle, R. F., and C. W. J. Granger. 1987. Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica* 55(2):251–276. doi: 10.2307/1913236.
7. Granger, C. J., and P. Newbold. 1974. Spurious regressions in econometrics. *J. Econometrics* 2(2):111–120. doi: 10.1016/0304-4076(74)90034-7.
8. Pfaff, B. 2008. *Analysis of integrated and cointegrated time series with R*. 2nd ed. New York, NY: Springer. 190 p. doi: 10.1007/978-0-387-75967-8.
9. Stock, J. H. 1987. Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors. *Econometrica* 55(5):1035–1056. doi: 10.2307/1911260.

10. Granger, C. W. J. 1969. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica* 37(3):424–438. doi: 10.2307/1912791.
11. Campbell, J. Y., and P. Perron. 1991. Pitfalls and opportunities: What macroeconomists should know about unit roots. *NBER Macroecon. Annu.* 6:141–218.
12. Johansen, S. 1995. *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*. Advanced texts in econometrics ser. Oxford: Oxford University Press. 280 p.
13. Bezborodova, A. V. 2008. Ob ekonometricheskoy modeli analiza i prognozirovaniya investitsiy v osnovnoy kapital [On an econometric model for analyzing and forecasting investments in fixed capital]. *Ekonomika, modelirovanie, prognozirovanie* [Economics, Modeling, Forecasting] 2:302–309. EDN: CPTSUK.
14. Belyanichev, V. G., and A. F. Savderova. 2019. Otsenka vliyaniya investitsiy v osnovnoy kapital na ob'em valovogo regional'nogo produkta [Assessment of the impact of real fixed capital formation on the volume of the gross regional product]. *Oeconomia et jus* [Economics and Law] 1:15–21. EDN: ZALDPN.
15. Dolgunova, A. Ts. 2023. Otsenka vliyaniya investitsiy v osnovnoy kapital na ekonomicheskiy rost severnykh sub'ektov Rossiyskoy Federatsii [Assessment of the impact of investment in fixed assets on the economic growth of the northern subjects of the Russian Federation]. *Statistika i ekonomika* [Statistics and Economics] 20(6):35–47. doi: 10.21686/2500-3925-2023-6-35-47. EDN: TXYLJJ.
16. Banerjee, A., J. J. Dolado, J. W. Galbraith, and D. F. Hendry. 1993. *Co-integration, error correction, and the econometric analysis of non-stationary data*. Oxford: Oxford University Press. 329 p.
17. Cochrane, J. H. 1991. A critique of the application of unit root tests. *J. Economic Dynamics Control* 15(2):275–284. doi: 10.1016/0165-1889(91)90013-Q.
18. Krivenko, M. P. 2025. Sravnitel'nyy analiz testov stabil'nosti sistemy massovogo obsluzhivaniya [Comparative analysis of queuing system stability tests]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(1):61–66. doi: 10.14357/19922264250108. EDN: XDTUNK.

Received December 22, 2025

Accepted February 15, 2026

Contributor

Krivenko Michail P. (b. 1946) — Doctor of Science in technology, professor, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; mkrivenko@ipiran.ru

О РЕЛЯЦИОННОЙ ФОРМЕ РЕШЕНИЯ СЕТЕВЫХ КОАЛИЦИОННЫХ ИГР

Н. С. Васильев¹

Аннотация: Исследована реляционная постановка игровой задачи, имеющая приложения к мультиагентным системам (МАС) и к задачам кооперативной робототехники. Изучена модель игры с участием большого числа интеллектуальных агентов, способных к кооперативному поведению. Поиск рационального разрешения конфликта основан на сетевом взаимодействии игроков, которое порождается формированием агентами устойчивых коалиций. С этой целью игроки применяют обобщения отношений предпочтений и возможностей. Для поиска оптимальной сетевой структуры и ситуации равновесия используется редукция игровой задачи, опирающаяся на ее композициональность в категории бинарных отношений. Предложен распределенный полиномиальный алгоритм решения реляционной сетевой игровой задачи, включающий поиск каждым игроком эффективной или параллельной коалиции. Доказано существование разбиения игроков по устойчивым параллельным коалициям и дана их классификация, отражающая степень их устойчивости.

Ключевые слова: реляционная игра; отношение: предпочтений, возможностей, характеристическое; предпорядок; сетевая структура; редукция игры; эффективная коалиция; параллельные коалиции: сильная, ярусная, слабая, смешанная

DOI: 10.14357/19922264260109

EDN: OВVKFZ

1 Отношения предпочтений и возможностей игроков. Постановка задачи

Рассмотрена МАС, в которой каждый из k , $k \geq 1$, агентов наделен искусственным интеллектом для принятия рационального решения. Каждый игрок обладает некоторым отношением предпочтений, которое он стремится по возможности максимизировать. Эти отношения служат предпорядками, заданными на множестве допустимых ситуаций игры. Все игроки обладают способностью обмениваться информацией, расширяющей исходные конечные множества стратегий-констант до классов допустимых стратегий-функций [1]. Целью кооперации игроков ставится достижение равновесия игры.

В отличие от традиционной постановки игровой задачи, ситуациями игры служат попарно различные варианты, или «сценарии» S_j , $j = \overline{1, J}$, ее завершения. При исследовании больших МАС число этих вариантов J будем считать ограниченным сверху величиной $J(k)$. При этом функция $k \rightarrow J(k)$ полиномиально растет при увеличении числа игроков $k \rightarrow \infty$. Заметим, что классическое понимание ситуаций игры как кортежей выбираемых игроками стратегий приводит к экспоненциальному росту их числа при $k \rightarrow \infty$. Это во многом препятствует практическому приложению теории игр [2–4].

В реляционных играх интересы участников конфликта $i \in I$, $I = \{1, 2, \dots, k\}$, представлены бинарными отношениями *предпочтений* $\rho_i : S \rightarrow S$ [5, 6], заданными на конечном множестве S возможных сценариев $S_j \in S$, $j \in J$. Предполагается, что это *предпорядки* ρ_i , $\rho_i \in \text{REL}(S, S)$, известные всем игрокам.

Степень влияния агентов на реализацию тех или иных вариантов окончания конфликта также может быть выражена в сравнительной форме трехарного отношения *возможностей* $\text{OP} \in \text{REL}(I, I, S)$. Его смысл состоит в том, что при выполнении условия $(i_1, i_2, S_j) \in \text{OP}$, или в эквивалентной записи $i_1 \prec_{\text{OP}(S_j)} i_2$, большие шансы на реализацию сценария S_j имеет игрок i_2 по сравнению с игроком i_1 . Таким образом, отношение OP характеризует имеющиеся у игроков организационные возможности и ресурсы для достижения тех или иных вариантов завершения конфликта.

Пример 1.1. На аукцион (см. [4]) выставлены m товаров. Имеются k участников, стремящихся максимизировать свои предпочтения ρ_i , $i \in I$. Ситуации игры — это предполагаемые итоги торгов, выражаемые векторами цен продаж $S_j = (p_1^j, \dots, p_m^j) \in S$. Отношением OP заданы сравнительные возможности игроков.

