

Информатика и её применения

Том 19 Выпуск 4 Год 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Фильтрация специальных марковских скачкообразных процессов по наблюдениям с мультипликативными шумами А. В. Борисов	2
Практическое исследование вопроса неустойчивости расширенного фильтра Калмана А. В. Босов, И. В. Урюпин	12
Анализ задержек в сетях интегрированного доступа и транзита для сценария развертывания с линейной топологией Е. А. Мачнев, У. К. Морозова, В. А. Бесчастный, В. С. Шоргин, Ю. В. Гайдамака	26
Об одной эвристической диспетчеризации для двухфазных систем массового обслуживания по запаздывающей информации об их состоянии М. Г. Коновалов, Р. В. Разумчик	35
Правильные представительные элементарные классификаторы над производением частичных порядков Н. А. Драгунов, Е. В. Дюкова	43
Восстановление цветных изображений методом решеточных уравнений Больцмана для анизотропной нелинейной диффузии Г. А. Чумарин	53
Оптимизация по квантильному критерию позиционной стратегии тестируемого в динамической модели прохождения ограниченного по времени теста С. В. Иванов, Я. Г. Мартюшова, А. В. Наумов, А. Е. Степанов	65
Косвенные признаки в задачах классификации данных большой размерности с помощью причинно-следственных связей А. А. Грушо, Н. А. Грушо, М. И. Забежайло, В. В. Кульченков, Е. Е. Тимонина	72
Об авторах	78
Авторский указатель за 2025 г.	80
2025 Author Index	83
Правила подготовки рукописей	86
Requirements for manuscripts	89

ФИЛЬТРАЦИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ*

А. В. Борисов¹

Аннотация: Работа посвящена решению задачи оптимальной фильтрации состояний специальных марковских скачкообразных процессов (СМСП). Оцениваемое скрытое состояние включает в себя две блочные компоненты. Первая представляет собой марковский скачкообразный процесс (МСП) с конечным множеством состояний. Вторая изменяется синхронно с первой и при фиксированной первой компоненте образует последовательность независимых векторов. Наблюдения представляют собой диффузионный процесс, снос и диффузия которого зависят от скрытого состояния. Задача заключается в построении условного распределения состояния относительно имеющихся наблюдений. Предложено преобразование, трансформирующее исходные наблюдения в совокупность диффузионного процесса с единичной диффузией и функции от оцениваемого состояния, наблюдаемой без шумов. Сконструирована мера, относительно которой условное распределение абсолютно непрерывно. Решение задачи фильтрации представлено в виде совокупности рекуррентно связанных стохастических интегро-дифференциальных уравнений — вариантов уравнения Кушнера—Стратоновича — и интегральных соотношений.

Ключевые слова: специальный марковский скачкообразный процесс; наблюдения с мультипликативными шумами; плотность условного распределения; уравнение Кушнера—Стратоновича

DOI: 10.14357/19922264250401

EDN: CVUOMY

1 Введение

Статья продолжает исследования, часть результатов которых уже опубликована в [1, 2]. Их объектом стали стохастические системы наблюдения с СМСП в роли состояний. В качестве доступных наблюдений выступают диффузионные процессы, в которых и дрейф, и диффузия зависят от оцениваемого состояния. Цель работы заключается в определении условного распределения состояния системы по имеющимся наблюдениям.

Зависимость интенсивности шумов от состояния имеет место во многих практических задачах оценивания. Например, в задачах слежения за воздушными или морскими целями [3] в качестве статистической информации выступают угловые измерения. Очевидно, что линейный размер ошибок, порожденных угловыми измерениями, зависит от действительного положения цели: линейная ошибка, соответствующая одной и той же угловой ошибке, растет с ростом дальности до цели.

В задачах мониторинга характеристик сетевых соединений [4, 5], например доли загрузки «бутылочного горла» соединения, в качестве наблюдений времени кругового обращения сегмента данных используются результаты осреднения большого числа измерений, поступивших за некоторый отрезок

времени. Тогда согласно центральной предельной теореме для обобщенных процессов восстановления [6] результаты осреднения будут иметь приближенно гауссовское распределение, у которого и среднее значение, и дисперсия зависят от оцениваемой характеристики.

В области финансовой математики [7, 8] в качестве возможных целей оценивания выступают текущий скрытый сценарий развития рынка и числовые характеристики, его отражающие. В качестве доступной статистической информации выступают логарифмические цены финансовых инструментов, представляющие сумму текущей процентной ставки — показателя прибыли, и случайных флуктуаций, масштабированных коэффициентом волатильности — показателем риска. Очевидно, показатели прибыли и риска зависят от текущего сценария развития рынка. Упомянутые примеры подчеркивают распространенность наблюдений, шумы в которых зависят от состояния, подлежащего оцениванию.

Работа организована следующим образом.

В разд. 2 дано описание исследуемой системы наблюдения и представлена постановка задачи оптимальной фильтрации. Проанализированы особенности исследуемой проблемы, значительно

* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, aborisov@frccsc.ru

усложняющие ее решение по сравнению с известными задачами.

Раздел 3 представляет преобразование исходных наблюдений, позволяющее решить поставленную задачу. Он также содержит детализацию требований, предъявляемых к системе наблюдения. Одно из требований включает линейную зависимость интенсивности шумов от состояния.

Первая компонента преобразованных наблюдений является диффузионным процессом, дрейф в котором — некоторая функция оцениваемого состояния, а диффузия — единичная. Вторая компонента представляет собой интенсивность шумов исходных наблюдений — линейную функцию состояния, наблюдаемую без шума. В разд. 4 приведены формулы, описывающие использование второй компоненты наблюдений в начальный момент времени для построения оценки фильтрации.

Раздел 5 содержит решение поставленной задачи фильтрации. Из-за наличия точных наблюдений — линейных функций состояния — условное распределение сосредоточено не на всем фазовом пространстве, а на некотором его линейном подпространстве. Это подпространство изменяется скачкообразно в соответствии со скачками бесшумовой компоненты наблюдений. Между скачками плотность условного распределения изменяется непрерывно и описывается системой стохастических интегро-дифференциальных уравнений — аналогом уравнения Кушнера—Стратоновича для исследуемых СМСП в случае аддитивных шумов в наблюдениях [2].

В разд. 6 приведены заключительные замечания.

2 Постановка задачи

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ рассматривается стохастическая дифференциальная система наблюдений

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{Z}_0 + \int_0^t D^Z \mathbf{Z}_s ds + \mu_t^Z; \quad (1)$$

$$\xi_t = \int_0^t f(Z_s) ds + \int_0^t g(Z_s) dw_s. \quad (2)$$

В системе (1), (2) $\mathbf{Z}_t \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^{MN}$ — процесс, ассоциированный с оцениваемым СМСП $Z_t \triangleq \text{col}(\theta_t, Y_t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M$ [1]. Распределение Z_t определяется следующими параметрами:

- $p_0 \in \mathbb{R}^N$ и Λ — начальное распределение и матрица интенсивностей переходов (МИП) блоч-

ной компоненты θ_t : распределение $E\{\theta_t\} \triangleq p_t$ определяется системой дифференциальных уравнений Колмогорова $\dot{p}_t = \Lambda^\top p_t$ с начальным условием p_0 ;

- $\Pi_0(dy) = \text{col}(\Pi_0^1(dy), \dots, \Pi_0^N(dy))$ и $\Pi(dy) = \text{col}(\Pi^1(dy), \dots, \Pi^N(dy))$ — начальное распределение блочной компоненты Y_0 , а также ее распределение после первого скачка: для любого $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$

$$\mathcal{P}\{Y_0 \in \mathcal{B} | \theta_0 = e_n\} = \Pi_0^n(\mathcal{B}),$$

а также если τ_1 — момент первого скачка процесса Z , то

$$\mathcal{P}\{Y_t \in \mathcal{B} | \theta_t = e_n, \tau_1 < t\} = \Pi^n(\mathcal{B}).$$

Уравнение (1) представляет формулу Дынкина для ассоциированного процесса $\mathbf{Z}_s: D^Z$ в ней — неслучайная матрица, а μ_t^Z — \mathcal{F}_t -согласованный мартингал [1].

Процесс $\xi_t \in \mathbb{R}^K$ (2) представляет доступные косвенные наблюдения, в которых шум определяется \mathcal{F}_t -согласованным винеровским процессом $w_t \in \mathbb{R}^K$; интенсивность шума $g(\cdot)$ зависит от скрытого состояния системы. Шумы с такой интенсивностью называются *мультипликативными*.

Пусть $\mathcal{O}_t \triangleq \sigma\{\xi_s : 0 \leq s \leq t\}$ — поток σ -алгебр, порожденный процессом наблюдений ξ , $\mathcal{O}_t \triangleq \mathcal{O}_{t+}$ — его замыкание справа. *Задача оптимальной фильтрации* заключается в определении условного распределения Z_t относительно \mathcal{O}_t .

Сформулированная проблема имеет ряд ключевых особенностей, значительно усложняющих как ее теоретическое решение, так и численную реализацию. Во-первых, поток σ -алгебр \mathcal{O}_t , порожденный наблюдениями, не является непрерывным справа [9, 10]. Переход к замыканию \mathcal{O}_t — вынужденная мера для последующего корректного использования математического аппарата стохастического анализа [11]. На практике теоретический «предельный случай» \mathcal{O}_{t+} означает использование \mathcal{O}_{t+h} , где $h > 0$ — некоторый малый шаг запаздывания. Таким образом, решение исходной задачи фильтрации заменяется либо сглаживанием с фиксированным малым запаздыванием, либо прогнозированием с тем же шагом. Если же фильтрация есть лишь первый, вспомогательный шаг решения задачи оптимального стохастического управления по неполной информации, то переход к \mathcal{O}_{t+} или \mathcal{O}_{t+h} означает невозможность решения задачи управления в исходной постановке и необходимость изменения ее формулировки.

Во-вторых, мультипликативные шумы в наблюдениях препятствуют непосредственному использованию гирсановской замены меры и получения оценки фильтрации с помощью формулы Каллианпура—Стрибеля [12] и ее обобщений [13]. Зависимость интенсивности шумов наблюдений от оцениваемого сигнала позволяет радикально повысить качество оценивания вплоть до точного восстановления сигнала. С инженерной точки зрения мультипликативные шумы можно рассматривать как амплитудную модуляцию несущего сигнала, представляющего собой винеровский процесс. Исходные наблюдения могут быть преобразованы в эквивалентную совокупность диффузионных наблюдений со стандартными винеровскими шумами и квадратичной вариации наблюдений [14]. Данная вариация — некоторая функция оцениваемого сигнала — наблюдается в отсутствие каких-либо шумов [15]. Использование этих точных наблюдений требует построения обратной функции. Она индивидуальна в каждой практической задаче: носителем соответствующего условного распределения могут быть некоторые «дискретные» множества или многообразия [16]. Необходимость использования квадратичной вариации для вычисления оценки оптимальной фильтрации также влечет дополнительные проблемы в численной реализации. Дело в том, что используемая в уравнении фильтрации производная квадратичной вариации представляет собой композицию двух предельных переходов: первый позволяет получить саму вариацию, второй — вычислить ее производную. Обе эти операции численно выполняются только приближенно, и это означает, что «бесшумовые» наблюдения на практике содержат и остаточный шум, и ошибки аппроксимации [14].

В-третьих, имеется существенная сложность в описании условного распределения состояния СМСП. Известно, что в случае фильтрации состояний диффузионных процессов условное распределение определено своей плотностью, описываемой уравнением Кушнера—Стратоновича [17]. В качестве носителя выступает все фазовое пространство состояния. При фильтрации по наблюдениям с мультипликативными шумами [16] носителем становится многообразие или некоторое «дискретное» множество. В данной статье оценивается состояние МСП, имеющего кусочно-постоянные траектории. Условное распределение в этом случае не является абсолютно непрерывным по мере Лебега. Необходима конструкция некоторой новой меры, относительно которой существует плотность распределения и которую можно описать в виде решения некоторого варианта уравнения Кушнера—Стратоновича.

3 Преобразование наблюдений и дополнительные предположения о системе наблюдения

Далее в изложении используются следующие обозначения:

- I — единичная матрица подходящей размерности;
- $\mathbf{1}$ — вектор-строка подходящей размерности, составленная из единиц;
- $I_A(x)$ — индикаторная функция множества A ;
- $\lambda \triangleq \text{row}(\Lambda_{11}, \dots, \Lambda_{NN})$ — вектор-строка, составленная из диагональных элементов МПП Λ ; $\bar{\Lambda} \triangleq \Lambda - \text{diag}(\lambda)$;
- $\mathbf{I}(t)$ — единичная ступенчатая функция, непрерывная справа;
- $\hat{\alpha}_t \triangleq E \{ \alpha(t, Z_t) \}$ — оценка фильтрации функции от времени t и состояния системы Z_t , у которой $E \{ \alpha^2(t, Z_t) \} < \infty$.

Прежде всего представим преобразование, трансформирующее исходные наблюдения в совокупность \mathcal{O}_t -согласованного диффузионного процесса со стандартной диффузией и некоторой функции состояния, наблюдаемой без шумов. Необходимость такого преобразования связана со следующим фактом. Если шумы в исходных наблюдениях *аддитивны*, т. е. $g(Z_t) \equiv g = \text{const}$, то обновляющий процесс

$$\nu_t \triangleq \int_0^t (gg^\top)^{-1/2} (d\xi_s - \hat{f}_s ds)$$

содержит ту же информацию, что и исходные наблюдения, т. е. $\mathcal{F}_t^\nu = \mathcal{O}_t \forall t \geq 0$. В общем же случае зависимости интенсивности шумов $g(\cdot)$ от состояния Z_t обновляющий процесс, приобретающий вид

$$\nu_t \triangleq \int_0^t \left(\widehat{g(Z_s)g^\top(Z_s)} \right)^{-1/2} (d\xi_s - \hat{f}_s ds),$$

теряет часть информации, изначально содержащейся в ξ_t , т. е. имеет место лишь включение $\mathcal{F}_t^\nu \subset \mathcal{O}_t$.

Рассмотрим квадратичную вариацию $\langle \xi \rangle_t$ — \mathcal{O}_t -согласованный процесс, который согласно правилу Ито [11] представим в виде

$$\begin{aligned}\langle \xi \rangle_t &= \xi_t \xi_t^\top - \int_0^t \xi_s d\xi_s^\top - \int_0^t d\xi_s \xi_s^\top = \\ &= \int_0^t g(Z_{s-}) g^\top(Z_{s-}) ds.\end{aligned}$$

Его производная слева представляет собой \mathcal{O}_t -согласованный процесс

$$\frac{d\langle \xi \rangle_{t-}}{dt} = g(Z_{t-}) g^\top(Z_{t-})$$

с кусочно-постоянными траекториями, *непрерывными слева*. Он не совпадает с $g(Z_t) g^\top(Z_t)$ в моменты скачков.

В качестве первой блочной компоненты преобразованных наблюдений используется \mathcal{O}_t -согласованный процесс

$$\eta_t \triangleq \frac{d\langle \xi \rangle_{t+}}{dt} = \text{vec} \left(g(Z_t) g^\top(Z_t) \right),$$

функция оцениваемого состояния, наблюдаемая без шумов; здесь vec означает операцию векторизации [18], т. е. запись матрицы в вектор по столбцам.

Предположим дополнительно, что матрица $g(Z_t) g^\top(Z_t)$ не вырождена. Тогда \mathcal{O}_t -согласованный процесс

$$\begin{aligned}\zeta_t &\triangleq \int_0^t \eta_s^{-1/2} d\xi_s = \\ &= \int_0^t \underbrace{\left(g(Z_s) g^\top(Z_s) \right)^{-1/2} f(Z_s)}_{\triangleq F(Z_s)} ds + W_t,\end{aligned}$$

выступающий в качестве второй блочной компоненты преобразованных наблюдений, содержит аддитивный шум W_t , стохастически эквивалентный некоторому стандартному винеровскому процессу [19].

Утверждение 1. Для любого $t > 0$ выполнено равенство $\mathcal{O}_t = \sigma\{\eta_s, \zeta_s : 0 \leq s \leq t\}$.

Доказательство данного утверждения может быть выполнено аналогично [10].

Детализируем свойства системы (1), (2).

A. Распределения $\Pi_0(\cdot)$ и $\Pi(\cdot)$ непрерывны по мере Лебега: существуют такие функции

$$\begin{aligned}\pi_0(y) &= \text{col}(\pi_0^1(y), \dots, \pi_0^N(y)); \\ \pi(y) &= \text{col}(\pi^1(y), \dots, \pi^N(y)),\end{aligned}$$

что для любых $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\{Y_0 \in \mathcal{A} | \theta_0 = e_n\} &= \int_{\mathcal{A}} \pi_0^n(y) dy; \\ \mathcal{P}\{Y_t \in \mathcal{A} | \theta_t = e_n, \tau_1 < t\} &= \int_{\mathcal{A}} \pi^n(y) dy.\end{aligned}$$

B. Носитель $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^M$ процесса Y_t ограничен.

B. Функция $f(e, y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^K$ непрерывна по второму аргументу, а также

$$\int_{\mathbb{R}^M} \sum_{n=1}^N f^\top(e_n, y) f(e_n, y) (\pi_0^n(y) + \pi^n(y)) dy < \infty.$$

Г. Интенсивность шумов в наблюдениях линейна по компоненте Y_t , т. е. функция $g(e, y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{K \times K}$ такова, что

$$\begin{aligned}\text{vec} \left(g(e, y) g^\top(e, y) \right) &\triangleq G(e, y) = \\ &= \sum_{n=1}^N e^\top e_n (\Gamma_n y + \gamma_n). \quad (3)\end{aligned}$$

Здесь $\{\Gamma_n\}_{n=\overline{1, N}}$ — известные неслучайные $K^2 \times M$ -мерные матрицы; $\{\gamma_n\}_{n=\overline{1, N}}$ — K^2 -мерные вектор-столбцы.

Д. Интенсивность шумов в наблюдениях равномерно невырождена: существует такая $\alpha > 0$, что для любых $n = \overline{1, N}$ и $y \in \mathcal{D}$ выполнено неравенство

$$g(e_n, y) g^\top(e_n, y) \geq \alpha I.$$

Если бы распределения Π и Π_0 были дискретными, то СМСП Z_t можно было бы выразить через некоторый МСП с конечным множеством состояний. Задача оптимальной фильтрации таких МСП по наблюдениям с мультипликативными шумами уже решена [10]. Условие **A** в этом контексте имеет следующий смысл: непрерывно распределенная компонента Y_t не может быть сведена к некоторому случайному процессу с конечным множеством состояний. В то же время решение задачи фильтрации при выполнении условия **A** есть первый шаг в нахождении решения задачи при произвольном виде распределений Π и Π_0 : в общем случае уравнения, характеризующие условное распределение, очевидно, разобьются на уравнения для дискретной и непрерывной составляющих.

Условие **B** — ограниченность носителя компоненты Y_t , носит технический характер. Оно наряду с остальными гарантирует существование условного распределения в форме, представленной ниже. Однако это условие — одно из *достаточных*, т. е. при его нарушении условное распределение, тем

не менее, может иметь заявленную форму. Несмотря на технический характер, данное условие не представляется обременительным: в практических задачах компонента Y_t действительно ограничена.

Условие B совместно с B гарантирует существование второго момента процесса ξ_t и корректность вычисления условных математических ожиданий различных квадратично интегрируемых процессов — функций состояния системы.

Для условия Γ имеются две причины. Во-первых, линейная зависимость — самая простая; с ее помощью можно с определенной точностью приблизить другие зависимости. Линейными стохастическими дифференциальными системами с мартингалами в правой части типа (1) можно характеризовать не только сам СМСП Z_t , но и произвольную функцию от него. На практике при построении модели системы наблюдения можно сразу определить Z_t так, чтобы зависимость интенсивности шумов в наблюдениях от СМСП имела вид (3), а функция сноса $f(Z_t)$ в наблюдениях (2) уже строится в соответствии со сделанным выбором $g(Z_t)$. Во-вторых, линейная зависимость позволяет одновременно исследовать оба случая полных преобразов: либо конечное множество, либо многообразие в \mathcal{D} .

Равномерная невырожденность шумов в наблюдениях — стандартное требование в задачах фильтрации [19]. В рассматриваемой задаче оно гарантирует конечный второй момент преобразованных наблюдений ζ_t .

Заметим, что процесс η_t имеет почти на-верное (п. н.) кусочно-постоянные траектории, причем последовательность моментов его скачков $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ вложена в последовательность скачков $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ процесса θ_t . Будем считать, что $\tau_0 = \sigma_0 \triangleq 0$ \mathcal{P} -п. н.

Следующий раздел посвящен построению условного распределения оцениваемого процесса в начальный момент времени. Эта же формула используется при пересчете условного распределения в моменты $\{\sigma_n\}$.

4 Построение оценки в начальный момент времени

Согласно определению, $\mathcal{O}_0 = \sigma\{\eta_0\}$, причем

$$\eta_0 = \sum_{n=1}^N \theta_0^\top e_n (\Gamma_n Y_0 + \gamma_n).$$

Для каждой матрицы Γ_n , $n = \overline{1, N}$, введем следующие обозначения:

$$\dim(\text{Ker}^\perp(\Gamma_n)) = M'_n, \quad \dim(\text{Ker}(\Gamma_n)) = M''_n, \\ M'_n + M''_n \equiv M;$$

$P_n = [P'_n \ P''_n]$ ($n = \overline{1, N}$) — ортогональные матрицы, первая блочная компонента которых P'_n содержит базисные векторы $\text{Ker}^\perp(\Gamma_n)$, а вторая P''_n — базисные векторы $\text{Ker}(\Gamma_n)$. Для характеристики условного распределения Z_0 относительно η_0 рассмотрим N преобразований $\mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$, связанных с параметрами функции $G(\cdot)$ (3):

$$y(v) = P_n v + \Gamma_n^+(\zeta_0 - \gamma_n). \quad (4)$$

Здесь Γ_n^+ означает матрицу, псевдообратную к Γ_n ;

$$v = \begin{bmatrix} v' \\ v'' \end{bmatrix} : v' \in \mathbb{R}^{M'_n}, v'' \in \mathbb{R}^{M''_n}.$$

На $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}(\mathbb{R}^M))$ определим семейство мер $\mu(dv) = \{\mu^n(dv)\}_{n=\overline{1, N}}$:

$$\mu^n(dv) \triangleq \begin{cases} \lambda(dv'') & \text{при } M''_n > 0 \text{ — мера Лебега} \\ & \text{на } \mathbb{R}^{M''_n}, \text{ сосредоточенная} \\ & \text{на подпространстве} \\ & \{v : \Gamma_n y(v) + \gamma_n = \eta_0\}; \\ \delta_0(dv) & \text{при } M''_n = 0 \text{ — единичная} \\ & \text{мера на } \mathbb{R}^M, \text{ сосредоточенная в } 0. \end{cases}$$

Соответственно, интегралы по $d\mu^n$ определяются следующим образом:

$$\int_{\mathbb{R}^M} \phi(v) \mu^n(dv) \triangleq \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{M''_n}} \phi(\Gamma_n^+(\eta_0 - \gamma_n) + P''_n v'') \lambda(dv'') & \text{при } M''_n > 0; \\ \int_{\mathbb{R}^M} \phi(\Gamma_n^+(\eta_0 - \gamma_n) + P_n v) \delta_0(dv) & \text{при } M''_n = 0. \end{cases}$$

Утверждение 2. Условное распределение состояния $Z_0 = \text{col}(\theta_0, Y_0)$ сосредоточено на подмножестве $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M$, имеющем вид $\bigcup_{n=1}^N \{e_n\} \times \{y \in \mathbb{R}^M : \Gamma_n y + \gamma_n = \eta_0\}$. Оно описывается функцией

$$\hat{\psi}_0(y|\eta_0) = \text{col}(\hat{\psi}_0^1(y|\eta_0), \dots, \hat{\psi}_0^N(y|\eta_0))$$

с компонентами

$$\hat{\psi}_0^n(y|\eta_0) = \frac{p_0^n \pi_0^n(y)}{\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} p_0^i \pi_0^i(y(v)) \mu^i(dv)}. \quad (5)$$

Функция $\hat{\psi}_0(y|\eta_0)$ определяет условную плотность распределения по мере μ : для любых $n = \overline{1, N}$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \{ \theta_0 = e_n, Y_0 \in B | \eta_0 \} = \\ = \int_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_B(v) \hat{\psi}_0^n(v) \mu^n(dv) \quad \mathcal{P}\text{-п. н.} \end{aligned}$$

Равенство (5) представляет некоторый вариант формулы Байеса. Доказательство утверждения 2 основано на известной формуле условной плотности распределения $\rho(x|Y)$ случайного вектора X относительно наблюдений Y , когда совместная плотность $\phi_{X,Y}(x, y)$ известна:

$$\rho(x|Y) = \frac{\phi(x, Y)}{\int \phi(u, Y) du}.$$

Последняя формула используется после преобразования переменных (4).

Заметим, что при некоторых n множество $\{y \in \mathbb{R}^M : \Gamma_n y + \gamma_n = \eta_0\}$ превращается в точку $y = \Gamma_n^+(\eta_0 - \gamma_n)$. С пользовательской точки зрения возможность точно идентифицировать компоненту Y_0 для некоторых или даже всех значений МСП θ_0 по наблюдению η_0 означает коренное повышение качества оценки фильтрации и упрощение алгоритма ее вычисления.

Версия плотности (5) не регулярная: правая часть не определена корректно, если ее знаменатель равен 0. Эта проблема снимается путем доопределения функции $\hat{\psi}_0(y|\eta_0)$ распределением $\pi_0(y)$ для всех значений η_0 , обнуляющих знаменатель.

5 Уравнения фильтрации

Обозначим: $\eta_i \triangleq \eta_{\sigma_i}$ — значение бесшумовой компоненты наблюдений в момент ее i -го скачка,

$$\mathcal{A}_i \triangleq \bigcup_{n=1}^N \{e_n\} \times \underbrace{\{y \in \mathbb{R}^M : \Gamma_n y + \gamma_n = \zeta_i\}}_{\triangleq \mathcal{A}_i^n} \quad (6)$$

есть полный прообраз наблюдения η_i .

Пусть $\mathcal{B} \triangleq \bigcup_{n=1}^N \{e_n\} \times \mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{A}_i$ — произвольное подмножество \mathcal{A}_i . На интервале $[\sigma_i, +\infty)$ рассмотрим эволюцию процессов

$$\begin{aligned} I_t^{\mathcal{A}_i} &\triangleq \mathbf{I}(t - \sigma_i) \theta_t I_{\mathcal{A}_i}(Z_t); & U_t^{\mathcal{A}_i} &\triangleq I_{[\sigma_i, \sigma_{i+1})}(t); \\ V_t^{\mathcal{A}_i} &\triangleq I_t^{\mathcal{A}_i} U_t^{\mathcal{A}_i}; \end{aligned}$$

$$I_t^{\mathcal{B}} \triangleq \mathbf{I}(t - \sigma_i) \theta_t I_{\mathcal{B}}(Z_t); \quad Q_t^{\mathcal{B}} \triangleq I_t^{\mathcal{B}} U_t^{\mathcal{A}_i}.$$

Согласно [20], верны следующие мартингалы представления:

$$\begin{aligned} I_t^{\mathcal{A}_i} = \mathbf{I}(t - \sigma_i) \left[\theta_{\sigma_i} + \int_{\sigma_i}^t \left(\text{diag}(\lambda) I_{s-}^{\mathcal{A}_i} + \right. \right. \\ \left. \left. + \text{diag}(\Pi(\mathcal{A}_i)) \bar{\Lambda}^\top \theta_{s-} \right) ds + M_t^1 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_t^{\mathcal{A}_i} = \mathbf{I}(t - \sigma_i) \left[1 + \right. \\ \left. + \int_{\sigma_i}^t \left(\lambda V_{s-}^{\mathcal{A}_i} + \Pi^\top(\mathcal{A}_i) \bar{\Lambda}^\top V_{s-}^{\mathcal{A}_i} \right) ds + M_t^2 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_t^{\mathcal{A}_i} = \mathbf{I}(t - \sigma_i) \left[\theta_{\sigma_i} + \right. \\ \left. + \int_{\sigma_i}^t \left(\text{diag}(\lambda) + \text{diag}(\Pi(\mathcal{A}_i)) \bar{\Lambda}^\top \right) V_{s-}^{\mathcal{A}_i} ds + M_t^3 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_t^{\mathcal{B}} = \mathbf{I}(t - \sigma_i) \left[I_{\sigma_i}^{\mathcal{B}} + \right. \\ \left. + \int_{\sigma_i}^t \left(\text{diag}(\lambda) I_{s-}^{\mathcal{B}} + \text{diag}(\Pi(\mathcal{B})) \bar{\Lambda}^\top \theta_{s-} \right) ds + M_t^4 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_t^{\mathcal{B}} = \mathbf{I}(t - \sigma_i) \left[I_{\sigma_i}^{\mathcal{B}} + \right. \\ \left. + \int_{\sigma_i}^t \left(\text{diag}(\lambda) Q_{s-}^{\mathcal{B}} + \text{diag}(\Pi(\mathcal{B})) \bar{\Lambda}^\top V_{s-}^{\mathcal{A}_i} \right) ds + M_t^5 \right], \end{aligned}$$

где M_t^ℓ , $\ell = \overline{1, 5}$, $t \geq \sigma_i$ — некоторые мартингалы.

Следующее утверждение описывает эволюцию условной вероятности того, что Z_t принадлежит множеству \mathcal{B} на полуинтервалах $[\sigma_i, \sigma_{i+1})$.

Утверждение 3. Пусть $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_i$ — произвольное подмножество \mathcal{A}_i . На множестве $\{\omega : \sigma_i(\omega) \leq t < \sigma_{i+1}(\omega)\}$ \mathcal{P} -п.н. выполнено равенство

$$\hat{I}_t^{\mathcal{B}} = (\mathbf{1}_{\tilde{V}_t^{\mathcal{A}}})^{-1} \tilde{Q}_t^{\mathcal{B}},$$

где

$$\tilde{Q}_t^{\mathcal{B}} \triangleq \mathbb{E} \left\{ Q_t^{\mathcal{B}} | \mathcal{O}_{\sigma_i} \vee \mathcal{F}_t^\zeta \right\}$$

есть решения на $[\sigma_i, \sigma_{i+1})$ следующих стохастических уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_t^{\mathcal{B}} &= \tilde{I}_{\sigma_i}^{\mathcal{B}} + \int_{\sigma_i}^t \left[\text{diag}(\lambda) \tilde{Q}_s^{\mathcal{B}} + \text{diag}(\Pi(\mathcal{B})) \bar{\Lambda}^{\top} \tilde{V}_s^{\mathcal{A}_i} \right] ds + \\ &+ \int_{\sigma_i}^t \left(\widetilde{Q_s^{\mathcal{B}} F_s^{\top}} - \tilde{Q}_s^{\mathcal{B}} \tilde{F}_s^{\top} \right) (d\zeta_s - \tilde{F}_s ds); \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t^{\mathcal{A}_i} &= \hat{\theta}_{\sigma_i} + \int_{\sigma_i}^t \left[\text{diag}(\lambda) + \text{diag}(\Pi(\mathcal{A}_i)) \bar{\Lambda}^{\top} \right] \tilde{V}_s^{\mathcal{A}_i} ds + \\ &+ \int_{\sigma_i}^t \left(\widetilde{V_s^{\mathcal{A}_i} F_s^{\top}} - \tilde{V}_s^{\mathcal{A}_i} \tilde{F}_s^{\top} \right) (d\zeta_s - \tilde{F}_s ds). \quad (8) \end{aligned}$$

Если $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_i = \emptyset$, то $\hat{I}_t^{\mathcal{B}} \equiv 0$.

Доказательство утверждения 3 следует из формулы Каллианпура–Стрибеля [12] и аналогично [21].

Очевидно, что уравнения (7) и (8) незамкнуты: правые части уравнений, описывающих эволюцию $\tilde{Q}_t^{\mathcal{B}}$ и $\tilde{V}_t^{\mathcal{A}_i}$, содержат оценки фильтрации $\widetilde{Q_t^{\mathcal{B}} F_t^{\top}}$ и $\widetilde{V_s^{\mathcal{A}_i} F_s^{\top}}$ произведений оцениваемых вероятностей и дрейфов преобразованных наблюдений.

Ниже приведено основное утверждение работы, представляющее решение задачи фильтрации в терминах эволюции условной плотности распределения относительно имеющихся наблюдений.

Утверждение 4. На интервалах $[\sigma_j, \sigma_{j+1})$ ($j \in \mathbb{Z}_+$) постоянства процесса $\{\eta_t\}$ условное распределение состояния Z_t относительно наблюдений \mathcal{O}_t сосредоточено на множествах \mathcal{A}_j (6). На каждом интервале (σ_j, σ_{j+1}) распределение описывается плотностью $\hat{\psi}_j(t, y) \triangleq \text{col}(\hat{\psi}_j^1(t, y), \dots, \hat{\psi}_j^N(t, y))$: $\forall \mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$, $n = \overline{1, N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \{ \theta_t = e_n, Y_t \in \mathcal{B} \} &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^M} I_{\mathcal{B}}(v) \hat{\psi}_j^n(t, v) \mu_j^n(dv) \quad \mathcal{P}\text{-п. н.}, \end{aligned}$$

где

$$\hat{\psi}_j^n(t, y) = \frac{\tilde{\psi}_j^n(t, y)}{\sum_{\ell=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \tilde{\psi}_j^{\ell}(t, v) \mu_j^{\ell}(dv)}. \quad (9)$$

Здесь $\tilde{\psi}_j(t, y) \triangleq \text{col}(\tilde{\psi}_j^1(t, y), \dots, \tilde{\psi}_j^N(t, y))$, $t \in [\sigma_j, \sigma_{j+1})$ — решение системы рекуррентно связанных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_j(t, y) &= \tilde{\psi}_j(\sigma_j, y) + \int_{\sigma_j}^t \left[\text{diag}(\lambda) \tilde{\psi}_j(s, y) + \right. \\ &+ \left. \text{diag}(\Pi(\mathcal{A}_j)) \text{diag}(\pi(y)) \bar{\Lambda}^{\top} \tilde{V}_s^{\mathcal{A}_j} \right] ds + \\ &+ \int_{\sigma_j}^t \text{diag}(\tilde{\psi}_j(s, y)) \left[\bar{F}(y) - \tilde{F}_s \mathbf{1} \right]^{\top} (d\zeta_s - \tilde{F}_s ds), \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{F}(y) &\triangleq \begin{bmatrix} F^1(e_1, y) & \dots & F^1(e_N, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^K(e_1, y) & \dots & F^K(e_N, y) \end{bmatrix}; \\ \tilde{F}_t &\triangleq \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \begin{bmatrix} F^1(e_n, v) \\ \vdots \\ F^K(e_n, v) \end{bmatrix} \tilde{\psi}_j^n(t, v) \mu_j^n(dv); \\ \tilde{V}_t^{\mathcal{A}_j} &\triangleq \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} e_n \tilde{\psi}_j^n(t, v) \mu_j^n(dv). \end{aligned}$$

Начальные условия

$$\tilde{\psi}_j(\sigma_j, y) = \text{col}(\tilde{\psi}_j^1(\sigma_j, y), \dots, \tilde{\psi}_j^N(\sigma_j, y))$$

связаны с решением (10) на предыдущем временном интервале:

$$\tilde{\psi}_j^n(\sigma_j, y) = \frac{\hat{\theta}_{\sigma_j}^n - \pi^n(y)}{\sum_{\ell=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \hat{\theta}_{\sigma_j}^{\ell} - \pi^{\ell}(v) \mu_j^{\ell}(dv)}, \quad (11)$$

где

$$\hat{\theta}_{\sigma_j}^n = \frac{\int_{\mathbb{R}^M} \tilde{\psi}_{j-1}^n(\sigma_j, v) \mu_{j-1}^n(dv)}{\sum_{\ell=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \tilde{\psi}_{j-1}^{\ell}(\sigma_j, u) \mu_{j-1}^{\ell}(du)},$$

а начальное условное распределение $\tilde{\psi}_0(0, y)$ определено формулой (5).

Доказательство истинности утверждения 4 проводится аналогично [20, 21].

Условная плотность на интервалах между скачками η_t описывается практически таким же уравнением, что и плотность состояния относительно диффузионных наблюдений с аддитивными шумами [2]. Однако имеются три существенных отличия. Во-первых, условная плотность $\tilde{\psi}_j(t, y)$ представляет распределение Z_t совместно с событием $t < \sigma_{j+1}$. Именно это обстоятельство объясняет наличие дополнительной нормировки (9). Во-вторых, носителем распределения выступает не все пространство \mathbb{R}^M , а его линейные подпространства или даже конечные множества. В-третьих,

условное распределение не изменяется непрерывно: в моменты скачков бесшумовой компоненты наблюдений условное распределение и его носитель меняются скачкообразно.

Следует также отметить, что сомножитель $\text{diag}(\Pi(\mathcal{A}_j))$ во втором слагаемом функции сноса в (10) в силу условий A и Γ представляет собой диагональную матрицу с 0 и 1 на диагонали. Нули соответствуют случаям, когда $\Gamma_n = 0$, т. е. функция квадратичной вариации не зависит от конкретного значения компоненты Y : $G(e, y) = G(e)$.

6 Заключение

Решение задачи оптимальной фильтрации найдено: условное распределение имеет плотность относительно набора специально сконструированных мер. Плотность описывается набором рекуррентно связанных уравнений — обобщений уравнений Кушнера—Стратоновича — и интегральных — вариантов формулы Байеса.

Наличие зависимости интенсивности шумов наблюдений от оцениваемого сигнала позволяет существенно повысить точность оценивания: носитель условного распределения сокращается со всего евклидова пространства \mathbb{R}^M до его подпространства. В некоторых случаях вообще возможно точное восстановление всего вектора состояния Z_t или части его компонент.

Системы стохастических уравнений (10) имеют достаточно простую структуру, и для их численного решения, казалось бы, применимы известные алгоритмы приближенного решения стохастических дифференциальных систем или их модификации [22, 23]. Однако это не так. Системы (10) и соотношения (11) используют уже преобразованные наблюдения η_t и ζ_t , в каждый момент времени представляющие собой результаты операций предельного перехода. В практических задачах выполнение этих операций невозможно: существует некоторый минимальный шаг фиксации наблюдений. Допредельная аппроксимация η_t содержит недопустимо большую методическую ошибку, что препятствует ее использованию в виде наблюдения, не содержащего шума. Выходом из этой ситуации может послужить переход от исходной задачи к фильтрации по наблюдениям, **дискретизованным по времени**, и построение соответствующих алгоритмов численного решения [24, 25].

Литература

1. Борисов А., Куринов Ю., Смелянский Р. Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных про-

- цессов // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 30–37. doi: 10.14357/19922264240304. EDN: XPVTGJ.
2. Борисов А., Куринов Ю., Смелянский Р. Фильтрация состояний класса марковских скачкообразных процессов по разнородным наблюдениям с аддитивными шумами // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 10–18. doi: 10.14357/19922264240402. EDN: FEMNQL.
3. Bar-Shalom Y., Li X-R., Kirubarajan T. Estimation with applications to tracking and navigation: Theory, algorithms and software. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2002. 592 p. doi: 10.1002/0471221279.ch1.
4. Миллер Б. М., Авраченко К. Е., Степанян К. В., Миллер Г. Б. Задача оптимального стохастического управления потоком данных по неполной информации // Пробл. передачи информ., 2005. Т. 41. Вып. 2. С. 89–110. EDN: HSYITN.
5. Борисов А. Алгоритм робастной фильтрации марковских скачкообразных процессов по высокочастотным считающим наблюдениям // Автомат. и телемех., 2020. Вып. 4. С. 3–20. doi: 10.1031857/S0005231020040017. EDN: QAJZEE.
6. Smith W. Regenerative stochastic processes // P. Roy. Soc. Lond. A Mat., 1955. Vol. 232. Iss. 1188. P. 6–31. doi: 10.1098/rspa.1955.0198.
7. Ait-Sahalia Y., Jacod J. High-frequency financial econometrics. — Hoboken, Princeton, NJ: Princeton University Press, 2014. 688 p. doi: 10.1515/9781400850327.
8. Elliott R., Siu T. K. Hedging options in a hidden Markov-switching local-volatility model via stochastic flows and a Monte-Carlo method // J. Futures Markets, 2022. Vol. 43. P. 925–950. doi: 10.1002/fut.22422.
9. Stoyanov J. Counterexamples in probability. — Hoboken, NJ, USA: Wiley, 1997. 352 p.
10. Borisov A., Sokolov I. Optimal filtering of Markov jump processes given observations with state-dependent noises: Exact solution and stable numerical schemes // Mathematics, 2020. Vol. 8. Iss. 4. Art. 506. 22 p. doi: 10.3390/math8040506.
11. Луицер Р., Ширяев А. Теория мартингалов. — М.: Физматлит, 1986. 512 с.
12. Kallianpur G., Striebel C. Stochastic differential equations occurring in the estimation of continuous parameter stochastic processes // Теория вероятностей и её применения, 1969. Т. 14. Вып. 4. С. 597–622.
13. Wong E., Hajek B. Stochastic processes in engineering systems. — New York, NY, USA: Springer, 1985. 361 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5060-9.
14. Takeuchi Y., Akashi H. Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise // Automatica, 1985. Vol. 21. P. 303–313. doi: 10.1016/0005-1098(85)90063-9.
15. Joannides M., LeGland F. Nonlinear filtering with continuous time perfect observations and noninformative quadratic variation // 36th Conference on Decision and Control Proceedings. — New York, NY, USA: IEEE, 1997. Vol. 2. P. 1645–1650. doi: 10.1109/CDC.1997.657750.

16. Crisan D., Kouritzin M., Xiong J. Nonlinear filtering with signal dependent observation noise // *Electron. J. Probab.*, 2009. Vol. 14. P. 1863–1883. doi: 10.1214/EJP.v14-687.
17. Kushner H., Dupuis P. Numerical methods for stochastic control problems in continuous time. — 2nd ed. — Stochastic modelling and applied probability ser. — New York, NY, USA: Springer, 2001. 476 p. doi: 10.1007/978-1-4613-0007-6.
18. Магнус Я. Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике / Под ред. С.А. Айвазяна. — М.: Физматлит, 2002. 496 с. EDN: UGLCFP.
19. Липцер Р., Ширяев А. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука, 2001. 696 с.
20. Борисов А. Фильтрация состояний и параметров специальных марковских скачкообразных процессов по косвенным наблюдениям без шума // *Информатика и её применения*, 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 25–32. doi: 10.14357/19922264250104. EDN: MZAJVZ.
21. Cvitanic J., Liptser R., Rozovskii B. A filtering approach to tracking volatility from prices observed at random times // *Ann. Appl. Probab.*, 2006. Vol. 16. No. 3. P. 1633–1652. doi: 10.1214/105051606000000222.
22. Kloeden P., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. — Berlin, Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 1992. 636 p. doi: 10.1007/978-3-662-12616-5.
23. Platen E., Bruti-Liberati N. Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance. — Berlin, Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2010. 856 p. doi: 10.1007/978-3-642-13694-8.
24. Борисов А., Казанчян Д. Фильтрация состояний марковских скачкообразных процессов по комплексным наблюдениям I: точное решение задачи // *Информатика и её применения*, 2021. Т. 15. Вып. 2. С. 12–19. doi: 10.14357/19922264210202. EDN: NKCTNS.
25. Борисов А., Казанчян Д. Фильтрация состояний марковских скачкообразных процессов по комплексным наблюдениям II: численный алгоритм // *Информатика и её применения*, 2021. Т. 15. Вып. 3. С. 9–15. doi: 10.14357/19922264210302. EDN: WUJJEВ.

Поступила в редакцию 10.08.2025

Принята к публикации 15.11.2025

FILTERING OF SPECIAL MARKOV JUMP PROCESSES BY OBSERVATIONS WITH MULTIPLICATIVE NOISE

A. V. Borisov

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper is devoted to the problem of optimal state filtering for a class of special Markov jump processes. The system consists of two coupled components. The first component is a Markov jump process with a finite state space. The second component evolves synchronously with the first one and, given the trajectory of the first component, forms a sequence of independent random vectors. The observations are modeled by a diffusion process whose drift and diffusion coefficients depend on the underlying state to be estimated. The filtering problem is to determine the conditional distribution of the system state given the available observations. Through a suitable transformation, the original observations can be reduced to a diffusion process with unit diffusion accompanied by a function of the system state observed without noise. The conditional probability distribution of the state is absolutely continuous with respect to a specially constructed reference measure. Its conditional density is characterized by a system of recurrently connected stochastic integrodifferential equations — essentially, a variant of the Kushner–Stratonovich equation — augmented by integral transformations.

Keywords: special Markov jump process; observations with multiplicative noise; conditional probability density function; Kushner–Stratonovich equation

DOI: 10.14357/19922264250401

EDN: CVUOMY

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (СКР “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

References

1. Borisov, A., Yu. Kurinov, and R. Smeliansky. 2024. Veroyatnostnyy analiz klassa markovskikh skachkoobraznykh protsessov [Probabilistic analysis of a class of Markov jump processes]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):30–37. doi: 10.14357/19922264240304. EDN: XPVTGJ.
2. Borisov, A., Yu. Kurinov, and R. Smeliansky. 2024. Fil'tratsiya sostoyaniy klassa markovskikh skachkoobraznykh protsessov po raznorodnym nablyudeniya s additivnymi shumami [Filtering of a class of Markov jump processes by heterogeneous observations with additive noises]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):10–18. doi: 10.14357/19922264240402. EDN: FEMNQL.
3. Bar-Shalom, Y., X.-R. Li, and T. Kirubarajan. 2002. *Estimation with applications to tracking and navigation: Theory, algorithms and software*. New York, NY: John Wiley & Sons. 592 p. doi: 10.1002/0471221279.
4. Miller, B. M., K. E. Avrachenkov, K. V. Stepanyan, and G. B. Miller. 2005. Flow control as a stochastic optimal control problem with incomplete information. *Probl. Inf. Transm.* 41(2):150–170. doi: 10.1007/s11122-005-0020-8. EDN: LJFPRR.
5. Borisov, A. 2020. Robust filtering algorithm for Markov jump processes with high-frequency counting observations. *Automat. Rem. Contr.* 81(4):575–588. doi: 10.1134/S0005117920040013. EDN: DFNFFX.
6. Smith, W. 1955. Regenerative stochastic processes. *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.* 232(1188):6–31. doi: 10.1098/rspa.1955.0198.
7. Ait-Sahalia, Y., and J. Jacod. 2014. *High-frequency financial econometrics*. Hoboken, Princeton, NJ: Princeton University Press. 688 p. doi: 10.1515/9781400850327.
8. Elliott, R., and T. K. Siu. 2022. Hedging options in a hidden Markov-switching local-volatility model via stochastic flows and a Monte-Carlo method. *J. Futures Markets* 43(7):925–950. doi: 10.1002/fut.22422.
9. Stoyanov, J. 1997. *Counterexamples in probability*. Hoboken, NJ: Wiley. 352 p.
10. Borisov, A., and I. Sokolov. 2020. Optimal filtering of Markov jump processes given observations with state-dependent noises: Exact solution and stable numerical schemes. *Mathematics* 8(4):506. 22 p. doi: 10.3390/math8040506.
11. Liptser, R. Sh., and A. N. Shiryaev. 1989. *Theory of martingales*. New York, NY: Springer. 792 p. doi: 10.1007/978-94-009-2438-3.
12. Kallianpur, G., and C. Striebel. 1969. Stochastic differential equations occurring in the estimation of continuous parameter stochastic processes. *Theor. Probab. Appl.* 14(4):567–594. doi: 10.1137/1114076.
13. Wong, E., and B. Hajek. 1985. *Stochastic processes in engineering systems*. New York, NY: Springer. 361 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5060-9.
14. Takeuchi, Y., and H. Akashi. 1985. Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise. *Automatica* 21(3):303–313. doi: 10.1016/0005-1098(85)90063-9.
15. Joannides, M., and F. LeGland. 1997. Nonlinear filtering with continuous time perfect observations and noninformative quadratic variation. *36th Conference on Decision and Control Proceedings*. New York, NY: IEEE. 1645–1650. doi: 10.1109/CDC.1997.657750.
16. Crisan, D., M. Kouritzin, and J. Xiong. 2009. Nonlinear filtering with signal dependent observation noise. *Electron. J. Probab.* 14:1863–1883. doi: 10.1214/EJP.v14-687.
17. Kushner, H., and P. Dupuis. 2001. *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time*. 2nd ed. Stochastic modelling and applied probability ser. New York, NY: Springer. 476 p. doi: 10.1007/978-1-4613-0007-6.
18. Magnus, J., and H. Neudecker. 2019. *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. New York, NY: J. Wiley & Sons. 504 p. doi: 10.1002/9781119541219.
19. Liptser, R. S., and A. N. Shiryaev. 1974. *Statistika sluchaynykh protsessov (nelineynaya fil'tratsiya i smezhnyye voprosy)* [Statistics of random processes (nonlinear filtering and related problems)]. Moscow: Nauka. 696 p.
20. Borisov, A. V. 2025. Fil'tratsiya sostoyaniy i parametrov spetsial'nykh markovskikh skachkoobraznykh protsessov po kosvennym nablyudeniya bez shuma [Filtering of states and parameters of special Markov jump processes via indirect perfect observations]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 19(1):25–32. doi: 10.14357/19922264250104. EDN: MZAJVZ.
21. Cvitanic, J., R. Liptser, and B. Rozovskii. 2006. A filtering approach to tracking volatility from prices observed at random times. *Ann. Appl. Probab.* 16:1633–1652. doi: 10.1214/105051606000000222.
22. Kloden, P. E., and E. Platen. 1992. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag. 636 p. doi: 10.1007/978-3-662-12616-5.
23. Platen, E., and N. Bruti-Liberati. 2010. *Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance*. Berlin: Springer. 856 p. doi: 10.1007/978-3-642-13694-8.
24. Borisov, A., and D. Kazanchyan. 2021. Fil'tratsiya sostoyaniy markovskikh skachkoobraznykh protsessov po kompleksnym nablyudeniya I: tochnoe reshenie zadachi [Filtering of Markov jump processes given composite observations I: Exact solution]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 15(2):12–19. doi: 10.14357/19922264210202. EDN: NKCTNS.
25. Borisov, A., and D. Kazanchyan. 2021. Fil'tratsiya sostoyaniy markovskikh skachkoobraznykh protsessov po kompleksnym nablyudeniya II: Chislennyy algoritm [Filtering of Markov jump processes given composite observations II: Numerical algorithm]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(3):9–15. doi: 10.14357/19922264210302. EDN: WUJJEJ.

Received August 10, 2025

Accepted November 15, 2025

Contributor

Borisov Andrey V. (b. 1965) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; aborisov@frcsc.ru

ПРАКТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА НЕСТАБИЛЬНОСТИ РАСШИРЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА*

А. В. Босов¹, И. В. Урюпин²

Аннотация: Изучены варианты нестабильной работы расширенного фильтра Калмана (РФК). Комплекс экспериментов выполнен с типовой моделью стохастической системы наблюдения. Моделировалось движение автономного объекта с постоянной средней скоростью в условиях неконтролируемых возмущений скорости, формирующих хаотическую траекторию с регулярным целевым направлением. Наблюдения двух независимых комплексов состоят из измерений углов направления (азимута и угла возвышения) и дальности. Оценивание положения объекта выполняется базовым РФК и его модификацией по методу линейных псевдонаблюдений. Базовый РФК оказывается нестабильным в исходной модели. Расширенный фильтр Калмана по методу псевдонаблюдений обеспечивает стабильную оценку положения с высокой точностью. Цель экспериментов состоит в том, чтобы показать, какие изменения в модели системы наблюдения приводят к нестабильной работе этой модификации РФК. Для этого предложены, просчитаны и проанализированы четыре сценария: (1) неточное детектирование начального положения; (2) невозможность заранее идентифицировать параметры скорости; (3) движение со скачкообразным изменением параметров скорости с сохранением направления на цель; (4) неточное задание статистических характеристик (ковариации) ошибок измерений. В каждом из сценариев РФК оказывается нестабильным, формируя оценку положения объекта неприемлемой точности. При этом характер нестабильности и поведение оценок РФК различны, что продемонстрировано числовыми и графическими результатами расчетов.

Ключевые слова: стохастическая фильтрация; дискретная стохастическая система наблюдения; расширенный фильтр Калмана (РФК); РФК по методу линейных псевдонаблюдений

DOI: 10.14357/19922264250402

EDN: BMTYSW

1 Введение

Задача стохастической фильтрации, т.е. оценивания состояния стохастической динамической системы по результатам косвенных зашумленных наблюдений, типична для широкого круга приложений. Примеры использования методов и алгоритмов фильтрации можно обнаружить в таких областях, как обработка сигналов и изображений, навигационные системы, финансовое моделирование, управление роботами и многих других. Наиболее широкий круг приложений, несомненно, имеет оптимальный линейный фильтр [1] (фильтр Калмана). Если модель не укладывается в линейно-гауссовскую постановку, то, за редкими исключениями, применяются субоптимальные фильтры. Это обоснованные только эмпирическими соображениями алгоритмы, не обладающие какими-либо гарантированными свойствами.

Бесспорное первое место по частоте применения таких алгоритмов занимает эмпирический нелинейный аналог фильтра Калмана [2] (РФК).

Привлекательность РФК объясняется его простотой и объяснимостью, так как в нем реализована понятная концепция повторения калмановской структуры оценки фильтрации за счет линеаризации. Это самый простой и действенный способ реализовать эвристически обоснованную оценку для нелинейной модели.

Обратная сторона этой простоты упоминается в каждой работе по совершенствованию РФК. Аккуратно исследователи формулируют претензию, называя РФК нестабильным. Что стоит за этой нестабильностью, не всегда понятно. Наиболее «драматические» примеры констатируют расходимость оценки фильтра, т.е. неограниченно увеличивающуюся разность между оценкой и оцениваемым состоянием. Хороший пример в классической навигации есть в [3], в химическом производстве — в [4], в приложениях SLAM (Simultaneous Localization and Mapping, одновременная локализация и построение карты) — в [5], причем в [5] выполнено подробное изучение поведения оценки РФК и предпринята попытка выяснить и устранить при-

* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

¹ Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук, ABosov@frccsc.ru

² Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук, uryupin93@yandex.ru

чины расходимости. Главной причиной объявлена разница между реальной и вычисленной эвристически ковариацией ошибки оценки. Это явление иногда называют коллапсом ковариации и даже пытаются изучать системно, например с позиции теории устойчивости [6] или наблюдаемости [7]. Кроме этого, есть много других направлений исследований. Значительная теоретическая работа выполнена в [8] применительно к байесовской идентификации параметров с помощью РФК. К сожалению, практического развития из этого направления не получилось, есть только работа [9], в которой немного уточнена теория [8], но других практических результатов нет.

Есть любопытные исследования поведения РФК в нетипичной для стохастических фильтров задаче минимизации нелинейной функции [10]. К этому же направлению можно отнести исследования поведения оценки РФК для «малых» шумов, т. е. когда исходно нелинейная детерминированная система заменяется стохастической с «малыми» аддитивными возмущениями [11]. Эти и подобные работы пополнили инструментальный багаж исследований РФК и выявили много его интересных свойств, но их практическое применение не слишком очевидно. Помочь понять, можно ли применять РФК в конкретной модели в задаче фильтрации состояния, они не могут.

Есть и реальные шаги в попытке сформулировать достаточные условия стабильного поведения оценки РФК. Так, в работах [12] для дискретного времени и [13] для непрерывного показано, что ошибка РФК остается ограниченной лишь при достаточно жестких условиях, фактически когда есть устойчивая линейная система, для которой выполнены условия наблюдаемости и которая мажорирует нелинейную. Это очень жесткие условия, но авторами приведены примеры, когда при их нарушении (при большом шуме и при большой ошибке определения начального условия) оценка РФК расходится. Аналогичное исследование выполнено в [14] для интересной модификации РФК, близкой по смыслу к фильтру линейных псевдоизмерений (см. далее). Идея в том, чтобы рассматривать функции измерителя, в которых есть линейный множитель. Тогда ограничения, гарантирующие сходимость, опять-таки получаются из линейной теории. Таких результатов не очень много, и они очень ограничены в использовании. Это означает, что вопрос о применимости РФК остается исключительно в практической области, т. е. надо экспериментировать и проверять, как работает фильтр на конкретной модели.

Для упомянутых исследований и для ряда других надо отдельно обсуждать вопрос, что понимать

под стабильностью. Процитированные статьи гарантируют ограниченность второго момента оценки РФК. Но можно ли считать это стабильностью? Целью фильтрации ставится получение оценки состояния, «близкой» к точному значению, как правило, в смысле среднеквадратического критерия. Таким образом, выбирать оценку можно из класса случайных функций с конечным вторым моментом. Это необходимое условие и проверяется, и оно же означает нерасходимость оценки фильтра. Но это формальная сторона вопроса. Практически же всегда есть какие-то простые оценки. Как минимум всегда имеется тривиальная оценка — математическое ожидание состояния, т. е. оценка, вообще не учитывающая косвенные измерения. Ее точность — ковариация состояния. Конечность этой ковариации — необходимое условие постановки задачи фильтрации. Эта же величина — нижняя граница «разумности» для оценок фильтрации. Большие величины означают проигрыш тривиальной оценке, т. е. отсутствие смысла (при этом расходимости нет). Это первое, что надо учитывать, формируя понимание неустойчивости РФК.

Рассуждая далее, надо сказать, что во многих задачах возможно использование более сложных «простых» оценок. Это могут быть оптимальные линейные оценки или статические оценки метода наименьших квадратов (МНК) в случае линейных наблюдений. Для многих реальных систем можно вычислять оценки прямых наблюдений, когда есть возможность, пренебрегая погрешностями измерений, вычислять наблюдаемое значение в виде обратной функции. Такое возможно, например, если измерения носят геометрический характер и положение описывается геометрическими примитивами: углами и длинами. В этом случае есть «простая» оценка, и логично требовать от РФК точности как минимум не худшей.

Цель данной статьи — на живом практическом примере показать, как ведет себя работающий, т. е. стабильный РФК, какие изменения (в том числе неточности, неопределенности) в модели приводят к его неустойчивой работе и как именно выглядит эта неустойчивая работа. Для этого подобрана модель, описывающая движение автономного объекта в возмущенной среде. За основу взято движение с постоянной средней скоростью, хаотический характер которому придают неконтролируемые возмущения, но при этом сохраняется регулярное целевое направление. Эта модель простой линейной системы при известных параметрах легко становится нелинейной при неполной априорной информации и не менее легко модифицируется для учета более сложного движения объекта (скачкообразной смены направлений). Наблюдения производят два

независимых комплекса, выполняющих измерения углов направления на движущийся объект (азимута и угла возвышения) и дальности.

Использовать в экспериментах только базовый РФК [2] при наличии множества его модификаций было бы не вполне актуально и благоразумно. Из множества концепций по усовершенствованию алгоритма РФК для выбранной модели наблюдений есть безусловно предпочтительный подход — метод линейных псевдонаблюдений. Геометрический характер измерений дает возможность выполнить такие преобразования, чтобы заменить исходную модель наблюдений на квазилинейную, в которой РФК полностью повторит структуру линейного фильтра Калмана, так что «улучшать», оставаясь в рамках концепции РФК, получается нечего.

По-видимому, впервые метод линейных псевдонаблюдений был предложен для угловых измерений в работе [15], хотя сами модели систем слежения по результатам пеленга начали привлекать внимание еще раньше [16]. С развитием более доступных вычислительных средств стало возможным вернуться к этой идее на более современном уровне [17], получившем дальнейшее развитие в [18, 19] и других работах. В данной статье будет использоваться модификация фильтра, предложенная в [20] и детально исследованная в [21, 22] в гораздо более сложной постановке со случайными запаздывающими наблюдениями. Именно при подготовке работы [20] был сформирован вычислительный эксперимент и определены те изменения в модели, что нарушают стабильность РФК, причем характер этих нарушений весьма разнообразен, что и дало основание организовать их в статью.

2 Модель системы наблюдения

Использованная модель движения подробно обсуждается в [23], модель наблюдения — в [24]. Здесь они реализуют сценарий движения автономного летательного аппарата (ЛА, A) в направлении неподвижной цели. Предполагается, что ЛА обнаруживается с начальными координатами (X_A, Y_A, Z_A) и продолжает движение, описываемое координатами $(X(t), Y(t), Z(t))$ в системе $Oxyz$, связанной с радиолокационным комплексом. Он состоит из двух радиолокационных станций (РЛС), расположенных на поверхности Земли в точке O так, что плоскость Oxy совпадает с поверхностью земли, а ось Oz направлена вверх и соответствует высоте (рис. 1).

Летательный аппарат хаотично маневрирует, направляясь в цель O . Движение описывается дискретной моделью, $t = 0, 1, \dots, 1000$, с шагом дис-

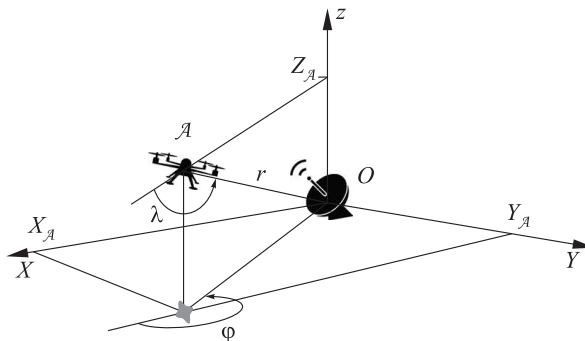


Рис. 1 Положение обнаруженного ЛА: φ — азимут; λ — угол возвышения; r — дальность

кретизации $\delta = 0,0001 \text{ ч} = 0,36 \text{ с}$, в течение $0,1 \text{ ч} = 6 \text{ мин}$. В начальный момент времени ЛА обнаруживается в положении, которое задают независимые координаты с равномерным распределением: $X_A \sim R[20, 40]$, $Y_A \sim R[20, 40]$, $Z_A \sim R[0,5; 1,5]$, единица измерения — километры (км). Таким образом, в начале движения ЛА обнаруживается на расстоянии r с математическим ожиданием $E\{r\} \approx 42 \text{ км}$ и дисперсией $D\{r\} \approx (2,9 \text{ км})^2$.

На каждой возможной траектории ЛА движется с постоянной средней скоростью, которая задается случайным вектором $s = (s_X, s_Y, s_Z)'$ (здесь и далее «'» — символ транспонирования). Его координаты независимы и заданы распределениями: $s_X \sim R[-200, -100]$, $s_Y \sim R[-200, -100]$, $s_Z \sim R[-10, 0]$, единица измерения км/ч. Таким образом, средняя скорость движения ЛА характеризуется математическим ожиданием $E\{s\} = (-150, -150, -5)'$ и ковариацией $D\{s\} \approx \text{diag}(29^2; 29^2; 3^2)$, абсолютное значение средней скорости $\approx 212 \text{ км/ч}$ и направление движения — на начало координат O . За заданное время ЛА в среднем перемещается на расстояние порядка 21 км, приближаясь к РЛС. При этом максимальное расстояние в момент обнаружения ЛА $t = 0$ до РЛС составляет $\approx 57 \text{ км}$, минимальное расстояние $\approx 28 \text{ км}$.

Реальная скорость $S(t) = (S_X(t), S_Y(t), S_Z(t))'$ изменяется хаотически под воздействием ветра. На интервале дискретизации скорость предполагается постоянной, в моменты времени t воздействие ветра приводит к независимым отклонениям, которые моделируются аддитивным вектором возмущений $w_t = (w_X(t), w_Y(t), w_Z(t))'$. Его координаты — независимые гауссовские величины. Отклонения σ_{s_X} , σ_{s_Y} и σ_{s_Z} скорости $S(t)$ от средней выбираются равными средним значениям средней скорости s , т.е. $\sigma_{s_X} = |E\{s_X\}| = 150$, $\sigma_{s_Y} = |E\{s_Y\}| = 150$ и $\sigma_{s_Z} = |E\{s_Z\}| = 5$. Итоговая динамика имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= X(t-1) + \delta S_X(t), \\ S_X(t) &= s_X + \sigma_{S_X} w_X(t); \\ Y(t) &= Y(t-1) + \delta S_Y(t), \\ S_Y(t) &= s_Y + \sigma_{S_Y} w_Y(t); \\ Z(t) &= Z(t-1) + \delta S_Z(t), \\ S_Z(t) &= s_Z + \sigma_{S_Z} w_Z(t), \\ t &= 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Получается, что моментные характеристики скорости $S(t)$ постоянны: $E\{S(t)\} = E\{s\}$, $D\{S(t)\} = \text{diag}\{E\{s_X^2\}, E\{s_Y^2\}, E\{s_Z^2\}\}$.

Модель (1) — линейная в обоих используемых вариантах: значение средней скорости s предполагается известным или нет. Динамика (1) для применения РФК представляется идеальной, так как шаг прогнозирования фильтра и пересчет эвристической ковариации ошибки прогнозирования выполняются оптимальным образом.

В одном из экспериментов вместо (1) используется нелинейная динамика, а именно: моделируются скачкообразные изменения постоянной средней скорости s . Для этого используется не зависящий от положения ЛА пуассоновский процесс $P(u)$, $u = t\delta$, с постоянной интенсивностью $\lambda = 1/(2 \text{ [мин]})$. Для моделирования изменяющихся значений постоянной средней скорости вместо параметра $s = (s_X, s_Y, s_Z)'$ в (1) теперь нужна функция $s(t) = (s_X(t), s_Y(t), s_Z(t))'$. Обозначим через $p(t) = P(t\delta) - P((t-1)\delta)$ индикатор скачка процесса $P(t\delta)$ на текущем интервале дискретизации. Скачкообразное изменение постоянной средней скорости — новое значение средней скорости движения $S(t)$, появившееся в случайный момент времени, — можно описать следующей моделью:

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= X(t-1) + \delta S_X(t), \\ S_X(t) &= s_X(t) + \sigma_{S_X} w_X(t), \\ s_X(t) &= (1 - p(t))s_X(t-1) + p(t)s_X^p(t); \\ Y(t) &= Y(t-1) + \delta S_Y(t), \\ S_Y(t) &= s_Y(t) + \sigma_{S_Y} w_Y(t), \\ s_Y(t) &= (1 - p(t))s_Y(t-1) + p(t)s_Y^p(t); \\ Z(t) &= Z(t-1) + \delta S_Z(t), \\ S_Z(t) &= s_Z(t) + \sigma_{S_Z} w_Z(t), \\ s_Z(t) &= (1 - p(t))s_Z(t-1) + p(t)s_Z^p(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Таким образом, если нет скачка в пуассоновском процессе ($p(t) = 0$), то постоянная средняя скорость на шаге t сохраняется такой же, как на шаге $t-1$. В момент скачка ($p(t) = 1$) параметр принимает новое значение $s^p(t)$. Сечения случайного вектора $s^p(t) = (s_X^p(t), s_Y^p(t), s_Z^p(t))'$ имеют тот же смысл, что и сечения параметра $s = (s_X, s_Y, s_Z)'$ в (1),

т. е. направляют ЛА на начало координат. В (1) это направление можно выразить в виде:

$$\left. \begin{aligned} E\{s_X\} &= -5E\{X_A\}; \\ E\{s_Y\} &= -5E\{Y_A\}; \\ E\{s_Z\} &= -5E\{Z_A\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В модели (2) направление, заданное таким $E\{s\}$, можно менять при каждом скачке процесса $P(u)$, заменяя стационарное условие (3) динамическим:

$$\left. \begin{aligned} E\{s_X^p(t)|X(t-1)\} &= -5X(t-1); \\ E\{s_Y^p(t)|Y(t-1)\} &= -5Y(t-1); \\ E\{s_Z^p(t)|Z(t-1)\} &= -5Z(t-1). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Равномерное распределение для координат $s^p(t)$ сохраняется, интервалы определяются на каждом шаге так, чтобы выполнялось (4) и сохранялась дисперсия, например $s_X^p(t) \sim R[-200, -100] + 150 - 5X(t-1)$, так что $E\{s_X^p(t)|X(t-1)\} = -5X(t-1)$ и $D\{s_X^p(t)|X(t-1)\} = D\{s_X\}$.

Модель (2) — нелинейная, и возмущение $s^p(t)$ в ней даже не является белым шумом. Но если в (2) считать известной текущую постоянную среднюю скорость $s(t)$, т. е. немедленно получать информацию об очередном скачке $P(t\delta)$ и новой скорости $s^p(t)$, то для РФК условия окажутся снова идеальными, потому что на шаге прогнозирования вычисление эвристической ковариации ошибки прогнозирования выполняется оптимальным образом. Усложнять этот вариант, отказываясь от информации об $s(t)$, не имело смысла, так как ниже показано, что даже с такой моделью РФК не справился, показав неустойчивость.

Наблюдения, выполняемые в момент времени t , содержат измерения по двум независимым каналам. По каждому измеряется азимут φ , угол возвышения λ и дальность r (см. рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} y_{\varphi_t}^{(k)} &= \varphi_t + v_{\varphi_t}^{(k)} = \arctg\left(\frac{Y(t)}{X(t)}\right) + v_{\varphi_t}^{(k)}; \\ y_{\lambda_t}^{(k)} &= \lambda_t + v_{\lambda_t}^{(k)} = \arctg\left(\frac{Z(t)}{|X(t)| \cos(\varphi_t)}\right); \\ y_{r_t}^{(k)} &= r_t + v_{r_t}^{(k)} = \frac{Z(t)}{\sin(\lambda_t)} + v_{r_t}^{(k)}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Вектор наблюдений

$$y_t = (y_{\varphi_t}^{(1)}, y_{\lambda_t}^{(1)}, y_{r_t}^{(1)}, y_{\varphi_t}^{(2)}, y_{\lambda_t}^{(2)}, y_{r_t}^{(2)})'$$

используется для реализации обычного РФК, ошибки измерений

$$v_t = (v_{\varphi_t}^{(1)}, v_{\lambda_t}^{(1)}, v_{r_t}^{(1)}, v_{\varphi_t}^{(2)}, v_{\lambda_t}^{(2)}, v_{r_t}^{(2)})'$$

предполагаются независимыми центрированными гауссовскими со среднеквадратичными отклонениями $\sigma_\varphi = \sigma_\lambda = (1/4)(\pi/180)$ рад (1° на $4\sigma_\varphi$ или $4\sigma_\lambda$), $\sigma_r = (1/4) \cdot 0,1$ км (100 м на $4\sigma_r$).

Для варианта РФК по методу линейных псевдонаблюдений вместо уравнений (5) используются следующие:

$$\left. \begin{aligned} Y_{\varphi_t}^{(k)} &= \left(\sin(y_{\varphi_t}^{(k)}), -\cos(y_{\varphi_t}^{(k)}) \right) \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \\ &\quad + (-X(t), Y(t)) \begin{pmatrix} V_1^{(k)} \\ V_2^{(k)} \end{pmatrix}; \\ Y_{\lambda_t}^{(k)} &= \left(\sin(y_{\lambda_t}^{(k)}), -\cos(y_{\varphi_t}^{(k)}) \cos(y_{\lambda_t}^{(k)}) \right) \begin{pmatrix} X(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} + \\ &\quad + \left(X(t) \cos(y_{\lambda_t}^{(k)}), -X(t), Z(t) \cos(y_{\varphi_t}^{(k)}) \right) \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} V_2^{(k)} \\ V_3^{(k)} \\ V_4^{(k)} \end{pmatrix}; \\ Y_{r_t}^{(k)} &= Z(t) + \left(y_{r_t}^{(k)}, \sin(y_{\lambda_t}^{(k)}) \right) \begin{pmatrix} V_3^{(k)} \\ V_5^{(k)} \end{pmatrix}, \\ &\quad k = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Вектор ошибок измерений

$$V_t = (V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, \dots, V_5^{(2)})'$$

имеет независимые гауссовские координаты с нулевым средним и дисперсиями $D\{V_1^{(k)}\} = D\{V_2^{(k)}\} = \sigma_\varphi^2$, $D\{V_3^{(k)}\} = D\{V_4^{(k)}\} = \sigma_\lambda^2$, $D\{V_5^{(k)}\} = \sigma_r^2$, $k = 1, 2$.

В разных вариантах формирования модели (6) обсуждается в [20–22], где показано, что значения псевдонаблюдений

$$Y_t = (Y_{\varphi_t}^{(1)}, Y_{\lambda_t}^{(1)}, Y_{r_t}^{(1)}, Y_{\varphi_t}^{(2)}, Y_{\lambda_t}^{(2)}, Y_{r_t}^{(2)})'$$

можно аппроксимировать, учитывая расположение измерителей в начале координат, как

$$\begin{aligned} Y_{\varphi_t}^{(k)} &\approx 0; \quad Y_{\lambda_t}^{(k)} \approx 0; \\ Y_{r_t}^{(k)} &\approx y_{r_t}^{(k)} \sin(y_{\lambda_t}^{(k)}), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Смысл замены (аппроксимации) наблюдений (5) псевдонаблюдениями (6) в том, что последние зависят от оцениваемых координат ЛА линейно. В фильтре, таким образом, не потребуются вычисления производной для линеаризации функции наблюдения, поскольку в модели наблюдения (6) нужные матрицы входят линейно: коэффициенты при $X_t = (X(t), Y(t), Z(t))'$ и при V_t

вычисляются как функции «истинных» наблюдений и используются в фильтре, а значения псевдонаблюдений вычисляются согласно (7).

3 Реализация расширенного фильтра Калмана

Предложенные модели наблюдения (1), (5) или (2), (5) в унифицированном виде можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} X_t &= \Phi_t^{(1)} X_{t-1} + \Phi_t^{(2)} (X_{t-1}) W_t; \\ y_t &= \psi_t^{(1)} (X_t) + v_t, \\ &\quad t = 1, 2, \dots, X_0 = \eta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для этой модели уравнения РФК [2] с учетом линейности $\Phi_t^{(1)} X_{t-1}$, центрированности возмущений W_t и v_t и отсутствия диффузионного множителя у ошибки v_t принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}_t &= \Phi_t^{(1)} \tilde{X}_{t-1}; \\ \tilde{\Phi}_t^{(2)} &= \Phi_t^{(2)} (\tilde{X}_t); \\ \tilde{K}_t &= \Phi_t^{(1)} \tilde{K}_{t-1} (\Phi_t^{(1)})' + \tilde{\Phi}_t^{(2)} D\{W_t\} (\tilde{\Phi}_t^{(2)})'; \\ \hat{X}_t &= \tilde{X}_t + K_t (y_t - \psi_t^{(1)} (\tilde{X}_t)); \\ \tilde{\psi}_t^{(1)} &= \frac{\partial \psi_t^{(1)} (X)}{\partial X} \Big|_{X = \tilde{X}_t}; \\ K_t &= \tilde{K}_t (\tilde{\psi}_t^{(1)})' (\tilde{\psi}_t^{(1)} \tilde{K}_t (\tilde{\psi}_t^{(1)})' + D\{v_t\})^{-1}; \\ \hat{K}_t &= \tilde{K}_t - K_t \tilde{\psi}_t^{(1)} \tilde{K}_t. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Вычисление производной $\partial \psi_t^{(1)} (X) / \partial X$, которая нужна для аппроксимации ковариации ошибки оценки на шаге коррекции, не составляет труда, так как сводится к вычислению производных функций $\varphi(x, y, z) = \arctg(y/x)$, $\lambda(x, y, z) = \arctg(z/\sqrt{z^2 + y^2})$ и $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. причем производные существуют всюду, кроме плоскости $x = 0$, т. е. почти наверное.

В методе линейных псевдонаблюдений предполагается, что вместо (8) модель системы принимает вид:

$$\begin{aligned} X_t &= \Phi_t^{(1)} X_{t-1} + \Phi_t^{(2)} (X_{t-1}, y_{t-1}) W_t; \\ Y_t &= \Psi_t^{(1)} (y_t) X_t + \Psi_t^{(2)} (X_t, y_t) V_t, \\ &\quad t = 1, 2, \dots, X_0 = \eta. \end{aligned}$$

Уравнения для y_t не используются, а значения, принимаемые y_t , считаются известными. Таким образом, для этой модели уравнения оценки РФК принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}_t &= \Phi_t^{(1)} \hat{X}_{t-1}; \\ \tilde{\Phi}_t^{(2)} &= \Phi_t^{(2)} \left(\hat{X}_t, y_{t-1} \right); \\ \tilde{K}_t &= \Phi_t^{(1)} \hat{K}_{t-1} \left(\Phi_t^{(1)} \right)' + \tilde{\Phi}_t^{(2)} D\{W_t\} \left(\tilde{\Phi}_t^{(2)} \right)'; \\ \hat{X}_t &= \tilde{X}_t + K_t \left(y_t - \Psi_t^{(1)}(y_t) \tilde{X}_t \right); \\ \tilde{\Psi}_t^{(2)} &= \Psi_t^{(2)} \left(\tilde{X}_t, y_t \right); \\ K_t &= \tilde{K}_t \left(\Psi_t^{(1)}(y_t) \right)' \left(\Psi_t^{(1)}(y_t) \tilde{K}_t \left(\Psi_t^{(k)}(y_t) \right)' + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\Psi}_t^{(2)} D\{V_t\} \left(\tilde{\Psi}_t^{(2)} \right)' \right)^{-1}; \\ \hat{K}_t &= \tilde{K}_t - K_t \Psi_t^{(1)}(y_t) \tilde{K}_t. \end{aligned} \right\} (10)$$

Здесь получается наилучший вариант для вычисления эвристической ковариации ошибки оценки на шаге коррекции из-за линейности $\Psi_t^{(1)}(y_t)X_t$, заменившей $\psi_t^{(1)}(X_t)$ в (8), так что $\partial\psi_t^{(1)}(X)/\partial X = \Psi_t^{(1)}(y_t)$ и не зависит от прогноза \tilde{X}_t . Ясно, что цена вопроса в том, насколько точны приближения (7) и оценки предыдущего шага.