Сетевая структура игры

Намерение каждого агента $i \in I$ заключается в реализации оптимального для него варианта за-

¹Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, nik8519@yandex.ru

вершения игры как одного из максимальных элементов предпорядка:

$$\rho_i \rightarrow \text{MAX}_S, i \in I. \quad (1)$$

Как правило, у игроков различаются оптимальные сценарии. Для разрешения конфликта интересов они вынуждены идти на компромиссы. Рациональное поведение агентов основано на применении игровых принципов эффективности и равновесия [1]. В игровом равновесии каждый из игроков «удовлетворен» достигнутой ситуацией. Для его поиска интеллектуальные агенты стараются уменьшить неопределенность при принятии решения с помощью коммуникаций [1–9].

В отличие от эвристических методов выбора сетевой структуры игры [7], в предлагаемом подходе ее поиск происходит с помощью коллективных действий агентов, занятых формированием коалиций. В рамках коалиций увеличивается информированность партнеров. Рациональное сетевое взаимодействие игроков «выливается» в общее стремление сформировать оптимальную сетевую структуру коммуникаций $G = G^*$ [7, 9]. Последняя порождает отношение *предшествования* ходов.

Всякий игрок в некоторый момент времени должен сделать свой ход, под которым понимается выбор им допустимой стратегии, в том числе предполагающей решение о вступлении в какую-либо коалицию. Об этом должно сообщаться всем участникам игры [8].

Коалиционное поведение игроков

Построение оптимальной сети G^* связано с поиском игроками устойчивых коалиций. Среди них выделяются *эффективные*, последовательные, или иерархические коалиции C^{ef} , C^h , опирающиеся на «схожесть» отношений предпочтения агентов [9]. Формирование *параллельных* устойчивых коалиций C^p происходит с опорой на отношение возможностей.

Процесс разбиения игроков на коалиции должен сопровождаться редукцией игровой задачи [8, 9], завершающейся созданием итоговой коалиции C^Γ , в которую объединены все участники конфликта [5].

Любая коалиция C обладает *характеристическим* отношением предпочтений ρ^C . Оно строится из исходных отношений предпочтений партнеров $\rho_i, i \in C$. Для их композиции применяются операции моноидальной категории REL, а также рефлексивное и транзитивное замыкание отношений [10, 11]. Поэтому морфизмы ρ^C являются предпорядками. В частности, «порождаемое» кооперацией агентов *результатирующее* отношение игры $\rho^C \equiv \rho^\Gamma(G)$,

$C = C^\Gamma$, полностью определяется создаваемой сетевой структурой G .

Постановка задачи

Требуется найти равновесие $S_j^* \equiv S_{j^*}$ реляционной сетевой игры $\langle (1), I, S, OP, \{\rho_i\}, G \rangle$, отвечающее *оптимальной* сетевой структуре $G = G^*$. Оно представляет собой решение следующей задачи максимизации результирующего порядка:

$$\rho^\Gamma(G^*) \rightarrow \text{MAX}_S. \quad (2)$$

В [12] была обоснована масштабируемость распределенного алгоритма численного поиска равновесия реляционной игры $G^* = \{C^{ef}\} \cup \{C^h\}$, $OP = \emptyset$, который включал процесс формирования лишь эффективных коалиций. Далее эти результаты обобщены на случай использования игроками устойчивых параллельных коалиций.

Применение реляционного моделирования в кооперативной робототехнике рассмотрено в работах [12–16].

2 Продолжение отношения возможностей на множество коалиций

Дополнительно потребуем, чтобы при любом фиксированном сценарии $S_j, j = \overline{1, J}$, всякое бинарное отношение $OP|_{S_j} \equiv OP_j : I \rightarrow I, j = \overline{1, J}$, оказывалось *предпорядком* [11], известным всем участникам игровой операции.

Композициональность коалиционных отношений позволяет для решения задачи применять последовательную редукцию исходной игры [5, 6, 9].

Редукция игровой задачи

Наряду с обычными игроками в редуцированной игре «появляются» агенты C , представляющие собой коалиции, которые замещают всех партнеров $i \in C$ по этой коалиции. Интересы игроков $C \in \tilde{I}, \tilde{I} = \{C_s\}$, представлены *характеристическими* отношениями [5]:

$$\rho^C = \rho^C(OP, \Theta^C), \quad \Theta^C = \{\rho_i, i \in C\}.$$

Исходные игроки $i \in I$ теперь рассматриваются как «вырожденные» коалиции $\{i\} \in \tilde{I}$, состоящие из единственного участника. Строение предпорядков ρ^C зависит не только от множества исходных

предпочтений Θ^C , но и от заданного отношения возможностей.

Общей целью партнеров по коалиции ставится достижение одной из оптимальных ситуаций (1) в редуцированной игре, т.е. решение следующей задачи максимизации:

$$\rho^C(\text{OP}, \Theta^C) \rightarrow \text{MAX}_S.$$

По мере формирования новых коалиций проводится очередная редукция задачи. Поэтому коалиции могут состоять из любого числа партнеров. После окончательной редукции задачи получается разбиение всех игроков на коалиции $\{C_s\}$, причем

$$\forall_{C_1, C_2 \in \bar{I}} C_1 \neq C_2 \Leftrightarrow C_1 \cap C_2 = \emptyset.$$

Процесс редукции задачи предполагает не только формирование коалиций, но и распространение $\overline{\text{OP}}$ отношения возможностей игроков $\text{OP} \subset \overline{\text{OP}}$. Заметим, что вступление игрока в коалицию должно увеличивать его в возможности, т.е. всегда $\forall_j(i, C) \in \overline{\text{OP}}_j, i \in C$. Чтобы построить соответствующее продолжение $\overline{\text{OP}}$, воспользуемся внутренним строением предпорядков.

Ярусное строение предпорядков

Зафиксируем произвольный сценарий $S_j, j = \overline{1, J}$, и рассмотрим предпорядок $\text{OP}_j : I \rightarrow I$. С его помощью множество элементов I разобьем на части $H_s = H_s(j), s = \overline{1, p(j)}, H_{p(j)+1} = \emptyset$, называемые *ярусами*. Они строятся индуктивно.

Определение 2.1. Множество минимальных элементов предпорядка OP_j образует самый нижний ярус $H_1 = \text{MIN}(\text{OP}_j)$. Пусть уже имеются ярусы $H_s, s = \overline{1, p-1}$. С помощью сужения $\text{OP}_j|_{I_p} : I_p \rightarrow I_p, I_p = I \setminus \cup_{s=1}^{p-1} H_s$, отношения возможностей построим очередной, более высокий, ярус

$$H_p = \text{MIN}(\text{OP}_j|_{I_p}), p = \overline{1, p(j)}. \quad (3)$$

Межъярусной назовем всякую стрелку $(i', i) \in \text{OP}_j$, такую что

$$\exists_s (s \in \{1, 2, \dots, p(j) - 1\}) \wedge (i' \in H_s) \wedge (i \in H_{s+1}).$$

Для нее будем использовать пометку $(i', i)_p \in \text{OP}_j$ с номером яруса (3).

На рис. 1 видны межъярусные стрелки $(1, 3)_1, (2, 4)_1$ и $(3, 4)_2$.

Пример 2.1. Найдем ярусное строение следующего предпорядка, представленного на рис. 1.

Чем выше ярус, на котором находится игрок в графе отношения OP_j , тем большими возможностями он обладает для достижения исхода игры S_j ,

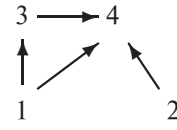


Рис. 1 Разбиение на ярусы: $H_1 = \{1, 2\}, H_2 = \{3\}, H_3 = \{4\}$

$j = \overline{1, J}$. Наряду с $(i', i) \in \text{OP}_j$ удобно использовать более наглядную форму записи $i' \prec_{\text{OP}_j} i$.

Предложим следующий *метод продолжения* исходного отношения OP на случай появления некоторой коалиции игроков C . Строящееся отношение $\text{OP}(C)$ моделирует происходящие изменения возможностей агентов. Прежде всего должно сохраняться исходное отношение, причем коалиция увеличивает возможности вступившего в нее игрока. Так, если игроки $i_k, k = 1, 2$, объединились в коалицию C , то

$$\forall_{jk} ((i, i_k) \in \text{OP}_j \Rightarrow (i, C) \in \text{OP}_j(C)), \quad C = \{i_k, k = 1, 2\}. \quad (4)$$

Формула (4) означает, что как члены всякой коалиции агенты обладают большими возможностями.

Выполнение свойства (4) обеспечивает следующая пошаговая конструкция $\text{OP}_j(C)$ продолжения OP_j :

1. Пусть $i_k \in H_{p_k}, k = 1, 2, p_1 < p_2$. Тогда коалиция игроков $C = \{i_k, k = 1, 2\}$ помещается на более высокий из ярусов H_{p_2} . При этом
 - (а) если $\forall_k \exists_i (i, i_k) \in \text{OP}_j$, то полагаем $(i, C) \in \text{OP}_j(C)$;
 - (б) если $\exists_i (i_2, i) \in \text{OP}_j$, то выполнено отношение $(C, i) \in \text{OP}_j(C)$.
Если же $\exists_i ((i_1, i) \in \text{OP}_j) \wedge (i \in H_q \wedge q < p_2)$, то справедливо свойство $(i, C) \in \text{OP}_j(C)$.
2. Пусть $\exists_p \forall_{k=1,2} i_k \in H_p$. Тогда нужно
 - (а) добавить входящие стрелки $(i, C) \in \text{OP}_j(C)$ согласно п. 1(а), применяемому к обоим игрокам $i_k, k = 1, 2$;
 - (б) имеющиеся стрелки $(i_k, i) \in \text{OP}_j, k = 1, 2$, заменить на стрелки $(i, C) \in \text{OP}_j(C)$.
3. Взять транзитивное и рефлексивное замыкание полученного отношения $\text{OP}_j(C)$.

Лемма 2.1. Любое продолженное отношение $\text{OP}_j(C), j = \overline{1, J}$, представляет собой предпорядок.

Доказательство. По предположению, исходный предпорядок OP_j можно представить в виде ациклического графа. Выбрасывание любого узла

вместе со всеми инцидентными ему дугами не приводит к возникновению циклов. Склеивание узлов $i_k \in H_p, k = 1, 2$, также их не порождает. Остается рассмотреть случай графа, получаемого в результате изменения направления некоторых стрелок, см. п. 2б). Возьмем произвольный ациклический контур, в котором имеются две стрелки, исходящие из одной и той же вершины. Они отвечают стрелкам, исходящим из узлов i_1 или i_2 , см. п. 2б). Если изменить их направление на противоположное, то в полученном контуре в одну и ту же вершину войдут две стрелки. Значит, рассматриваемый контур не превратился в цикл. Применив п. 3 предложенного метода, получим предпорядок $OP_j(C)$.

В процессе редукции игры расширение всякого предпорядка OP_j может проводиться по мере формирования игроками новых коалиций. За последовательно расширяемым отношением $OP(\{C_s\}, \{C_s\}, S)$ сохраним прежнее обозначение OP . Теперь можно считать, что отношение возможностей задано на множестве всех возможных коалиций $\{C_s\}$.

Пусть в некоторую коалицию C вступает агент i , отвечающий максимальному элементу предпорядка OP_j . Тогда вся коалиция наследует указанное свойство в продолженном отношении:

$$(i \in \text{MAX}_I OP_j) \wedge (i \in C) \Rightarrow C \in \text{MAX}_I OP_j(C).$$

В редуцированной игре $C \in \tilde{I}$. «Поглощаемые» коалициями игроки i могут быть исключены из числа участников конфликта вместе со стрелками $(i, i'), (i'', i) \in OP$, т.е. теперь $i \notin \tilde{I} \wedge (i, i'), (i'', i) \notin OP_j(C)$. Поэтому размер графа отношения OP , вообще говоря, уменьшается в процессе редуцирования игры.

Итак, для всех $j = \overline{1, J}$ предпорядки OP_j продолжаемы на множество всех возможных коалиций $\{C\}$. Это делается не сразу, а по мере включения дополнительных игроков в ранее сформированные коалиции C' .

Обобщение отношения возможностей

Отношение возможностей допускает обобщение заданием семейств отношений $\{<_{S'}\}, S' \subset S$, причем в качестве игроков рассматриваются коалиции.

Определение 2.2. Игроки C_1 и C_2 связаны обобщенным отношением возможностей $C_1 <_{S'} C_2$, если $\forall_j (S_j \in S' \Rightarrow C_1 <_{OP_j} C_2)$.

При поиске подходящих коалиций всякий интеллектуальный игрок $i \in \tilde{I}$ вынужден проводить их сравнительный анализ, например с помощью

отношения $<_{S'}$, отвечающего его множеству оптимальных ситуаций $S' = S^*(i)$:

$$S^*(i) = \text{MAX}_S \rho_i, \quad i \in \tilde{I}.$$

Следующим образом определим множество субоптимальных ситуаций:

$$\tilde{S}^*(i) = S^*(i) \cup \{S_j : \exists_p (S_j, S_{j^*})_p \in \rho_i\}.$$

Расширение множества $S^*(i)$ происходит за счет добавления ситуаций S_j , связанных межъярусными стрелками $(S_j, S_{j^*})_p, S_{j^*} \in S^*(i)$, в предпорядке ρ_i . Вполне очевиден следующий результат.

Лемма 2.2. Для любого множества $S', S' \subset S$, отношение $<_{S'}: \{C\} \rightarrow \{C\}$ представляет собой предпорядок.

Предпорядок $<_{\tilde{S}^*(i)}$ — это часть отношения $<_{S^*(i)}$. Принятие агентами $i \in \tilde{I}$ решений о кооперации с партнерами может опираться не только на отношения предпочтений, но и на указанные обобщения отношений возможностей.

3 Формирование коалиций

Коалиционное поведение игроков направлено на устранение неопределенности принятия решений [1–4, 8, 9].

Эффективные коалиции

Прежде всего в поле зрения всякого игрока i_0 должны попадать *эффективные* $i_0 \in C^{\text{ef}}$ или иерархические коалиции $i_0 \in C^h$. Как и другие объединения игроков, они определяют части искомой сетевой структуры коммуникаций [9]. В эффективной иерархической коалиции $C^{\text{ef}} = \{i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_{m-1}\}$ однозначно определен полный порядок ходов партнеров и обмен данными между ними. Коалиции C^{ef} имеют характеристические отношения вида $\rho^{C^{\text{ef}}} = \rho_{i_0} \circ \rho_{i_1} \circ \dots \circ \rho_{i_{m-1}}$. Им отвечают множества оптимальных решений $S(C^{\text{ef}}) = \text{MAX} \rho^C$ [9, 11, 12].