4 Начальная оценка

В описанной модели обычный РФК уже окажется неработоспособным. Но оказывается, что неустойчивость его оценок здесь спровоцирована не столько самим фильтром, сколько слишком большой неточностью в определении начального условия. Ситуацию, когда положение впервые детектированного ЛА, которое описывается начальным значением η , получает начальную оценку $\hat{X}_0 = E\{\eta\}$ с начальным качеством (точностью) $\hat{K}_0 = D\{\eta\}$, как минимум можно охарактеризовать как ситуацию очень неточных и очень ограниченных наблюдений. Эта или похожие ситуации породили вполне самостоятельное небольшое направление оценивания положения без фильтрации, называемое локализацией. Обзор этого направления выходит за рамки статьи, ограничимся только самым простым решением.

Итак, формально фильтры (9) и (10) должны использовать начальные условия $E\{\eta\}$ и $D\{\eta\}$, определяемые распределением начального положения ЛА $X_A \sim R[20, 40]$, $Y_A \sim R[20, 40]$, $Z_A \sim R[0,5; 1,5]$. Так и будет сделано в одном из экспериментов, чтобы продемонстрировать один из вариантов неустойчивости РФК. В других расчетах влияние слишком неточного начального детектирования исключено следующим образом.

Будем считать, что для начального положения ЛА имеются измерения (5), т.е. детектирование означает появление измерений $y_{\varphi_0}^{(k)}$, $y_{\lambda_0}^{(k)}$ и $y_{r_0}^{(k)}$, $k = 1, 2$. Пренебрегая ошибками, будем считать, что

$$\begin{aligned} y_{\varphi_0}^{(k)} &\approx \varphi_0 = \arctg \left(\frac{Y_A}{X_A} \right); \\ y_{\lambda_0}^{(k)} &\approx \lambda_0 = \arctg \left(\frac{Z_A}{|X_A|} \cos(\varphi_0) \right); \\ y_{r_0}^{(k)} &\approx r_0 = \frac{Z_A}{\sin(\lambda_0)}. \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно получить прямые оценки начального положения (с учетом $X_A > 0$):

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_A^{(k)} &= \frac{\hat{Z}_A \cos(y_{\varphi_0}^{(k)})}{\operatorname{tg}(y_{\lambda_0}^{(k)})}; \\ \hat{Y}_A^{(k)} &= \operatorname{tg}(y_{\varphi_0}^{(k)}) \hat{X}_A^{(k)}; \\ \hat{Z}_A^{(k)} &= y_{r_0}^{(k)} \sin(y_{\lambda_0}^{(k)}), \end{aligned} \right\} (11)$$

т.е. две простые оценки $\hat{X}_0^{(k)}$, $k = 1, 2$. Поскольку их точностные характеристики одинаковы, итоговую оценку (ее можно назвать оценкой прямых измерений) начального положения можно задать в виде

$$\hat{X}_0 = \frac{1}{2} \left(\hat{X}_0^{(1)} + \hat{X}_0^{(2)} \right),$$

что отвечает методу наименьших квадратов. Нелинейность наблюдений не позволяет вычислить точно ковариацию ошибки такой оценки, но это нетрудно сделать, выполнив компьютерное моделирование. В результате начальная ковариация выбрана равной $\hat{K}_0 = \operatorname{diag}\{0,1^2; 0,1^2; 0,15^2\}$ км², т.е. вместо отклонений порядка 6 км по координатам x, y и 300 м по координате z , соответствующих моделируемому начальному распределению η , ошибкам заданы порядки 100 и 150 м соответственно.

Отметим также, что простая оценка (11) может непосредственно применяться в любой момент времени к измерениям $y_{\varphi_t}^{(k)}$, $y_{\lambda_t}^{(k)}$ и $y_{r_t}^{(k)}$, $k = 1, 2$. Таким образом, можно получить оценки $\check{X}_t^{(1)}$ и $\check{X}_t^{(2)}$:

$$\left. \begin{aligned} \check{X}^{(k)}(t) &= \frac{\check{Z}^{(k)}(t) \cos(y_{\varphi_t}^{(k)})}{\operatorname{tg}(y_{\lambda_t}^{(k)})}; \\ \check{Y}^{(k)}(t) &= \operatorname{tg}(y_{\varphi_t}^{(k)}) \check{X}^{(k)}(t); \\ \check{Z}^{(k)}(t) &= y_{r_t}^{(k)} \sin(y_{\lambda_t}^{(k)}), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \right\} (12)$$

а из них — фильтр прямых измерений

$$\check{X}_t = \frac{1}{2} \left(\hat{X}_t^{(1)} + \hat{X}_t^{(2)} \right).$$

Так что в рассматриваемой задаче вместо обычной тривиальной оценки, т.е. безусловного мате-

матического ожидания $E\{X_t\}$, сравнивать точность фильтрации надо не с безусловной ковариацией состояния $D\{X_t\}$, а с точностью оценки \hat{X}_t .

5 Типовой расширенный фильтр Калмана

Формальное качество фильтрации определяется ковариационная матрица ошибки оценки $D\{\hat{X}_t - X_t\}$ или ее след (аналогично для фильтра \hat{X}_t). Для приближенного вычисления ковариации выполняется компьютерное моделирование $N = 1000$ или $10\,000$ траекторий систем (1), (5) или (2), (5) и фильтров (9), (10), (12). Качество оценки положения ЛА определяется величинами $\sigma_{\hat{X}}(t)$, $\sigma_{\hat{Y}}(t)$ и $\sigma_{\hat{Z}}(t)$ — среднеквадратичными отклонениями для оцениваемых координат $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ (диагональными элементами $D\{\hat{X}_t - X_t\}$). Компьютерное моделирование дает

$$\sigma_{\hat{X}}(t) \approx \left(\overline{E\{(\hat{X}(t) - X(t))^2\}} \right)^{1/2}$$

(аналогично для $\sigma_{\hat{Y}}(t)$ и $\sigma_{\hat{Z}}(t)$, а также для фильтра прямых измерений (12) $\sigma_{\hat{X}}(t)$, $\sigma_{\hat{Y}}(t)$ и $\sigma_{\hat{Z}}(t)$). Здесь $\overline{E\{\cdot\}}$ — статистическое среднее, вычисленное по N смоделированным траекториям. Значения этих функций в экспериментах иллюстрируют графики.

Обобщенную характеристику точности определения положения дают величины

$$\sigma_{\hat{X}}^{(\text{mean})} = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \sigma_{\hat{X}}(t)$$

(аналогично $\sigma_{\hat{Y}}^{(\text{mean})}$, $\sigma_{\hat{Z}}^{(\text{mean})}$ и $\sigma_{\hat{X}}^{(\text{mean})}$, $\sigma_{\hat{Y}}^{(\text{mean})}$, $\sigma_{\hat{Z}}^{(\text{mean})}$) — отклонения, усредненные по времени фильтрации $t = \overline{1, 1000}$. Эти величины объединены в одной общей таблице.

Точность фильтрации

Раздел	Модель—фильтр	$\sigma_{\hat{X}}^{(\text{mean})}$	$\sigma_{\hat{Y}}^{(\text{mean})}$	$\sigma_{\hat{Z}}^{(\text{mean})}$	$\sigma_{\hat{X}}^{(\text{mean})}$	$\sigma_{\hat{Y}}^{(\text{mean})}$	$\sigma_{\hat{Z}}^{(\text{mean})}$
Разд. 5, рис. 2	(1), (5) (без скачков), полная информация — стандартный РФК, $N = 1000$	84,4	81,9	69,8	73,13	73,29	101,92
Разд. 5, рис. 2	(1), (5) (без скачков), полная информация — стандартный РФК, $N = 10\,000$	$> 10^8$	$> 10^8$	$> 10^5$	73,11	73,19	101,81
Подразд. 6.1, рис. 3	(1), (5) (без скачков), полная информация — РФК псевдонаблюдений, $N = 1000$	35,84	36,39	10,60	73,13	73,29	101,92
Подразд. 6.2, рис. 4	(1), (5) (без скачков), полная информация, неточное начальное условие — РФК псевдонаблюдений, $N = 1000$	1603	1680	90	73,13	73,29	101,92
Подразд. 6.3, рис. 5	(1), (5) (без скачков), неполная информация — РФК псевдонаблюдений, $N = 1000$	59,22	72,24	89,96	73,13	73,29	101,92
Подразд. 6.3, рис. 5	(1), (5) (без скачков), неполная информация — РФК псевдонаблюдений, $N = 10\,000$	59,29	74,69	89,81	73,13	73,29	101,92
Подразд. 6.4, рис. 6	(2), (5) (скачки скорости), неполная информация — РФК псевдонаблюдений, $N = 1000$	60,41	64,65	91,60	74,11	74,07	103,31
Подразд. 6.4, рис. 6	(2), (5) (скачки скорости), неполная информация — РФК псевдонаблюдений, $N = 10\,000$	60,26	64,59	91,75	74,34	74,20	103,43
Подразд. 6.4	(2), (5) (скачки скорости), полная информация — РФК псевдонаблюдений, $N = 1000$	32,54	32,10	9,78	74,11	74,07	103,31
Подразд. 6.5, рис. 7	(1), (5) (без скачков), неточное задание дисперсий шумов — РФК псевдонаблюдений, $N = 10\,000$	192,48	312,29	78,10	292,82	293,30	407,98

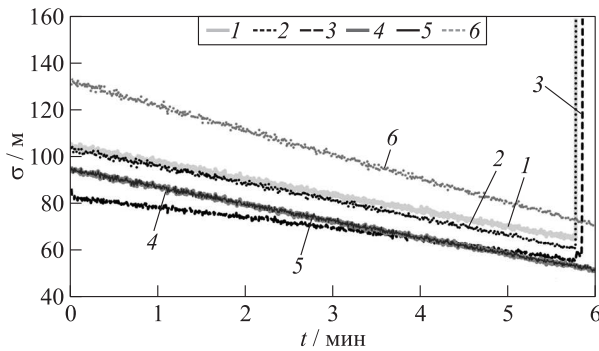


Рис. 2 Базовый расчет, $N = 10000$. Точность оценивания для РФК (1 — $\sigma_{\hat{x}}$; 2 — $\sigma_{\hat{y}}$; 3 — $\sigma_{\hat{z}}$) и для фильтра прямых измерений (4 — σ_x ; 5 — σ_y ; 6 — σ_z)

В первом эксперименте тестируем стандартный РФК сначала по пучку $N = 1000$ траекторий. Полученный результат (см. таблицу, первая строка) позволяет предположить, что РФК работает, хотя и не очень хорошо. Его оценка \hat{X}_t имеет смысл, но хуже оценки \check{X}_t , так как $\sigma_{\hat{X}}^{(\text{mean})} > \sigma_{\check{X}}^{(\text{mean})}$, $\sigma_{\hat{Y}}^{(\text{mean})} > \sigma_{\check{Y}}^{(\text{mean})}$ и только $\sigma_{\hat{Z}}^{(\text{mean})} < \sigma_{\check{Z}}^{(\text{mean})}$. Таким образом, надо признавать, что РФК по совокупности проигрывает простой оценке, а значит, демонстрирует неустойчивость. Здесь важно отметить, что этот случай — плохой вариант неустойчивости РФК, поскольку факт неустойчивости скрыт, его непросто обнаружить. Фильтр кажется работающим, хотя смысла в нем нет.

Следующий эксперимент «разрушил» РФК в этой модели полностью. Условия отличаются от предыдущего лишь тем, что моделируется больший пучок из $N = 10000$ траекторий. Результат, который иллюстрирует рис. 2, означает, что РФК не работает совсем, т. е. в пучке есть расходящиеся оценки, а именно: РФК ближе к концу интервала наблюдения в какой-то момент «взрывается».

«Взрывающиеся» траектории возникают при пересечении ЛА плоскости $x = 0$. При этом недопустимого для фильтра нулевого значения у моделируемых в дискретном времени траекторий нет, так что условия вычисления производных не нарушаются. Но значения производных и точность линеаризации при пересечении плоскости $x = 0$ падает настолько, что оценка «разваливается». Таких траекторий в пучке $N = 10000$ всего несколько экземпляров и нет ни одной в пучке $N = 1000$. Однако их наличие означает, что РФК неустойчив, поскольку согласно формальному среднеквадратичному критерию оценивания не обеспечивает даже его конечность. Это другая и тоже заслуживающая отдельного внимания особенность выбран-

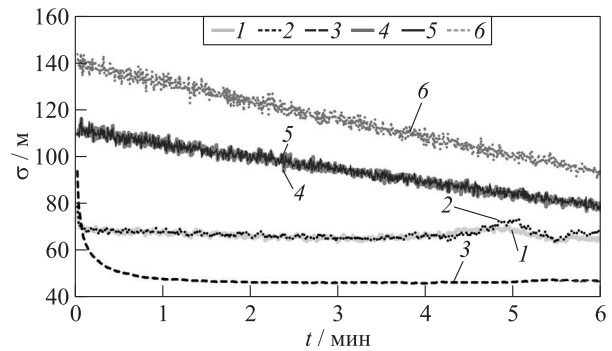


Рис. 3 Базовый расчет, $N = 1000$. Точность оценивания для РФК линейных псевдоизмерений (1 — $\sigma_{\hat{x}}$; 2 — $\sigma_{\hat{y}}$; 3 — $\sigma_{\hat{z}}$) и для фильтра прямых измерений (4 — σ_x ; 5 — σ_y ; 6 — σ_z)

ной базовой модели. Неприятность состоит в том, что «взрывающихся» траекторий немного, но они есть. При этом обнаружить их в пучке небольшого размера не удастся, что провоцирует ошибочный вывод.

6 Неустойчивость расширенного фильтра Калмана по методу линейных псевдонаблюдений

6.1 Эффективная фильтрация для базовой модели

Неудачную работу стандартного РФК в предыдущем эксперименте эффективно исправляет фильтр (10). Результат одинаков для $N = 1000$ и 10000 траекторий. Его иллюстрирует рис. 3 и третья строка таблицы. Этот результат выделен, так как показывает работу действительно эффективного фильтра: точность определения местоположения в разы выше, чем у фильтра прямых измерений, что видно как на графике, так и на обобщенных величинах.

6.2 Неточное начальное положение

Первый вариант изменения в базовой модели — отказ от использования измерений $y_{\varphi_0}^{(k)}$, $y_{\lambda_0}^{(k)}$ и $y_{r_0}^{(k)}$, $k = 1, 2$, т. е. расчет оценки начального положения в виде $\hat{X}_0 = E\{\eta\}$, $\hat{K}_0 = D\{\eta\}$. Результат иллюстрирует рис. 4.

Как и в первом эксперименте, обнаружить и утверждать, что РФК работает неустойчиво, не совсем просто. К примеру, фильтрация по координате z выполняется не так плохо: по графику

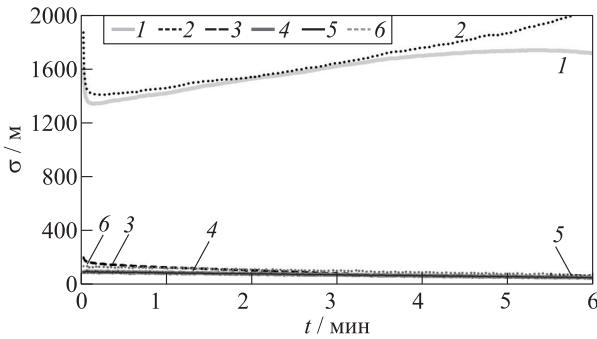


Рис. 4 Неточное начальное условие, $N = 1000$. Точность оценивания для РФК линейных псевдоизмерений (1 — $\sigma_{\hat{x}}$; 2 — $\sigma_{\hat{y}}$; 3 — $\sigma_{\hat{z}}$) и для фильтра прямых измерений (4 — $\sigma_{\hat{x}}$; 5 — $\sigma_{\hat{y}}$; 6 — $\sigma_{\hat{z}}$)

этого не видно, но в таблице значение интегральной оценки точности $\sigma_{\hat{z}}^{(\text{mean})} < \sigma_{\hat{z}}^{(\text{mean})}$, и абсолютные погрешности на последнем шаге отличаются значительно: $\sigma_{\hat{z}}(6 \text{ мин}) = 48,35$, $\sigma_{\hat{z}}(6 \text{ мин}) = 75,07$. Также нельзя утверждать, что РФК дает расходящуюся оценку, поскольку взрывного роста на рис. 4 нет, РФК всего лишь ведет себя странно, наращивая ошибку по мере приближения к цели. Нестабильность становится очевидной лишь при анализе числовых значений точности: погрешность по координатам x, y к концу интервала наблюдения достигает 2 км, что, конечно, нельзя считать осмысленной оценкой фильтрации, хотя формально эти величины и меньше безусловной ковариации моделируемого состояния. Вклад в формирование такой большой погрешности вносят не все траектории. На большинстве траекторий РФК работает не хуже фильтра прямых измерений после небольшого переходного периода, в течение которого ему удается компенсировать большую (относительно прямых измерений) погрешность определения начального положения, но есть 3%–4% траекторий, на кото-

рых фильтру сделать этого не удастся. Тогда получаются «разваливающиеся» траектории, появление которых приходится признать непрогнозируемым и объявить в рассмотренном примере РФК нестабильным в целом.

6.3 Неполная априорная информация

Второй вариант изменения базовой модели — исключение из наблюдений постоянной средней скорости s . Согласно алгоритму РФК это предположение требует замены в уравнениях фильтра s на $E\{s\}$ и дополнительного слагаемого $D\{s\}$ в эмпирической ковариации \tilde{K}_t . В рассматриваемой модели с фильтром (10) и $E\{s\}$ результаты расчета иллюстрирует рис. 5.

Если начать с формальной величины в таблице, то и для пучка $N = 1000$, и для пучка $N = 10\,000$ можно констатировать, что РФК работает, но его качество ухудшилось. При этом преимущество все-таки есть, хотя и небольшое. Нестабильность фильтра обнаруживается только по рис. 5. Для $N = 1000$ (см. рис. 5, а) ближе к концу интервала слежения наблюдается некоторая «болтанка» в точности оценки $\hat{Y}(t)$, приводящая в конце к значительному проигрышу. Можно предположить, что эту картину формирует единственная «особенная» траектория и больше это не повторяется. Регулярность обнаруженной проблемы подтверждает эксперимент с $N = 10\,000$ на рис. 5, б. На этом графике картина сглажена и показывает, что оценка $\hat{Y}(t)$ «разваливается» регулярно и начинается достаточно далеко от конца интервала слежения, т. е. это другая картина по сравнению с той, что обсуждалась в разд. 5 при пересечении траекторией ЛА плоскости $x = 0$. Здесь «плохих» траекторий еще меньше и они менее взрывные, $\sigma_{\hat{y}}(6 \text{ мин}) = 217,23$ ($N = 10\,000$) и $\sigma_{\hat{y}}(6 \text{ мин}) = 272,24$ ($N = 1000$).

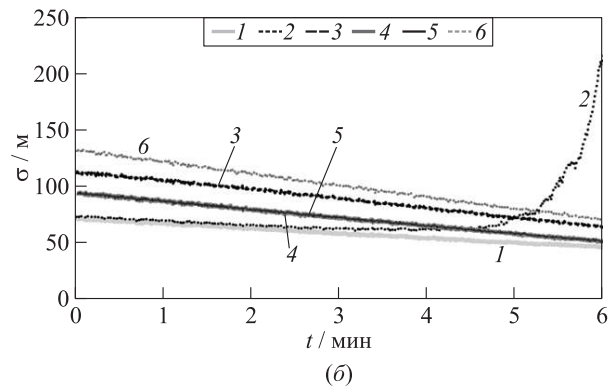
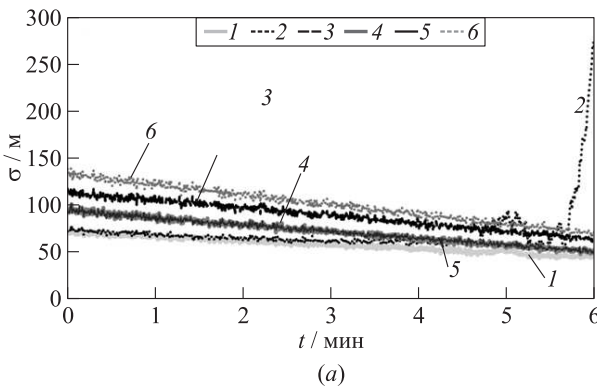


Рис. 5 Неизвестная средняя скорость: (а) $N = 1000$; (б) $N = 10\,000$. Точность оценивания для РФК линейных псевдоизмерений (1 — $\sigma_{\hat{x}}$; 2 — $\sigma_{\hat{y}}$; 3 — $\sigma_{\hat{z}}$) и для фильтра прямых измерений (4 — $\sigma_{\hat{x}}$; 5 — $\sigma_{\hat{y}}$; 6 — $\sigma_{\hat{z}}$)

Таким образом, и в этом примере РФК демонстрирует неустойчивость, обнаружить которую позволяет анализ функции $\sigma_{\hat{Y}}(t)$ и не позволяют интегральные характеристики точности из таблицы.

6.4 Скачкообразное изменение средней скорости

Отличие этого примера от рассмотренного в разд. 6.3 в замене модели движения на (2), т.е. теперь неизвестный параметр s становится неизвестной функцией $s(t)$, кусочно-постоянной на интервалах средней длины 2 мин, так что на траекториях будет примерно 2–4 изменения направления движения. Естественно ожидать, что такое усложнение модели сделает работу фильтра сложнее и результат хуже. По формальным характеристикам, приведенным в таблице, так и есть: и фильтр прямых измерений, и РФК дали результаты хуже, чем в предыдущей модели, причем для обоих пучков: $N = 1000$ и $10\,000$. Но, согласуясь с рассуждениями предыдущего примера, можно видеть, что и здесь РФК демонстрирует неустойчивость. Это видно на графиках рис. 6, а лучшее подтверждение — это числовые значения: $\sigma_{\hat{Y}}(6 \text{ мин}) = 89,95$ ($N = 10\,000$) и $\sigma_{\hat{Y}}(6 \text{ мин}) = 79,99$ ($N = 1000$) при условии, что $\sigma_{\hat{Y}}(6 \text{ мин}) = 55,20$ ($N = 10\,000$) и $\sigma_{\hat{Y}}(6 \text{ мин}) = 57,68$ ($N = 1000$).

Но эти же графики позволяют предположить, что исследуемая более сложная модель со скачками лучше для работы фильтра, потому что очевидна разница в характере неустойчивости, демонстрируемом рис. 5 и 6, т.е. хотя и в этом примере РФК следует считать неустойчивым, но характер неустойчивости иной, чем в модели без скачков, менее «взрывной». Чтобы эти рассуждения подытожить, был выполнен еще один эксперимент в предположении наличия полной информации об $s(t)$. Результат, показанный в таблице, оказался лучше,

чем дал расчет подразд. 6.1, т.е. такое усложнение модели действительно удобнее для работы фильтра.

6.5 Неточное задание характеристик шума

В этом заключительном примере рассмотрено влияние на фильтр неточной априорной информации о характеристиках шума в наблюдениях. Под неопределенностью будем понимать только неточную информацию о дисперсиях ошибок измерений. Сразу надо сказать, что для большей части вариантов задания такой априорной неопределенности в отношении величин σ_φ , σ_λ и σ_r РФК дает вполне приемлемые результаты, в целом количественно близкие к результатам подразд. 6.1. Так, если вместо σ_φ , σ_λ и σ_r использовать оценки сверху $\sigma_\varphi < \Sigma_\varphi$, $\sigma_\lambda < \Sigma_\lambda$ и $\sigma_r < \Sigma_r$, то даже для очень завышенных значений Σ_φ , Σ_λ и Σ_r получаются приемлемые результаты. Более того, даже если моделировать неопределенность в другую сторону, т.е. использовать вместо точных значений σ_φ , σ_λ и σ_r величины меньше, то и так «развалить» РФК не удастся. Достижение цели и показать картину неустойчивости РФК получается только на очень значительных отклонениях. Итак, в примере этого раздела ошибки измерений моделировались в соответствии с заданными и во всех примерах одинаковыми σ_φ , σ_λ и σ_r , а фильтру указывались значения в 4 раза меньшие, т.е. как будто средние отклонения шумов равны $\sigma_\varphi/4$, $\sigma_\lambda/4$ и $\sigma_r/4$. Результат расчета иллюстрирует рис. 7.

На графике видна проблема: величины $\sigma_{\hat{X}}(t)$, $\sigma_{\hat{Y}}(t)$ и $\sigma_{\hat{Z}}(t)$ возрастают с течением времени, т.е. с приближением ЛА к наблюдателю (первые две — на большей части траектории, третья — примерно с пятой минуты). Можно еще указать на недопустимо большие значения $\sigma_{\hat{Y}}(t)$ в заключительной части

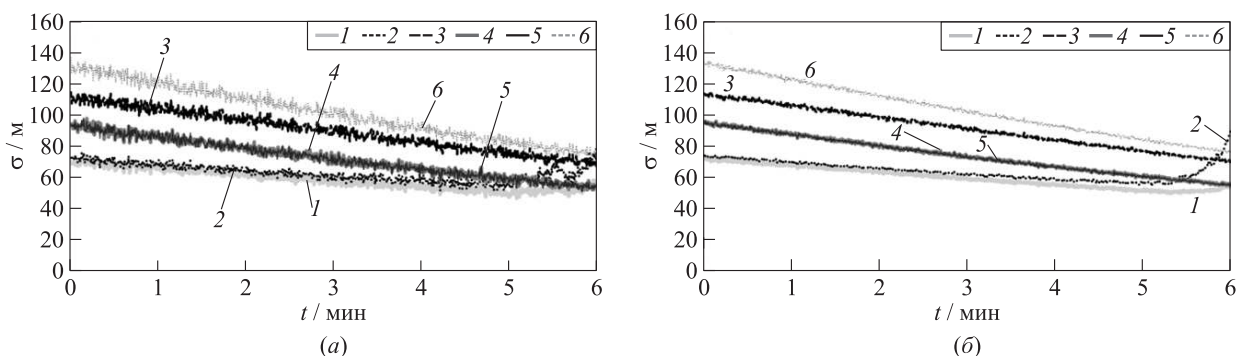


Рис. 6 Изменяющаяся скачком средняя скорость: (а) $N = 1000$; (б) $N = 10\,000$. Точность оценивания для РФК линейных псевдоизмерений (1 — $\sigma_{\hat{X}}$; 2 — $\sigma_{\hat{Y}}$; 3 — $\sigma_{\hat{Z}}$) и для фильтра прямых измерений (4 — $\sigma_{\hat{X}}$; 5 — $\sigma_{\hat{Y}}$; 6 — $\sigma_{\hat{Z}}$)

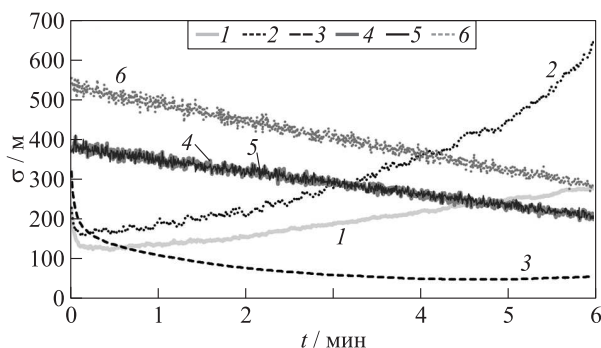


Рис. 7 Неточное описание шумов в наблюдениях. Точность оценивания для РФК линейных псевдоизмерений ($1 - \sigma_{\hat{x}}$; $2 - \sigma_{\hat{y}}$; $3 - \sigma_{\hat{z}}$) и для фильтра прямых измерений ($4 - \sigma_{\hat{x}}$; $5 - \sigma_{\hat{y}}$; $6 - \sigma_{\hat{z}}$)

интервала наблюдения (здесь есть сходство с предыдущими двумя примерами, но есть и отличие: это не несколько «развалившихся» траекторий, это регулярная картина точности на каждой траектории).

Несомненно, требовать от фильтра хорошей работы с такой ошибкой в модели как минимум не вполне корректно. Но все-таки фильтр прямых измерений справился, его очень неточные, но вполне адекватные искажению модели результаты есть, и их нельзя игнорировать. Так что и здесь РФК надо признать нестабильным. Этот пример здесь важен еще и потому, что картина нестабильности сильно отличается от тех, что были в предыдущих экспериментах, поэтому этот пример важен как еще один, особый, шаблон нестабильного поведения РФК, который надо рекомендовать проверять при практическом применении этого фильтра.

7 Заключение

Подводя итог представленным результатам, напомним поставленную в начале цель. На базе одной модели стохастической системы наблюдения собраны разные варианты нестабильной работы самого популярного субоптимального фильтра — РФК. Исследование выполнено для модификации, известной как фильтр линейных псевдоизмерений. Эта работа была инициирована тем обстоятельством, что, хотя многими исследователями всегда констатируется нестабильная работа РФК, научиться выявлять эту нестабильность затруднительно, так как большинство источников ограничиваются констатацией факта без деталей. Здесь обсуждались именно детали и были предъявлены несколько принципиально отличающихся картин, качественно характеризующих нестабильность РФК.

Литература

1. Kalman R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems // J. Basic Eng. — T. ASME, 1960. Vol. 82. No. 1. P. 35–45. doi: 10.1115/1.3662552.
2. Bernstein I., Friedland B. Estimation of the state of a nonlinear process in the presence of nongaussian noise and disturbances // J. Frankl. Inst., 1966. Vol. 281. No. 6. P. 455–480. doi: 10.1016/0016-0032(66)90434-0.
3. Perea L., How J., Breger L., Elosegui P. Nonlinearity in sensor fusion: Divergence issues in EKF, modified truncated GSF, and UKF // Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit Proceedings. — AIAA, 2007. Art. 6514. 16 p. doi: 10.2514/6.2007-6514.
4. Hashemi R., Engell S. Effect of sampling rate on the divergence of the extended Kalman filter for a continuous polymerization reactor in comparison with particle filtering // IFAC PapersOnLine, 2016. Vol. 49. No. 7. P. 365–370. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.07.363.
5. Bailey T., Nieto J., Guivant J., Stevens M., Nebot E. Consistency of the EKF-SLAM Algorithm // IEEE/RSJ Conference (International) on Intelligent Robots and Systems Proceedings. — Beijing, China: IEEE, 2006. P. 3562–3568. doi: 10.1109/IROS.2006.281644.
6. Trevisan A., Palatella L. On the Kalman filter error covariance collapse into the unstable subspace // Nonlinear Proc. Geoph., 2011. Vol. 18. No. 2. P. 243–250. doi: 10.5194/npg-18-243-2011.
7. Huang G. P., Mourikis A. I., Roumeliotis S. I. Observability-based rules for designing consistent EKF SLAM estimators // Int. J. Robot. Res., 2010. Vol. 29. No. 5. P. 502–528. doi: 10.1177/0278364909353640.
8. Ljung L. Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems // IEEE T. Automat. Contr., 1979. Vol. 24. No. 1. P. 36–50. doi: 10.1109/tac.1979.1101943.
9. Ursin B. Asymptotic convergence properties of the extended Kalman filter using filtered state estimates // IEEE T. Automat. Contr., 1980. Vol. 25. No. 6. P. 1207–1211. doi: 10.1109/TAC.1980.1102518.
10. Bell B. M., Cathey F. W. The iterated Kalman filter update as a Gauss–Newton method // IEEE T. Automat. Contr., 1993. Vol. 38. No. 2. P. 294–297. doi: 10.1109/9.250476.
11. Baras J. S., Bensoussan A., James M. R. Dynamic observers as asymptotic limits of recursive filters: Special cases // SIAM J. Appl. Math., 1988. Vol. 48. No. 5. P. 1147–1158. doi: 10.1137/0148068.
12. Reif K., Gunther S., Yaz E., Unbehauen R. Stochastic stability of the discrete-time extended Kalman filter // IEEE T. Automat. Contr., 1999. Vol. 44. No. 4. P. 714–728. doi: 10.1109/9.754809.
13. Reif K., Gunther S., Yaz E., Unbehauen R. Stochastic stability of the continuous-time extended Kalman filter // IEE P. — Contr. Theor. Ap., 2000. Vol. 147. No. 1. P. 45–52.

14. Song T. L., Speyer J. L. A stochastic analysis of a modified gain extended Kalman filter with applications to estimation with bearings only measurements // IEEE Decis. Contr. P., 1983. P. 1291–1296. doi: 10.1109/CDC.1983.269736.
15. Lingren A., Gong K. Position and velocity estimation via bearing observations // IEEE T. Aero. Elec. Sys., 1978. Vol. AES-14. Iss. 4. P. 564–577. doi: 10.1109/TAES.1978.308681.
16. Kolb R. C., Hollister F. H. Bearings-only target motion estimation // 1st Asilomar Conference on Circuits and Systems Proceedings, 1967. P. 935–946.
17. Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S. Comparison of EKF, pseudomeasurement, and particle filters for a bearing-only target tracking problem // Proc. SPIE, 2002. Vol. 4728. P. 240–250. doi: 10.1117/12.478508.
18. Амелин К. С., Миллер А. Б. Алгоритм уточнения местонахождения легкого БПЛА на основе калмановской фильтрации измерений пеленгационного типа // Информационные процессы, 2013. Т. 13. № 4. С. 338–352. EDN: RRRSZT.
19. Miller A. B., Miller B. M. Stochastic control of light UAV at landing with the aid of bearing-only observations // Proc. SPIE, 2015. Vol. 9875. Art. 987529. 10 p. doi: 10.1117/12.2228544.
20. Босов А. В., Урюпин И. В. Модифицированный вариант расширенного фильтра Калмана по методу линейных псевдонаблюдений // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 2. С. 17–26. doi: 10.14357/19922264250203. EDN: ZOVFSQ.
21. Bosov A. Linear pseudo-measurements filtering for tracking a moving underwater target by observations with random delays // Sensors, 2025. Vol. 25. No. 12. Art. 3757. 22 p. doi: 10.3390/s25123757.
22. Босов А. В. Применение фильтра линейных псевдонаблюдений в задачах слежения и позиционирования по наблюдениям со случайными запаздываниями // Автоматика и телемеханика, 2025. № 10. С. 81–100. doi: 10.31857/S0005231025100058. EDN: DPHKTW.
23. Урюпин И. В. Об универсальных моделях состояния для задач слежения и навигации беспилотных движущихся объектов // Системы и средства информатики, 2025. Т. 35. № 2. С. 31–44. doi: 10.14357/08696527250203. EDN: WRGXLN.
24. Урюпин И. В. Типовые модели системы наблюдения для задач отслеживания и навигации беспилотных движущихся объектов // Системы и средства информатики, 2025. Т. 35. № 3. С. 54–70. doi: 10.14357/08696527250304. EDN: BZVNER.

Поступила в редакцию 10.09.2025

Принята к публикации 15.11.2025

A PRACTICAL STUDY OF THE EXTENDED KALMAN FILTER INSTABILITY

A. V. Bosov and I. V. Uryupin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper examines the variants of unstable operation of the extended Kalman filter (EKF). The set of experiments was performed with a typical model of a stochastic observation system. The motion of an autonomous object with a constant average velocity was modeled under conditions of uncontrolled velocity perturbations forming a chaotic trajectory with a regular target direction. Observations of two independent complexes consist of measurements of bearing angles (azimuth and elevation angle) and range. The estimation of the object’s position is performed by the basic EKF and its modification using the method of linear pseudoobservations. The basic EKF turns out to be unstable in the initial model. The EKF uses the method of pseudomeasurements to provide a stable assessment of the position with high accuracy. The purpose of the experiments is to show which changes in the monitoring system model led to unstable operation of this EKF modification. For this purpose, 4 scenarios have been proposed, calculated, and analyzed: (i) inaccurate detection of the initial position; (ii) inability to identify the speed parameters in advance; (iii) movement with an abrupt change in speed parameters while maintaining the direction of the target; and (iv) inaccurate setting of statistical characteristics (covariance) of measurement errors. In each of the scenarios, the EKF turns out to be unstable, forming an estimate of the object’s position with unacceptable accuracy. At the same time, the nature of instability and the behavior of the EKF estimates are different as demonstrated by numerical and graphical calculation results.