Для поиска коалиции C^{ef} игрок i_0 применяет предпорядок $\rho_2 <_{\rho} \rho_1, \rho = \rho_{i_0}$, индуцируемый его отношением предпочтений на множестве всех предпорядков $\Theta = \{\rho_i, i \in I\}$. Напомним [11], что оно определено посредством коммутативной диаграммы, представленной на рис. 2.

Другими словами, стрелка ρ_2 пропускается через стрелку ρ_1 с помощью ρ .

Согласно рис. 2, с точки зрения игрока i_0 коалиция $C_1 = \{i_0 \rightarrow 1\}$ с игроком 1 лучше коалиции

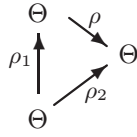


Рис. 2 Предпорядок $\rho_2 \prec_{\rho} \rho_1$ на множестве Θ

$C_2 = \{i_0 \rightarrow 2\}$ с игроком 2 не только благодаря соображениям большего сходства пары предпочтений ρ_{i_0}, ρ_1 по сравнению с ρ_{i_0}, ρ_2 , но и из-за совпадения «оценок» возможностей $\forall_{D_1, D_2} D_1 \prec_{S^*}(\{2\}) D_2 \Rightarrow D_1 \prec_{S^*}(\{i_0, 1\}) D_2$ других коалиций. Справедливость последней импликации следует из включения $\text{MAX}_{\rho_{i_0}} \circ \rho_1 \subset \text{MAX}_{\rho_2}$, верного ввиду определения 2.2.

В качестве своих партнеров по коалиции $C^{\text{ef}} = \{i_0 \rightarrow i\}$, $\rho^{C^{\text{ef}}} = \rho_{i_0} \circ \rho_i$, игрок i_0 прежде всего выбирает таких агентов $i \in I(i_0)$, чьи предпочтения наиболее согласованы с предпорядком $\prec_{\rho_{i_0}}$:

$$I(i_0) = \{i : \exists_{i'} \rho_{i'} \prec_{\rho_{i_0}} \rho_i\}. \quad (5)$$

Устойчивость коалиции C^{ef} дополнительно обеспечена увеличением возможностей партнеров. Всякий игрок i_0 может пытаться генерировать эффективные иерархические коалиции, начиная с двухэлементных $C^{\text{ef}} = \{i_0 \rightarrow i\}$, причем целесообразно взять партнера $i = \text{MAX}_{I(i_0)} \prec_{\rho_{i_0}}$ (см. лемму 2.2). При наличии нескольких максимальных элементов в упорядоченном множестве $(I(i_0), \prec_{i_0})$ агент i_0 может предпочесть игрока с большими возможностями:

$$i = i^* \in \text{MAX} \prec_{S^*(i_0)} | \text{MAX} \prec_{\rho_{i_0}}. \quad (6)$$

Оптимизация (5), (6) проводится на сужении исходной области задания предпорядка $\prec_{S^*(i_0)}$ на подобласть $\text{MAX} \prec_{\rho_{i_0}}$.

Во избежание неопределенности выбора агента i_0 можно сформировать эффективную иерархическую коалицию многих лиц $C^h = \{i_0 \rightarrow i, i \in \text{MAX} \prec_{i_0}\}$. Как ее лидер он первым делает ход и сообщает свою стратегию «подчиненным» партнерам, входящим в параллельную подкоалицию $\{i : i \in \text{MAX} \prec_{i_0}\}$.

Эффективные коалиции увеличиваются в процессе редукции игры. Каждый раз после создания коалиции любого вида проводится редукция игры. Это способствует появлению более крупных эффективных коалиций, имеющих более сложное строение. В случае когда $\forall_i I(i) = \emptyset$ (см. (5)), игроки вынуждены искать устойчивые коалиции другого типа.

При распределении процесса формирования коалиций происходит объединение коалиций, имеющих попарно общих партнеров. После окончательной редукции игры могут остаться участники,

не объединяемые в устойчивые коалиции. В этом случае они образуют одну общую неустойчивую параллельную коалицию C^{Γ} . Если она не перестраивается в набор устойчивых подкоалиций, то ей отвечает результирующее отношение игры ρ^{Γ} .

Классификация параллельных коалиций

Всякий игрок может попытаться найти устойчивую параллельную коалицию, которая увеличивает его возможности. Выбор партнеров происходит с помощью предпорядка $\prec_{S^*(i_0)}$. В рамках любой параллельной коалиции C^p участники принимают свои решения совместно и одновременно в результате максимизации характеристического отношения.

Введем классификацию устойчивых параллельных коалиций C^p . Так, партнеры по коалиции $C^{ps} = \{i_0, i\}$, $i \in \tilde{I}^S(i_0)$, способствуют друг другу в достижении своих оптимальных ситуаций, если

$$\tilde{I}^S(i_0) = \{i : (i_0 \prec_{S^*(i_0)} i) \wedge (i \prec_{S^*(i)} i_0)\}. \quad (7)$$

Условие в (7) придает устойчивость объединению C^{ps} . Такие коалиции будем называть сильными.

В параллельной коалиции может появиться лидер. Им становится тот из агентов $i_0 \in C^{ps}$, который выбирает партнера, исходя из следующего условия:

$$i \in \text{MAX} \prec_{S^*(i_0)} | \tilde{I}^S(i_0). \quad (8)$$

Коалиция с лидером $C^{ph} = \{i_0 \rightarrow -i\}$ превращается в иерархическую. Игрок i_0 делает свой ход первым.

Введем другие виды устойчивых коалиций, также основанные на использовании отношений возможностей.

Определение 3.1. Скажем, что коалиции C_1 и C_2 связаны ярусным отношением возможностей $C_1 \prec_{H(S')} C_2$, если $\forall_j (S_j \in S' \wedge (C_k \in H_{p_k}(j), k = 1, 2) \Rightarrow p_1 \leq p_2)$.

Рассмотрим такую параллельную коалицию двух лиц $C^{pH} = \{i_0, i\}$, что $i \in \tilde{I}^H(i_0)$, где

$$\tilde{I}^H(i_0) = \{i : (i_0 \prec_{H(S^*(i_0))} i) \wedge (i \prec_{H(S^*(i))} i_0)\}. \quad (9)$$

Лемма 3.1. Всякая сильная коалиция удовлетворяет условию устойчивости (9).

Обратное утверждение неверно. Не являющуюся сильной коалицию C^{pH} назовем ярусной. Введем понятие слабого отношения возможностей.

Определение 3.2. Коалиции связаны слабым отношением $C_1 \prec_{S'}^w C_2$, если

$$\forall_j (S_j \in S') \Rightarrow (C_1 \prec_{OP_j} C_2) \vee (\neg(C_1 \prec_{OP_j} C_2) \wedge \neg(C_2 \prec_{OP_j} C_1)).$$

Параллельную коалицию двух лиц $C^{pw} = \{i_0, i\}$ назовем *слабой*, если

$$i \in \tilde{I}^w(i_0) = \left\{ i : (i_0 \prec_{S^*(i_0)}^w i) \wedge (i \prec_{S^*(i)}^w i_0) \right\}. \quad (10)$$

Справедлива импликация

$$(i_0 \prec_{S^*(i_0)} i) \Rightarrow (i_0 \prec_{S^s(i_0)}^w i).$$

При отсутствии ярусных коалиций не исключено существование *слабо* устойчивых объединений.

Слабые и ярусные отношения возможностей не являются предпорядками. Поэтому при наличии у игрока i_0 нескольких вариантов выбора партнера по коалиции C^{pH} или C^{pw} неопределенность не удастся устранить с помощью оптимизации типа (6), (8). В этом случае воспользуемся следующими соображениями. Для $\tilde{I}(i_0) = \tilde{I}^w(i_0)$ или $\tilde{I}(i_0) = \tilde{I}^H(i_0)$ в зависимости от типа выбираемой коалиции найдем мощность $\#J(i_0, i)$ такого подмножества субоптимальных ситуаций для игрока i_0 , что

$$J(i_0, i) = \left\{ S_j \in \tilde{S}^*(i_0) : i_0 \prec_{OP_j} i \right\}.$$

Игроку i_0 «выгоднее» всего взять в партнеры агента i , у которого эта мощность $\#J(i_0, i)$ максимальна:

$$\#J(i_0, i) \rightarrow \max_{i \in \tilde{I}(i_0)}. \quad (11)$$

Такой выбор в большей степени расширит возможности агента i_0 и заявит о его лидерстве в коалиции [17]. Это приведет к преобразованию параллельной коалиции в иерархическую $C^p \mapsto C^{ph}$.

Создание параллельных коалиций $C^p = \{i_0, i_1, \dots, i_{m-1}\}$, состоящих из произвольного числа игроков, опирается на обобщение формул (7), (9) и (10) Формирование устойчивой сильной коалиции $C^p = C^{ps}$ произойдет при выполнении условия

$$(i_0 \prec_{S^*(i_0)} i_1) \wedge (i_1 \prec_{S^*(i_1)} i_2) \wedge \dots \wedge (i_{m-1} \prec_{S^*(i_{m-1})} i_0). \quad (12)$$

Аналогично определяются ярусные и слабые коалиции $m, m \geq 2$, лиц, если в формуле (12) вместо предпорядка $\prec_{S^*(i)}$ использованы ярусное и слабое отношения соответственно. Определим множества

$$B_i(j) = \{l : (i, l) \in OP_j\} \cup \{s : (i, s), (s, i) \notin OP_j\}; \\ E_{i_1}(j) = \{i_2 : i_k \in H_{pk}(j), k = 1, 2, p_1 \leq p_2\}.$$

Лемма 3.2. Пусть $\forall_i \cap_{j \in S(i)} A_i(j) \neq \emptyset$, где $A_i(j) = \{k : (i, k) \in OP_j\}$. Тогда существует сильная параллельная коалиция вида (12). Для существования слабой или ярусной параллельных коалиций достаточно, чтобы имело место условие

$$\forall_i \cap_{j \in S^*(i)} B_i(j) \neq \emptyset \text{ или } \forall_{i_1} \cap_{j \in S^*(i_1)} E_{i_1}(j) \neq \emptyset. \quad (13)$$

Доказательство. Произвольный игрок i_0 может выбрать партнера $i_1 \in \cap_{j \in S^*(i)} \{l : (i, l) \in OP_j\}$, для которого $i_0 \prec_{S^*(i_0)} i_1$. Поступая так же, агент i_1 найдет партнера $i_2 \in \cap_{j \in S^*(i_1)} \{l : (i_1, l) \in OP_j\}$, $i_1 \prec_{S^*(i_1)} i_2$, и т.д. Ввиду конечности множества игроков этот процесс завершится на некотором шаге $m - 1$, когда $i_{m-1} = i_0$ и $i_{m-1} \prec_{S^*(i_{m-1})} i_0$. По построению коалиция $C = \{i_0, i_1, \dots, i_{m-1}\}$ (12) устойчива. Процесс выбора слабой или ярусной коалиций происходит, опираясь на условие (13), в полном соответствии с только что проведенными рассуждениями.

Следствие 3.1. Пусть выполнены условия леммы 3.2. Тогда существует разбиение C_1, \dots, C_s совокупности всех игроков на устойчивые параллельные коалиции разных типов. Построение разбиения C_1, \dots, C_s проводится с помощью не более чем $k^3 J$ операций.

Доказательство. По лемме 3.2 имеется некоторая сильная коалиция C_1 . Рассмотрим игру с меньшим числом игроков $\Gamma \setminus C_1$. В ней следующим образом изменены графы отношений возможностей. Из предпорядков $OP_j, j \in S(i), i \in C_1$, исключены все дуги $(i_1, i_2), i_1, i_2 \in C_1$. В полученной игре по-прежнему выполнены условия леммы 3.2, гарантирующие существование очередной коалиции C_2 . Остается применить метод математической индукции. Заметим, что все коалиции строятся с помощью обнаружения свойств $(i, l) \in OP_j, j \in S^*(i), l \in \Gamma \setminus \{i\}$. Перебор вариантов требует выполнения не более $k^3 J$ вычислений.

В частности, в игре имеется сильная коалиция, если $\forall_i \exists! j (j \in S^*(i)) \wedge (i \notin \text{MAX } OP_j)$.

Параллельные коалиции смешанного вида

Упорядочим введенные отношения по *старшинству* $\prec_{S^*(i)} \triangleleft \prec_{H(S^*(i))} \triangleleft \prec_{S^*(i)}^w$ и занумеруем их индексом $s = 1, 2, 3$. С этой точки зрения ярусные коалиции занимают промежуточное место по устойчивости между слабыми и сильными параллельными коалициями.

Устойчивые параллельные коалиции *смешанного* вида возникают в соответствии с формулой (12),

в которой берутся любые, не обязательно совпадающие, сравнения \prec^s , $s = 1, 2, 3$. Например, смешанной будет коалиция $C^{pm} = \{i_0, i\}$, если $(i_0 \prec^1 i) \wedge (i \prec^2 i_0)$. Из леммы 3.2 вытекает следующий результат.

Следствие 3.2. Пусть $\{i : \bigcap_{j \in S(i)} A_i(j)\} \cup \{i : \bigcap_{j \in S^*(i)} B_i(j)\} \cup \{i : \bigcap_{j \in S^*(i)} E_i(j)\} = I$. Тогда существует разбиение игроков на семейство $C_1^{pm}, C_2^{pm}, \dots, C_s^{pm}$ устойчивых смешанных параллельных коалиций. Построение указанного разбиения имеет вычислительную сложность $k^3 J$.

Смешанным коалициям присуще разнообразное внутреннее строение как основа для дальнейшего разбиения на классы по степени устойчивости. В этих коалициях не исключена возможность разрыва более слабых связей между игроками в соответствии с порядком старшинства отношений \prec^s , $s = 1, 2, 3$. Это приводит к распаду коалиции на отдельные ветви.

Пусть, например, в следующей смешанной коалиции разорваны связи между агентами, отвечающие более слабым, ярусным, отношениям:

$$C^{pm} = \{i_0 \prec_{S^*(i_0)} i_1 \prec_{S^*(i_1)} i_2 \prec_{H(S^*(i_2))} i_3 \prec_{S^*(i_3)} \prec_{S^*(i_3)}^w i_4 \prec_{S^*(i_4)}^w \prec_{S^*(i_0)}^w i_0\}.$$

Это означает появление лидера i_2 последовательной иерархической коалиции

$$C^{seq} = \{i_2 \rightarrow -i_1 \rightarrow -i_0\}, \rho^{C^{seq}} = \rho_{i_2} \circ \rho_{i_1} \circ \rho_{i_0}.$$

Оставшиеся игроки $i_3, i_4 \in C^{pm}$ остаются партнерами по неустойчивой параллельной коалиции. Это заставляет их продолжить поиск устойчивого объединения с другими агентами. В свою очередь, после редукции задачи игрок C^{seq} может стать инициатором создания эффективной коалиции, например $C^{ef} = \{C^{seq} \rightarrow i'_1 \rightarrow \dots \rightarrow i'_l\}$.