Keywords: stochastic filtering; discrete stochastic observation system; extended Kalman filter (EKF); EKF by the method of linear pseudomeasurement

DOI: 10.14357/19922264250402

EDN: BMTYSW

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (CKP “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

References

1. Kalman, R. E. 1960. A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng.* — *T. ASME* 82(1):35–45. doi: 10.1115/1.3662552.
2. Bernstein, I., and B. Friedland. 1966. Estimation of the state of a nonlinear process in the presence of nongaussian noise and disturbances. *J. Frankl. Inst.* 281(6):455–480. doi: 10.1016/0016-0032(66)90434-0.
3. Perea, L., J. How, L. Breger, and P. Elosegui. 2007. Nonlinearity in sensor fusion: Divergence issues in EKF, modified truncated GSF, and UKF. *Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit Proceedings*. AIAA. Art. 6514. 16 p. doi: 10.2514/6.2007-6514.
4. Hashemi, R., and S. Engell. 2016. Effect of sampling rate on the divergence of the extended Kalman filter for a continuous polymerization reactor in comparison with particle filtering. *IFAC PapersOnLine* 49(7):365–370. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.07.363.
5. Bailey, T., J. Nieto, J. Guivant, M. Stevens, and E. Nebot. 2006. Consistency of the EKF-SLAM algorithm. *IEEE/RSJ Conference (International) on Intelligent Robots and Systems Proceedings*. Beijing, China: IEEE. 3562–3568. doi: 10.1109/IROS.2006.281644.
6. Trevisan, A., and L. Palatella. 2011. On the Kalman filter error covariance collapse into the unstable subspace. *Nonlinear Proc. Geoph.* 18(2):243–250. doi: 10.5194/npg-18-243-2011.
7. Huang, G. P., A. I. Mourikis, and S. I. Roumeliotis. 2010. Observability-based rules for designing consistent EKF SLAM estimators. *Int. J. Robot. Res.* 29(5):502–528. doi: 10.1177/0278364909353640.
8. Ljung, L. 1979. Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems. *IEEE T. Automat. Contr.* 24(1):36–50. doi: 10.1109/tac.1979.1101943.
9. Ursin, B. 1980. Asymptotic convergence properties of the extended Kalman filter using filtered state estimates. *IEEE T. Automat. Contr.* 25(6):1207–1211. doi: 10.1109/TAC.1980.1102518.
10. Bell, B. M., and F. W. Cathey. 1993. The iterated Kalman filter update as a Gauss-Newton method. *IEEE T. Automat. Contr.* 38(2):294–297. doi: 10.1109/9.250476.
11. Baras, J. S., A. Bensoussan, and M. R. James. 1988. Dynamic observers as asymptotic limits of recursive filters: Special cases. *SIAM J. Appl. Math.* 48(5):1147–1158. doi: 10.1137/0148068.
12. Reif, K., S. Gunther, E. Yaz, and R. Unbehauen. 1999. Stochastic stability of the discrete-time extended Kalman filter. *IEEE T. Automat. Contr.* 44(4):714–728. doi: 10.1109/9.754809.
13. Reif, K., S. Gunther, E. Yaz, and R. Unbehauen. 2000. Stochastic stability of the continuous-time extended Kalman filter. *IEEE P. — Contr. Theor. Ap.* 147(1):45–52. doi: 10.1049/ip-cta:20000125.
14. Song, T. L., and J. L. Speyer. 1983. A stochastic analysis of a modified gain extended Kalman filter with applications to estimation with bearings only measurements. *IEEE Decis. Contr. P. IEEE*. 1291–1296. doi: 10.1109/CDC.1983.269736.
15. Lingren, A. G., and K. F. Gong. 1978. Position and velocity estimation via bearing observations. *IEEE T. Aero. Elec. Sys.* AES-14(4):564–577. doi: 10.1109/TAES.1978.308681.
16. Kolb, R. C., and F. H. Hollister. 1967. Bearings-only target motion estimation. *1st Asilomar Conference on Circuits and Systems Proceedings*. 935–946.
17. Lin, X., T. Kirubarajan, Y. Bar-Shalom, and S. Maskell. 2002. Comparison of EKF, pseudomeasurement, and particle filters for a bearing-only target tracking problem. *Proc. SPIE* 4728:240–250. doi: 10.1117/12.478508.
18. Amelin, K. S., and A. B. Miller. 2013. An algorithm for refinement of the position of a light UAV on the basis of Kalman filtering of bearing measurements. *J. Commun. Technol. El.* 59(6):622–631. doi: 10.1134/S1064226914060047. EDN: SJVPPV.
19. Miller, A. B., and B. M. Miller. 2015. Stochastic control of light UAV at landing with the aid of bearing-only observations. *Proc. SPIE* 9875:987529. 10 p. doi: 10.1117/12.2228544.
20. Bosov, A. V., and I. V. Uryupin. 2025. Modifitsirovanny variant rasshirennogo fil'tra Kalmana po metodu lineynykh psevdonablyudeniy [A modified Extended Kalman Filter by the linear pseudomeasurement method]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform Appl.* 19(2):17–26. doi: 10.14357/19922264250203. EDN: ZOVFSQ.
21. Bosov, A. 2025. Linear pseudo-measurements filtering for tracking a moving underwater target by observations with random delays. *Sensors* 25(12):3757. 22 p. doi: 10.3390/s25123757.
22. Bosov, A. V. 2025. Application of a linear pseudomeasurement filter to tracking and positioning based on observations with random delays. *Automat. Rem. Contr.* 86(10):953–968. doi: 10.31857/S0005117925100055.
23. Uryupin, I. V. 2025. Ob universal'nykh modelyakh sostoyaniya dlya zadach slezheniya i navigatsii bespilotnykh dvizhushchikhsya ob'ektov [On universal state models for tracking and navigation tasks of unmanned moving objects]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(2):31–44. doi: 10.14357/08696527250203. EDN: WRGXLN.
24. Uryupin, I. V. 2025. Tipovye modeli sistemy nablyudeniya dlya zadach otslezhivaniya i navigatsii bespilotnykh dvizhushchikhsya ob'ektov [Typical models of

observation system for tracking and navigation of unmanned moving objects]. *Sistemy i Sredstva Informati-*

ki — Systems and Means of Informatics 35(3):54–70. doi: 10.14357/08696527250304. EDN: BZVNER.

Received September 10, 2025

Accepted November 15, 2025

Contributors

Bosov Alexey V. (b. 1969) — Doctor of Science in technology, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; avbosov@ipiran.ru

Uryupin Ilya V. (b. 1993) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, junior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; uryupin93@yandex.ru

АНАЛИЗ ЗАДЕРЖЕК В СЕТЯХ ИНТЕГРИРОВАННОГО ДОСТУПА И ТРАНЗИТА ДЛЯ СЦЕНАРИЯ РАЗВЕРТЫВАНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ*

Е. А. Мачнев¹, У. К. Морозова², В. А. Бесчастный³, В. С. Шоргин⁴, Ю. В. Гайдамака⁵

Аннотация: Технология интегрированного доступа и транспорта (Integrated Access and Backhaul, IAB), стандартизованная консорциумом 3GPP, позволяет значительно удешевлять развертывание сетей 5G. В работе исследуется задержка передачи в IAB-сетях, работающих в миллиметровом диапазоне длин волн, в условиях плотной городской застройки. Предложенная в работе модель системы позволяет проводить анализ буферизации на промежуточных узлах-ретрансляторах с использованием теории массового обслуживания и включает параметризацию радиоканала с помощью методов стохастической геометрии. Проведенный численный эксперимент показал, что производительность системы с точки зрения задержки пакетов и коэффициента использования ресурсов определяется в основном условиями дорожного трафика, а не площадью зоны покрытия.

Ключевые слова: 5G New Radio; пропускная способность; сеть интегрированного доступа и транзита

DOI: 10.14357/19922264250403

EDN: GMIYBJ

1 Введение

Современные системы 5G New Radio (NR) [1], функционирующие в микроволновом и миллиметровом диапазонах, призваны обеспечить высокую пропускную способность на интерфейсе радиодоступа. Однако на практике при развертывании сетей преимущественно ограничиваются технологиями микроволнового диапазона частот. Это обусловлено сложными условиями распространения mmWave-сигналов, чувствительных к динамическому и статическому затуханию, а также к высоким потерям при распространении [1, 2]. Для нивелирования этих эффектов требуется уплотнение сетей радиодоступа, что сопровождается значительными капитальными затратами для операторов мобильной связи.

Одним из приоритетных сценариев, требующих высокой плотности радиодоступа, представляются уличные и дорожные условия развертывания сетей. В таких случаях базовые станции (БС) 5G NR необходимо размещать вдоль дорог для обслуживания не только пассажиров, но и самих транспортных средств (ТС), в том числе в задачах автономного транспорта. Из-за высоких потерь при распространении сигнала требуется плотное размещение БС для обеспечения непрерывного покрытия. В связи

с этим 3GPP в релизах 16 и 17 предложил архитектуру интегрированного доступа и транзита (IAB) [3, 4] как экономически эффективный способ уплотнения сети. Использование вместо БС недорогих ретрансляторов — IAB-узлов — позволяет увеличить число точек доступа и при этом сократить затраты.

Особенность технологии IAB заключается в организации многозвеневой связи, характерной для будущих систем связи 5G/6G [3]. При этом в узлах IAB совмещается функциональность доступа и транзита, при которой весь доступный спектр радиочастот используется как для подключения, так и для транзитной передачи. Такая функциональность требует полудуплексного режима передачи данных, что значительно усложняет задачу оптимизации работы сети. Исследования показывают, что, несмотря на указанные ограничения, технология IAB может существенно увеличить площадь покрытия и повысить пропускную способность сети [1, 5].

Одним из ключевых показателей эффективности сетей IAB, особенно в сценариях развертывания вдоль автомагистрали, служит задержка. В отличие от показателей покрытия и пропускной способности, задержкам до настоящего времени уделялось недостаточно внимания. Несмотря на

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-79-10084, <https://rscf.ru/project/23-79-10084/>.

¹ Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, machnev-ea@rudn.ru

² Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, morozova-uk@rudn.ru

³ Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, beschastnyy-va@rudn.ru

⁴ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, vshoragin@ipiran.ru

⁵ Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, gaydamaka-yuv@rudn.ru

то что сети 5G пакетно-ориентированные, модели оценки характеристик в основном ограничиваются сеансовым уровнем. При этом существует очевидный баланс между задержкой и пропускной способностью: увеличение числа IAB-узлов или расстояний между ними ведет к росту задержки и снижению общей производительности.

В данной работе проводится анализ задержек в IAB-сетях с учетом полудуплексного режима и особенностей распространения mmWave-сигналов. Для этого с помощью аппарата стохастической геометрии [6] и теории массового обслуживания [7, 8] построена модель, учитывающая пульсирующий характер трафика [9] в соседних временных интервалах передачи (Transmission Time Interval, TTI), характерный для систем 5G NR. Приводятся результаты численного эксперимента, демонстрирующие влияние числа IAB-узлов, условий дорожного трафика, интенсивности поступления пакетов от абонентских устройств (АУ) и других факторов. Основные научные результаты работы:

- разработан математический аппарат для оценки задержки пакетов и пропускной способности в IAB-сетях в зависимости от параметров системы;
- показано, что производительность цепочки IAB-узлов ограничивается транзитным каналом, при этом:
 - (1) параметры дорожного трафика существенно влияют на оптимальные параметры развертывания;
 - (2) средняя задержка резко увеличивается с порядковым номером IAB-узла в цепочке;

- (3) даже широкая полоса частот в диапазоне mmWave может быть недостаточна для поддержки более 2–3 узлов в одной цепочке.

2 Системная модель

Рассматриваемая архитектура развертывания системы 5G NR с использованием технологии IAB представлена на рис. 1, где на один IAB-донор опираются одновременно две IAB-цепочки в разных направлениях движения. IAB-донор служит узлом, подключенным к опорной сети и имеющим наибольшую пропускную способность, в то время как IAB-узлы подключены к донору и между собой по радиointерфейсу и выполняют роль ретрансляторов пользовательских данных. В работе анализируется уличное развертывание сети, при котором каждый IAB-донор обслуживает N последовательно соединенных ретрансляторов (IAB-узлов), при этом к каждому узлу, включая донор, могут подключаться АУ, если они находятся в радиусе зоны покрытия того или иного узла. Предполагается, что АУ всегда подключаются к ближайшему IAB-узлу, так как он дает наибольшую оценку мощности принимаемого сигнала. Таким образом формируется линейная структура — цепочка от АУ к IAB-донору в случае восходящего потока данных. В качестве базового сценария рассматривается многополосная автомагистраль с несколькими полосами в каждом из направлений.

Для улучшения покрытия предполагается, что IAB-узлы размещаются по разным сторонам дороги, как показано на рис. 1. Расстояние между узлами, обозначаемое как d_M , вычисляется на основе модели распространения радиосигнала,

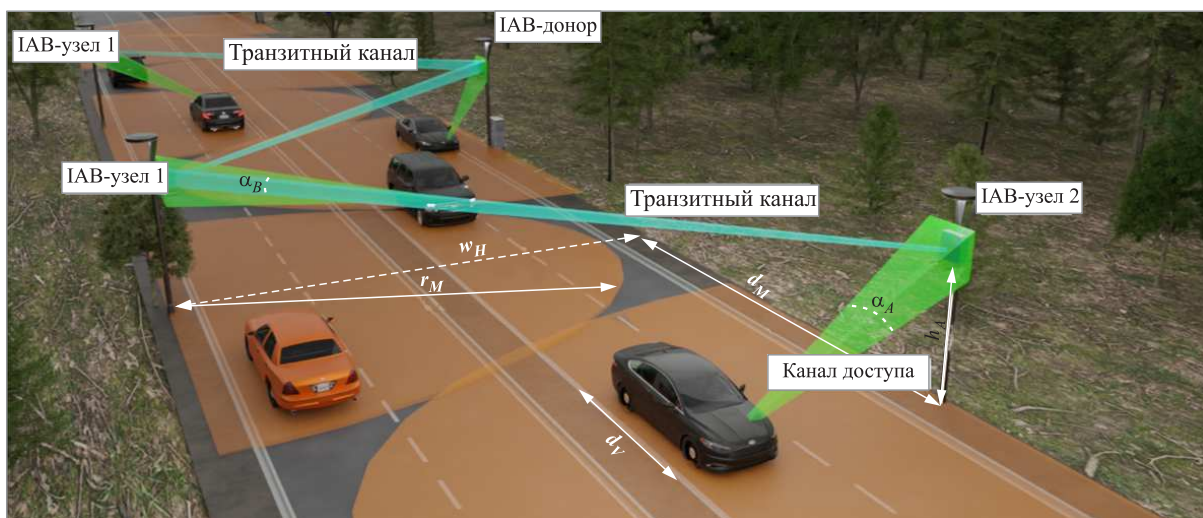


Рис. 1 Сценарий развертывания IAB-сети

представленной ниже, с таким расчетом, чтобы исключить наличие «белых пятен» в зоне покрытия. Высоты антенн у IAB-доноров и промежуточных узлов считаются одинаковыми и равными h_A .

Предполагается использование плоских антенных решеток с коэффициентами усиления G_B и G_U на БС и АУ соответственно. Согласно подходу, предложенному в работах [10, 11], в качестве модели диаграммы направленности антенны используется коническая модель, в которой ширина луча совпадает с шириной угла на уровне половинной мощности (Half-Power Beamwidth, HPBW). Средний коэффициент усиления в пределах HPBW задается выражением [12]

$$G_{B,U} = \frac{1}{\theta_{3\text{dB}}^+ - \theta_{3\text{dB}}^-} \int_{\theta_{3\text{dB}}^-}^{\theta_{3\text{dB}}^+} \frac{\sin(N_{(\cdot)} \pi \cos(\theta)/2)}{\sin(\pi \cos(\theta)/2)} d\theta,$$

где $N_{(\cdot)}$ — число антенных элементов в соответствующей плоскости; $\theta_{3\text{dB}}^+$ и $\theta_{3\text{dB}}^-$ — верхняя и нижняя границы угла на уровне -3 дБ.

В данной работе используется стандартизованная модель потерь на распространение Urban Misto, рекомендованная 3GPP [13]. Согласно этой модели, затухание сигнала в состоянии прямой видимости на расстоянии y между антеннами описывается следующим выражением:

$$L_{\text{dB}}(y) = 10^{2f_C + 3,24} y^{\zeta}, \quad (1)$$

где f_C — несущая частота; $\zeta = 2,1$ — показатель степени затухания в состоянии прямой видимости. Кроме того, в модели учитывается постоянный дополнительный затухающий фактор в 15 дБ, обусловленный прохождением сигнала сквозь кузов автомобиля [14].

Выражение (1) может быть преобразовано к линейной форме $A_M y^{-\zeta}$, где коэффициенты A_M и ζ определяются следующим образом:

$$A_M = 10^{2f_{M,c} + 3,24}; \quad \zeta = 2,1.$$

С учетом дополнительного затухания модель (1) принимает вид:

$$L(y) = 10^{2f_C + 3,24 + \varepsilon_0/10} y^{-\zeta},$$

где ε_0 соответствует постоянному значению потерь в децибелах (например, 15 дБ из-за кузова автомобиля), приведенному к линейной шкале.

Таким образом, мощность принимаемого сигнала на АУ можно определить как

$$S(y) = \frac{P G_B G_U L(y)}{N_0 R_W + M_I},$$

где P — мощность передающей антенны БС; N_0 — тепловой шум; R_W — ширина полосы пропускания; M_I — запас помехоустойчивости. В работе оценка мощности принимаемого сигнала используется для расчета предельной дистанции связи, т. е. зоны покрытия БС, при заданном минимальном значении S_{min} .

Рассматривается полудуплексная архитектура IAB, рекомендованная для внедрения в сетях 5G согласно [3]. Поскольку используется миллиметровый диапазон длин волн (диапазон FR2), предполагается организация полудуплексной связи на основе разделения времени (Time-Division Duplex), при котором восходящая и нисходящая передачи осуществляются в одной и той же полосе частот. Полудуплекс в таких системах оказывается предпочтительной схемой по сравнению с дуплексом [1] по причине высокой мощности интерферирующих сигналов, создаваемых соседними узлами, а значит, и потери качества канала.

Базовой единицей времени в модели считается один подкадр длительностью 1 мс, что соответствует интервалу передачи (TTI) в системах 5G NR [15]. Физический уровень 5G NR допускает динамическое распределение этих символов между восходящей и нисходящей передачами в зависимости от текущих потребностей. Буферизация пакетов осуществляется на уровне управления доступом к среде. Благодаря высокой пропускной способности диапазона mmWave и особенностям полудуплексной передачи, объем буфера считается бесконечным.

С учетом полудуплексных ограничений для сети IAB используется модель планирования передачи, состоящая из пяти фаз, происходящих в рамках одного TTI на каждом из узлов цепочки, включая донор.

Фаза 1 — прием пакетов от соседних узлов. Пакеты от IAB-донора могут быть адресованы следующему узлу в цепочке или АУ, подключенному к данному IAB-узлу.

Фаза 2 — передача накопленных пакетов соседним IAB-узлам и подключенным АУ.

Фаза 3 — повторный прием пакетов, но только от донорского или предыдущего по цепочке IAB-узла; пакеты могут быть предназначены как для АУ, так и для следующего по цепочке IAB-узла.

Фаза 4 — передача пакетов исключительно подключенным АУ на всех узлах, при этом обмен пакетами между IAB-узлами не осуществляется.

Фаза 5 — прием пакетов от подключенных АУ.

Параметры дорожного трафика

Сценарий	Скорость движения, км/ч	Расстояние между автомобилями, м
Затор	20	10
Нормальный трафик	60	30
Шоссе	120	60

В предложенной фазовой модели предполагается фиксированное разделение времени на фазы (каждой фазе соответствует свой временной интервал), ответственные за восходящую и нисходящую передачу в рамках одного временного слота. При этом в работе исследуется только направление восходящей передачи, т. е. от АУ к IAB-донору.

Рассматриваемая услуга соответствует режиму расширенного мобильного широкополосного доступа (Enhanced Mobile Broadband), определенному в [16]. В каждой полосе движения расположение АУ соответствует однородному одномерному пуассоновскому точечному процессу [17] с параметром γ АУ/м. Для каждого АУ используется модель трафика FTP Model 3, стандартизированная в [18], которая предполагает фиксированный размер пакета (0,5 МБ) и интенсивность поступления пакетов λ_F .

Пакеты накапливаются в буферах АУ, промежуточных IAB-узлов и IAB-донора на всех фазах работы, за исключением тех, где происходит передача в исходящем направлении.

Для моделирования различных дорожных условий, влияющих на характеристики входящего трафика, рассматриваются три сценария: затор (дорожная пробка), нормальный поток и шоссе (высокоскоростная автомагистраль), приведенные в таблице. Поскольку временной слот в сетях 5G имеет длину не более 1 мс, предполагается, что рассматриваемые скорости ТС не приводят к существенным изменениям качества канала с обслуживающим IAB-узлом, так как смещение АУ в течение слота составляет не более 35 см.

Основное отличие между сценариями заключается в плотности транспортного потока, которая определяется расстоянием между ТС d_I . Другими параметрами модели служат число полос движения N_I и средняя длина автомобиля d_V .

Целью настоящего исследования ставится количественная характеристика производительности АУ, расположенных в ТС и ассоциированных с IAB-узлами, размещенными вдоль дороги.

Основное внимание уделяется средней задержке доставки пакета как в восходящем, так и в нисходящем направлениях. Задержка анализируется в зависимости от ключевых параметров системы: числа IAB-узлов, их радиуса покрытия, интенсивности трафика от АУ, долей ресурсов, выделяемых на вос-

ходящую и нисходящую передачи, и других факторов. Также рассматривается коэффициент использования ресурсов, определяющий эффективность загрузки радиоинтерфейса при заданных параметрах трафика и архитектуры сети.

3 Модель оценки характеристик сети

В системах 5G NR единицей планирования выступает ТТИ — временной интервал длительностью $\Delta = 1$ мс, который в работе рассматривается как продолжительность такта работы системы. В каждом таком интервале АУ сообщают о своих потребностях в передаче данных IAB-донору или узлам. Процессы поступления и обслуживания пакетов в системе имеют пачечный характер, поскольку за один такт в систему поступают пакеты от нескольких АУ, а далее в соответствующей фазе транзита обработанные пакеты перенаправляются на следующий узел в цепочке. В условиях высоких скоростей передачи данных, характерных для mmWave-диапазона, IAB-узлы с полудуплексными ограничениями используют большие буферы для временного хранения пакетов, ожидающих предоставления радиоканала.

Таким образом, для анализа производительности транзитного IAB-узла используется система массового обслуживания с одним прибором, неограниченной очередью и групповыми входящим и обслуживаемым потоками с переменной длиной групп — модель $\text{Geo}^{[1:X]}|\text{Geo}^{[1:Y]}|1|\infty$ [7]. Пакеты поступают в начале временного такта с вероятностью a ; с дополнительной вероятностью $\bar{a} = 1 - a$ поступления не происходит. В каждый такт может поступать до A заявок и обслуживаться до B заявок в зависимости от числа пакетов в буфере, при этом значения A и B определяются ограничениями полудуплексного режима. Канал предоставляется для передачи [4] в нужном направлении с вероятностью b ; соответственно, с дополнительной вероятностью $\bar{b} = 1 - b$ канал используется на такте для передачи в других направлениях.

Поступление и обслуживание групп заявок производится в режиме «раннее поступление, позднее обслуживание», т. е. прием группы заявок происходит в начале такта, а обслуживание — в конце, как показано на рис. 2.

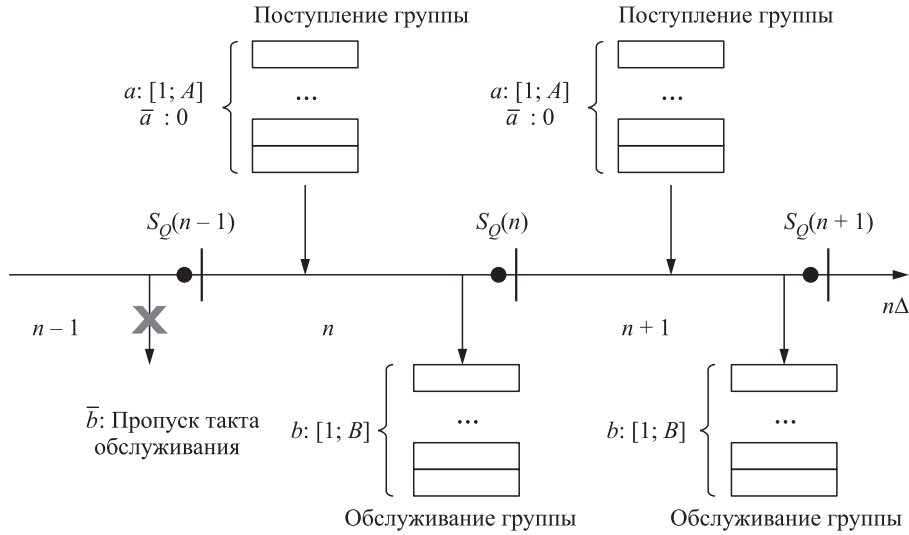


Рис. 2 Временная диаграмма событий в системе

Случайное число пакетов в IAB-узле в момент непосредственно перед окончанием такта моделируется как цепь Маркова (ЦМ) $\{S_Q(n), n \geq 1\}$ с дискретным пространством состояний $S_Q(n) \in \{0, 1, \dots\}$, где шаг ЦМ соответствует такту в системе IAB. Заданы распределения вероятностей размеров групп поступающих и обслуживаемых пакетов $\{l_i, i = \overline{1, A}\}$ и $\{h_i, i = \overline{1, B}\}$ соответственно. Также для компактной записи введем обозначение $H_i = \sum_{j=i}^B h_j$ — вероятность того, что длина обслуживаемой группы не менее i заявок.

Элементы матрицы $Q = [q_{ij}]_{i,j \geq 0}$ вероятностей переходов ЦМ $S_Q(n)$ за один шаг имеют вид:

$$q_{ij} = \begin{cases} \bar{a} + \sum_{k=1}^A al_k b H_k, & i = j = 0; \\ al_A \bar{b}, & i \geq 0, j = i + A; \\ \bar{a} \bar{b} + \sum_{k=1}^A al_k b h_k, & i \geq 1, j = i; \\ al_{j-i} \bar{b} + \sum_{k=1}^{A-j+i} al_{j-i+k} b h_k, & 0 \leq i < j < A + i; \\ \bar{a} b H_i + \sum_{k=1}^{(A, B-i)} al_k b H_{i+k}, & 1 \leq i < B, j = 0; \\ \bar{a} b h_{i-j} + \sum_{k=1}^{(A, B-i+j)} al_k b h_{i-j+k}, & 0 < j < i < j + B; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В ограничениях, обеспечивающих существование стационарного режима [7],

$$\rho = \frac{\hat{a} \hat{l}}{\hat{b} \hat{h}} < 1,$$

где $\hat{l} = \sum_{i=0}^A i l_i$ и $\hat{h} = \sum_{i=0}^B i h_i$ — среднее число поступающих и обслуженных за такт пакетов соответственно, система уравнений равновесия $p^T = p^T Q$ с условием нормировки $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ позволяет получить стационарное распределение $p = (p_0, p_1, \dots)$ вероятностей состояний ЦМ $S_Q(n)$ в виде производящей функции $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$ [7]:

$$P(z) = \left(\sum_{i=0}^{B-1} p_i D_i - \sum_{i=1}^B \frac{1}{z^i} C_i \sum_{k=0}^{i-1} p_k z^k \right) / \left(1 - C - \bar{a} \bar{b} L(z) - ab \sum_{i=1}^{A-1} z^i \sum_{k=i+1}^A l_k h_{k-i} - \sum_{i=1}^B \frac{1}{z^i} C_i \right). \quad (2)$$

Здесь $p_i = \{S_Q(n) = i\}$ — стационарные вероятности ЦМ $S_Q(n)$; $L(z) = \sum_{i=1}^A l_i z^i$ — производящая функция распределения длины поступающей группы; коэффициенты D_i , C_i и C определяются через параметры поступления и обслуживания следующим образом:

$$\begin{aligned} D_i &= \bar{a} b H_{i+1} + \sum_{k=1}^{\min(A, B-i)} al_k b H_{i+k+1}; \\ C_i &= \bar{a} b h_i + \sum_{k=1}^{\min(A, B-i)} al_k b h_{i+k}; \\ C &= \bar{a} \bar{b} + \sum_{k=1}^A al_k b h_k. \end{aligned}$$

Применив теорему Руше, можно получить систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{B-1} p_i D_i - \sum_{i=1}^B \frac{1}{z_j^i} C_i \sum_{k=0}^{i-1} p_k z_j^k = 0; \\ P(1) = 1. \end{cases}$$

где $z_j, j = \overline{1, B-1}$, — корни знаменателя в (2) при $|z_j| < 1$. Решение системы уравнений позволяет найти стационарное распределение вероятностей $p = (p_0, p_1, \dots)$ состояний ЦМ $S_Q(n)$.

В работе рассмотрены два ключевых показателя эффективности системы: случайная величина D задержки передачи одного пакета и доля используемого радиоресурса U на IAB-узле. Среднюю задержку $E[D]$ предложено оценивать через число тактов, необходимых для обслуживания заявок из очереди и среднего числа поступивших в очередном такте заявок, в следующем виде:

$$E[D] = \Delta \sum_{i=0}^{\infty} p_i \left\lceil \frac{i + a\hat{l}}{b\hat{h}} \right\rceil.$$

Поскольку пропускная способность напрямую зависит от доступного радиоресурса в физической системе, рассчитываем долю используемого ресурса как долю занятой средней пропускной способности системы в виде, которая не может превосходить единицу:

$$E[U] = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \min \left(\frac{i + a\hat{l}}{b\hat{h}}, 1 \right).$$

4 Численный эксперимент

Согласно модели трафика FTP3 [18] предполагается, что пакеты данных размером $S_P = 0,5$ МБ

отправляются АУ в среднем каждые 30 мс. В пересчете на усредненную скорость передачи данных в радиоканале это составляет 133 Мбит/с, что может оказаться чрезмерным даже для современных сценариев развертывания. В качестве минимальной схемы модуляции и кодирования (СМК) [19] выбрана схема 12 (модуляция 64 QAM, минимальное значение отношения сигнал/шум $S_{\min} = 14,22$ дБ, спектральная эффективность 3,9023 бит/с/Гц). Поскольку в работе рассматривается полоса частот шириной $F_B = 400$ МГц, а расположение АУ предполагается равномерным, средняя спектральная эффективность передачи данных в зоне покрытия IAB-узла составляет приблизительно $E_S = 4,72$ бит/с/Гц. В пересчете доступной полосы частот на скорость передачи данных получаем $B = \Delta E_S F_B / S_P \approx 7$. При этом среднее число АУ в зоне покрытия рассчитывается с помощью предельной дистанции покрытия D_M для выбранной СМК M , т.е. $A = \gamma D_{12} = 0,013 \cdot 156 \approx 2$. Также предполагается, что все АУ передают данные с одинаковой скоростью и при этом каждому из них выделяется доля радиоресурса, необходимая для поддержания этой скорости.

На рис. 3, а для цепочки из $N = 3$ узлов показано влияние требуемой скорости трафика для всех АУ в сети (при расчете варьировался размер пакета) на задержку на ближайшем IAB-узле, а также сквозная задержка для всей цепочки. Стоит отметить, что нагрузка от предшествующего $(i-1)$ -го узла в цепочке рассчитывается как $A_i = B_{i-1} E_{i-1}[U]$ и суммируется с нагрузкой i -го узла от ассоциированных с ним АУ. На рис. 3, б показана эффективность использования ресурсов первого и последнего IAB-узлов в цепочке.

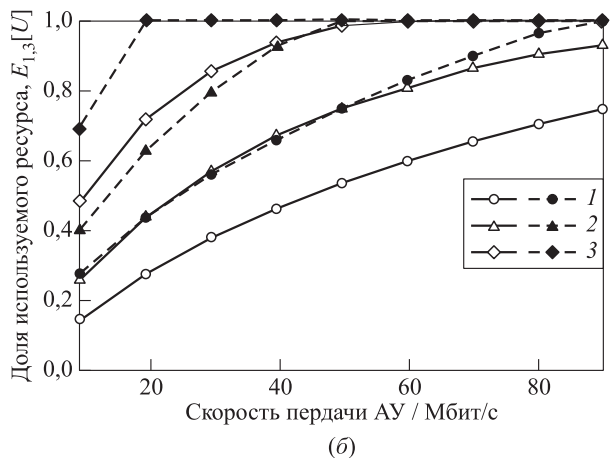
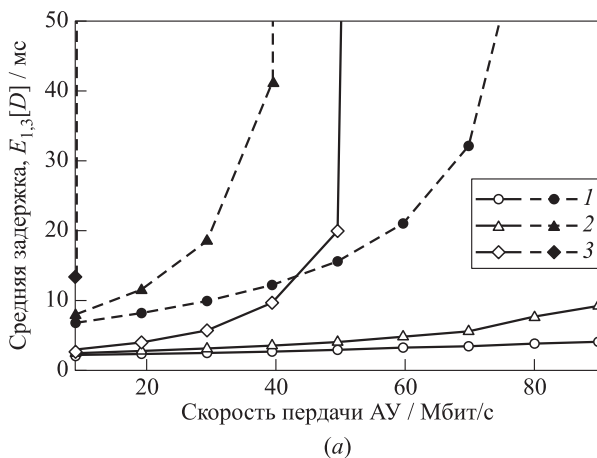


Рис. 3 Зависимость средней задержки передачи (а) и доли используемого ресурса на IAB-узлах (б) от требуемой скорости передачи данных: 1— шоссе; 2— нормальный трафик; 3— затор; пустые значки — 1 узел; заливные значки — 3 узла

Как видно из полученных результатов, ограничения на требуемую скорость передачи данных существенно влияют на среднюю задержку. В то же время скорость передачи данных, поддерживаемая при достаточно низкой задержке, намного меньше, чем рекомендованная консорциумом 3GPP в модели трафика FTP3. Даже для 1-го узла в цепочке скорость выше 60 Мбит/с поддерживается только на автомагистралях и в условиях нормального дорожного движения без пробок. Таким образом, можно сделать вывод, что даже при использовании максимальной полосы пропускания канала в 400 МГц, доступной в диапазоне mmWave FR2, достижение требований к скорости передачи данных 3GPP остается сложной задачей при реалистичном развертывании IAB.

5 Заключение

Технология IAB представляет собой вариант экономичного развертывания систем 5G NR в диапазоне FR2. Анализ производительности и оптимизация таких систем возможны только в особых случаях, когда топология фиксированная. В данной работе с использованием инструментов стохастической геометрии и теории массового обслуживания построена математическая модель для анализа производительности и численной оптимизации дорожных IAB-систем, размещаемых вдоль улиц и магистралей, что представляет собой один из практических примеров применения рассматриваемой технологии.

Одним из возможных решений для повышения производительности в условиях высокой плотности дорожного движения представляется ограничение на использование низких СМК за счет соответствующего сокращения расстояния между IAB-узлами и АУ. Также показано, что достижение требований к скорости передачи данных, предъявляемых 3GPP, остается сложной задачей при реалистичном развертывании IAB-систем.

Разработанная модель позволяет определять параметры развертывания IAB-системы, позволяющие удовлетворять заданным ограничениям на задержки при заданном наборе значений параметров.

В качестве дальнейших исследований планируется рассмотреть задачу поиска оптимального взаиморасположения IAB-узлов в сети для удовлетворения высоких требований современных приложений к передаче данных.

Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н. Разумчику Р. В. за советы по работе с дискретными системами.

Литература

1. Holma H., Toskala A., Nakamura T. 5G technology: 3GPP New Radio. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2020. 536 p.
2. Moltchanov D., Beschastnyi V., Ostrikova D., Gaidamaka Y., Koucheryavy Y. Uninterrupted connectivity time in THz systems under user micromobility and blockage // Global Communications Conference Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2021. Art. 9685384. 6 p. doi: 10.1109/GLOBECOM46510.2021.9685384.
3. 3GPP TR 38.874. Study on integrated access and backhaul, 2019. Release 16.0.0. https://www.3gpp.org/ftp/Specs/archive/38_series/38.874/38874-g00.zip.
4. Zhivitsova A., Beschastnyi V., Koucheryavy Y., Samouylov K. A survey of delay-oriented dynamic link scheduling policies for 5G/6G integrated access and backhaul systems // IEEE Access, 2024. Vol. 12. P. 118565–118586. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3446569.
5. Rappaport T. S. Wireless communications: Principles and practice. — 2nd ed. — Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2024. 708 p. doi: 10.1017/9781009489843.
6. Haenggi M. Stochastic geometry for wireless networks. — 2nd ed. — Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2012. 298 p. doi: 10.1017/CBO9781139043816.
7. Печинкин А. В., Разумчик Р. В. Системы массового обслуживания в дискретном времени. — М.: Физматлит, 2018. 432 с.
8. Naumov V., Gaidamaka Y., Yarkina N., Samouylov K. Matrix and analytical methods for performance analysis of telecommunication systems. — Cham: Springer, 2022. 308 p. doi: 10.1007/978-3-030-83132-5.
9. Kovalchukov R., Moltchanov D., Gaidamaka Y., Bobrikova E. An accurate approximation of resource request distributions in millimeter wave 3GPP New Radio systems // Internet of things, smart spaces, and next generation networks and systems / Eds. O. Galinina, S. Andreev, S. Balandin, Y. Koucheryavy. — Lecture notes in computer science ser. — Cham: Springer, 2019. Vol. 11660. P. 572–585. doi: 10.1007/978-3-030-30859-9_50.
10. Singh S., Mudumbai R., Madhoo U. Interference analysis for highly directional 60-GHz mesh networks: The case for rethinking medium access control // IEEE ACM T. Network., 2011. Vol. 19. Iss. 5. P. 1513–1527. doi: 10.1109/TNET.2011.2122343.
11. Petrov V., Komarov M., Moltchanov D., Jornet J. M., Koucheryavy Y. Interference and SINR in millimeter wave and terahertz communication systems with blocking and directional antennas // IEEE T. Wirel. Commun., 2017. Vol. 16. Iss. 3. P. 1791–1808. doi: 10.1109/TWC.2017.2654351.
12. Balanis C. A. Microstrip antennas // Antenna theory: Analysis and design. — 3rd ed. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2005. P. 811–882.
13. 3GPP TR 38.901. Study on channel model for frequencies from 0.5 to 100 GHz, 2025. Release 19.0.0. https://www.3gpp.org/ftp/Specs/archive/38_series/38.901/38901-g00.zip.

- 3gpp.org/ftp/Specs/archive/38_series/38.901/38901-j10.zip
14. Eckhardt J. M., Petrov V., Moltchanov D., Koucheryavy Y., and Kurner T. Channel measurements and modeling for low-terahertz band vehicular communications // *IEEE J. Sel. Area. Comm.*, 2021. Vol. 39. Iss. 6. P. 1590–1603. doi: 10.1109/JSAC.2021.3071843.
 15. 3GPP TR 38.211. NR; Physical channels and modulation, 2025. Release 19.0.0. https://www.3gpp.org/ftp/Specs/archive/38_series/38.211/38211-j00.zip.
 16. Minimum requirements related to technical performance for IMT-2020 radio interface(s). — ITU, 2017. ITU-R Report M.2410-0. https://www.itu.int/dms_pub/itu-r/opb/rep/R-REP-M.2410-2017-PDF-E.pdf.
 17. Moltchanov D. M. Distance distributions in random networks // *Ad Hoc Netw.*, 2012. Vol. 10. Iss. 6. P. 1146–1166. doi: 10.1016/j.adhoc.2012.02.005.
 18. 3GPP TR 36.889. Feasibility study on licensed-assisted access to unlicensed spectrum, 2015. Release 13.0.0. https://www.3gpp.org/ftp/Specs/archive/36_series/36.889/36889-d00.zip.
 19. Petrov V., Komarov M., Moltchanov D., Jornet J. M., Koucheryavy Y. Interference and SINR in millimeter wave and terahertz communication systems with blocking and directional antennas // *IEEE T. Wirel. Commun.*, 2017. Vol. 16. Iss. 3. P. 1791–1808. doi: 10.1109/TWC.2017.2654351.

Поступила в редакцию 08.08.2025

Принята к публикации 15.11.2025

ON LATENCY ANALYSIS IN INTEGRATED ACCESS AND BACKHAUL DEPLOYMENTS WITH LINEAR TOPOLOGY

E. A. Machnev¹, U. K. Morozova¹, V. A. Beschastnyi¹, V. S. Shorgin², and Yu. V. Gaidamaka^{1,2}

¹RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

²Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Integrated Access and Backhaul (IAB) technology standardized by the 3GPP provides the possibility to significantly reduce the cost of 5G New Radio deployments. The authors study the transmission delay in dense urban areas operating in the millimeter frequency range. The proposed system model allows for buffering analysis at transit IAB-nodes using the queuing theory and includes parameterization of the radio channel using the methods of stochastic geometry. The numerical experiment showed that the system performance in terms of packet delay and resource utilization is determined mainly by road traffic conditions and not by the coverage area of IAB-nodes.

Keywords: 5G New Radio; latency; queue

DOI: 10.14357/19922264250403

EDN: GMIYBJ

Acknowledgments

The reported study was funded by the Russian Science Foundation, project No. 23-79-10084, <https://rscf.ru/en/project/23-79-10084/>.