Замечание 3.1. В случае когда $\forall_j (j \in S^*(i)) \Rightarrow (i \in \text{MAX OP}_j)$, игроку $i \in I$ не найдется места ни в одной из сильных коалиций. У него сохраняются шансы участвовать в более слабых параллельных устойчивых коалициях, если выполняется какое-либо достаточное условие (12) или (13). После редукции игры у него может возникнуть предпосылка $\exists C^i \prec_{S^*(i)} C$ даже для вступления в эффективную коалицию.

Предложенный подход к выбору устойчивых коалиций допускает *распределенную* реализацию, при которой все агенты одновременно ищут «подходящие» для себя коалиции. Конструктивное доказательство леммы 3.2 приводит к алгоритму разбиения игроков по параллельным коалициям.

4 Оптимизация сетевой структуры

Оптимальная сетевая структура игры складывается в результате коммуникаций, отвечающих обмену данными между партнерами по устойчивым коалициям [9]. После поиска эффективных коалиций в исходной или в соответствующим образом редуцированных играх агенты формируют устойчивые параллельные коалиции. Их построение начинается с наиболее устойчивых сильных коалиций, см. (13). Создаваемые смешанные параллельные коалиции, возможно, «послужат» для генерации последовательных иерархических коалиций. С учетом замечания 3.1 для этого можно опираться на следующие свойства предпорядков \prec_ρ (см. рис. 2):

$$\forall \rho, \rho_i \rho_i \prec_\rho \rho_1 \prod \rho_2, \forall \rho, \rho_i \rho_i \prec_{\rho_1} \prod \rho_2 \rho, i = 1, 2. \quad (14)$$

Формула (14) показывает, что даже для неустойчивой параллельной коалиции $C = C_1 \cup C_2$, $\rho^C = \rho_1 \prod \rho_2$ после редуцирования задачи возникнут условия для порождения не только эффективных, но и других устойчивых коалиций. Например, агент $C^p = \{1, 2\}$ может участвовать в разных устойчивых иерархических структурах $C_{\{1,2;3\}}^{ef} = \{3 \rightarrow \{1, 2\}\}$ или $C_{\{3;1,2\}}^{ef} = \{\{1, 2\} \rightarrow 3\}$, имеющих характеристические отношения $\rho_{\{1,2;3\}}^{ef} = \rho_3 \circ (\rho_1 \prod \rho_2)$ и $\rho_{\{3;1,2\}}^{ef} = \rho_1 \prod \rho_2 \circ \rho_3$ соответственно.

Замечание 4.1. Появление иерархической коалиции $\{i \rightarrow i'\}$, $i \in C$, $i' \notin C$, может нарушить устойчивость объединения $C \cup \{i'\}$, приводя к распаду C .

Пример 4.1. Пусть имеется набор параллельных коалиций C_1, \dots, C_s . Допустим, некоторый игрок $i_r \in C_1$, где $C_1 = \{i_1 \prec_{S^*(i_1)} i_2 \prec_{S^*(i_2)} \dots \wedge (i_{q-1} \prec_{S^*(i_{q-1})} i_1)\}$, создал эффективную коалицию $C_{\{i_r, C_2\}}^{ef} = \{i_r \rightarrow C_2\}$. Если $C^{ef} \prec_{S^*(C^{ef})} i_{r+1}$ неверно, то к коалициям C_3, \dots, C_s добавится последовательная коалиция

$$C^{seq} = \left\{ C_{\{i_r, C_2\}}^{ef} \rightarrow i_{r-1} \rightarrow \dots \rightarrow i_1 \rightarrow i_{q-1} \rightarrow \dots \rightarrow i_{r+1} \right\}.$$

Таким образом, перестраивание порождаемых коалиций обогащает сетевую структуру игры. Пусть на некотором этапе решения игры ни одному из агентов не удастся сформировать эффективную коалицию. После этого создаются параллельные коалиции $C^p = \{i_0, i_1, \dots, i_{m-1}\}$, имеющие характеристические отношения и множества оптимальных ситуаций, соответственно равные

$$\left. \begin{aligned} \rho^{C^p} &= \rho_{i_0} \prod_{m-1} \rho_{i_1} \dots \prod \rho_{i_{m-1}}; \\ S^*(C^p) &= \bigcup_{r=0} S^*(i_r). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

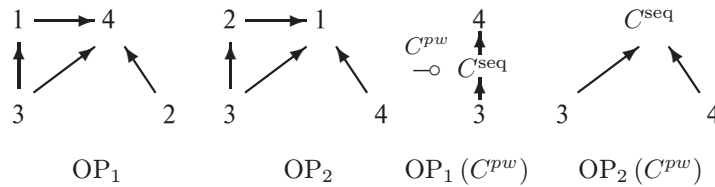


Рис. 3 Параллельная $C^{pw} = \{1, 2\}$ и последовательная $C^{seq} = \{1 \rightarrow 2\}$ коалиции; продолженный предпорядок $OP(C^{pw})$

Согласно (15), партнеры по коалиции C^p одновременно принимают совместное решение, хотя формально порядок их ходов тривиален, а связывающая их сетевая структура дискретна. После редукции задачи не исключены коммуникации между коалициями. По сравнению с (15) неопределенность принятия решений уменьшится, если коалиция C^p обладает внутренним строением, порождающим иерархию игроков.

Так, более «инициативный» игрок i_0 подбирает партнера согласно формулам (8) и (11). Тем самым он перестраивает параллельную коалицию $C^p = \{i_0, i_1\}$ в последовательную $C^{seq} = \{i_0 \rightarrow i_1\}$. В слабых коалициях в качестве инициатора иерархии может выступить агент, в большей мере увеличивающий свои возможности по сравнению с другими партнерами.

Пример 4.2. Игроки 1 и 2 сформируют слабую параллельную коалицию $C^{pw} = \{1, 2\}$ в случае, когда их оптимальные ситуации $S^*(1) = \{S_1\}$, $S^*(2) = \{S_2\}$, а отношения возможностей OP_1 и OP_2 изображены на рис. 3.

Видно, что выполнено условие $(1 \prec_{S^*(1)}^w 2) \wedge (2 \prec_{S^*(2)}^w 1)$ формирования слабой коалиции $C^{pw} = \{1, 2\}$. В превращении ее в последовательную коалицию $C^{seq} = \{2 \rightarrow 1\}$ наиболее заинтересован агент 2, так как его возможности возрастают. В обоих предпорядках $OP_1(C^{pw})$ и $OP_2(C^{pw})$ он перемещается на более высокие ярусы (см. рис. 3), тем самым становясь лидером объединения C^{seq} .

Для получения более «развитой» сетевой структуры по сравнению с той, что отвечает дизъюнктивной сумме в формуле (15), необходимо формализовать процесс борьбы за лидерство внутри параллельных коалиций [1, 16]. За основу могут быть взяты некоторые эвристики [7].

Процесс редукции задачи приводит к разнообразным конфигурациям сетевой структуры. *Оптимальная* сетевая структура игры G^* — это система связей между игроками, объединенными эффективными, иерархическими или устойчивыми параллельными коалициями (ср. с [9]). Структуре G^* отвечает искомое результирующее отношение

игры, оптимизация которого дает равновесную ситуацию.

Формирование игроками эффективных коалиций и последующая оптимизация (2) осуществимы с помощью полиномиального алгоритма [12]. Ввиду следствий 3.1 и 3.2, отсюда получаем следующий результат.

Лемма 4.2. *Реляционная сетевая игровая задача имеет полиномиальную сложность решения.*

5 Заключение

Итак, объектом исследования в статье стали кооперативные реляционные игры, для которых предложена классификация устойчивых коалиций игроков. Располагая их по степени убывания устойчивости, следует различать эффективные и иерархические, сильные, ярусные, смешанные и слабые коалиции. Формирование игроками коалиций с последующей редукцией игровой задачи положено в основу поиска оптимальной сети коммуникаций. В статье предложен метод продолжения исходного отношения возможностей игроков, применяемый в процессе редукции. Распределенный поиск равновесного решения коалиционной игры в реляционной постановке, включающей выбор агентами коммуникационной сети, имеет полиномиальную сложность. Рассмотрен также вопрос перестройки коалиций с целью повышения их устойчивости и уменьшения неопределенности принятия решений. Это делается с помощью выявления лидера коалиции. Масштабируемость предложенного метода вселяет надежду на обобщение предлагаемого подхода на случай динамических реляционных игр.

Литература

1. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1976. 326 с.
2. Dixit A. K., Skeath S., Reiley D. H., Jr. Games of strategy. — New York; London: W. W. Norton & Co., 2017. 880 p.

3. Shoham Y., Leyton-Brown R. Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 532 p.
4. Dixit A. K., Nalebuff B. J. The art of strategy. — New York; London: W. W. Norton & Co., 2008. 446 p.
5. Васильев Н. С. Композиционное представление структуры игры многих лиц в моноидальной категории бинарных отношений // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 18–26. doi: 10.14357/19922264230203. EDN: GPMZTS.
6. Васильев Н. С. О функторном представлении оптимизируемых динамических мультиагентных систем // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 2. С. 2–8. doi: 10.14357/19922264240201. EDN: CLMBXC.
7. Губко М. В. Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. I. Обзор теории сетевых игр // Автоматика и телемеханика, 2004. № 8. С. 115–132. EDN: NQYWEZ.
8. Group formation in economics: Networks, clubs, and coalitions / Eds. G. Demange, M. Wooders. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 475 p.
9. Васильев Н. С. Об оптимизации сетевой структуры коммуникации в мультиагентных системах // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 9–16. doi: 10.14357/19922264250102. EDN: IORGJI.
10. Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. — М.: Наука, 1983. 272 с.
11. Маклейн С. Категории для работающего математика / Пер. с англ. — М.: Физматлит, 2004. 352 с. (Mac Lane S. Categories for the working mathematician. — 2nd ed. — New York, NY, USA: Springer, 1998. 318 p.)
12. Vasilyev N. S. On modelling of autonomous cooperative robotics in monoidal category of binary relations // WSEAS Transactions Systems Control, 2025. Vol. 20. P. 109–115. doi: 10.37394/23203.2025.20.13.
13. Wooldridge M. An introduction to multiagent systems. — New York, NY, USA: Wiley, 2009. 484 p.
14. Multi-agent and complex systems / Eds. Q. Bai, F. Ren, K. Fujita, M. Zang, T. Ito. — Studies in computational intelligence ser. — Singapore: Springer, 2016. Vol. 670. 210 p. doi: 10.1007/978-981-10-2564-8.
15. Vasilyev N. S. On compositional engineering of optimized multiagent systems // Information systems for intelligent systems / Eds. C. S. In, N. S. Londhe, N. Bhatt, M. Kitting. — Smart innovation, systems and technologies ser. — Singapore: Springer, 2025. Vol. 430. P. 673–683. doi: 10.1007/978-981-96-1206-2_52.
16. Vasilyev N. S. From robot to universal robotics // COJ Robotics Artificial Intelligence, 2025. Vol. 4. Iss. 4. Art. 000595. 3 p. doi: 10.31031/COJRA.2025.04.000595.
17. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 424 с.

Поступила в редакцию 19.12.2025

Принята к публикации 15.02.2026

ON RELATIONAL FORM TO SOLVE THE NETWORKING COOPERATIVE GAMES

N. S. Vasilyev

Bauman Moscow State Technical University, 5-1 Baumanskaya 2nd Str., Moscow 105005, Russian Federation

Abstract: Relational statement of networking game is investigated. It has applications to multiagent and cooperative robotics problems. A model with a large number of intellectual players capable of cooperative behavior is studied. The conflict rational resolution is based on the agents networking and data transition. The networking structure is generated by agents themselves in the process of stable coalitions formation. To achieve this goal, players apply generalization of their preferences and possibilities relations. For equilibrium situation and optimal communication network search, game reduction is used. It is based on the game compositionality property in the category of binary relations. The distributed polynomial method to solve the networking cooperative game is contributed. Effective or stable parallel coalitions are to be found in it by players' collective efforts. Possibility to split all players into union of stable coalitions is proved. Parallel coalitions classification is given depending on the degree of their stability.

Keywords: relational game; relation: preferences, possibilities, characteristic; preorder; network structure; game reduction; effective coalition; stable parallel coalitions: strong; tiered; mixed; weak

DOI: 10.14357/19922264260109

EDN: OBVKFZ

References

1. Germeier, Yu. B. 1986. *Non-opposing interests: Games with incomplete information*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co. 308 p.
2. Dixit, A. K., S. Skeath, and D. H. Reiley, Jr. 2017. *Games of strategy*. New York, London: W. W. Norton & Co. 880 p.
3. Shoham, Y., and R. Leyton-Brown. 2010. *Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations*. Cambridge: Cambridge University Press. 532 p.

4. Dixit, A. K., and B. J. Nalebuff. 2008. *The art of strategy*. New York, London: W. W. Norton & Co. 446 p.
5. Vasilyev, N. S. 2023. Kompozitsional'noe predstavlenie struktury igry mnogikh lits v monoidal'noy kategorii binarnykh otnosheniy [Multiplayers' games compositional structure in the monoidal category of binary relations]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):18–26. doi: 10.14357/19922264230203. EDN: GPMZTS.
6. Vasilyev, N. S. 2024. O funkornom predstavlenii optimiziruemyykh dinamicheskikh mul'tiagentnykh sistem [On functor representation of optimized dynamic multi-agent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(2):2–8. doi: 10.14357/19922264240201. EDN: CLMBXC.
7. Gubko, M. V. 2004. Control of organizational systems with network interaction of agents. I. A review of network game theory. *Automat. Rem. Contr.* 65(8):1276–1291. doi: 10.1023/B:AURC.0000038730.85322.dc. EDN: CKCFXO.
8. Demange, G., and M. Wooders, eds. 2005. *Group formation in economics: Networks, clubs, and coalitions*. Cambridge: Cambridge University Press. 475 p.
9. Vasilyev, N. S. 2025. Ob optimizatsii setevoy struktury kommunikatsii v mul'tiagentnykh sistemakh [On game networks structure optimization in multiagent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(1):9–16. doi: 10.14357/19922264250102. EDN: IORGJI.
10. Skorniyakov, L. A. 1983. *Elementy obshchey algebry* [Elements of general algebra]. Moscow: Nauka. 272 p.
11. Mac Lane, S. 1998. *Categories for the working mathematician*. 2nd ed. New York, NY: Springer. 318 p.
12. Vasilyev, N. S. 2025. On modelling of autonomous cooperative robotics in monoidal category of binary relations. *WSEAS Transactions Systems Control* 20:109–115. doi: 10.37394/23203.2025.20.13.
13. Wooldridge, M. 2009. *An introduction to multiagent systems*. New York, NY: Wiley. 484 p.
14. Bai, Q., F. Ren, K. Fujita, and M. Zngang, eds. 2016. *Multi-agent and complex systems*. Studies in computational intelligence ser. Singapore: Springer. Vol. 670. 210 p. doi: 10.1007/978-981-10-2564-8.
15. Vasilyev, N. S. 2025. On compositional engineering of optimized multiagent systems. *Information systems for intelligent systems*. Eds. C. S. In, N. S. Londhe, N. Bhatt, and M. Kitsing. Smart innovation, systems and technologies ser. Singapore: Springer. 430:673–683. doi: 10.1007/978-981-96-1206-2_52.
16. Vasilyev, N. S. 2025. From robot to universal robotics. *COJ Robotics Artificial Intelligence* 4(4):000595. 3 p. doi: 10.31031/COJRA.2025.04.000595.
17. Petrosyan, L. A., N. A. Zenkevich, and E. V. Shevkopyas. 2016. *Game theory*. 2nd ed. World Scientific Publishing Co. 544 p.