References

1. Holma, H., A. Toskala, and T. Nakamura. 2020. *5G technology: 3GPP New Radio*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 536 p.
2. Moltchanov, D., V. Beschastnyi, D. Ostrikova, Y. Gaidamaka, and Y. Koucheryavy. 2021. Uninterrupted connectivity time in THz systems under user micromobility and blockage. *Global Communications Conference Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 9685384. 6 p. doi: 10.1109/GLOBECOM46510.2021.9685384.
3. 3GPP. 2019. NR; Study on integrated access and backhaul (Release 16). 3GPP TR 38.874 V16.0.0. Available at: https://www.3gpp.org/ftp/Specs/archive/38_series/38.874/38874-g00.zip (accessed November 26, 2025).
4. Zhivtsova, A., V. Beschastnyi, Y. Koucheryavy, and K. Samouylov. 2024. A survey of delay-oriented dynamic link scheduling policies for 5G/6G integrated access and backhaul systems. *IEEE Access* 12:118565–118586. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3446569.
5. Rappaport, T.S. 2024. *Wireless communications: Principles and practice*. 2nd ed. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press. 708 p. doi: 10.1017/9781009489843.
6. Haenggi, M. 2012. *Stochastic geometry for wireless networks*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press. 298 p. doi: 10.1017/CBO9781139043816.
7. Pechinkin, A.V., and R.V. Razumchik. 2018. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya v diskretnom vremeni* [Discrete time queuing systems]. Moscow: Fizmatlit. 432 p.

8. Naumov, V., Y. Gaidamaka, N. Yarkina, and K. Samouylov. 2022. *Matrix and analytical methods for performance analysis of telecommunication systems*. Cham: Springer. 308 p. doi:10.1007/978-3-030-83132-5.
9. Kovalchukov, R., D. Moltchanov, Y. Gaidamaka, and E. Bobrikova. 2019. An accurate approximation of resource request distributions in millimeter wave 3GPP New Radio systems. *Internet of things, smart spaces, and next generation networks and systems*. Eds. O. Galinina, S. Andreev, S. Balandin, and Y. Koucheryavy. Lectures notes in computer science ser. Cham: Springer. 11660:572–585. doi: 10.1007/978-3-030-30859-9_50.
10. Singh, S., R. Mudumbai, and U. Madhow. 2011. Interference analysis for highly directional 60-GHz mesh networks: The case for rethinking medium access control. *IEEE ACM T. Network*. 19(5):1513–1527. doi: 10.1109/TNET.2011.2122343.
11. Petrov, V., M. Komarov, D. Moltchanov, J. M. Jornet, and Y. Koucheryavy. 2017. Interference and SINR in millimeter wave and terahertz communication systems with blocking and directional antennas. *IEEE T. Wirel. Commun.* 16(3):1791–1808. doi: 10.1109/TWC.2017.2654351.
12. Balanis, C. A. 2005. *Microstrip antennas. Antenna theory: Analysis and design*. 3rd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 811–882.
13. 3GPP. 2025. Study on channel model for frequencies from 0.5 to 100 GHz (Release 19). 3GPP TR 38.901 V. 19.1.0. Available at: https://www.3gpp.org/ftp/Specs/archive/38_series/38.901/38901-j10.zip (accessed November 26, 2025).
14. Eckhardt, J. M., V. Petrov, D. Moltchanov, Y. Koucheryavy, and T. Kurner. 2021. Channel measurements and modeling for low-terahertz band vehicular communications. *IEEE J. Sel. Area. Comm.* 39(6):1590–1603. doi: 10.1109/JSAC.2021.3071843.
15. 3GPP. 2025. NR; Physical channels and modulation (Release 19). 3GPP TR 38.211 V19.0.0. Available at: https://www.3gpp.org/ftp/Specs/archive/38_series/38.211/38211-j00.zip (accessed November 26, 2025).
16. ITU. 2017. Minimum requirements related to technical performance for IMT-2020 radio interface(s). Report ITU-R M.2410-0. Available at: https://www.itu.int/dms_pub/itu-r/opb/rep/R-REP-M.2410-2017-PDF-E.pdf (accessed November 26, 2025).
17. Moltchanov, D. M. 2012. Distance distributions in random networks. *Ad Hoc Netw.* 10(6):1146–1166. doi: 10.1016/j.adhoc.2012.02.005.
18. 3GPP. 2015. Feasibility study on licensed-assisted access to unlicensed spectrum (Release 13). 3GPP TR 36.889 V13.0.0. Available at: https://www.3gpp.org/ftp/Specs/archive/36_series/36.889/36889-d00.zip (accessed November 26, 2025).
19. Petrov, V., M. Komarov, D. Moltchanov, J. M. Jornet, and Y. Koucheryavy. 2017. Interference and SINR in millimeter wave and terahertz communication systems with blocking and directional antennas. *IEEE T. Wirel. Commun.* 16(3):1791–1808. doi: 10.1109/TWC.2017.2654351.

Received August 8, 2025

Accepted November 15, 2025

Contributors

Machnev Egor A. (b. 1996) — junior scientist, Department of Probability Theory and Cyber Security, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; 1042200071@rudn.ru

Morozova Uliana K. (b. 2003) — master student, Department of Probability Theory and Cyber Security, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; morozova-uk@rudn.ru

Beschastnyi Vitalii A. (b. 1992) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Probability Theory and Cyber Security, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; beschastnyy-va@rudn.ru

Shorgin Vsevolod S. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in technology, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; vshorgin@ipiran.ru

Gaidamaka Yuliya V. (b. 1971) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Probability Theory and Cyber Security, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow, 117198, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; gaydamaka-yuv@rudn.ru

ОБ ОДНОЙ ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ДИСПЕТЧЕРИЗАЦИИ ДЛЯ ДВУХФАЗНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПО ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИХ СОСТОЯНИИ*

М. Г. Коновалов¹, Р. В. Разумчик²

Аннотация: Заявки поступают по рекуррентному потоку в двухфазную систему массового обслуживания (СМО). Первая фаза характеризует индивидуальную задержку заявки, а вторая — непосредственное обслуживание на одном из N одинаковых параллельных серверов с очередью неограниченной емкости. В момент поступления заявки диспетчер должен принять решение, какой из серверов будет ее обслуживать. Диспетчер располагает определенной априорной статической информацией о системе и о входящем потоке, однако динамическая информация об очередях на серверах поступает к нему с задержкой. Предложена эвристическая процедура выбора серверов, которая использует запаздывающую информацию, а также предысторию собственных решений диспетчера. Алгоритм основан на комбинации двух приемов, часто используемых в задачах диспетчеризации: резервирования серверов за заявками определенной длины и предпочтительного выбора серверов с наименьшей очередью. Предложенная диспетчеризация может быть легко реализована на практике без реконструкции существующего аппаратного обеспечения. Приведены численные результаты сравнения новой стратегии с наиболее распространенными на практике алгоритмами.

Ключевые слова: системы с параллельным обслуживанием; диспетчеризация; управление нагрузкой; запаздывающая информация; резервирование

DOI: 10.14357/19922264250404

EDN: JIOBBH

1 Постановка задачи

Рассматривается описанная в [1] модель частично наблюдаемых стохастических систем с параллельным обслуживанием в виде двухфазной СМО. Первая фаза представляет собой бесконечнолинейную систему типа $\bullet/GI/\infty$, а вторая состоит из $N \geq 2$ одинаковых параллельно и независимо функционирующих СМО типа $\bullet/GI/\infty$ с дисциплиной обслуживания очереди FIFO (first in, first out) (пронумерованных числами от 1 до N без повторений). Предполагается, что время, затрачиваемое заявкой на переход с фазы на фазу, равно нулю³. Заявки каждого из $K \geq 1$ независимых случайных потоков, поступающих в систему, обслуживаются последовательно на одном из приборов первой фазы, затем — в одной из СМО второй фазы. Времена обслуживания на первой и второй фазах независимы, не зависят от входящего потока и имеют произвольные распределения. Для каждой заявки в момент ее поступления диспетчером (мгновенно) должно быть принято решение о том, в какой из СМО вто-

рой фазы ей надлежит обслуживаться. Если заявка поступила в момент t , то для принятия решения доступна информация лишь о распределениях исходных величин, о предыдущих принятых решениях (включая моменты поступления и размеры заявок), о текущем числе заявок на первой фазе и наконец о числе заявок в каждой СМО второй фазы в моменты $[t/\Delta]\Delta, ([t/\Delta] - 1)\Delta, ([t/\Delta] - 2)\Delta, \dots, 0$ ($\Delta > 0$). В указанных условиях задача заключается в нахождении правила принятия решений (диспетчеризации), которое минимизирует стационарное среднее время V пребывания заявки на второй фазе (среднего времени отклика).

2 Обзор литературы

Аналитический разбор стохастических моделей, обладающих описанными в предыдущем разделе особенностями⁴, чрезвычайно затруднен. Этим объясняется сравнительно небольшое число опуб-

* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, mkonov@frccsc.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, rrazumchik@frccsc.ru

³Если оно отлично от нуля, но не случайно и одно и то же для всех типов потоков, то с качественной точки зрения результаты статьи остаются в силе.

⁴Из сравнительно недавних работ, которые касаются и рассматриваемой в этой статье модели, и математической теории массового обслуживания, отметим [2–6].

ликованных к настоящему времени научных работ в этой области исследований.

Кратко состояние исследований к 2019 г. охарактеризовано в короткой заметке [7]. Так, в [8, 9] были получены некоторые результаты о поведении и способах повышения производительности моделей рассматриваемого типа при стратегиях JSQ(d) (Join the Shortest Queue) и JSeQ(d) (Join the Shortest expected Queue), использующих оценки длин очередей¹. В [10] были предложены некоторые специальные, но близкие по смыслу к рассматриваемой в этой статье, постановки задач, в которых (в условиях большой загрузки) удается аналитически провести разбор последствий принятия решений на основе неточной информации на вероятностно-временные характеристики систем. С 2019 г. общее число проведенных исследований увеличилось незначительно (см. обзор в [1, разд. 2], [11, 12]). В частности, в [11] было исследовано влияние величины (случайной) задержки между моментами, когда серверы освобождаются от заданий, и моментами, когда об этом узнает диспетчер, на две характеристики: распределение длин очередей на серверах и (стационарное) среднее время отклика. Предполагается, что диспетчер использует стратегию JIQ (Join the Idle Queue), а задержки суть независимые случайные величины с экспоненциальной функцией распределения (другими словами, сообщения от серверов поступают к диспетчеру не мгновенно, а через экспоненциально распределенное время, причем независимо). Дополнительно авторы предполагают, что состояние серверов известно в момент начала функционирования системы и (в отличие от «чистой» стратегии JIQ) серверы оповещают диспетчера о каждом окончании обслуживания. Такая схема позволяет диспетчеру строить оценки состояний системы. Авторам удалось выяснить, что производительность таких систем (при условии, что число серверов велико) не зависит от величины средней задержки, если средняя задержка больше некоторого (вычислимого) порогового значения. Например, в указанных условиях часть серверов будет всегда свободна от заданий.

В [13] предложена новая (отличная от рассматриваемой в данной статье) математическая модель с потерями заявок, в рамках которой (в асимптотическом режиме) с помощью методов обучения с подкреплением можно подбирать эффективную диспетчеризацию (идейно близкую к JSQ(d)) при периодическом обновлении информации о текущем состоянии серверов.

Судя по открытым источникам, в практике систем распределенных вычислений выбор зачастую делается в пользу стандартных стратегий (JSQ, JSQ(d), JIQ, PILD (Persistent Idle Load Distribution), SITA-E (Size Interval Task Assignment with Equal Load) и др., см., например, обзор в [14, 15]) даже в тех случаях, когда заведомо понятна их неоптимальность. Это обстоятельство связано с простотой реализации таких стратегий и легкостью их масштабирования. Поэтому научный и практический интерес представляет поиск эффективных эвристик на их основе. Наконец отметим, что известны исследования (из свежих см., например, [16]), результаты которых говорят в пользу того, что системам распределенных вычислений необходим не столько «очень умный» диспетчер, сколько правильная архитектура и не требующие тонкой настройки алгоритмы диспетчеризации.

3 Последовательная диспетчеризация SITA(f, g)—JSQ(d)

Ввиду требования отсутствия значимых пауз при принятии решений улучшение показателя V будем искать на основе множества (легко реализуемых и масштабируемых) известных статических и динамических стратегий.

Рассмотрим правило, базирующееся на одно-временном использовании двух приемов, широко применяемых в задачах диспетчеризации: резервирования серверов для заданий определенной длины² и выбора сервера с наименьшей очередью³. Резервирование предшествует выбору и осуществляется следующим образом. Обозначим через $X \subset (0, \infty)$ множество значений случайной величины, задающей размер заявок, и будем считать, что серверы имеют номера от 1 до N . Множества X и $\{1, \dots, N\}$ разобьем на одинаковое число непересекающихся непустых подмножеств, между которыми установим взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{aligned} X &= X_1 \cup \dots \cup X_k, \quad X_i \neq \emptyset, \quad X_i \cap X_j = \emptyset; \\ \{1, \dots, N\} &= N_1 \cup \dots \cup N_k, \\ N_i &\neq \emptyset, \quad N_i \cap N_j = \emptyset, \quad k > 1. \end{aligned}$$

Адресация заявок, поступающих в процессе управления, осуществляется с учетом сделанного

¹В [8] также речь идет и о других, отличных от описанной в разд. 1, схемах появления у диспетчера информации о состоянии СМО второй фазы.

²Например, с помощью стратегии из семейства SITA [17].

³Или другой стратегии из семейства JSQ (см., например, обзор [14] или сноску на с. 53 в [1]).

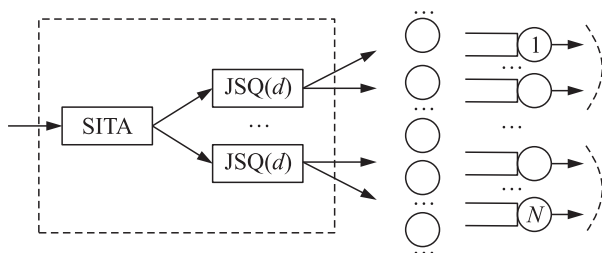


Схема диспетчеризации $SITA(f, g)$ – $JSQ(d)$ для рассматриваемой модели

резервирования по принципу наименьшей очереди следующим образом.

Обозначим через x_τ размер заявки, поступившей в (случайный) момент τ ; через $l_\tau^{(i)}$ — число заявок (в сумме на первой и второй фазах), направленных к серверу i , согласно последней информации, полученной диспетчером в момент $t = \tau$; через $m_\tau^{(i)}$ — число заявок, направленных диспетчером к серверу i на промежутке времени (t, τ) , т.е. с момента последнего обновления информации. Если $x_\tau \in X_k$, то указанная заявка направляется на один из серверов соответствующего подмножества N_k , причем этот сервер выбирается согласно следующему варианту классического алгоритма¹ $JSQ(d)$:

- случайным образом отбираются d серверов из набора N_k (предполагается, что $d \leq \min_{1 \leq k \leq K} \{|N_k|\}$);
- среди отобранных серверов выбираются те, для которых минимальна величина $l_\tau^{(i)} + m_\tau^{(i)}$;
- заявка направляется на случайно выбранный сервер из последней отобранной группы.

Результаты имитационных экспериментов показывают, что предложенная «последовательная» стратегия², далее кодируемая как $SITA(f, g)$ – $JSQ(d)$ (см. рисунок), позволяет диспетчеру бороться³ с неопределенностью (привносимую в модель первой фазой и ненулевым значением Δ) и улучшает показатель V , по крайней мере в сравнении с обычными, наиболее употребительными стратегиями.

4 Некоторые численные результаты

В качестве первого примера рассмотрим модель с одним входящим пуассоновским потоком интен-

сивности λ , экспоненциальным распределением времени обслуживания на первой фазе и $N = 128$ СМО на второй фазе с распределением времени обслуживания $B(x) = 1 - e^{-x}$.

В табл. 1 и 2 приведены значения среднего времени отклика V в зависимости от загрузки (равной $\lambda/128$) при сравнительно малой и большой средних задержках на первой фазе и диспетчеризациях RND (случайный равновероятный выбор), RR (циклический выбор), $JSQ(d)$ с подобранным (на имитационной модели [21]) значением d , SITA-E, а также предложенной в предыдущем разделе стратегии $SITA(f, g)$ – $JSQ(d)$. Для применения последней необходимо предварительно задавать схему резервирования. Во всех приводимых ниже примерах предполагается ее простейший вариант с двумя классами (т.е. $k = 2$), причем $X_1 = (0, \int_0^f dB(x)]$, $X_2 = (\int_0^f dB(x), \infty)$, $N_1 = \{1, \dots, g\}$, $N_2 = \{g+1, \dots, N\}$, а параметры f и g выбраны не самым оптимальным образом.

Как видно из табл. 1 и 2, в марковском случае при любом значении загрузки новое правило наилучшим образом оптимизирует среднее время отклика V . Не использующая никаких наблюдений рандомизированная стратегия (RND) оказывается наименее эффективной вне зависимости от значений средней задержки на первой фазе и Δ . Не требующий информации о числе заявок на фазах (т.е. не зависящий от Δ) и легко реализуемый циклический выбор (RR), который в известных случаях оказывается оптимальным для рассматриваемого функционала, оптимизирует его (в сравнении с RND) и при наличии случайной задержки в исполнении принятого диспетчером решения, но с ее ростом (в среднем) все хуже⁴.

Статическая стратегия SITA-E не всегда превосходит циклическую, но, поскольку она не требует ни динамической информации о состоянии фаз, ни оптимизации и не чувствительна к величинам задержек, ее следует считать наиболее предпочтительной из трех.

Стандартные динамические стратегии (как и ожидалось) дают заметный выигрыш (в сравнении с RND, RR и SITA-E), пока информация о состоянии фаз остается относительно «свежей», а решения диспетчера исполняются не со слишком большой задержкой.

¹ См. также [18].

² Как известно, идея «смешения» стратегий в принципе не нова (см. стратегии в [19, 20] для моделей, близких к рассматриваемой). Однако для того, чтобы ей успешно воспользоваться, требуется оттолкнуться от каких-то предпосылок, фактов или наблюдений (см. разд. 5).

³ Более успешно, чем предложенная в [1] для случая $\Delta = 0$ «параллельная» стратегия.

⁴ Связано это с тем, что в рассматриваемом случае поток заявок в каждую СМО второй фазы не будет эрланговским. Исходный эрланговский поток, поступающий от диспетчера на первую фазу, «портится» и становится более «случайным», чем ранее (см., например, характеристизацию выходящего потока из СМО $E_k/M/\infty$ в [22, разд. 4.2]).

Таблица 1 Зависимость среднего времени отклика V от загрузки для разных стратегий при различных значениях Δ и средней задержке на первой фазе, равной 1 (экспоненциальное время обслуживания)

Диспетчеризация	Загрузка							
	0,2		0,4		0,6		0,8	
	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$
RND	1,25	1,25	1,67	1,67	2,50	2,50	5,00	5,00
RR	1,02	1,02	1,22	1,22	1,67	1,67	2,96	2,96
JSQ(d), $d = 13$	1,00	1,06	1,12	1,25	1,36	1,65	1,85	2,55
SITA-E	1,13	1,13	1,33	1,33	1,75	1,75	3,00	3,00
SITA(f, g)–JSQ(d), $d = 6$, $f = 1$, $g = 40$	1,00	1,04	1,08	1,14	1,23	1,32	1,52	1,75

Таблица 2 Зависимость среднего времени отклика V от загрузки для разных стратегий при различных значениях Δ и средней задержке на первой фазе, равной 10 (экспоненциальное время обслуживания)

Диспетчеризация	Загрузка							
	0,2		0,4		0,6		0,8	
	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$
RND	1,25	1,25	1,67	1,67	2,50	2,50	5,00	5,00
RR	1,18	1,18	1,52	1,52	2,14	2,14	3,75	3,75
JSQ(d), $d = 13$	1,14	1,17	1,42	1,49	1,91	2,06	2,91	3,29
SITA-E	1,13	1,13	1,33	1,33	1,75	1,75	3,00	3,00
SITA(f, g)–JSQ(d), $d = 6$, $f = 1$, $g = 40$	1,08	1,10	1,25	1,29	1,55	1,61	2,23	2,34

Необходимо отметить, что при $\Delta \rightarrow \infty$ динамические стратегии типа JSQ(d) могут быть как лучше, так и хуже статических стратегий; напротив, предложенное новое правило SITA(f, g)–JSQ(d) остается, судя по численным результатам, равномерно наилучшим.

Дальнейшие численные эксперименты показывают, что описанное выше ранжирование стратегий сохраняется и в более общих случаях. Действительно, рассмотрим в качестве второго примера аналогичную модель с той же схемой резервирования, однако в которой время обслуживания имеет рас-

Таблица 3 Зависимость среднего времени отклика V от загрузки для разных стратегий при различных значениях Δ и средней задержке на первой фазе, равной 1 (Парето-распределенное время обслуживания)

Диспетчеризация	Загрузка							
	0,2		0,4		0,6		0,8	
	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$
RND	1,37	1,37	2,38	2,38	3,69	3,69	8,30	8,30
RR	1,24	1,24	1,74	1,74	2,83	2,83	5,71	5,71
JSQ(d), $d = 13$	1,00	1,10	1,11	1,32	1,29	1,68	1,64	2,39
SITA-E	1,13	1,13	1,35	1,35	1,76	1,76	3,01	3,01
SITA(f, g)–JSQ(d), $d = 6$, $f = 1$, $g = 64$	1,00	1,05	1,06	1,17	1,21	1,38	1,46	1,79

Таблица 4 Зависимость среднего времени отклика V от загрузки для разных стратегий при различных значениях Δ и средней задержке на первой фазе, равной 10 (Парето-распределенное время обслуживания)

Диспетчеризация	Загрузка							
	0,2		0,4		0,6		0,8	
	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$	$\Delta = 1$	$\Delta = 15$
RND	1,37	1,37	2,38	2,38	3,69	3,69	8,30	8,30
RR	1,35	1,35	1,93	1,93	3,24	3,24	6,31	6,31
JSQ(d), $d = 13$	1,14	1,20	1,42	1,55	1,85	2,12	2,73	3,22
SITA-E	1,13	1,13	1,35	1,35	1,76	1,76	3,01	3,01
SITA(f, g)–JSQ(d), $d = 6$, $f = 1$, $g = 64$	1,09	1,12	1,28	1,34	1,61	1,72	2,28	2,47

пределение с более тяжелым «хвостом» (Парето со средним 1 и дисперсией $\approx 4,76$). Значения среднего времени отклика V в зависимости от загрузки при сравнительно малой и большой средних задержках на первой фазе приведены в табл. 3 и 4.

При увеличении числа входных потоков не наблюдается изменений в обрисованной выше картине с качественной точки зрения. В новой стратегии (в отличие, например, от SITA-E) потребуются изменения лишь значений параметров¹.

Как показывают имитационные эксперименты, от предложенной новой стратегии SITA(f, g)–JSQ(d) в принципе можно добиваться большего (в частности, чем то, что указано в табл. 1–4) путем параметрической оптимизации (см. в качестве примера табл. 5).

Практическое решение этого вопроса (для рассматриваемых моделей) есть компромисс между трудностью определения наилучших значений параметров и достигаемым при них выигрышем. Простого правила здесь предложить не удастся.

Результаты табл. 5, а также аналогичные результаты для других исходных данных показывают, что экстремум V (и других, связанных с ним функционалов) относительно пологий (в координатах f, g). Значения V при предложенном новом правиле остаются лучше, чем у конкурентов, даже при отклонении в довольно большой окрестности от оптимальной, но трудно определяемой точки.

Таблица 5 Среднее время отклика V из табл. 4 при загрузке 0,8, $\Delta = 15$, стратегии SITA–JSQ(d) и различных значениях ее параметров f и g

f	g		
	60	64	68
0,9	2,57	2,76	3,18
1,0	2,54	2,47	2,50
1,1	3,11	2,63	2,43

5 Заключение

Проблема оптимизации среднего времени отклика V и связанных с ним функционалов в стохастических системах с параллельным обслуживанием, в которых имеют место (случайные) задержки при передаче динамической информации, необходимой для принятия решений, заключается в поиске приемов максимально эффективного использования поступающей к диспетчеру устаревшей информации². Предложенная в статье стратегия

SITA(f, g)–JSQ(d) служит одним из таких приемов, причем не требующим для применения каких-либо аппаратных изменений. В связи с новым правилом необходимо отметить несколько обстоятельств.

Во-первых, использование значения полной очереди к СМО второй фазы выглядит совершенно естественно. С учетом того, что первая фаза представляет собой бесконечнолинейную СМО, вся модель может трактоваться как модель из N параллельных двухфазных СМО $\bullet/GI/\infty \rightarrow \bullet/GI/1/\infty$. Поэтому если и применять динамические стратегии, то к таким цепочкам, рассматриваемым как единая СМО.

Во-вторых, в случае запаздывания информация о полной очереди становится все менее полезной, однако не теряет полностью своего значения даже при больших интервалах обновления Δ . Дело в том, что в стационарном режиме (который имеет место при рассматриваемых диспетчеризациях) средний размер очереди постоянен, а случайные его значения, пусть и устаревшие, характеризуются тем же средним.

В-третьих, оценка, на основании которой принимается решение о выборе СМО второй фазы, состоит из двух слагаемых. Можно предположить, что при больших запаздываниях Δ первое слагаемое в оценке очереди вообще можно отбросить, поскольку на первый план выходит информация, которой диспетчер располагает постоянно и без задержки: число заявок, направленных к той или иной СМО второй фазы. Однако в определенном смысле нечто подобное происходит как бы автоматически. Первое слагаемое, как было сказано, в среднем равно среднему размеру полной очереди. Если интервал обновления велик, то эта величина становится существенно меньше к концу интервала, чем второе слагаемое — накапливаемая сумма отправленных заявок.

В-четвертых, упомянутое второе слагаемое выглядит плохой оценкой полной очереди, поскольку не учитывает те заявки, которые покинули систему. Это верно, но в данном случае не имеет большого значения. Ведь надо учесть, что для принятия решений требуются не абсолютные значения, а только их попарные разности, поскольку ищется минимальная очередь. Кроме того, надо принять во внимание, что при достаточной загрузке системы (неизвестное) число обслуженных заявок в среднем одинаково для всех серверов (так как, по предположению, они имеют одинаковую производительность).

¹ Например, при двух пуассоновских входных потоках (каждый интенсивности $\lambda/2$) заявок с экспоненциальным и Парето-распределенными временами обслуживания соответственно $d = 6$, $f = 1$ и $g = 50$.

² С учетом имеющихся у диспетчера сведений о структуре системы и более-менее полном представлении о значениях ее исходных параметров, что обычно не является ограничением.

Наконец, целевая функция обнаруживает существенную зависимость от параметров f и g (см. табл. 5). В то же время удовлетворительные значения пары (f, g) сравнительно легко находятся простым подбором. Эксперименты показывают, что область минимальных по этим параметрам значений целевой функции довольно полая. Детальный анализ зависимости целевой функции от параметров алгоритма, в частности проверка уни-modalности, могли бы стать темой исследования с целью выработки рекомендаций по выбору параметров.

Литература

1. Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. О диспетчеризации в одном классе двухфазных систем массового обслуживания // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 52–58. doi: 10.14357/19922264240407. EDN: KGCBFL.
2. Moiseev A., Nazarov A. Tandem of infinite-server queues with Markovian arrival process // Comm. Com. Inf. Sc., 2016. Vol. 601. P. 323–333. doi: 10.1007/978-3-319-30843-2_34.
3. Dudin A., Nazarov A. On a tandem queue with retrials and losses and state dependent arrival, service and retrial rates // Int. J. Operational Research, 2017. Vol. 29. No. 2. P. 170–182. doi: 10.1504/IJOR.2017.10004611.
4. Pankratova E., Moiseeva S., Farkhadov M. Infinite-server resource queueing systems with different types of Markov-modulated Poisson process and renewal arrivals // Mathematics, 2022. Vol. 10. Art. 2962. 16 p. doi: 10.3390/math10162962.
5. Fedorova E., Lapatin I., Lizyura O., Moiseev A., Nazarov A., Paul S. Queueing system with two phases of service and service rate degradation // Axioms, 2023. Vol. 12. No. 2. Art. 104. 19 p. doi: 10.3390/axioms12020104.
6. Moiseev A. N., Shklennik M., Polin E. Infinite-server queueing tandem with Markovian arrival process and service depending on its state // Ann. Oper. Res., 2023. Vol. 326. No. 1. P. 261–279. doi: 10.1007/s10479-023-05318-1.
7. Lipshutz D. Open problem-load balancing using delayed information // Stochastic Systems, 2019. Vol. 9. Iss. 3. P. 305–306. doi: 10.1287/stsy.2019.0045.
8. Mitzenmacher M. How useful is old information? // IEEE T. Parall. Distr., 2000. Vol. 11. No. 1. P. 6–20. doi: 10.1109/71.824633.
9. Atar R., Lipshutz D. Heavy traffic limits for join-the-shortest-estimated-queue policy using delayed information // Math. Oper. Res., 2021. Vol. 46. No. 1. P. 268–300. doi: 10.1287/moor.2020.1056.
10. Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E. Non-linear dynamics in queueing theory: Determining the size of oscillations in queues with delay // SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2019. Vol. 18. No. 1. P. 279–311. doi: 10.1137/18M1170637.
11. Schaerlaeckens E. M. JIQ load balancing with delays: Bachelor Thesis — Eindhoven, Netherlands: Eindhoven University of Technology, 2021. 37 p.
12. Beraldi R., Canali C., Lancellotti R., Mattia G. P. On the impact of stale information on distributed online load balancing protocols for edge computing // Comput. Netw., 2022. Vol. 210. No. 5. Art. 108935. 14 p. doi: 10.1016/j.comnet.2022.108935.
13. Tahir A., Cui K., Koepl H. Learning mean-field control for delayed information load balancing in large queueing systems // 51st Conference (International) on Parallel Processing Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 2023. Art. 42. 11 p. doi: 10.1145/3545008.3545025.
14. Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. Обзор моделей и алгоритмов размещения заданий в системах с параллельным обслуживанием // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 4. С. 56–67. doi: 10.14357/19922264150406. EDN: VEABIF.
15. Kielanski G., Hellemans T., Van Houdt B. Join-Up-To(m): Improved hyperscalable load balancing // Queueing Syst., 2023. Vol. 105. Iss. 3–4. P. 291–316. doi: 10.1007/s1134-023-09897-5.
16. Yildiz M., Rolich A., Baiocchi A. “Two-stagification”: Job dispatching in large-scale clusters via a two-stage architecture // 23rd Mediterranean Communication and Computer Networking Conference Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2025. Art. 11103543. 6 p. doi: 10.1109/MedComNet65822.2025.11103543.
17. Doncel J. Performance balancing size-interval routing policies // INFOR, 2020. Vol. 58. No. 4. P. 635–651. doi: 10.1080/03155986.2020.1743039.
18. Los D., Sauerwald T. Balanced allocations in batches: The tower of two choices // 35th ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 2023. P. 51–61. doi: 10.1145/3558481.3591088.
19. Wang Y., Down D. On resource pooling in SITA-like parallel server systems // 26th Teletraffic Congress (International) Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2014. Art. 6932947. 9 p. doi: 10.1109/ITC.2014.6932947.
20. Anselmi J. Combining size-based load balancing with round-robin for scalable low latency // IEEE T. Parall. Distr., 2020. Vol. 31. No. 4. P. 886–896. doi: 10.1109/TPDS.2019.2950621.
21. Коновалов М. Г. Методы адаптивной обработки информации и их приложения. — М.: ИПИ РАН, 2007. 212 с.
22. Liu L., Templeton J. G. C. Departures in $GR^{X_n}/G_n/\infty$ // Queueing Syst., 1995. Vol. 19. Iss. 4. P. 399–419. doi: 10.1007/BF01151931.

Поступила в редакцию 31.07.2025

Принята к публикации 15.11.2025

HEURISTIC ONLINE LOAD BALANCING IN TWO-PHASE TANDEM QUEUES WITH DELAYS

M. G. Konovalov and R. V. Razumchik

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: A single flow of customers arrives to the two-phase tandem queueing system. The first phase is the infinite-server queue which models the individual customer’s delay. The second phase consists of N identical single server infinite capacity queues running in parallel. Upon arrival of a customer, the dispatcher must immediately decide which queue of the second phase will serve it. The dispatcher has certain *a priori* static information about the system and the incoming flow but the dynamic information about the queues arrives with a random delay. A heuristic server allocation procedure is proposed that utilizes delayed information and the dispatcher’s own decision history. The algorithm is based on a combination of two techniques commonly used in dispatching problems: reserving queues for customers of a certain size and preferentially selecting servers with the shortest queue. The proposed procedure can be easily implemented in practice and does not require hardware changes. Numerical results comparing the new procedure with the most commonly used algorithms are presented.

Keywords: parallel service systems; dispatching; load balancing; delayed information; redundancy

DOI: 10.14357/19922264250404

EDN: JIOBBH

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (CKP “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

References

1. Konovalov, M. G., and R. V. Razumchik. 2024. O dispatcherizatsii v odnom klasse dvukhfaznykh sistem massovogo obsluzhivaniya [On one problem of load balancing in two-phase tandem queues]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):52–58. doi: 10.14357/19922264240407. EDN: KGCBFL.
2. Moiseev, A., and A. Nazarov. 2016. Tandem of infinite-server queues with Markovian arrival process. *Comm. Com. Inf. Sc.* 601:323–333. doi: 10.1007/978-3-319-30843-2_34.
3. Dudin, A., and A. Nazarov. 2017. On a tandem queue with retrials and losses and state dependent arrival, service and retrial rates. *Int. J. Operational Research* 29(2):170–182. doi: 10.1504/IJOR.2017.10004611.
4. Pankratova, E., S. Moiseeva, and M. Farkhadov. 2022. Infinite-server resource queueing systems with different types of Markov-modulated Poisson process and renewal arrivals. *Mathematics* 10:2962. 16 p. doi: 10.3390/math10162962.
5. Fedorova, E., I. Lapatin, O. Lizyura, A. Moiseev, A. Nazarov, and S. Paul. 2023. Queueing system with two phases of service and service rate degradation. *Axioms* 12(2):104. 19 p. doi: 10.3390/axioms12020104.
6. Moiseev, A. N., M. Shklennik, and E. Polin. 2023. Infinite-server queueing tandem with Markovian arrival process and service depending on its state. *Ann. Oper. Res.* 326(1):261–279. doi: 10.1007/s10479-023-05318-1.
7. Lipshutz, D. 2019. Open problem-load balancing using delayed information. *Stochastic Systems* 9(3):305–306. doi: 10.1287/stsy.2019.0045.
8. Mitzenmacher, M. 2000. How useful is old information? *IEEE T. Parall. Distr.* 11(1):6–20. doi: 10.1109/71.824633.
9. Atar, R., and D. Lipshutz. 2021. Heavy traffic limits for join-the-shortest-estimated- queue policy using delayed information. *Math. Oper. Res.* 46(1):268–300. doi: 10.1287/moor.2020.1056.
10. Novitzky, S., J. Pender, R. H. Rand, and E. Wesson. 2019. Nonlinear dynamics in queueing theory: Determining the size of oscillations in queues with delay. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 18(1):279–311. doi: 10.1137/18M1170637.
11. Schaerlaeckens, E. M. 2021. JIQ load balancing with delays. Eindhoven, Netherlands: Eindhoven University of Technology. Bachelor Thesis. 37 p.
12. Beraldi, R., C. Canali, R. Lancellotti, and G. P. Mattia. 2022. On the impact of stale information on distributed online load balancing protocols for edge computing. *Comput. Netw.* 210(5):108935. 14 p. doi: 10.1016/j.comnet.2022.108935.
13. Tahir, A., K. Cui, and H. Koepl. 2023. Learning mean-field control for delayed information load balancing in large queueing systems. *51st Conference (International) on Parallel Processing Proceedings*. New York, NY: ACM. Art. 42. 11 p. doi: 10.1145/3545008.3545025.
14. Konovalov, M. G., and R. V. Razumchik. 2015. Obzor modeley i algoritmov razmeshcheniya zadaniy v sistemakh s parallel’nym obsluzhivaniem [Methods and al-

- gorithms for job scheduling in systems with parallel service: A survey]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(4):56–67. doi: 10.14357/1992264150406. EDN: VEABIF.
15. Kielanski, G., T. Hellemans, and B. Van Houdt. 2023. Join-Up-To(m): Improved hyperscalable load balancing. *Queueing Syst.* 105(3-4):291–316. doi: 10.1007/s11134-023-09897-5.
 16. Yildiz, M., A. Rolich, and A. Baiocchi. 2025. “Two-stagification”: Job dispatching in large-scale clusters via a two-stage architecture. *23rd Mediterranean Communication and Computer Networking Conference Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. Art. 11103543. 6 p. doi: 10.1109/MedComNet65822.2025.11103543.
 17. Doncel, J. 2020. Performance balancing size-interval routing policies. *INFOR* 58(4):635–651. doi: 10.1080/03155986.2020.1743039.
 18. Los, D., and T. Sauerwald. 2023. Balanced allocations in batches: The tower of two choices. *35th ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures Proceedings*. New York, NY: ACM. 51–61. doi: 10.1145/3558481.3591088.
 19. Wang, Y., and D. Down. 2014. On resource pooling in SITA-like parallel server systems. *26th Teletraffic Congress (International) Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. Art. 6932947. 9 p. doi: 10.1109/ITC.2014.6932947.
 20. Anselmi, J. 2020. Combining size-based load balancing with round-robin for scalable low latency. *IEEE T. Parall. Distr.* 31(4):886–896. doi: 10.1109/TPDS.2019.2950621.
 21. Kononov, M. G. 2007. *Metody adaptivnoy obrabotki informatsii i ikh prilozheniya* [Methods of adaptive information processing and their applications]. Moscow: IPI RAN. 212 p.
 22. Liu, L., and J. G. C. Templeton. 1995. Departures in $GR^{X_n}/G_n/\infty$. *Queueing Syst.* 19(4):399–419. doi: 10.1007/BF01151931.

Received July 31, 2025

Accepted November 15, 2025

Contributors

Kononov Mikhail G. (b. 1950) — Doctor of Science in technology, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; mkononov@frcsc.ru

Razumchik Rostislav V. (b. 1984) — Doctor of Science in physics and mathematics, deputy director, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; rrazumchik@frcsc.ru

ПРАВИЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ КЛАССИФИКАТОРЫ НАД ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ*

Н. А. Драгунов¹, Е. В. Дюкова²

Аннотация: Рассматриваются вопросы создания алгоритмического обеспечения для одной из центральных задач машинного обучения — задачи классификации по прецедентам. Разработаны и исследованы оригинальные процедуры логического анализа и классификации целочисленных данных, представимых в виде совокупности элементов декартова произведения конечных частично упорядоченных множеств (произведения частичных порядков). На этапе обучения предлагаемых процедур осуществляется поиск так называемых правильных представительных элементарных классификаторов (ЭК) — специальных фрагментов признаков описаний прецедентов, позволяющих различать объекты из разных классов. Построен асимптотически оптимальный алгоритм перечисления искомых ЭК над произведением антицепей и приведены результаты его тестирования на реальных задачах. Дано теоретическое и экспериментальное обоснование эффективности новых распознающих процедур в случае задания линейных порядков на множествах значений признаков. Теоретические выводы основаны на изучении метрических (количественных) свойств множества правильных представительных ЭК.