Received December 19, 2025

Accepted February 15, 2026

Contributor

Vasilyev Nikolai S. (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Bauman Moscow State Technical University, 5-1 Baumanskaya 2nd Str., Moscow 105005, Russian Federation; nik8519@yandex.ru

Бегишев Вячеслав Олегович (р. 1988) — доктор технических наук, доцент Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Бортаковский Александр Сергеевич (р. 1957) — доктор физико-математических наук, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета); профессор Национального исследовательского технологического университета МИСИС

Босов Алексей Вячеславович (р. 1969) — доктор технических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Васильев Николай Семенович (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана

Дараселия Анастасия Валерьевна (р. 1994) — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Королев Виктор Юрьевич (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

Кривенко Михаил Петрович (р. 1946) — доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Левкович Константин Анатольевич (р. 2001) — аспирант кафедры теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Малашенко Юрий Евгеньевич (р. 1946) — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Назарова Ирина Александровна (р. 1966) — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Пракаш Шубхам (р. 1996) — аспирант кафедры теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Романюк Никита Романович (р. 1993) — аспирант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Синицын Игорь Николаевич (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Сопин Эдуард Сергеевич (р. 1987) — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы; старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Торшин Иван Юрьевич (р. 1972) — кандидат физико-математических наук, кандидат химических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Урюпин Илья Владимович (р. 1993) — кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Правила подготовки рукописей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Если при подготовке статьи авторы использовали инструменты на основе искусственного интеллекта, они обязаны включить эту информацию в текст статьи.

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации предоставленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.
3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам. Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.
5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.
6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или \LaTeX (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи необязательно.
7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 10 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны оформления представлены в интернете:

http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip

8. Статья должна содержать следующую информацию на **русском и английском языках**:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием почтового адреса организации и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp и
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами;
- источники финансирования работы (ссылки на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.).

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний. Если источник имеет DOI и/или EDN, то их необходимо указывать.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала;
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://www.translit.net/ru/bgn/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Ниже приведены примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”.

Описание статьи из журнала:

Zagurenko, A. G., V. A. Korotovskikh, A. A. Kolesnikov, A. V. Timonov, and D. V. Kardymon. 2008. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizayna gidrorazryva plasta [Technical and economic optimization of the design of hydraulic fracturing]. *Neftyanoe hozyaystvo [Oil Industry]* 11:54–57.

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

Описание статьи из электронного журнала:

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.

Описание материалов конференций:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

Описание книги (монографии, сборники):

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Latyshev, V. N. 2009. *Tribologiya rezaniya. Kn. 1: Friksionnye protsessy pri rezanii metallov* [Tribology of cutting. Vol. 1: Frictional processes in metal cutting]. Ivanovo: Ivanovskii State Univ. 108 p.

Описание переводной книги (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (*Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. Vibration problems in engineering. — 4th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 1974. 521 p.*)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. New York: Wiley. 521 p.

Описание неопубликованного документа:

Latypov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004 (unpubl.). *Geologiya i dobycha (NGT GiD)* [Geology and production (NGT GiD)]. Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198.

Описание интернет-ресурса:

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

Описание диссертации или автореферата диссертации:

Semenov, V. I. 2003. *Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyy tor* [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. Moscow. D.Sc. Diss. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. *Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa* [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

Описание ГОСТа:

GOST 8.586.5-2005. 2007. *Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv* [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publs. 10 p.

Описание патента:

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. *Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya* [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- указывать в тексте письма название статьи, авторов и журнал, в который направляется статья;
- использовать attach (присоединение);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

12. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

Адрес редакции журнала «Информатика и её применения»:

Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН

Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05

e-mail: iiep@frccsc.ru (Стригина Светлана Николаевна)

<http://www.ipiran.ru/journal/issues/>

Requirements for manuscripts submitted to Journal “Informatics and Applications”

Journal “Informatics and Applications” (Inform. Appl.) publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of informatics and its applications.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

The topics covered include the following areas:

- theoretical fundamentals of informatics;
 - mathematical methods for studying complex systems and processes;
 - information systems and networks;
 - information technologies; and
 - architecture and software of computational complexes and networks.
1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

Agreement on the transfer of rights to publish:

“We, the undersigned authors of the manuscript “. . .”, pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Informatics and Applications” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations. Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

If authors used artificial intelligence (AI)-based tools in preparing their manuscript, they must include this information in the text of the article.

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If the authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved for publication. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or L^AT_EX (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.
7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 10 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site:

http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip.

8. The articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author’s name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format (see site):

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp and

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;

- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae;
 - indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.
Important! Keywords must not be sentences; and
 - Acknowledgments.
9. References. Russian references have to be presented both in English translation and Latin transliteration (refer <http://www.translit.net/ru/bgn/>).
- Please take into account the following examples of Russian references appearance:
- Article in journal:**
Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.
- Journal article in electronic format:**
Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).
- Article from the continuing publication (collection of works, proceedings):**
Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental’noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal”–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.
- Conference proceedings:**
Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma “Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol’zovaniya i povysheniya neftegazootdachi” [6th Symposium (International) “New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact” Proceedings]*. Moscow. 267–272.
- Books and other monographs:**
Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem [Operation of turbine generators with direct cooling]*. Moscow: Energy Publs. 352 p.
- Dissertation and Thesis:**
Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.
- State standards and patents:**
GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch’yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publs. 10 p.
Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel’nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.
- References in Latin transcription are presented in the original language.
References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets.
All items from the reference list should be cited.
10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.
11. Submissions of files by e-mail must include:
- the journal title and author’s name in the “Subject” field;
 - the article title, authors’ names, and the journal title, whereto the paper is being submitted, in the text of the email;
 - an article and additional materials have to be attached using the “attach” function; and
 - an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.
12. “Informatics and Applications” journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

Editorial Board address:

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia
Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05
e-mail: iiep@frccsc.ru (to Svetlana Strigina)
<http://www.ipiran.ru/english/journal.asp>