Ключевые слова: классификация по прецедентам; корректный логический классификатор; правильный представительный элементарный классификатор; частичный порядок; декартово произведение частичных порядков; метрические (количественные) свойства множества элементарных классификаторов

DOI: 10.14357/19922264250405

EDN: JJFVIQ

1 Введение

В задаче классификации по прецедентам под прецедентной (обучающей) информацией понимается совокупность примеров изучаемых объектов, в которой каждый объект представлен в виде числового вектора, полученного на основе измерения или наблюдения ряда его параметров или характеристик, называемых признаками. Каждый пример (обучающий объект, или прецедент) приписан к определенному классу объектов. Требуется на основе анализа прецедентной информации уметь классифицировать новые, не входящие в обучающую выборку, объекты. Среди разных подходов к решению этой задачи важное место занимают методы логического анализа данных, основанные на применении аппарата дискретной математики. Логический подход возник в связи с необходимостью прогнозировать редкие события, для которых нет достаточного статистического материала.

При конструировании логических классификаторов большое внимание уделяется вопросам синтеза корректных алгоритмов, т. е. алгоритмов, не ошибающихся на обучающей выборке. Предполагается, что каждый признак имеет ограниченное

множество допустимых значений, которые кодируются целыми числами, и любые два прецедента из разных классов имеют разные описания. Обучение классификатора сводится к поиску в исходных данных информативных фрагментов описаний прецедентов. Такие фрагменты, называемые корректными ЭК, позволяют различать объекты из разных классов и, как правило, имеют содержательное описание в терминах той прикладной области, в которой решается задача. По их наличию или, наоборот, отсутствию в описании распознаваемого объекта решается вопрос о его классификации. Однако требование корректности приводит к тому, что на этапе обучения логических классификаторов возникают сложные в вычислительном плане дискретные задачи.

Отечественное направление логической классификации в основном представлено методами, именуемыми процедурами корректного голосования (Correct Voting Procedures, или CVP) [1–7]. Фундаментальную роль в создании этого направления сыграли работы представителей школ чл.-корр. РАН С. В. Яблонского и акад. РАН Ю. И. Журавлёва. В ряде публикаций отечественных и зарубежных авторов предложены и развиты два других направ-

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00301, <https://rscf.ru/project/24-21-00301/>.

¹ Федеральний исследовательський центр «Інформатика і управління» Російської академії наук, nikitadragunovjob@gmail.com

² Федеральний дослідницький центр «Інформатика і управління» Російської академії наук, edjukova@mail.ru

ления логической классификации, а именно: логический анализ данных (Logical Analysis of Data, или LAD) [8–11] и анализ формальных понятий (Formal Concept Analysis, или FCA) [12–15]. Каждый из подходов использует свою терминологию и главным образом рассматривает модели, основанные на поиске корректных ЭК специального вида, называемых в направлении CVP представительными ЭК [5].

Описание логического классификатора может быть дано с использованием терминологии теории логических функций. Тогда представительный ЭК класса K — это допустимая конъюнкция (ДК) для не всюду определенной двузначной логической функции F_K , принимающей на целочисленных описаниях прецедентов класса K и других классов соответственно значение 1 и 0. По определению интервал истинности ДК функции F_K имеет непустое пересечение с множеством единиц функции F_K и пустое пересечение с множеством нулей этой функции.

В CVP наиболее информативной считается такая ДК функции F_K , которая перестает быть представительным ЭК класса K при удалении из нее хотя бы одного сомножителя. Такая конъюнкция называется максимальной для F_K (в матричной формулировке это тупиковый представительный ЭК класса K). На этапе обучения основных моделей возникает задача монотонной дуализации, которая относится к числу труднорешаемых дискретных задач.

В LAD ищутся так называемые максимальные логические закономерности класса K , т. е. ДК функции F_K , принимающие значение 1 на наибольшем числе описаний прецедентов класса K . При этом в основном решаются сложные в вычислительном плане оптимизационные задачи линейного программирования.

Направление FCA в основном представлено ДСМ-методом В. К. Финна. ДСМ-классификатор нацелен на поиск ДК функции F_K , каждая из которых не допускает добавление любого нового сомножителя, поскольку это уменьшает число прецедентов, на которых ДК принимает значение 1. На этапе обучения возникают дискретные перечислительные задачи, которые алгоритмически менее сложны, чем задача монотонной дуализации.

В каждом из трех направлений логической классификации решающее правило основано на процедуре «голосования». В CVP и LAD голосующая ДК функции F_K дает положительную оценку за отнесение распознаваемого объекта S к классу K , если описание объекта S принадлежит интервалу истинности этой конъюнкции. Иначе указанная оценка равна 0. Базовая версия ДСМ-классифика-

тора использует более строгое решающее правило, что приводит к большому числу отказов от классификации.

Традиционные схемы логической классификации ориентированы исключительно на случай, когда множество значений каждого признака представляет собой конечную антицепь и для сравнения целочисленных признаков описаний объектов используется отношение равенства. Вопросы модификации процедур CVP, LAD и ДСМ для корректного решения задачи классификации частично упорядоченных целочисленных данных общего вида рассматривались в ряде работ [3, 11, 15]. Особое внимание уделялось случаю, когда на множествах значений признаков заданы конечные линейные порядки, т. е. указанные множества — конечные цепи. С использованием линейных порядков, полученных в результате анализа встречаемости отдельных значений признаков в описаниях прецедентов, были разработаны практические модели логических классификаторов.

В [7] рассмотрена возможность повышения качества и скорости работы логических классификаторов на основе применения методов поиска в описаниях прецедентов каждого класса K часто встречающихся фрагментов специального вида, названных правильными ЭК, и с последующим отбором среди них тех ЭК, которые представляют собой ДК для F_K . Исследован случай, когда на множествах значений признаков частичные порядки не заданы, т. е. описания изучаемых объектов — элементы декартова произведения антицепей. На этапе обучения классификатора, именуемого далее алгоритмом REC, фактически ищутся ДК функции F_K , каждая из которых, имея ранг r ($r \geq 1$), принимает значение 1 на не менее чем r прецедентах класса K . В экспериментах параметр r фиксировался и выбирался с использованием теоретических оценок типичного ранга правильного ЭК. Экспериментально показано, что осуществляемый на этапе обучения поиск искомым ЭК требует меньших временных затрат по сравнению с решением задач, возникающих при реализации описанных выше традиционных моделей логических классификаторов. Этот вывод подтвержден теоретическими оценками типичного числа правильных ЭК [4, 6].

В настоящей работе получены оценки числа ДК функции F_K , порождающих правильные ЭК класса K , и на основании этих оценок сделан вывод об асимптотической оптимальности алгоритма REC в случае, когда число признаков существенно больше числа прецедентов. Технические основы приводимых оценок числа ДК функции F_K были разработаны ранее при исследовании сложности синтеза

процедур CVP (см., например, [1]). Кроме того, проведена модификация алгоритма REC для работы с данными, представленными в виде совокупности элементов декартова произведения произвольных конечных частичных порядков. Построен новый классификатор REC+, эффективность которого обоснована теоретически и экспериментально в случае задания линейных порядков на множествах значений признаков. Описание используемой в экспериментах процедуры линейного упорядочения значений признаков приведено в подразд. 2.2.

2 Основные результаты

Рассмотрим задачу классификации по прецедентам с множеством целочисленных признаков $\{x_1, \dots, x_n\}$ и множеством непересекающихся классов $\{K_1, \dots, K_l\}$, $l \geq 2$.

Пусть исследуемое множество объектов M представимо в виде $M = N_1 \times \dots \times N_n$, где N_j , $j = \overline{1, n}$, — конечное множество допустимых значений признака x_j , на котором задан частичный порядок. Для обозначения того, что $b, b \in N_j$, следует за a , $a \in N_j$, используется запись $a \preceq b$.

Зададим частичный порядок на множестве M . Пусть $S = (a_1, \dots, a_n)$ и $S^* = (b_1, \dots, b_n)$ — объекты из M , в которых a_j , $j = \overline{1, n}$, и b_j , $j = \overline{1, n}$, — значения признака x_j . Будем считать, что элемент $S^* = (b_1, \dots, b_n)$ *следует* за элементом $S = (a_1, \dots, a_n)$, если $a_j \preceq b_j$ при $j = \overline{1, n}$.

Элементарным классификатором ранга r назовем пару (σ, H) , в которой H — набор из r различных признаков вида $H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$, а $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ — набор, в котором σ_i , $i = \overline{1, r}$, — допустимое значение признака x_{j_i} . Будем говорить, что ЭК (σ, H) , $H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, *содержится* в объекте S , $S = (a_1, \dots, a_n)$, если $a_{j_i} \preceq \sigma_i$ при $i = \overline{1, r}$. Элементарному классификатору (σ, H) поставим в соответствие множество ЭК ранга 1 вида $(\sigma_i, \{x_{j_i}\})$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, обозначаемое $Q(\sigma, H)$.

Элементарный классификатор (σ, H) ранга r называется *правильным для класса K* , $K \in \{K_1, \dots, K_l\}$, если не менее чем r прецедентов класса K содержат этот ЭК, т. е. ЭК (σ, H) — r -частый в K . Правильный для класса K ЭК (σ, H) называется *максимальным правильным*, если любой ЭК (σ', H') такой, что $Q(\sigma, H) \subset Q(\sigma', H')$, не является правильным ЭК для K . Элементарный классификатор (σ, H) называется *представительным для класса K* , если хотя бы один прецедент из K содержит (σ, H) и ни один прецедент из $\bar{K} = \{K_1, \dots, K_l\} \setminus K$ не содержит (σ, H) , т. е. ЭК (σ, H) — *нечастый* в \bar{K} . Представительный ЭК класса K ранга r называется

правильным представительным, если он правильный для K . Нечастый в \bar{K} ЭК называется *минимальным нечастым*, если любой ЭК (σ', H') такой, что $Q(\sigma', H') \subset Q(\sigma, H)$, не является нечастым ЭК в \bar{K} . Представительный ЭК класса K называется *туниковым*, если он минимальный нечастый в \bar{K} .

Заметим, что в рассматриваемом общем случае для существования представительных ЭК необходимо, чтобы описания объектов из разных классов были несравнимыми. Этого можно добиться путем дублирования признаков описаний объектов с обратным отношением порядка [3].

2.1 Схемы работы алгоритмов REC и REC+

Пусть L_1 — матрица, строки которой представляют собой описания прецедентов класса K , и L_2 — матрица, строками которой служат описания остальных прецедентов. Опишем схему работы алгоритма REC.

Элементы $a_{i_1 j_1}$ и $a_{i_2 j_2}$ матрицы L_1 назовем *совместимыми*, если $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$, и $a_{i_2 j_1} = a_{i_1 j_1}$, $a_{i_1 j_2} = a_{i_2 j_2}$. Набор Q из r элементов матрицы L_1 называется *совместимым*, если выполнено одно из следующих двух условий:

- (1) $r = 1$;
- (2) $r \geq 2$

и любые два элемента набора Q совместимы.

Пусть $S(L_1)$ — совокупность всех совместимых наборов элементов матрицы L_1 . Нетрудно видеть, что ЭК (σ, H) , $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$, будет правильным для K тогда и только тогда, когда в $S(L_1)$ существует набор $\{a_{i_1 j_1}, \dots, a_{i_r j_r}\}$ такой, что $a_{i_q j_q} = \sigma_q$ при $q = \overline{1, r}$.

Элементу a_{ij} , $i = \overline{1, m_1}$, $j = \overline{1, n}$, матрицы L_1 присвоим номер $N[i, j] = (j - 1)m_1 + i$. Пусть $R(L_1)$ — множество всех элементов матрицы L_1 . Элементы с минимальным номером и максимальным номером в $R \subseteq R(L_1)$ обозначим соответственно $e_1(R)$ и $e_2(R)$. При $R = R(L_1)$ положим $e_1(R) = e_1$ и $e_2(R) = e_2$.

Пусть $\mathcal{U}(L_1)$ — множество всех правильных ЭК класса K . Упорядочим $\mathcal{U}(L_1)$, указав для каждого ЭК (σ, H) из $\mathcal{U}(L_1)$, порождаемого набором Q из $S(L_1)$, $Q \neq \{e_2\}$, следующий за ним ЭК, обозначаемый $\Delta(\sigma, H)$.

Пусть $Q = \{a_{i_1 j_1}, \dots, a_{i_r j_r}\}$ и $N[i_{t+1}, j_{t+1}] > N[i_t, j_t]$ при $t = \overline{1, r-1}$. Положим $Q_t = \{a_{i_1 j_1}, \dots, a_{i_t j_t}\}$, $t = \overline{1, r}$. Элемент $a_{ij} \in R(L_1)$ назовем t -допустимым, если $(Q_t \cup \{a_{ij}\}) \in S(L_1)$ и в $R(L_1)$ не существует элемента a_{pj} такого, что $(Q_t \cup \{a_{pj}\}) \in S(L_1)$ и $p > i$.

Обозначим через R_t , $t = \overline{1, r}$, совокупность всех элементов в $R(L_1)$, номера которых больше $N[i_t, j_t]$, и через G_t , $t = \overline{1, r}$, совокупность всех t -допустимых элементов в $R(L_1)$. Положим G_0 — множество элементов столбца с номером j_1 , отличных от $a_{i_1 j_1}$.

Возможны следующие случаи.

Случай 1. $G_r \cap R_r \neq \emptyset$. Тогда ЭК $\Delta(\sigma, H)$ порождается набором $Q \cup \{e_1(G_r \cap R_r)\}$ из $S(L_1)$.

Случай 2. $G_r \cap R_r = \emptyset$:

- (а) $r = 1$; тогда ЭК $\Delta(\sigma, H)$ порождается элементом $e_1(G_0 \cap R_1)$ матрицы L_1 ;
- (б) $r > 1$ и $G_{r-1} \cap R_r \neq \emptyset$; тогда ЭК $\Delta(\sigma, H)$ порождается набором $(Q \setminus \{a_{i_r j_r}\}) \cup \{e_1(G_{r-1} \cap R_r)\}$ из $S(L_1)$;
- (в) $r > 1$ и $G_{r-1} \cap R_r = \emptyset$; тогда ЭК $\Delta(\sigma, H)$ порождается набором $(Q \setminus \{a_{i_{r-1} j_{r-1}}, a_{i_r j_r}\}) \cup \{e_1(G_{r-2} \cap R_{r-1})\}$ из $S(L_1)$.

Заметим, что $G_{r-2} \cap R_{r-1} \neq \emptyset$ при $r \geq 2$, так как $a_{i_r j_r} \in G_{r-2} \cap R_{r-1}$. Если $G_r \cap R_r = \emptyset$, то ЭК, порождаемый набором Q , — максимальный правильный в K .

Таким образом, алгоритм REC строит множество всех правильных представительных ЭК класса K за $|\mathcal{U}(L_1)|$ шагов, где $|\mathcal{U}(L_1)|$ — мощность $\mathcal{U}(L_1)$. На первом шаге строится ЭК, порождаемый элементом e_1 . Если на шаге i , $i = 1, |\mathcal{U}(L_1)|$, построен ЭК (σ, H) и $i < |\mathcal{U}(L_1)|$, т.е. ЭК (σ, H) не порожден элементом e_2 , то на шаге $i + 1$ строится ЭК $\Delta(\sigma, H)$. Построив очередной правильный ЭК, алгоритм REC оценивает его корректность путем просмотра строк матрицы L_2 , т.е. проверяет, является ли построенный ЭК представительным для класса K .

Алгоритм REC+ работает по аналогичной схеме. В определении совместимости двух элементов матрицы L_1 нужно заменить знак равенства на знак предшествования « \leq ».

Для наглядности работу алгоритмов REC и REC+ можно представить в виде обхода дерева решений (ДР) в глубину: корнем ДР служит пустой набор; вершины ДР — правильные ЭК класса K , которые либо являются правильными представительными ЭК класса K , найденными впервые, либо соответствуют лишним шагам. Всякие вершины — максимальные правильные ЭК класса K .

2.2 Об асимптотической оптимальности алгоритма REC в случае большого числа признаков

Предполагается, что множество значений каждого признака — антицепь, т.е. на каждом множестве N_j , $j = \overline{1, n}$, отношение порядка не задано. Рассматривается случай, когда каждый признак

принимает значения из множества $\{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$, и m_1 — число прецедентов класса K , $K \in \{K_1, \dots, K_l\}$, m_2 — число прецедентов не из K .

Введем обозначения: M_{un}^k — совокупность всех матриц размера $u \times n$ с элементами из $\{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$; $\mathfrak{N}_{m_1 m_2 n}^k$ — множество всех упорядоченных пар матриц вида (L_1, L_2) , где $L_1 \in M_{m_1 n}^k$, $L_2 \in M_{m_2 n}^k$; $|A|$ — мощность множества A .

Пусть строки матрицы L_1 , $L_1 \in M_{m_1 n}^k$, — это описания прецедентов класса K , а строки матрицы L_2 , $L_2 \in M_{m_2 n}^k$, — описания остальных прецедентов. Положим $\mathcal{P}(L_1, L_2)$ и $\mathcal{U}(L_1)$ — соответственно множество всех правильных представительных ЭК для класса K и множество всех правильных ЭК для класса K . Представляют интерес асимптотические оценки типичных значений величин $|\mathcal{P}(L_1, L_2)|$ и $|\mathcal{U}(L_1)|$, $(L_1, L_2) \in \mathfrak{N}_{m_1 m_2 n}^k$, и оценки типичных значений рангов ЭК из $\mathcal{P}(L_1, L_2)$ и $\mathcal{U}(L_1)$.

Ниже приводится асимптотическая оценка типичного значения $|\mathcal{P}(L_1, L_2)|$, $(L_1, L_2) \in \mathfrak{N}_{m_1 m_2 n}^k$, и оценка типичного значения ранга ЭК из $\mathcal{P}(L_1, L_2)$ при условии, что m_1 и m_2 существенно меньше n .

Выявление типичной ситуации связано с высказыванием типа «для почти всех пар матриц (L_1, L_2) из $\mathfrak{N}_{m_1 m_2 n}^k$ при $n \rightarrow \infty$ выполнено $F_1(L_1, L_2) \approx F_2(L_1, L_2)$ » (здесь $F_1(L_1, L_2)$ и $F_2(L_1, L_2)$ — два функционала, заданных на парах матриц (L_1, L_2) из \mathfrak{N}_{mn}^k). Данное высказывание означает, что существуют две положительные бесконечно убывающие функции $\delta_1(n)$ и $\delta_2(n)$ такие, что для всех достаточных больших n имеет место

$$1 - \frac{|\mathfrak{N}|}{|\mathfrak{N}_{m_1 m_2 n}^k|} \leq \delta_1(n),$$

где \mathfrak{N} — множество таких пар (L_1, L_2) в $\mathfrak{N}_{m_1 m_2 n}^k$, для которых

$$1 - \delta_2(n) < \frac{|F_1(L)|}{|F_2(L)|} < 1 + \delta_2(n).$$

Пусть $r_1 = [0,5 \log_k m_1 n - 0,5 \log_k \log_k^2 m_1 n - \log_k \log_k \log_k n]$, где $[q]$ — целая часть от числа q ; $r_2 =]0,5 \log_k m_1 n - 0,5 \log_k \log_k^2 m_1 n + \log_k \log_k \log_k n[$, где $]q[$ — наименьшее целое, превосходящее q ; ϕ — интервал $[r_1, r_2]$; $\mathcal{P}_\phi(L_1, L_2)$ — множество ЭК из $\mathcal{P}(L_1, L_2)$, ранги которых принадлежат интервалу ϕ ; $b_n \approx c_n$, $n \rightarrow \infty$, означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/c_n = 1$. Имеет место следующая

Теорема 1. Если $m_1^\alpha \leq n \leq k^{m_1 \beta}$, $\alpha > 1$, $\beta < 1$, $k \geq 2$, и $m_2 \leq m_1$, то для почти всех пар матриц (L_1, L_2) из $\mathfrak{N}_{m_1 m_2 n}^k$ при $n \rightarrow \infty$ справедливо

$$|\mathcal{P}(L_1, L_2)| \approx |\mathcal{P}_\phi(L_1, L_2)| \approx \sum_{r \in \phi} C_n^r C_{m_1}^r k^{r-r^2}$$

и ранги почти всех ЭК из $\mathcal{P}(L_1, L_2)$ принадлежат интервалу ϕ .

Пусть $\mathcal{U}_\phi(L_1)$, $L_1 \in M_{m_1 n}^k$, — множество всех правильных ЭК класса K , ранги которых принадлежат интервалу ϕ . В [4] доказана следующая

Теорема 2. Если $m_1^\alpha \leq n \leq k^{m_1 \beta}$, $\alpha > 1$, $\beta < 1$, $k \geq 2$, то для почти всех матриц L_1 из $M_{m_1 n}^k$ при $n \rightarrow \infty$ справедливо

$$|\mathcal{U}(L_1)| \approx |\mathcal{U}_\phi(L_1)| \approx \sum_{r \in \phi} C_n^r C_{m_1}^r k^{r-r^2}$$

и ранги почти всех ЭК из $\mathcal{U}(L_1)$ принадлежат интервалу ϕ .

Алгоритм REC, предложенный в [7], осуществляет классификацию на основе проведения процедуры голосования по правильным представительным ЭК каждого класса K . Экспериментально подтверждена вычислительная эффективность этого алгоритма. На очередном шаге алгоритм REC находит в $R(K)$ новый правильный ЭК (σ, H) и проверяет, является ли ЭК (σ, H) нечастым в множестве прецедентов, не принадлежащих K . Согласно приведенным выше теоремам 1 и 2 при выполнении определенных ограничений на m_1 , m_2 и n алгоритм REC является асимптотически оптимальным. Поясним сказанное.

В теории алгоритмической сложности дискретных задач эффективность алгоритмов для перечислительных задач принято оценивать временем выполнения одного шага, т. е. временем нахождения очередного решения. Алгоритмы с временными оценками вида $O(N)$, где N — полином от размера входа задачи, называются алгоритмами с полиномиальными задержками и считаются наиболее эффективными, причем оценки даются для самой сложной индивидуальной задачи [16].

Особой сложностью отличаются перечислительные задачи, труднорешаемость которых имеет два аспекта: экспоненциальный рост числа решений при увеличении размера задачи и сложность нахождения (перечисления) каждого нового решения. Главной перечислительной задачей считается монотонная дуализация. В матричной постановке это задача построения неприводимых покрытий булевой матрицы [1]. Другие две формулировки монотонной дуализации используют понятия теории булевых функций [17] и теории гиперграфов [18]. Вопрос о существовании эффективных алгоритмов для этой задачи был поставлен почти 50 лет назад. Однако статус монотонной дуализации в плане полиномиальной разрешимости до сих пор неизвестен. Требуемые алгоритмы удалось построить для немногих частных случаев.

Асимптотически оптимальный алгоритм отличается от алгоритма с полиномиальной задержкой тем, что имеет лишние полиномиальные шаги. Это шаги, на которых не строятся новые решения. Основное требование: для почти всех индивидуальных задач число лишних шагов алгоритма должно быть мало по сравнению с числом всех решений задачи. При этом проверка того, является ли шаг лишним, должна происходить за полиномиальное от размера входа время. Подход к оценке типичной сложности перечислительного алгоритма предложен Е. В. Дюковой в 1977 г. и первоначально был продемонстрирован автором на задаче монотонной дуализации, а затем на ее обобщении — задаче перечисления тупиковых покрытий целочисленной матрицы. К настоящему моменту построен целый ряд асимптотически оптимальных алгоритмов монотонной дуализации и ее обобщений, которые, имея теоретическое обоснование эффективности, на сегодняшний день остаются лидерами по скорости счета [19].

Алгоритм REC перечисляет правильные ЭК класса K с полиномиальной временной оценкой шага, равной $O(m_1^2 n)$, при этом проверка того, является ли шаг лишним, выполняется за время $O(m_2 n)$. Время работы алгоритма REC измеряется числом совершаемых им просмотров элементов матриц L_1 , $L_1 \in M_{m_1 n}^k$, и L_2 , $L_2 \in M_{m_2 n}^k$.

2.3 Алгоритм REC+:

метрические свойства

и экспериментальные исследования

Предлагаемый классификатор REC+ работает с частично упорядоченными данными по схеме, аналогичной схеме работы классификатора REC. Для каждого класса ищутся правильные ЭК. Если на очередном шаге алгоритма найден правильный ЭК, то проверяется его корректность. Решающее правило такое же, как и в процедурах CVP и LAD. В результате найденные правильные представительные ЭК класса K «голосуют» за отнесение распознаваемого объекта к этому классу.

Приведем описание используемой в экспериментах процедуры линейного упорядочения значений признаков. Пусть $R_1(K)$ и $R_2(K)$ — множества прецедентов из класса K и не из K соответственно, $|R_t(K)|$ — мощность $R_t(K)$, $t = 1, 2$; $S = (a_1, \dots, a_n)$ — объект из M , $a \in N_j$, $j = \overline{1, n}$.

Положим $B_j(S, a) = 1$, если $a_j = a$, иначе $B_j(S, a) = 0$; $\mu_j^{(t)}(a) = (1/|R_t(K)|) \times \sum_{S \in R_t(K)} B_j(S, a)$, $t = 1, 2$; $\mu_j(a) = \mu_j^{(1)}(a) - \mu_j^{(2)}(a)$.

Величина $\mu_j(a)$, $a \in N_j$, $j = \overline{1, n}$, служит оценкой информативности значения a признака x_j в классе K и позволяет установить на множестве значений признака x_j , встречающихся в описаниях прецедентов из K , линейный порядок, согласно которому $a \preceq b$, $b \in N_j$, если $\mu_j(a) \leq \mu_j(b)$.

В экспериментальном исследовании модели REC+ признаковое описание объекта дублируется, причем на дублированных признаках устанавливается обратный линейный порядок. Ищутся правильные представительные ЭК заданного ранга r . Параметр r выбирается с использованием верхней оценки типичного ранга правильного ЭК. Указанная оценка приведена в теоремах 3 и 4 соответственно для случая $n \leq m_1$ и $n \gg m_1$.

Приводимые ниже в теоремах 3 и 4 теоретические оценки получены в предположении, что $N_j = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$, $j = \overline{1, n}$, и элементы в N_j линейно упорядочены в порядке возрастания.

Положим $d = k/(k-1)$: $\sigma \in E_{k-1}^r$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$; $Q_r(\sigma) = (\sigma_1 + 1)^r \cdots (\sigma_r + 1)^r$; $r_3 = \lfloor \log_d m_1 + \log_d \log_d m_1 \rfloor$; $r_4 = \lfloor 0,5 \log_d m_1 n - 0,5 \log_d \log_d m_1 n + \log_d \log_d \log_d n \rfloor$; φ_3 — интервал $[1, r_3]$; φ_4 — интервал $[1, r_4]$; E_{k-1}^r — множество наборов вида $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, где $\sigma_i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$, $k \geq 2$, при $i = \overline{1, r}$. Справедливы следующие теоремы 3 и 4.

Теорема 3. Если $n \leq m_1$, то для почти всех матриц L_1 из $M_{m_1 n}^k$ при $n \rightarrow \infty$ верно

$$|\mathcal{U}(L_1)| \lesssim \sum_{r \in \varphi_3} \sum_{\sigma \in E_{k-1}^r} Q_r(\sigma) C_n^r C_{m_1}^r k^{-r^2}$$

и ранги почти всех правильных ЭК из $\mathcal{U}(L_1)$ принадлежат интервалу φ_3 .

Теорема 4. Если $m_1^\alpha \leq n \leq d^{m_1}$, $\alpha > 1$, то для почти всех матриц L_1 из $M_{m_1 n}^k$ при $n \rightarrow \infty$ верно

$$|\mathcal{U}(L_1)| \approx \sum_{r \in \varphi_4} \sum_{\sigma \in E_{k-1}^r} Q_r(\sigma) C_n^r C_{m_1}^r k^{-r^2}$$

и ранги почти всех правильных ЭК из $\mathcal{U}(L_1)$ принадлежат интервалу φ_4 .

Замечание 1. В [2] показано, что в случае задания частичных порядков на множествах значений признаков $N_j = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$, $j = \overline{1, n}$, на этапе обучения процедур CVP возникает задача дуализации над декартовым произведением $N_1 \times \dots \times N_n$. Приведена матричная формулировка этой задачи, согласно которой требуется перечислить все так называемые упорядоченные тупиковые покрытия матрицы L , $L \in M_{m_2 n}^k$. Другими словами, требуется найти все минимальные нечастые ЭК в \bar{K} . Множество всех искомым нечастых ЭК обозначим через $B(L)$.

Пусть $N_j = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$, $j = \overline{1, n}$, и элементы в N_j линейно упорядочены в порядке возрастания; $r_5 = \lfloor 0,5 \log_d m_2 n - 0,5 \log_d \log_d m_2 n + \log_d \log_d \log_d n \rfloor$; φ_5 — интервал $[1, r_5]$. В [2] фактически доказана следующая

Теорема 5. Если $m_2^\alpha \leq m \leq d^{m_2}$, $\alpha > 1$, то для почти всех матриц L из $M_{m_2 n}^k$ при $n \rightarrow \infty$ верно

$$|B(L)| \approx \sum_{r \in \varphi_5} \sum_{\sigma \in E_{k-1}^r} Q_r(\sigma) C_n^r C_{m_2}^r r! k^{-r^2}$$

и ранги почти всех ЭК из $B(L)$ принадлежат интервалу φ_5 .

Таким образом, если $m_1 \leq m_2$, то согласно оценкам, приведенным в теоремах 4 и 5, число правильных ЭК в K существенно меньше числа минимальных нечастых ЭК в \bar{K} . При $m_1 = m_2$ типичный ранг каждого из двух видов ЭК принадлежит одному интервалу. Аналогичный результат для случая, когда множество N_j , $j = \overline{1, n}$, — антицепь, получен в [4].

На реальных задачах проведено экспериментальное сравнение качества работы алгоритмов REC, REC+, Random Forest (RF) и Logistic Regression (LR). Алгоритмы REC и REC+ реализованы авторами на языке C++. Алгоритмы RF и LR импортированы из библиотеки scikit-learn [https://scikit-learn.org/stable/]. Дополнительная настройка методов не проводилась. Данные взяты из репозитория ФИЦ ИУ РАН и из базы данных UCI [20]. Рассмотрены 6 задач с двумя классами. Для оценки качества использован известный функционал — сбалансированная точность. Данный функционал хорошо себя зарекомендовал при несбалансированных классах. В случае равномошных классов сбалансированная точность совпадает с долей верно классифицированных объектов. Итоговая оценка качества классификации получена усреднением значения функционала качества по 10 независимым запускам. В каждом запуске исходные данные случайным образом разделялись на обучающую и тестовую выборки в соотношении 4 : 1. В табл. 1 для каждой задачи указано число прецедентов m_1 и m_2 , число признаков n и средняя значность признака h . Результаты счета приведены в табл. 2.

Нетрудно видеть, что алгоритм REC+ лидирует по качеству классификации на четырех задачах из шести. На каждой из рассмотренных задач время работы REC не превышает 1 с. Классификатор REC+ превосходит по качеству работы классификатор REC на пяти задачах, однако работает существенно медленнее REC из-за необходимого увеличения числа признаков в 2 раза (для корректности

Таблица 1 Размеры задач

Задача	$m_1; m_2$	n	h
Остеосаркома	50; 217	19	25
Инсульт	16; 63	81	2
Манелис	38; 107	35	10
Молекулярная биология 1 (UCI)	767; 768	60	5
Шахматы (UCI)	1527; 1668	36	2
Крестики-нолики (UCI)	626; 332	9	3

Таблица 2 Качество классификации

Задача	REC	REC+	RF	LR
Остеосаркома	0,57	0,60	0,55	0,58
Инсульт	0,62	0,70	0,54	0,55
Манелис	0,74	0,75	0,74	0,77
Молекулярная биология 1 (UCI)	0,97	0,97	0,96	0,92
Шахматы (UCI)	0,97	0,98	0,99	0,96
Крестики-нолики (UCI)	0,98	0,99	0,94	0,64

работы алгоритма признаковые описания объектов дублируются с обратным отношением порядка). В [7] проведено экспериментальное сравнение времени работы алгоритма REC и алгоритма голосования по тупиковым представительным ЭК из направления CVP на реальных и модельных данных. Показано, что алгоритм REC существенно превосходит в скорости алгоритм голосования по тупиковым представительным ЭК на всех рассмотренных наборах данных, не уступая в точности.

Замечание 2. В [21] рассмотрены вопросы распознавания особых структурных сегментов геномов, называемых промоторами. С использованием модельного организма *Drosophila melanogaster* решалась задача бинарной классификации. В качестве положительных примеров брались участки промоторов, а отрицательные примеры представляли собой участки экзонов. На несбалансированной выборке большого объема проведены эксперименты, в которых кроме REC участвовали такие известные алгоритмы машинного обучения, как случайный лес, логистическая регрессия и различные модели градиентного бустинга. Был рассмотрен традиционный способ формирования целочисленных признаков высокой значности, использующий k -меры, и оригинальная методика прямого применения классификатора к исходным символьным последовательностям промоторов и экзонов, позволяющая работать с целочисленными признаками небольшой значности. Оказалось, что во втором случае качество логической классификации существенно выше и составляет с использованием ансамблевого подхода 94,3% по показателю ROC-AUC, при

этом логический классификатор REC незначительно уступил только классификатору Catboost.

3 Заключение

Представлены новые результаты, касающиеся изучения метрических (количественных) свойств множества представительных ЭК, на поиске которых базируется обучение логических классификаторов. Развита техника получения асимптотических оценок для типичных значений важных количественных характеристик указанного множества. Доказана асимптотическая оптимальность алгоритма перечисления правильных представительных ЭК, описанного в статье [7].

Разработана модификация на случай частично упорядоченных данных предложенного в [7] классификатора REC, использующего процедуру голосования по правильным представительным ЭК. Получены теоретические оценки типичного числа правильных ЭК и типичного ранга правильного ЭК при условии, что признаковые описания объектов — элементы декартова произведения конечных цепей. Экспериментально подтверждена целесообразность задания линейных порядков на множествах значений признаков в соответствии с частотой встречаемости значения признака в классе.

Данная проблематика напрямую связана с вопросами построения нормальных форм логических функций и оценки сложности такого построения. Результаты работы имеют значение для практических задач логического анализа данных и актуальны для классической дискретной математики.

Литература

1. Дюкова Е. В., Журавлёв Ю. И. Дискретный анализ признаков описаний в задачах распознавания большой размерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2000. Т. 40. № 8. С. 1264–1278.
2. Дюкова Е. В., Масляков Г. О., Прокофьев П. А. Задача дуализации над произведением цепей: асимптотические оценки числа решений // Докл. Акад. наук, 2018. Т. 483. № 2. С. 130–133. doi: 10.31857/S086956520003465-4. EDN: VQYJB.
3. Дюкова Е. В., Масляков Г. О., Прокофьев П. А. О логическом анализе данных с частичными порядками в задаче классификации по прецедентам // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2019. Т. 59. № 9. С. 1605–1616. doi: 10.1134/S0044466919090084.
4. Дюкова А. П., Дюкова Е. В. О числе решений некоторых специальных задач логического анализа целочисленных данных // Известия РАН. Теория и системы управления, 2023. № 5. С. 57–66. doi: 10.31857/S0002338823050050. EDN: OHWCSE.
5. Дюкова Е. В., Масляков Г. О., Дюкова А. П. Логические методы корректной классификации данных // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 64–70. doi: 10.14357/19922264230309. EDN: OZHXOX.
6. Драгунов Н. А. О метрических (количественных) свойствах логических классификаторов // Труды ИСА РАН, 2024. Т. 74. № 4. С. 14–19. doi: 10.14357/20790279240402. EDN: KADXXE.
7. Драгунов Н. А., Дюкова Е. В., Дюкова А. П. Логическая классификация на основе поиска правильных представительных элементарных классификаторов // Известия РАН. Теория и системы управления, 2024. № 4. С. 33–39. doi: 10.31857/S0002338824040027. EDN: UENRUE.
8. Hammer P. L., Kogan A., Simeone A., Szedmak B. Pareto-optimal patterns in logical analysis of data // Discrete Appl. Math., 2004. Vol. 144. Iss. 1-2. P. 79–102. doi: 10.1016/j.dam.2003.08.013.
9. Журавлёв Ю. И., Рязанов В. В., Сенько О. В. Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения — М.: ФАЗИС, 2006. 159 с. EDN: QMPOMP.
10. Масич И. С. Метод оптимальных логических решающих правил для задач распознавания и прогнозирования // Системы управления и информационные технологии, 2019. № 1(75). С. 31–37. EDN: YYHUWL.
11. Anisimova D. V., Djukova E. V., Djukova A. P. Supervised classification problem: Searching for maximum patterns // 10th Conference (International) on Information Technology and Nanotechnology Proceedings. — IEEE, 2024. Art. 10582366. 4 p. doi: 10.1109/ITNT60778.2024.10582366. EDN: FDXQWU.
12. Финн В. К. О возможности формализации правдоподобных рассуждений средствами многозначных логик // Всесоюзн. симп. по логике и методологии науки. — Киев: Наукова думка, 1976. С. 82–83.
13. Wille R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts // Ordered sets / Ed. I. Rival. — NATO Advanced Study Institutes ser. — Dordrecht, Netherlands: Springer, 1981. Vol. 83. P. 445–470. doi: 110.1007/978-94009-7798-3_15.
14. Gnatyshak D. V., Ignatov D. I., Kuznetsov S. O., Mirkin B. G. Triadic formal concept analysis and triclustering: Searching for optimal patterns // Mach. Learn., 2015. Vol. 101. P. 271–302. doi: 10.1007/s10994-015-5487-y.
15. Дюкова Е. В., Масляков Г. О., Янаков Д. С. Корректная классификация по прецедентам: ДСМ-метод над произведением частичных порядков // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 61–68. doi: 10.14357/19922264240308. EDN: ZJHDMY.
16. Johnson D., Yannakakis M., Papadimitriou C. On generating all maximal independent sets // Inform. Process. Lett., 1988. Vol. 27. No. 3. P. 119–123. doi: 10.1016/0020-0190(88)90065-8.
17. Fredman M. L., Khachiyan L. On the complexity of dualization of monotone disjunctive normal forms // J. Algorithm., 1996. Vol. 21. No. 3. P. 618–628. doi: 10.1006/jagm.1996.0062.
18. Boros E., Gurvich V., Elbassioni K., Khachiyan L. An efficient incremental algorithm for generating all maximal independent sets in hypergraphs of bounded dimension // Parallel Processing Letters, 2000. Vol. 10. Iss. 4. P. 253–266. doi: 10.1142/S0129626400000251.
19. Дюкова Е. В., Прокофьев П. А. Об асимптотически оптимальных алгоритмах дуализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015. Т. 55. № 5. С. 895–910. doi: 10.1134/S0044466919090084.
20. UC Irvine Machine Learning Repository Web Site. <https://archive.ics.uci.edu>.
21. Djukova A. P., Djukova E. V. Recognition of specific genome regions using machine learning methods // Pattern Recognition Image Analysis, 2024. Vol. 34. No. 4. P. 924–929. doi: 10.1134/S1054661824700883. EDN: MBKOZJ.

Поступила в редакцию 02.06.2025

Принята к публикации 15.11.2025

REGULAR REPRESENTATIVE ELEMENTARY CLASSIFIERS OVER THE PRODUCT OF PARTIAL PRODUCTS

N. A. Dragunov and E. V. Djukova

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The authors consider the issues of creating algorithmic support for supervised classification problem which is the one of the central tasks of machine learning. Original procedures of logical analysis and classification of integer data represented as a set of elements of Cartesian product of finite partially ordered sets (product of partial orders) are constructed and investigated. At the training stage of the proposed procedures, the search for so-called regular representative elementary classifiers (special fragments in feature descriptions of precedents that distinguish objects belonging to different classes) is performed. An asymptotically optimal algorithm for enumerating the required elementary classifiers over a product of antichains is constructed and the results of its testing on real-world tasks are presented. Theoretical and experimental justifications for the efficiency of the new classification procedures are provided for the case when linear orders on sets of feature values are defined. The theoretical conclusions are based on the study of the metric (quantitative) properties of the set of regular representative elementary classifiers.

Keywords: supervised classification; correct logical classifier; regular representative elementary classifier; partially ordered data; Cartesian product of partial orders; metric (quantitative) properties of the set of elementary classifiers

DOI: 10.14357/19922264250405

EDN: JJFVIQ

Acknowledgments

The research was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 24-21-00301), <https://rscf.ru/en/project/24-21-00301/>.

References

1. Djukova, E., and Y. Zhuravlev. 2000. Discrete analysis of feature descriptions in recognition problems of high dimensionality. *Comp. Math. Math. Phys.* 40(8):1214–1227.
2. Djukova, E. V., G. O. Maslyakov, and P. A. Prokofyev. 2018. Dualization problem over the product of chains: Asymptotic estimates for the number of solutions. *Dokl. Math.* 98(3):564–567. doi: 10.1134/S1064562418070086. EDN: AQBBNJ.
3. Djukova, E. V., G. O. Maslyakov, and P. A. Prokofyev. 2019. On the logical analysis of partially ordered data in the supervised classification problem. *Comp. Math. Math. Phys.* 59(9):1542–1552. doi: 10.1134/S0965542519090082. EDN: KMZRFX.
4. Djukova, A. P., and E. V. Djukova. 2023. Number of solutions for some special logical analysis problems of integer data. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 62(5):817–826. doi: 10.1134/s1064230723050052. EDN: BJDEZZ.
5. Djukova, E. V., G. O. Maslyakov, and A. P. Djukova. 2023. Logicheskie metody korrektnoy klassifikatsii dannykh [Logical methods of correct data classification]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):64–70. doi: 10.14357/19922264230309. EDN: OZHXOX.
6. Dragunov, N. A. 2024. O metrisheskikh (kolichestvennykh) svoystvakh logicheskikh klassifikatorov [On metric (numerical) properties of logical classifiers]. *Trudy ISA RAN* [Proceedings of the Institute for Systems Analysis of the Russian Academy of Sciences] 74(4):14–19. doi: 10.14357/20790279240402. EDN: KADXXE.
7. Dragunov, N. A., E. V. Djukova, and A. P. Djukova. 2024. Logical classification based on finding regular representative elementary classifiers. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 63(4):634–641. doi:10.1134/S1064230724700461. EDN: EOPZET.
8. Hammer, P. L., A. Kogan, A. Simeone, and B. Szedmak. 2004. Pareto-optimal patterns in logical analysis of data. *Discrete Appl. Math.* 144(1-2):79–102. doi: 10.1016/j.dam.2003.08.013.
9. Zhuravlev, Yu. I., V. V. Ryazanov, and O. V. Senko. 2006. *Raspoznavanie. Matematicheskie metody. Programmnaya sistema. Prakticheskie primeneniya* [Recognition. Mathematical methods. Software system. Practical applications]. Moscow: FAZIS. 159 p. EDN: QMPOMP.
10. Masich, I. S. 2019. Metod optimal'nykh logicheskikh reshayushchikh pravil dlya zadach raspoznavaniya i prognozirovaniya [The method of optimal logical decision rules for recognition and prediction problems]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control Systems and Information Technology] 1(75):31–37. EDN: YYHUWL.
11. Anisimova, D., E. Djukova, and A. Djukova. 2024. Supervised classification problem: Searching for maximum patterns. *10th Conference (International) on*

- Information Technology and Nanotechnology Proceedings*. IEEE. Art. 10582366. 4 p. doi: 10.1109/IT-NT60778.2024.10582366. EDN: FDXQWU.
12. Finn, V. K. 1976. O vozmozhnosti formalizatsii pravdopodobnykh rassuzhdeniy sredstvami mnogoznachnykh logik [On the possibility of formalizing plausible reasoning by means of multivalued logics]. *Vsesoyuzn. simpozium po logike i metodologii nauki* [All-Union Symposium on the Logic and Methodology of Science]. Kiev: Naukova dumka. 82–83.
 13. Wille, R. 1982. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts. *Ordered sets*. Ed. I. Rival. NATO Advanced Study Institutes ser. Dordrecht, Netherlands: Springer. 83:445–470. doi: 10.1007/978-94009-7798-3_15.
 14. Gnatyshak, D. V., D. I. Ignatov, S. O. Kuznetsov, and B. G. Mirkin. 2015. Triadic formal concept analysis and triclustering: Searching for optimal patterns. *Mach. Learn.* 101:271–302. doi: 10.1007/s10994-015-5487-y.
 15. Djukova, E. V., G. O. Masliakov, and D. S. Ianakov. 2024. Korrektnaya klassifikatsiya po pretsedentam: DSM-metod nad proizvedeniem chastichnykh poryadkov [Correct supervised classification: JSM-method over product of partial orders]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):61–68. doi: 10.14357/19922264240308. EDN: ZJHDMY.
 16. Johnson, D., M. Yannakakis, and C. Papadimitriou. 1988. On generating all maximal independent sets. *Inform. Process. Lett.* 27(3):119–123. doi: 10.1016/0020-0190(88)90065-8.
 17. Fredman, M., and L. Khachiyan. 1996. On the complexity of dualization of monotone disjunctive normal forms. *J. Algorithm.* 21(3):618–628. doi: 10.1006/jagm.1996.0062.
 18. Boros, E., V. Gurvich, K. Elbassioni, and L. Khachiyan. 2000. An efficient incremental algorithm for generating all maximal independent sets in hypergraphs of bounded dimension. *Parallel Processing Letters* 10(4):253–266. doi: 10.1142/S0129626400000251.
 19. Djukova, E. V., and P. A. Prokofjev. 2015. Asymptotically optimal dualization algorithms. *Comput. Math. Math. Phys.* 55(5):891–905. doi: 10.1134/S0965542515050103. EDN: UFZQRB.
 20. UC Irvine machine learning repository. Available at: <https://archive.ics.uci.edu> (accessed November 28, 2025).
 21. Djukova, A. P., and E. V. Djukova. 2024. Recognition of specific genome regions using machine learning methods. *Pattern Recognition Image Analysis* 34(4):924–929. doi: 10.1134/S1054661824700883. EDN: MBKOZJ.

Received June 2, 2025

Accepted November 15, 2025

Contributors

Dragunov Nikita A. (b. 1997) — junior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; nikitadragunovjob@gmail.com

Djukova Elena V. (b. 1945) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences; 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; edjukova@mail.ru

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

Г. А. Чумарин¹

Аннотация: Предлагается способ восстановления поврежденных областей цветных трехканальных изображений (задача инпейнтинга) на основе уравнения нелинейной анизотропной диффузии. В качестве численного алгоритма решения используется решеточное уравнение Больцмана (РУБ) с пятью дискретными скоростями и несколькими временами релаксации. Направление и интенсивность сглаживания определяются при помощи структурной матрицы. На основе технологии MPI (Message Passing Interface) разработана параллельная программная реализация алгоритма с разбиением изображения на подобласти в декартовой топологии. Рассмотрено приложение нового метода для изображений с дефектами различной формы и площади. Продемонстрирована корректность восстановления структуры и цветовой информации в поврежденных областях. На тестовой выборке из 10 000 изображений оценена точность метода. Проведено сравнение времени работы последовательной и параллельной версии алгоритма.

Ключевые слова: восстановление изображений; инпейнтинг; решеточные уравнения Больцмана; анизотропная диффузия

DOI: 10.14357/19922264250406

EDN: UDCGCC

1 Введение

Метод РУБ изначально был разработан для решения уравнений сплошной среды (уравнений Навье—Стокса) [1] и благодаря простоте программной реализации и распараллеливания к настоящему времени широко применяется в различных междисциплинарных задачах [2–4]. История метода, его области применения и направления развития, включая вопросы масштабируемости на современных архитектурах, подробно рассмотрены в обзоре [5]. В частности, с помощью РУБ можно описывать временную эволюцию скалярных процессов, описываемых уравнениями с диффузионными членами. Было предложено большое число моделей для уравнений адвекции-диффузии и чистой диффузии [6–11], в том числе для нелинейных [12] и анизотропных [13, 14] постановок. В связи с этим РУБ нашли применение в алгоритмах обработки изображений, основанных на диффузионных уравнениях.

Ряд работ посвящен решению уравнений в частных производных для задач шумоподавления. Так, уравнение Перона—Малика [15, 16] моделировалось РУБ на пяти- и девятискоростных решетках [17, 18], тогда как его расширенные варианты, а также уравнение Рудина—Ошера—Фатема решались при помощи девятискоростной схемы с источниками [19–21]. Отметим, что включение членов типа

источника в РУБ позволяет добавить нелинейные члены в соответствующие уравнения диффузии, что часто необходимо в задачах выделения контуров, восстановления и сегментации изображений. Для подавления шумов на радиолокационных снимках в рамках модели реакции—конвекции—диффузии применялась схема с множественными временами релаксации [22]. Схемы РУБ для анизотропной диффузии использовались при сглаживании и сегментации двумерных и трехмерных медицинских изображений, в алгоритмах распознавания объектов на изображениях [23–27].

Целью настоящей работы ставится разработка алгоритма восстановления поврежденных областей цветных трехканальных изображений на основе РУБ. Отметим, что задача восстановления изображений (инпейнтинга) некорректна в том смысле, что допускает бесконечное множество решений. В простейшем случае в области дефекта можно было бы провести усреднение интенсивности каждого пикселя по ближайшим соседям с гауссовой функцией распределения, убывающей с расстоянием (гауссово сглаживание). Если при этом положить дисперсию равной $\sqrt{2t}$, то такого же результата можно достигнуть, решая во времени относительно функции интенсивности цвета уравнение линейной изотропной диффузии с коэффициентом диффузии, равным единице, приняв в качестве начального условия исходные значения интенсивности

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, chumaringa@gmail.com

поврежденного изображения. Таким образом, проявляется связь между применением гауссова фильтра и решением во времени уравнений диффузионного типа.

При изотропном сглаживании невозможно обеспечить корректное продолжение направленных структур в область дефекта, поэтому в данной работе предполагается, что интенсивность цвета пикселя каждого канала подчиняется уравнению нелинейной анизотропной диффузии. Из разложения Чепмена—Энскога следует, что этому уравнению соответствует решеточная схема Больцмана с пятью скоростями и несколькими временами релаксации [13, 28]. Аналитические и численные исследования показывают, что РУБ для уравнения диффузии устойчивы при любом временном шаге при условии отсутствия конвекции [9, 13]. Матрица релаксации определяется значениями диффузионной матрицы, которая строится так, чтобы вдоль направлений слабого изменения интенсивности цвета (изофот) сглаживание было максимальным, а в направлении градиента — минимальным. Изофоты вычисляются при помощи структурной матрицы в окрестности поврежденных пикселей [16, 29].

Отдельно следует упомянуть другие алгоритмы, основанные на численном решении дифференциальных уравнений. Популярность получили подходы, основанные на дифференциальных уравнениях высокого порядка (третьего и четвертого). В частности, модели эйлеровой эластичности (третьего порядка) обобщают модели, основанные на минимизации полной вариации [30, 31]. Среди уравнений четвертого порядка следует упомянуть модели, основанные на уравнениях типа Кана—Хилларда, которые используются в статистической физике для описания разделения фаз [32–34]. Указывается, что модели высокого порядка хорошо соединяют линии уровня, находящиеся на большом расстоянии.

Также возможен подход, использующий уравнения гиперболического типа. Например, к таким методам относятся шоковые фильтры [35, 36]. В данном случае изменение интенсивности изображения пропорционально абсолютным значениям градиента интенсивности, причем коэффициент при градиенте непостоянен и может менять знак. Утверждается, что данный метод дает меньше артефактов, чем другие методы. Возможно применение комбинированного подхода, включающего уравнения Кана—Хилларда (четвертого порядка) и шоковые фильтры [37].

Отметим, что указанные алгоритмы несколько сложнее в численной реализации, чем диффузионные уравнения второго порядка, рассматриваемые в работе, так как их внедрение часто требует

нетявных и полутявных разностных схем. Также сложнее постановка граничных условий. Помимо диффузионных и вариационных методов, применяемых в настоящей работе, в современной литературе широко развиваются и альтернативные подходы к обработке изображений, включая нейросетевые и оптимизационные методы (см., например, [38–40]).

Предлагаемый метод решает задачу инпейнтинга, продолжая изофоты внутрь требуемой области. Для ускорения вычислений был разработан алгоритм пространственного распараллеливания задачи с использованием технологии MPI. Для оценки эффективности метода рассмотрена выборка из 10 000 тестовых изображений размера 256×256 пикселей, на которых случайным образом закрашивалась область (белым цветом) и применялся предложенный алгоритм. Среднее значение индекса структурного сходства SSIM (Structural Similarity Index Measure) составило 0,58. Ускорение за счет параллелизма при запуске на восьми ядрах CPU достигало 5,5 раза. Подробное обсуждение результатов численного эксперимента и особенностей параллельного алгоритма приводится в соответствующих разделах.

2 Решеточное уравнение Больцмана для нелинейной анизотропной диффузии

Рассмотрим цветное трехканальное изображение с разрешением $N \times M$ пикселей. Введем в \mathbb{R}^2 сетку с единичным расстоянием между узлами и выделим прямоугольную область $R \subset \mathbb{R}^2$, содержащую $N \times M$ узлов. Множество узлов $\mathbf{x} = (x, y) \in R$ обозначим как Ω . Каждому узлу $\mathbf{x} \in \Omega$ поставим в соответствие пиксель на исходном изображении. Определим на множестве R при $t \geq 0$ функции $I^{(k)}(t, \mathbf{x})$, $k = 1, 2, 3$, так, чтобы значение $I^{(k)}(0, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, совпадало с интенсивностью цвета соответствующего пикселя в канале k . Будем считать, что функции $I^{(k)} = I^{(k)}(t, \mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in R$ подчиняются нелинейному анизотропному уравнению диффузии

$$\frac{\partial I^{(k)}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla I^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{D} — симметричная диффузионная матрица, компоненты которой при $\mathbf{x} \in \Omega$ и $t \geq 0$ зависят от значений градиентов интенсивностей цвета. В явном виде

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{bmatrix}, \quad D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} \left(\nabla I^{(1)}, \nabla I^{(2)}, \nabla I^{(3)} \right),$$

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y),$$

т.е. эволюция интенсивности $I^{(k)}(t, \mathbf{x})$ k -го канала зависит от интенсивности остальных через матрицу \mathbf{D} , одинаковую для всех уравнений (1). В данной работе для определения компонент \mathbf{D} используется подход на основе структурной матрицы [16, 29].

Рассмотрим поврежденное изображение, в котором некоторые пиксели имеют неизвестные или отличные от истинного значения интенсивности цвета. Обозначим множество узлов, соответствующих таким пикселям, через $\Omega_0 \subset \Omega$. Задача инпейнтинга состоит в том, чтобы восстановить значения интенсивности $I^{(k)}(t, \mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in \Omega_0$ и $t > 0$ на основании известных в начальный момент времени $I^{(k)}(0, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_0$. Введем на множестве Ω структурную матрицу $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, компоненты которой имеют вид:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} G_\sigma * \left(\sum_{k=1}^3 \partial_x I_\theta^{(k)} \partial_x I_\theta^{(k)} \right) \\ G_\sigma * \left(\sum_{k=1}^3 \partial_y I_\theta^{(k)} \partial_x I_\theta^{(k)} \right) \\ G_\sigma * \left(\sum_{k=1}^3 \partial_x I_\theta^{(k)} \partial_y I_\theta^{(k)} \right) \\ G_\sigma * \left(\sum_{k=1}^3 \partial_y I_\theta^{(k)} \partial_y I_\theta^{(k)} \right) \end{pmatrix},$$

где $*$ — операция свертки с гауссовым ядром G_σ со стандартным отклонением σ ; $I_\theta^{(k)}$ — интенсивность цвета в канале k , сглаженная фильтром Гаусса со стандартным отклонением θ , обычно меньшим, чем расстояние между узлами, соответствующими пикселям, $\delta x = 1$. Решением спектральной задачи для структурной матрицы будут следующие собственные значения и собственные векторы:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left(J_{xx} + J_{yy} \pm \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}^2} \right);$$

$$\mathbf{v}_1 = \left(2J_{xy}, J_{yy} - J_{xx} + \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}^2} \right);$$

$$\mathbf{v}_2 = \left(2J_{xy}, J_{yy} - J_{xx} - \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}^2} \right).$$

Собственный вектор \mathbf{v}_2 , соответствующий минимальному собственному значению μ_2 , указывает направление наименьшего изменения цветового сигнала в окрестности размера $O(\sigma)$ точки \mathbf{x} (изофота). Для восстановления изображения изофоты

должны быть продолжены внутрь поврежденных областей, поэтому значение σ должно быть выбрано больше размера дефекта. Если собственные значения различаются слабо, то в данной области отсутствуют выделенные направления изменения цвета (изотропная структура) и диффузия должна быть изотропной. Таким требованиям удовлетворяет диффузионная матрица

$$\mathbf{D} = \mathbf{\Lambda} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \mathbf{\Lambda}^T, \quad (2)$$

где $\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ — матрица, составленная из нормированных собственных векторов. Элементы диагональной матрицы $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ определяются из условий

$$\lambda_1 = \alpha;$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \alpha, \\ c_1 \left(\alpha + (1 - \alpha) \exp \left(-\frac{c_2}{|\mu_1 - \mu_2|} \right) \right); \end{cases}$$

где $c_1 \gg \alpha > 0$; $c_2 > 0$; $\alpha \in (0, 1)$. При $\mu_2 \gg \mu_1$ диффузионное сглаживание интенсивно вдоль изофот (коэффициент диффузии $\lambda_2 \approx \alpha + c_1$) и слабо выражено в перпендикулярном направлении (коэффициент диффузии $\lambda_1 = \alpha \ll \lambda_2$). В случае однородного фона ($\mu_1 \approx \mu_2$) имеем изотропное уравнение диффузии с коэффициентом $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$. Значения α , c_1 и c_2 определяются эмпирически и будут заданы в разд. 4, посвященном численному эксперименту.

Для численного решения уравнений (1) воспользуемся РУБ с пятью дискретными скоростями [13, 28]:

$$\mathbf{f}^{(k)}(t + \delta t, \mathbf{x} + \mathbf{c}\delta t) - \mathbf{f}^{(k)}(t, \mathbf{x}) = -\delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} (\mathbf{f}^{\text{eq}(k)}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}^{(k)}(t, \mathbf{x})), \quad k=1, 2, 3, \quad (3)$$

где $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5)$; $\mathbf{f}^{(k)} = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, f_3^{(k)}, f_4^{(k)}, f_5^{(k)})$, $f_i^{(k)} \geq 0$, — дискретно-скоростные функции распределения частиц с дискретными скоростями \mathbf{c}_i ; $\mathbf{f}^{\text{eq}(k)}(t, \mathbf{x})$ — вектор функций локально-равновесного распределения. Шаг решетки $\delta x = 1$. Узлы решетки соответствуют пикселям изображения, как это определено выше. Зададим шаг по времени δt . Тогда дискретные скорости определяются как

$$\mathbf{c}_1 = (0, 0); \quad \mathbf{c}_{2,3} = (\pm c, 0), \quad \mathbf{c}_{4,5} = (0, \pm c),$$

$$c = \frac{\delta x}{\delta t} > 0.$$

Матрицы преобразования в пространство моментов \mathbf{M} и релаксации \mathbf{S} примут вид:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \tau_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{T}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_5^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{bmatrix},$$

где $\tau_1, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_4$ и τ_5 — времена релаксации. Матрица \mathbf{M} осуществляет линейное преобразование из пространства дискретных функций распределения $f_i^{(k)}$ в пространство их линейных комбинаций — моментов. Такой переход позволяет независимо задавать времена релаксации τ_n различных моментов с помощью диагональной матрицы релаксации \mathbf{S} . Возврат из пространства моментов в пространство функций распределения осуществляется через умножение на \mathbf{M}^{-1} , что и определяет вид оператора столкновений с несколькими временами релаксации. Более подробно о процедуре построения матрицы преобразования и об операторе столкновения с несколькими временами релаксации рассказывается в работах [3, 13].

Пусть L — характерный размер объекта на изображении, τ — наибольшее собственное значение матрицы \mathcal{T} . Если в качестве малого параметра в разложении Чепмена—Энскога взять $\epsilon = c\tau/L$, то можно показать, что модель (3) становится разностной схемой второго порядка точности по пространству и времени для уравнений (1) [13, 28], т. е. в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ схема (3) эквивалентна уравнениям нелинейной анизотропной диффузии (1), причем имеет место равенство

$$\mathcal{T} = \frac{5}{2c^2} \mathbf{D} + \frac{\delta t}{2} \mathbf{E}_2, \quad (4)$$

где \mathbf{E}_2 — квадратная единичная матрица размерности 2.

Все компоненты вектора функций локально-равновесного распределения $f^{\text{eq}(k)}(t, \mathbf{x})$ одинаковы и в любой момент времени определяются интенсивностью k -го канала:

$$f^{\text{eq}(k)}(t, \mathbf{x}) = \frac{I^{(k)}(t, \mathbf{x})}{5}, \quad t \geq 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

При $t > 0$ интенсивность k -го канала определяется с помощью схемы (3) как момент первого порядка функций распределений

$$I^{(k)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^5 f_i^{(k)}(t, \mathbf{x}), \quad k = 1, 2, 3.$$

Матрица \mathcal{T} в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$ вычисляется по формуле (4), где \mathbf{D} — диффузионная матрица, определяемая выражением (2). Отметим, что значения времен релаксации τ_1, τ_4 и τ_5 не влияют на найденное по схеме (3) решение уравнения анизотропной диффузии, но могут сказываться на устойчивости схем РУБ при наличии в них адвективных членов; более подробно эта проблема обсуждается в работе [13]. Далее в численных экспериментах значения τ_1, τ_4 и τ_5 задавались равными 1.

Таким образом, уравнения (3) описывают пространственно-временную эволюцию функций распределения и, следовательно, интенсивностей цвета $I^{(k)}(t, \mathbf{x})$, $k = 1, 2, 3$. В свою очередь, алгоритм инпейтинга заключается в численном решении с помощью схемы (3) следующей задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I^{(k)}}{\partial t} &= \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla I^{(k)}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad k = 1, 2, 3; \\ I^{(k)}(0, \mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad k = 1, 2, 3; \\ I^{(k)}(t, \mathbf{x}) &= I^{(k)}(0, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_0, \quad t \geq 0, \\ & \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Начальные значения интенсивностей в поврежденных областях предполагаются равными нулю. Восстановленным считается изображение, в котором интенсивность цвета пикселей, соответствующих узлам $\mathbf{x} \in \Omega_0$, совпадает с решением задачи (5) в некоторый момент времени t^* . В численных экспериментах в качестве t^* выбирается фиксированное конечное время, для которого изменение решения во времени становится визуально незаметным, и именно это поле интенсивностей $I^{(k)}(t^*, \mathbf{x})$ интерпретируется как восстановленное изображение. Данный критерий выбора t^* используется в силу его простоты. Рассмотрение других возможных критериев и поиск оптимального оставим для будущих работ.

3 Параллельный алгоритм расчетов

Для численного решения задачи (5) разработана параллельная программа на языке C++ с применением технологии передачи сообщений MPI и библиотеки OpenCV. Архитектура программы соответствует модели SPMD (Single Program, Multiple Data), распределение и сбор данных выполняются корневым процессом, после инициализации в вычислениях участвуют все процессы. Основной целью разработки ставилось ускорение работы алгоритма за счет распараллеливания по пространственным областям изображения. Для обмена данными между процессами используется коммуникатор MPI, в котором задана виртуальная двухмерная

декартова топология. Для регулярных обменов массивами данных используются персистентные неблокирующие операции типа точка–точка (MPI_Send_init/MPI_Recv_init с последующими запусками MPI_Startall и MPI_Waitall), что снижает накладные расходы на инициализацию сообщений и позволяет перекрывать коммуникации вычислениями.

Обработка изображений организована в виде цикла по паре входных данных: трехканальному изображению с дефектами и одноканальной маске того же размера. Маска представляет собой черный фон (значение интенсивности $I(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_0$) с белыми пикселями, расположение которых совпадает с поврежденными пикселями восстанавливаемого изображения (значение интенсивности $I(\mathbf{x}) = 255, \mathbf{x} \in \Omega_0$). На корневом процессе входные данные считываются и область обработки сужается до минимального прямоугольника, включающего ненулевые значения маски. Его размеры определяются радиусом гауссова ядра $\rho = 3\sigma$, как показано на рис. 1, а.

Далее изображение приводится к формату CV_32FC3 (матрица с тремя каналами, каждый элемент есть 32-битное число с плавающей точкой) и нормируется в диапазон $[0, 1]$. Для рассылки прямоугольных фрагментов на корневом процессе с помощью MPI_Type_create_subarray формируется производный тип, описывающий соответствующий блок в двумерной сетке. Затем подмассивы

отправляются вызовами MPI_Isend на рабочие процессы в локальные буферы. По результатам этапа подготовки данных на каждом процессе содержатся свои фрагменты матриц интенсивности и бинарной маски. Также инициализируются 15 матриц размера подобласти с типом CV_32FC3: 5 для значений координат вектора функций распределения $\mathbf{f}^{(k)}$, 5 для разности $\mathbf{f}^{\text{neq}(k)} = \mathbf{f}^{\text{eq}(k)} - \mathbf{f}^{(k)}$, требующейся на шаге столкновения, и 5 для вектора обновленных функций распределения $\mathbf{f}^{*(k)} = \mathbf{f}^{(k)} + \delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{f}^{\text{neq}(k)}$, требующихся на шаге переноса. Начальные значения координат вектора $\mathbf{f}^{(k)}$ устанавливаются равными $0, 2I^{(k)}$, а координат вектора $\mathbf{f}^{\text{neq}(k)}$ — равными нулю.

Для вычисления градиентов и шага адвекции каждый процесс обменивается приграничными слоями с соседними, причем вычисление горизонтальных и вертикальных градиентов организовано в виде последовательных двойных циклов по координатам (для доступа к данным используется прямое индексирование по указателям) так, чтобы обмен значениями интенсивности между прилегающими процессами происходил на фоне расчета x -градиента во внутренней области (зеленый прямоугольник на рис. 2). После обмена x -градиент вычисляется в граничных точках, y -градиент — во всей области.

Сглаживание компонент структурной матрицы производится последовательно по горизонтали и вертикали. Такое разбиение корректно, так как

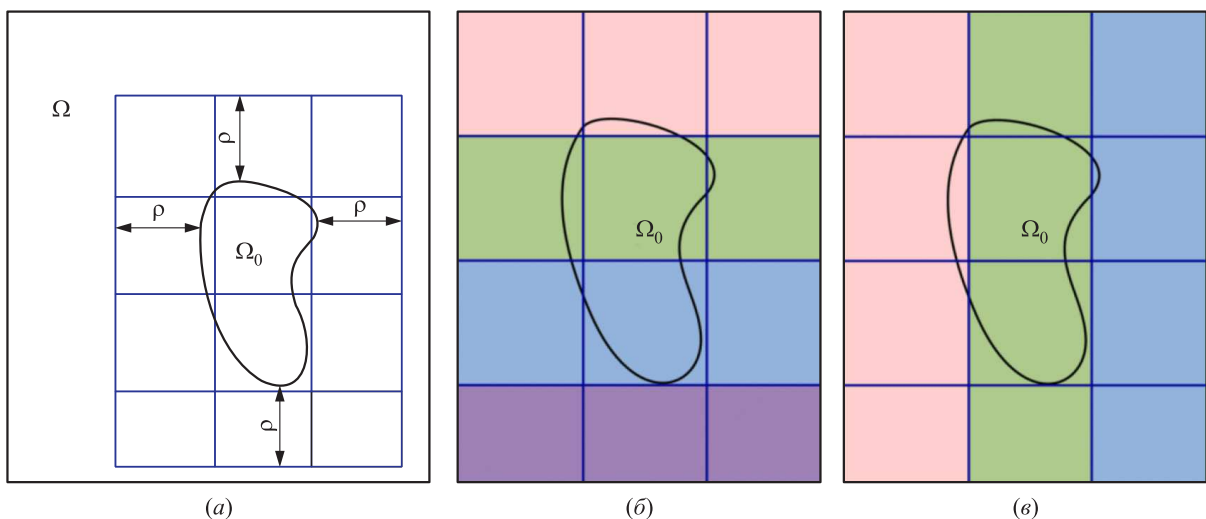


Рис. 1 Сужение вычислительной области Ω до прямоугольника, содержащего поврежденную область Ω_0 ; минимальное расстояние от граничных точек Ω_0 до прямоугольника соответствует радиусу гауссова ядра ρ ; наложенная сетка иллюстрирует разбиение изображения на подобласти, закрепленные за отдельными процессами виртуальной двумерной декартовой топологии (а); формирование подкоммуникаторов строк для горизонтальных обменов данными (б); формирование подкоммуникаторов столбцов для вертикальных обменов данными (в). Цвета показывают принадлежность процессов соответствующему подкоммуникатору

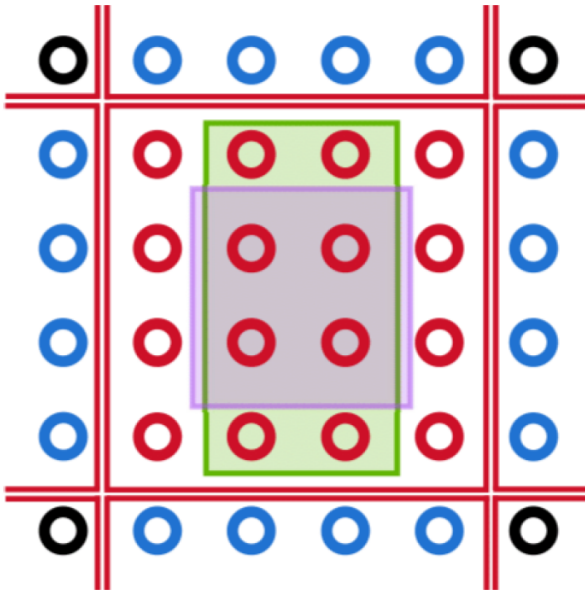


Рис. 2 Иллюстрация вычисления градиентов и шага переноса. Пиксели изображены в виде окружностей. Красным цветом отмечены пиксели изображения, принадлежащие внутреннему процессу и участвующие в вычислениях. Зеленым прямоугольником выделена область, в которой x -градиент вычисляется без использования данных соседних процессов. Фиолетовым прямоугольником показаны точки, где без информации от смежных процессов осуществляется адвекция. Синим цветом обозначены пиксели соседних процессов, участвующие в обмене сообщениями, черным — неучаствующие

двумерное гауссово ядро сепарабельно, т. е. представимо в виде произведения двух одномерных. Пока вычисляется y -градиент, на корневые процессы подкоммуникаторов строк (см. рис. 1, б) от остальных процессов подкоммуникатора поступают массивы значений J_{xx} . С помощью `cv::sepFilter2D` выполняется горизонтальная свертка. На ее фоне происходит аналогичный сбор J_{xy} и J_{yy} массивов. По завершении сглаживания J_{xx} соответствующие фрагменты данных рассылаются с корневых процессов подкоммуникаторов строк обратно рабочим процессам (на фоне свертки J_{xy} и J_{yy}), откуда уже в подкоммуникаторе столбцов отправляются на корневые процессы для вертикальной свертки (см. рис. 1, в). Далее по вертикали выполняются аналогичные шаги, по итогу на каждом процессе исходного коммуникатора с декартовой топологией соберутся сглаженные компоненты структурной матрицы.

Следующий этап — шаг столкновения. Для дополнительной оптимизации область обработки сужается до минимального прямоугольника, содержащего поврежденную область Ω_0 с отступом

в один пиксель. Тогда шаг переноса будет осуществляться во всех точках этого прямоугольника, за исключением граничных. Если дефект локализован на части процессов, то при наличии дополнительных ядер в системе их можно задействовать для распараллеливания последующих циклов с помощью технологии OpenMP. В двойном цикле по координатам рассчитываются собственные значения и векторы структурной матрицы, согласно (2) строится диффузионная матрица и выполняется столкновение частиц в пространстве моментов (правая часть уравнения (3)). В результате на каждом процессе имеются значения вектора обновленных функций распределения $\mathbf{f}^{*(k)}$.

Наконец на шаге адвекции происходит перенос обновленных функций распределения $\mathbf{f}^{*(k)}$ на соседние узлы решетки и одновременное обновление $\mathbf{f}^{(k)}$, $\mathbf{f}^{\text{eq}(k)}$ и интенсивности. Вне области маски эти значения остаются неизменными. Обмен данными между узлами соседних процессов осуществляется на фоне вычислений во внутренней области (фиолетовый прямоугольник на рис. 2).

После достижения заданного числа итераций локальные результаты собираются на корневом процессе. Отметим, что предложенная схема реализует лишь пространственное распараллеливание задачи. Такой подход согласуется со свойством локальности метода РУБ. Однако процедура когерентного усиления с использованием гауссова размытия нелокальна и при вычислении структурной матрицы в каждой точке требует данных от множества соседних процессов. Очевидно, что данный этап плохо масштабируемый и дорогостоящий с точки зрения накладных расходов. Тем не менее в разработанном алгоритме предпринята попытка минимизации этих затрат за счет разложения двумерной свертки на две одномерные.

4 Численный эксперимент

В первом численном эксперименте рассматривается восстановление тестового изображения `trees` с разрешением 350×258 пикселей (рис. 3). Поврежденная часть имеет вид сетки, проходящей через все изображение. Толщина поврежденной области составляет 7 пикселей. Выбирались следующие параметры для численного моделирования: $\alpha = 0,05$; $c_1 = 300$; $c_2 = 0,0001$; величина стандартного отклонения σ гауссова фильтра должна браться больше размера дефектов. В данном случае $\sigma = 12$, предварительное сглаживание изображения не проводилось ($\theta = 0$). Для решения задачи (5) используется схема (3) с временным шагом $\delta t = 0,5$, расстояние между пикселями считается рав-

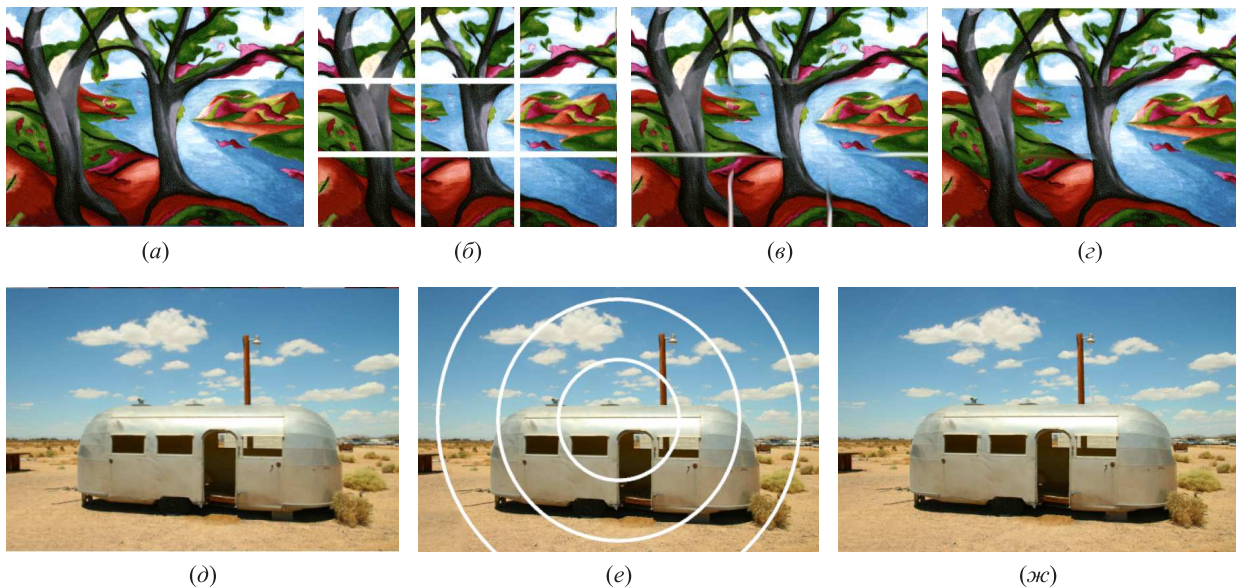


Рис. 3 Изображения trees (верхняя панель) и trailer (нижняя панель). Применение РУБ (3) к задаче восстановления изображений (5): (a) и (d) начальные изображения; (б) и (e) поврежденные изображения; (в) результат в момент времени $t = 50$; (г) результат в момент времени $t = 500$; (ж) результат в момент времени $t = 1000$

ным единице: $\delta x = 1$; в качестве начального изображения $I^{(k)}(0, x)$ берется изображение trees с наложенной сеткой. Результаты расчетов для разных моментов времени приведены на рис. 3 (все рисунки создавались с использованием GIMP). В момент времени $t \geq 100$ получается стационарное решение диффузионного уравнения, финальный результат приведен на рис. 3, г для $t = 500$. Видно, что горизонтальные и вертикальные полосы практически удалены.

Во втором численном эксперименте обрабатывается изображение trailer с разрешением 1024×683 (см. рис. 3). Поврежденная область представляет собой концентрические кольца толщиной 10 пикселей. Радиус размытия $\sigma = 15$, остальные параметры брались такими же, как и в предыдущем эксперименте. Результат восстановления для момента времени $t = 1000$ приведен на рис. 3, ж. Данное изображение удается восстановить практически без ошибок, остаточные искажения на однородном фоне иллюстрируют свойство алгоритма воспринимать протяженные дефекты как когерентные структуры, требующие усиления.

Для измерения времени выполнения параллельного алгоритма использовалась функция `MPI_Wtime()` из библиотеки MPI, а для последовательного алгоритма — средства стандартной библиотеки C++ `<chrono>`. Эксперименты проводились на системе с восьмиядерным процессором Intel Core i9-11900KF. Для изображения trailer время выполнения временного цикла по сравнению

с последовательной версией программы сократилось в 5,5 раза (196,8 против 35,8 с при запуске на 8 процессах). Отметим, что этап свертки с гауссовым ядром оказался самым вычислительно дорогим, ускорение для него составило 1,8 раза (13,6 против 25,0 с). Таким образом, для части кода, отвечающей за численное решение РУБ (без учета времени на размытие) ускорение оказалось семикратным. Для изображения большего разрешения эффект параллельных расчетов оказался более выраженным. Так, для изображения trees ускорение временного цикла достигло 4,1 раза (13,0 против 3,2 с). При этом накладные расходы на этапе сглаживания матричных компонент сильнее отразились на значении ускорения, составившем 1,3. Однако ускорение численного алгоритма за вычетом свертки пятикратно.

В третьем эксперименте оценивается точность и производительность алгоритма для первых 10 000 изображений разрешения 256×256 из базы данных places [41]. На каждом из изображений случайным образом выделялся дефект, представляющий собой объединение нескольких эллипсов белого цвета. Общее число пикселей в поврежденной области равнялось примерно 500. В ходе эксперимента шаг по времени брался равным $\delta t = 0,5$, число шагов по времени равно 150, радиус размытия $\sigma = 15$, остальные параметры и конфигурация вычислительной системы такие же, как и в предыдущих экспериментах. Общее время работы параллельной программы при запуске на 8 ядрах составило

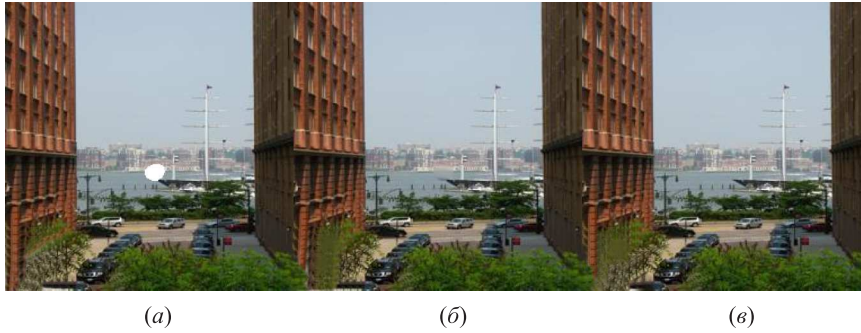


Рис. 4 Изображение из датасета places. Результат применения РУБ (3) для анизотропной диффузии к задаче (5) восстановления изображений из выборки places: (а) изображение с поврежденной областью; (б) результат обработки; (в) исходное изображение

614 с, т. е. 0,06 с на одно изображение. Для оценки качества восстановления изображений используется индекс структурного сходства (SSIM), вычисляемый для каждой пары оригинального a и восстановленного b изображений в поврежденных частях изображений по формуле:

$$SSIM = \frac{\sum_{\mathbf{x} \in \Omega_0} (1/3) \sum_{k=1}^3 SSIM^{(k)}(\mathbf{x})}{|\Omega_0|},$$

$$SSIM^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{2\mu_a^{(k)}(\mathbf{x})\mu_b^{(k)}(\mathbf{x}) + C_1}{(\mu_a^{(k)}(\mathbf{x}))^2 + (\mu_b^{(k)}(\mathbf{x}))^2 + C_1} \times$$

$$\times \frac{2\sigma_{ab}^{(k)}(\mathbf{x}) + C_2}{(\sigma_a^{(k)}(\mathbf{x}))^2 + (\sigma_b^{(k)}(\mathbf{x}))^2 + C_2}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\mu_a^{(k)}$, $\mu_b^{(k)}$, $\sigma_a^{(k)}$, $\sigma_b^{(k)}$ и $\sigma_{ab}^{(k)}$ суть средние интенсивности, стандартные отклонения и ковариация интенсивности изображений a и b , вычисляемые в окне радиуса r пикселей с центром в точке \mathbf{x} , по каналу k . Для расчетов выбиралось $r = 3$. Константы $C_1 = (0,01L^{(k)})^2$ и $C_2 = (0,03L^{(k)})^2$ зависят от диапазона значений интенсивности k -го канала. Число пикселей в поврежденной области обозначено как $|\Omega_0|$. Индекс принимает значения в интервале от -1 до 1 , при этом в задачах обработки естественных изображений практически все значения находятся в интервале $[0, 1]$. Значения, близкие к 1 , соответствуют высокой структурной близости локальных фрагментов изображений, а значения, близкие к 0 и ниже, указывают на существенные различия [42]. Среднее значение SSIM по выборке равно $0,58$, стандартное отклонение — $0,2$, минимальное значение равно $0,04$, максимальное — 1 . Полученные значения показывают, что в значительной части случаев восстановленные фрагменты обладают умеренной структурной близостью к исходным. В качестве примера на рис. 4 приведен

результат обработки изображения из начала выборки. Полный набор изображений из эксперимента, маски, соответствующие поврежденным областям, и результаты обработки доступны по ссылке <https://data.mendeley.com/datasets/njys4dghg8/1>.

5 Заключение

В данной работе рассмотрена задача восстановления цветных трехканальных изображений (inpainting) на основе процессов анизотропной нелинейной диффузии, решаемых с помощью параллельного алгоритма для РУБ. В качестве приложения нового метода рассмотрены задачи удаления протяженных дефектов с изображений, в частности оценена точность метода для выборки из 10 000 изображений (среднее SSIM равно $0,58$), на которых случайным образом выделены поврежденные области.

Предложенный метод реализует направленное продолжение информации в область дефекта. Восстановление определяется исключительно структурой изображения в окрестности границы поврежденной области. Следовательно, если дефект перекрывает значимую часть объекта, полностью уничтожая его визуальные признаки, то алгоритм не может «догадаться» о существовании объекта и он не появится в результате восстановления.

Напротив, если дефект имеет такую форму и размеры, что правдоподобное продолжение возможно за счет продления направленных структур или однородного фона внутрь, то метод демонстрирует корректную работу, что подтверждается численными экспериментами. Однако имеют место ограничения, связанные с размером дефекта. Так, при постоянном радиусе размытия для точек внутри поврежденной области уменьшается число пикселей,

участвующих в сглаживании компонент структурной матрицы. Другими словами, снижается количество информации о направленности структур в окрестности таких точек, и качество восстановления ухудшается. При этом увеличение радиуса размытия помимо негативного влияния на производительность алгоритма может сказаться и на качестве восстановления значений интенсивности в пикселях, расположенных вблизи границы дефекта. В таком случае при анализе сглаженных градиентов интенсивности будет учитываться вклад от структур, возможно, не относящихся к интересующей области. Вероятным решением данной проблемы представляется динамическое определение радиуса размытия в зависимости от положения пикселя в области дефекта. Рассмотрение этого вопроса, а также подбор оптимальных метрик для оценки качества восстановления планируются в дальнейших работах.

В заключение отметим дополнительные направления будущих исследований. Интерес представляет продолжение разработки алгоритмов параллельных расчетов для РУБ, в том числе с использованием GPU (graphics processing unit). Также перспективным выглядит построение алгоритмов восстановления изображений на основе РУБ для диффузионных уравнений более высокого порядка (с гипердиффузионными членами).

Автор выражает благодарность Олегу Ильину за ценные обсуждения и замечания.

Литература

- McNamara G., Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice gas automata // *Phys. Rev. Lett.*, 1988. Vol. 61. Iss. 20. P. 2332–2335. doi: 10.1103/PhysRevLett.61.2332.
- Guo Z., Shu C. Lattice Boltzmann method and its applications in engineering. — Singapore: World Scientific Pubs., 2013. 404 p. doi: 10.1142/8806.
- Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Vigen E. The lattice Boltzmann method: Principles and practice. — Cham: Springer, 2017. 694 p. doi: 10.1007/978-3-319-44649-3.
- Succi S. The lattice Boltzmann equation: For complex states of flowing matter. — Oxford: Oxford University Press, 2018. 784 p. doi: 10.1093/oso/9780199592357.001.0001.
- Succi S. Lattice fluid dynamics: Thirty-five years down the road // *CR Mecanique*, 2022. Vol. 350. P. 207–218. doi: 10.5802/crmeca.161.
- Flekkoy E. Lattice Bhatnagar–Gross–Krook models for miscible fluids // *Phys. Rev. E*, 1993. Vol. 47. Iss. 6. P. 4247–4257. doi: 10.1103/PhysRevE.47.4247.
- Wolf-Gladrow D. Lattice Boltzmann equation for diffusion // *J. Stat. Phys.*, 1995. Vol. 79. P. 1023–1032. doi: 10.1007/BF02181215.
- Suga S. Numerical schemes obtained from lattice Boltzmann equations for advection–diffusion equations // *Int. J. Mod. Phys. C*, 2006. Vol. 17. No. 11. P. 1563–1577. doi: 10.1142/S0129183106010030.
- Suga S. Stability and accuracy of lattice Boltzmann schemes for anisotropic advection–diffusion equations // *Int. J. Mod. Phys. C*, 2009. Vol. 20. Iss. 04. P. 633–650. doi: 10.1142/S0129183109013856.
- Chai Z., Zhao T.S. Lattice Boltzmann model for the convection–diffusion equation // *Phys. Rev. E*, 2013. Vol. 87. Iss. 6. Art. 063309. doi: 10.1103/PhysRevE.87.063309.
- Chen Y., Chai Z., Shi B. A general fourth-order mesoscopic multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model and its macroscopic finite-difference scheme for two-dimensional diffusion equations // *J. Comput. Phys.*, 2024. Vol. 509. Art. 113045. doi: 10.1016/j.jcp.2024.113045.
- Shi B., Guo Z. Lattice Boltzmann model for nonlinear convection–diffusion equations // *Phys. Rev. E*, 2009. Vol. 79. Iss. 1. Art. 016701. doi: 10.1103/PhysRevE.79.016701.
- Yoshida H., Nagaoka M. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for the convection and anisotropic diffusion equation // *J. Comput. Phys.*, 2010. Vol. 229. Iss. 20. P. 7774–7795. doi: 10.1016/j.jcp.2010.06.037.
- Chai Z., Shi B., Guo Z. A multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for general nonlinear anisotropic convection–diffusion equations // *J. Sci. Comput.*, 2016. Vol. 69. P. 355–390. doi: 10.1007/s10915-016-0198-5.
- Perona P., Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion // *IEEE T. Pattern Anal.*, 1990. Vol. 12. Iss. 7. P. 629–639. doi: 10.1109/34.56205.
- Weickert J. Anisotropic diffusion in image processing. — Stuttgart: Teubner, 1998. 182 p.
- Jawerth B., Lin P., Sinzinger E. Lattice Boltzmann models for anisotropic diffusion of images // *J. Math. Imaging Vis.*, 1999. Vol. 11. P. 231–237. doi: 10.1023/A:1008304519705.
- Zhang W., Shi B. Application of lattice Boltzmann method to image filtering // *J. Math. Imaging Vis.*, 2012. Vol. 43. P. 135–142. doi: 10.1007/s10851-011-0295-x.
- Rudin L., Osher S., Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms // *Physica D*, 1992. Vol. 60. Iss. 1–4. P. 259–268. doi: 10.1016/0167-2789(92)90242-F.
- Chang Q., Yang T. A lattice Boltzmann method for image denoising // *IEEE T. Image Process.*, 2009. Vol. 18. Iss. 12. P. 2797–2802. doi: 10.1109/TIP.2009.2028369.
- Chen J., Chai Z., Shi B., Zhang W. Lattice Boltzmann method for filtering and contour detection of the natural images // *Comput. Math. Appl.*, 2014. Vol. 68. Iss. 3. P. 257–268. doi: 10.1016/j.camwa.2014.05.023.

22. Michelet J., Tekitek M. M., Berthier M. Multiple relaxation time lattice Boltzmann schemes for advection–diffusion equations with application to radar image processing // *J. Comput. Phys.*, 2022. Vol. 471. Art. 111612. doi: 10.1016/j.jcp.2022.111612.
23. Chen Yu, Yan Z., Shi J. Application of lattice Boltzmann method to image segmentation // 29th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. — Lyon, France: IEEE, 2007. P. 6561–6564. doi: 10.1109/IEMBS.2007.4353863.
24. Chen Yu, Yan Z., Qian Y. An anisotropic diffusion model for medical image smoothing by using the lattice Boltzmann method // 7th Asian-Pacific Conference on Medical and Biological Engineering / Eds. Yi Peng, W. Xiaohong. — IFMBE Proceedings ser. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. Vol. 19. P. 255–259. doi: 10.1007/978-3-540-79039-6_65.
25. Chen Yu, Navarro L., Wang Y., Courbebaisse G. Segmentation of the thrombus of giant intracranial aneurysms from CT angiography scans with lattice Boltzmann method // *Med. Image Anal.*, 2014. Vol. 18. Iss. 1. P. 1–8. doi: 10.1016/j.media.2013.08.003.
26. Nguyen K. L., Tekitek M. M., Delachartre P., Berthier M. Multiple relaxation time lattice Boltzmann models for multigrid phase-field segmentation of tumors in 3D ultrasound images // *SIAM J. Imaging Sci.*, 2019. Vol. 12. Iss. 3. P. 1324–1346. doi: 10.1137/18M123462X.
27. Ilyin O. Lattice Boltzmann model for diffusion equation with reduced truncation errors: Applications to Gaussian filtering and image processing // *Appl. Math. Comput.*, 2023. Vol. 456. Iss. 1. P. 128123. doi: 10.1016/j.amc.2023.128123.
28. Ilyin O. Lattice Boltzmann algorithm for vessel enhancement problems // *Lobachevskii J. Mathematics*, 2024. Vol. 45. P. 5823–5830. doi: 10.1134/S1995080224606714.
29. Weickert J. Coherence-enhancing diffusion filtering // *Int. J. Comput. Vision*, 1999. Vol. 31. P. 111–127. doi: 10.1023/A:1008009714131.
30. Chan T. F., Kang S. H., Shen J. EulerTs elastica and curvature-based inpainting // *SIAM J. Appl. Math.*, 2003. Vol. 63. Iss. 2. P. 564–592. doi: 10.1137/S0036139901390088.
31. Chan T. F., Shen J. Variational image inpainting // *Communications Pure Applied Mathematics*, 2005. Vol. 58. P. 579–619. doi: 10.1002/cpa.20075.
32. Bertozzi A. L., Esedoglu S., Gillette A. Inpainting of binary images using the Cahn–Hilliard equation // *IEEE T. Image Process.*, 2007. Vol. 16. No. 1. P. 285–291. doi: 10.1109/TIP.2006.887728.
33. Bertozzi A. L., Esedoglu S., Gillette A. Analysis of a two-scale Cahn–Hilliard model for binary image inpainting // *Multiscale Model. Sim.*, 2007. Vol. 6. Iss. 3. P. 913–936. doi: 10.1137/060660631.
34. Bertozzi A. L., Schonlieb C. B. Unconditionally stable schemes for higher order inpainting // *Commun. Math. Sci.*, 2011. Vol. 9. No. 2. P. 413–457. doi: 10.4310/CMS.2011.v9.n2.a4.
35. Alvarez L., Mazorra L. Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1994. Vol. 31. Iss. 2. P. 590–605. doi: 10.1137/0731032.
36. Schaefer K., Weickert J. Regularised diffusion–shock inpainting // *J. Math. Imaging Vis.*, 2024. Vol. 66. P. 447–463. doi: 10.1007/s10851-024-01175-0.
37. Novak A., Reinić N. Shock filter as the classifier for image inpainting problem using the Cahn–Hilliard equation // *Comput. Math. Appl.*, 2022. Vol. 123. P. 105–114. doi: 10.1016/j.camwa.2022.07.021.
38. Королев Д. О., Малеев О. Г. Исследование эффективности применения бинарных нейронных сетей при детектировании объекта на изображении // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 88–92. doi: 10.14357/19922264230312.
39. Коваленко А. С. Применение разложения изображения с помощью дискретного вейвлет-преобразования для построения архитектуры шумоподавляющей нейронной сети // *Информатика и её применения*, 2024. Т. 18. Вып. 2. С. 60–71. doi: 10.14357/19922264240209.
40. Достовалова А. М. Нейросетевое квадродерево и его применение для сегментирования спутниковых изображений // *Информатика и её применения*, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 77–85. doi: 10.14357/19922264240410.
41. Zhou B., Lapedriza A., Khosla A., Oliva A., Torralba A. Places: A 10 million image database for scene recognition // *IEEE T. Pattern Anal.*, 2018. Vol. 40. Iss. 6. P. 1452–1464. doi: 10.1109/TPAMI.2017.2723009.
42. Zhou W., Bovik A., Sheikh H., Simoncelli E. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity // *IEEE T. Image Process.*, 2004. Vol. 13. Iss. 4. P. 600–612. doi: 10.1109/TIP.2003.819861.

Поступила в редакцию 02.09.2025

Принята к публикации 15.11.2025

COLOR IMAGE RESTORATION VIA THE LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR ANISOTROPIC NONLINEAR DIFFUSION

G. A. Chumarin^{1,2}

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

²M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation

Abstract: The work proposes a method for restoring damaged regions of color three-channel images (the inpainting problem) based on the equation of nonlinear anisotropic diffusion. As the numerical solution algorithm, the lattice Boltzmann equation with five discrete velocities and multiple relaxation times is employed. The direction and intensity of the smoothing are determined using the structure matrix. A parallel implementation of the algorithm has been developed using MPI (Message Passing Interface) technology with image domain decomposition in a Cartesian topology. The application of the proposed method to images with defects of various shapes and sizes is examined. The results demonstrate the correctness of structural and color information restoration in the damaged regions. The accuracy of the method is evaluated on a test set of 10,000 images, and the execution times of sequential and parallel versions of the algorithm are compared.

Keywords: image restoration; inpainting; lattice Boltzmann equations; anisotropic diffusion

DOI: 10.14357/19922264250406

EDN: UDCGCC

Acknowledgments

The author is grateful to Oleg Ilyin for valuable discussions and comments.

References

- McNamara, G., and G. Zanetti. 1988. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice gas automata. *Phys. Rev. Lett.* 61(20):2332–2335. doi: 10.1103/PhysRevLett.61.2332.
- Guo, Z., and C. Shu. 2013. *Lattice Boltzmann method and its applications in engineering*. Singapore: World Scientific Publ. 404 p. doi: 10.1142/8806.
- Kruger, T., H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, and E. Vigen. 2017. *The lattice Boltzmann method: Principles and practice*. Cham: Springer. 694 p. doi: 10.1007/978-3-319-44649-3.
- Succi, S. 2018. *The lattice Boltzmann equation: For complex states of flowing matter*. Oxford: Oxford University Press. 784 p. doi: 10.1093/oso/9780199592357.001.0001.
- Succi, S. 2022. Lattice fluid dynamics: Thirty-five years down the road. *CR Mecanique* 350:207–218. doi: 10.5802/crmeca.161.
- Flekkoy, E. 1993. Lattice Bhatnagar–Gross–Krook models for miscible fluids. *Phys. Rev. E* 47(6):4247–4257. doi: 10.1103/PhysRevE.47.4247.
- Wolf-Gladrow, D. 1995. Lattice Boltzmann equation for diffusion. *J. Stat. Phys.* 79:1023–1032. doi: 10.1007/BF02181215.
- Suga, S. 2006. Numerical schemes obtained from lattice Boltzmann equations for advection–diffusion equations. *Int. J. Mod. Phys. C* 17(11):1563–1577. doi: 10.1142/S0129183106010030.
- Suga, S. 2009. Stability and accuracy of lattice Boltzmann schemes for anisotropic advection–diffusion equations. *Int. J. Mod. Phys. C* 20(04):633–650. doi: 10.1142/S0129183109013856.
- Chai, Z., and T. S. Zhao. 2013. Lattice Boltzmann model for the convection–diffusion equation. *Phys. Rev. E* 87(6):063309. doi: 10.1103/PhysRevE.87.063309.
- Chen, Y., Z. Chai, and B. Shi. 2024. A general fourth-order mesoscopic multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model and its macroscopic finite-difference scheme for two-dimensional diffusion equations. *J. Comput. Phys.* 509:113045. doi: 10.1016/j.jcp.2024.113045.
- Shi, B., and Z. Guo. 2009. Lattice Boltzmann model for nonlinear convection–diffusion equations. *Phys. Rev. E* 79(1):016701. doi: 10.1103/PhysRevE.79.016701.
- Yoshida, H., and M. Nagaoka. 2010. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for the convection and anisotropic diffusion equation. *J. Comput. Phys.* 229(20):7774–7795. doi: 10.1016/j.jcp.2010.06.038.
- Chai, Z., B. Shi, and Z. Guo. 2016. A multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for general nonlinear anisotropic convection–diffusion equations. *J. Sci. Comput.* 69:355–390. doi: 10.1007/s10915-016-0198-5.
- Perona, P., and J. Malik. 1990. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE T. Pattern Anal.* 12(7):629–639. doi: 10.1109/34.56205.
- Weickert, J. 1998. *Anisotropic diffusion in image processing*. Stuttgart: Teubner. 182 p.
- Jawerth, B., P. Lin, and E. Sinzinger. 1999. Lattice Boltzmann models for anisotropic diffusion of images. *J. Math. Imaging Vis.* 11:231–237. doi: 10.1023/A:1008304519705.
- Zhang, W., and B. Shi. 2012. Application of lattice Boltzmann method to image filtering. *J. Math. Imaging Vis.* 43:135–142. doi: 10.1007/s10851-011-0295-x.
- Rudin, L., S. Osher, and E. Fatemi. 1992. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D* 60(1-4):259–268. doi: 10.1016/0167-2789(92)90242-F.

20. Chang, Q., and T. Yang. 2009. A lattice Boltzmann method for image denoising. *IEEE T. Image Process.* 18(12):2797–2802. doi: 10.1109/TIP.2009.2028369.
21. Chen, J., Z. Chai, B. Shi, and W. Zhang. 2014. Lattice Boltzmann method for filtering and contour detection of natural images. *Comput. Math. Appl.* 68(3):257–268. doi: 10.1016/j.camwa.2014.05.023.
22. Michelet, J., M. M. Tekitek, and M. Berthier. 2022. Multiple relaxation time lattice Boltzmann schemes for advection–diffusion equations with application to radar image processing. *J. Comput. Phys.* 471:111612. doi: 10.1016/j.jcp.2022.111612.
23. Chen, Yu, Z. Yan, and J. Shi. 2007. Application of lattice Boltzmann method to image segmentation. *29th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. Lyon, France: IEEE. 6561–6564. doi: 10.1109/IEMBS.2007.4353863.
24. Chen, Yu, Z. Yan, and Y. Qian. 2008. An anisotropic diffusion model for medical image smoothing by using the lattice Boltzmann method. *7th Asian-Pacific Conference on Medical and Biological Engineering*. Eds. Yi Peng, and W. Xiaohong. IFMBE Proceedings ser. Berlin, Heidelberg: Springer. 19:255–259. doi: 10.1007/978-3-540-79039-6_65.
25. Chen, Yu, L. Navarro, Y. Wang, and G. Courbebaisse. 2014. Segmentation of the thrombus of giant intracranial aneurysms from CT angiography scans with lattice Boltzmann method. *Med. Image Anal.* 18(1):1–8. doi: 10.1016/j.media.2013.08.003.
26. Nguyen, K. L., M. M. Tekitek, P. Delachartre, and M. Berthier. 2019. Multiple relaxation time lattice Boltzmann models for multigrid phase-field segmentation of tumors in 3D ultrasound images. *SIAM J. Imaging Sci.* 12(3):1324–1346. doi: 10.1137/18M123462X.
27. Ilyin, O. 2023. Lattice Boltzmann model for diffusion equation with reduced truncation errors: Applications to Gaussian filtering and image processing. *Appl. Math. Comput.* 456(1):128123. doi: 10.1016/j.amc.2023.128123.
28. Ilyin, O. 2024. Lattice Boltzmann algorithm for vessel enhancement problems. *Lobachevskii J. Mathematics* 45:5823–5830. doi: 10.1134/S1995080224606714.
29. Weickert, J. 1999. Coherence-enhancing diffusion filtering. *Int. J. Comput. Vision* 31:111–127. doi: 10.1023/A:1008009714131.
30. Chan, T. F., S. H. Kang, and J. Shen. 2003. Euler’s elasticity and curvature-based inpainting. *SIAM J. Appl. Math.* 63(2):564–592. doi: 10.1137/S0036139901390088.
31. Chan, T. F., and J. Shen. 2005. Variational image inpainting. *Communications Pure Applied Mathematics* 58:579–619. doi: 10.1002/cpa.20075.
32. Bertozzi, A. L., S. Esedoglu, and A. Gillette. 2007. Inpainting of binary images using the Cahn–Hilliard equation. *IEEE T. Image Process.* 16(1):285–291. doi: 10.1109/TIP.2006.887728.
33. Bertozzi, A. L., S. Esedoglu, and A. Gillette. 2007. Analysis of a two-scale Cahn–Hilliard model for image inpainting. *Multiscale Model. Sim.* 6(3):913–936. doi: 10.1137/060660631.
34. Bertozzi, A. L., and C. B. Schonlieb. 2011. Unconditionally stable schemes for higher order inpainting. *Commun. Math. Sci.* 9(2):413–457. doi: 10.4310/CMS.2011.v9.n2.a4.
35. Alvarez, L., and L. Mazon. 1994. Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion. *SIAM J. Numer. Anal.* 31(2):590–605. doi: 10.1137/0731032.
36. Schaefer, K., and J. Weickert. 2024. Regularised diffusion—shock inpainting. *J. Math. Imaging Vis.* 66:447–463. doi: 10.1007/s10851-024-01175-0.
37. Novak, A., and N. Reinić. 2022. Shock filter as the classifier for image inpainting problem using the Cahn–Hilliard equation. *Comput. Math. Appl.* 123:105–14. doi: 10.1016/j.camwa.2022.07.021.
38. Korolev, D. O., and O. G. Maleev. 2023. Issledovanie effektivnosti primeneniya binarnykh neyronnykh setey pri detektirovanii ob’ekta na izobrazhenii [Efficiency of binary neural networks for object detection on an image]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):88–92. doi: 10.14357/19922264230312.
39. Kovalenko, A. S. 2024. Primenenie razlozheniya izobrazheniya s pomoshch’yu diskretnogo veyvlet-preobrazovaniya dlya postroeniya arkhitektury shumopodavlyayushchey neyronnoy seti [Image decomposition with discrete wavelet transform to design a denoising neural network]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 8(2):60–71. doi: 10.14357/19922264240209.
40. Dostovalova, A. M. 2024. Neyrosetevoe kvadroderevo i ego primeneniye dlya segmentirovaniya sputnikovykh izobrazheniy [Neural quadtree and its applications for sar imagery segmentation]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):77–85. doi: 10.14357/19922264240410.
41. Zhou, B., A. Lapedriza, A. Khosla, A. Oliva, and A. Torralba. 2018. Places: A 10 million image database for scene recognition. *IEEE T. Pattern Anal.* 40(6):1452–1464. doi: 10.1109/TPAMI.2017.2723009.
42. Zhou, W., A. Bovik, H. Sheikh, and E. Simoncelli. 2004. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity. *IEEE T. Image Process.* 13(4):600–612. doi: 10.1109/TIP.2003.819861.

Received September 2, 2025

Accepted November 15, 2025

Contributor

Chumarin Grigory A. (b. 2003) — mathematician, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; student, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation; chumaringa@gmail.com

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО КВАНТИЛЬНОМУ КРИТЕРИЮ ПОЗИЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ ТЕСТИРУЕМОГО В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОХОЖДЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО ПО ВРЕМЕНИ ТЕСТА

С. В. Иванов¹, Я. Г. Мартюшова², А. В. Наумов³, А. Е. Степанов⁴

Аннотация: Рассматривается задача построения оптимальной программной и позиционной стратегии в динамической модели прохождения ограниченного по времени теста. Тестируемый последовательно решает задания теста, набирая за каждое задание определенное число баллов в случае правильного решения. Правильность решения тестируемым каждого задания моделируется случайной величиной с распределением Бернулли. Случайным считается также время, затраченное на решение каждого задания. В качестве позиционной стратегии выступает функция от числа баллов, набранных после решения очередного задания, и суммарного времени, затраченного на решения предыдущих заданий теста. Функция принимает значение единица, если тестируемый решает очередное задание, и ноль, если пропускает. В качестве критерия выступает число набранных за тест баллов, превышение которого при одновременном выполнении ограничения на время выполнения теста гарантируется с выбранным заранее уровнем доверительной вероятности, выступающим параметром задачи. Для решения рассматриваемых задач используется свойство эквивалентности между задачей с квантильным критерием и задачей максимизации соответствующей функции вероятности, после чего используется модификация предложенного ранее авторами алгоритма решения аналогичной задачи с вероятностным критерием качества.

Ключевые слова: ограниченный по времени тест; динамическая модель; позиционная стратегия; квантильный критерий

DOI: 10.14357/19922264250407

EDN: LZGUSS

1 Введение

Теория адаптивного тестирования и обучения активно развивается на протяжении последних десятилетий [1–9]. Как правило, целью адаптации ставится формирование индивидуальной траектории обучения или прохождения теста [5–7]. Адаптация происходит на основе обработки статистики решения тестируемыми заданий, аналогичных заданиям в тесте. Такая статистика обычно хранится в современных компьютеризированных системах обучения и тестирования, например в системе дистанционного обучения CLASS.NET [10, 11] Московского авиационного института. Для достижения цели адаптации используются современные методы машинного обучения и искусственного интеллекта [6, 7, 12]. Для учета влияния случайных факторов на процесс принятия решения в системах тестирования используются случайные величины с различными законами распределения [2, 13, 14]. Достаточно полный обзор современных подходов

к формированию адаптивных тестов В рамках теории CAT (computerized adaptive testing) предложен в первой части работы [15]. Все рассмотренные в этой работе подходы направлены на формирование организаторами тестирования наилучших по определенному критерию тестов с целью наиболее объективного оценивания уровня знаний тестируемых.

Структура теста часто известна заранее, например при подготовке абитуриентов к сдаче единого государственного экзамена (ЕГЭ). Это побуждает тестируемых вырабатывать собственную стратегию прохождения теста, исходя из целей, которые они ставят перед собой. Подобные задачи рассмотрены в работах [16–19]. При этом в работах [16–18] рассматриваются статические модели поиска оптимальной программной стратегии тестируемого в виде набора заданий теста, которые предполагаются к решению в выделяемое на тест время. В качестве критериев выбора стратегии рассматриваются вероятностный [16], квантильный [17] и критерий

¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), sergeyivanov89@mail.ru

² Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), mal554@mail.ru

³ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), naumovav@mail.ru

⁴ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Rus.fta@yandex.ru

в форме математического ожидания среднего числа набранных за тест баллов [18], который максимизируется при условии выполнения вероятностного ограничения на время выполнения теста. В работе [19] рассматривается вероятностная модель прохождения ограниченного по времени теста, когда ищется позиционная стратегия тестируемого как функция от набранного числа баллов и затраченного на решения времени после решения очередного задания теста. В качестве критерия выступает вероятность набора тестируемым за тест не менее некоторого фиксированного числа баллов.

В данной работе продолжается исследование динамической модели прохождения ограниченного по времени теста, но, в отличие от [19], рассматривается квантильный критерий. Приводятся условия эквивалентности по стратегии рассматриваемой задачи и задачи с вероятностным критерием [19]. Доказывается соответствующее утверждение. Приводятся результаты численного эксперимента.

2 Описание модели и задачи синтеза управления

Рассматривается динамическая система, описывающая прохождение тестирования студентом [19]. Переменными состояниями в этой системе служат T_k — время, затраченное на выполнение первых k заданий, и S_k — суммарный балл, набранный за решения этих заданий, $k = \overline{1, n}$.

Стратегия студента определяется набором переменных $u = (u_1, \dots, u_n)$, в котором $u_k = 1$, если студент пытается решать k -е задание, и $u_k = 0$, если k -е задание пропускается. За правильное решение k -й задачи студент получает b_k баллов. Будем считать, что b_k — натуральные числа. Правильность выполнения k -го задания описывается случайной величиной X_k , которая равна 1, если k -е задание выполнено верно, и 0 в противном случае.

Время выполнения теста ограничено величиной \bar{T} . Время выполнения k -го задания описывается случайной величиной τ_k . Предполагается, что распределение случайной величины τ_k дискретное с конечным числом возможных исходов. Также предполагается, что для всех $k = \overline{2, n}$ сигма-алгебра, порожденная случайными величинами X_k и τ_k , не зависит от сигма-алгебры, порожденной случайными величинами $X_1, \dots, X_{k-1}, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}$. Это предположение означает, что ответ на текущие вопросы теста не влияет на дальнейшее прохождение тестирования.

Таким образом, динамическая система имеет вид:

$$S_k = S_{k-1} + b_k X_k I \{T_k \leq \bar{T}\} u_k; \quad (1)$$

$$T_k = T_{k-1} + \tau_k u_k; \quad (2)$$

$$T_0 = 0, \quad S_0 = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

где $I\{\cdot\}$ — индикатор события, стоящего в скобках, равный 1, если условие выполнено, и 0 в противном случае.

Введем функцию вероятности, равную вероятности получения балла не менее φ :

$$P_{\varphi, \bar{T}}^1 = \mathbf{P}\{S(u) \geq \varphi\},$$

где $S(u)$ — случайная сумма баллов, равная величине S_n , при выбранном управлении u , а под $\mathbf{P}\{\cdot\}$ понимается вероятность события, стоящего в скобках. Описанное выше управление u определяет программную стратегию.

Если студенту при решении k -й задачи доступна информация о правильности решения предыдущих заданий и прошедшем с начала тестирования времени, может быть использована позиционная стратегия. Позиционная стратегия определяется значениями функций $\mathbf{u}_k(T_{k-1}, S_{k-1})$, $k = \overline{1, n}$, равными 1, если студент пытается решать k -е задание, и 0, если k -е задание пропускается. Предполагается, что T_{k-1} и S_{k-1} принадлежат конечным множествам \mathbb{T}_{k-1} и \mathbb{S}_{k-1} соответственно. Позиционная стратегия обозначается через $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, а через $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ — случайная сумма баллов S_n , определяемая уравнениями (1) и (2) при подстановке в них $u_k = \mathbf{u}_k(T_{k-1}, S_{k-1})$, $k = \overline{1, n}$. Функция вероятности при использовании позиционной стратегии имеет вид:

$$P_{\varphi, \bar{T}}^2(\mathbf{u}) = \mathbf{P}\{\mathbf{S}(\mathbf{u}) \geq \varphi\}.$$

В данной статье рассматриваются задачи максимизации функций квантили

$$\varphi_\alpha^1(u) = \max \left\{ \varphi | P_{\varphi, \bar{T}}^1(u) \geq \alpha \right\} \rightarrow \max_{u \in \{0,1\}^n}; \quad (3)$$

$$\varphi_\alpha^2(\mathbf{u}) = \max \left\{ \varphi | P_{\varphi, \bar{T}}^2(\mathbf{u}) \geq \alpha \right\} \rightarrow \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}}, \quad (4)$$

где $\alpha \in (0; 1)$ — заранее выбранный уровень надежности; \mathcal{U} — множество всех функций из $\otimes_{k=0}^{n-1} \mathbb{T}_k \times \mathbb{S}_k$ в множество $\{0, 1\}^n$. Значение функции квантили показывает максимальный балл, гарантированный с вероятностью не менее α .

3 Сведение задачи квантильной оптимизации к задаче максимизации вероятности

В [19] рассматривались задачи максимизации функций вероятности

$$u_\varphi^* = (u_1, \dots, u_n) \in \arg \max_{u \in \{0,1\}^n} P_{\varphi, \bar{T}}^1(u); \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_\varphi^* = (\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_n^*) \in \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} P_{\varphi, \bar{T}}^2(\mathbf{u}). \quad (6)$$

Алгоритмы решения данных задач представлены в [19].

Опишем, каким образом из решения задачи (5) можно получить решение задачи (6). Поскольку баллы b_k целочисленны, функция $\varphi \mapsto P_{\varphi, \bar{T}}^1(u)$ кусочно-постоянная со скачками в целочисленных значениях φ . Будем считать, что известны решения задач (5) для всех целочисленных значений $\varphi \in \{0, \dots, \bar{b}\}$, где $\bar{b} = \sum_{k=1}^n b_k$. Введем функцию $P^*(\varphi) = \max_{u \in \{0,1\}^n} P_{\varphi, \bar{T}}^1(u)$.

Утверждение. Пусть для целочисленных $\varphi_1 < \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \{0, \dots, \bar{b}\}$, выполнено неравенство $P^*(\varphi_1) > P^*(\varphi_2)$. Тогда для всех $\varphi \in \{0, \dots, \bar{b}\}$ стратегия u_φ^* будет решением задачи (3) при любых $\alpha \in (P^*(\varphi + 1), P^*(\varphi)]$.

Доказательство. Справедливо следующее соотношение, известное как лемма Розенблатта [20]:

$$\begin{aligned} \{u \in \{0,1\}^n | P_{\varphi, \bar{T}}^1(u) \geq \alpha\} &= \\ &= \{u \in \{0,1\}^n | \varphi_\alpha^1(u) \geq \varphi\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $P^*(\varphi) = P_{\varphi, \bar{T}}^1(u_\varphi^*) = \alpha^*$, $P^*(\varphi + 1) = \alpha' < \alpha^*$. Из (7) следует, что $\varphi_{\alpha^*}^1(u_\varphi^*) \geq \varphi$. Предположим, что $\varphi_{\alpha'}^1(u_\varphi^*) = \varphi' > \varphi$. Отметим, что φ' — целочисленное. Тогда из монотонности функции $\varphi \mapsto P^*(\varphi)$ следует неравенство $P^*(\varphi') < \alpha^*$, которое противоречит равенству (7). Поэтому $\varphi_{\alpha^*}^1(u_\varphi^*) = \varphi$. Это равенство доказывает оптимальность u_φ^* в задаче (3) для $\alpha = P^*(\varphi)$.

Если $\alpha \in (P^*(\varphi + 1), P^*(\varphi)]$, то для всех u выполнено $P_{\varphi+1, \bar{T}}^1(u) < \alpha$. Тогда из (7) следует, что $\varphi_\alpha^1(u) < \varphi + 1$ или $\varphi_\alpha^1(u) \leq \varphi$ (поскольку φ целочисленно). С другой стороны, из (7) получается неравенство $\varphi_\alpha^1(u_\varphi^*) \geq \varphi$. Это и означает оптимальность u_φ^* в задаче (3). Утверждение доказано.

Аналогичное утверждение верно и для задачи (4). Его доказательство полностью аналогично приведенному выше доказательству для задачи (3).

Приведем краткие описания алгоритмов решения задач (5) и (6) из статьи [19]. Значение целевой функции (5) при фиксированной программной

стратегии u может быть вычислено с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} B_{n+1}^u(T_n, S_n) &= I\{S_n \geq \varphi\}; \\ B_k^u(T_{k-1}, S_{k-1}) &= \\ &= \mathbf{M}[B_{k+1}^u(T_{k-1} + \tau_k u_k, S_{k-1} + \\ &+ b_k X_k I\{T_{k-1} + \tau_k u_k \geq \bar{T}\}) | T_{k-1}, S_{k-1}]. \end{aligned}$$

Из формулы полной вероятности следует, что $P_{\varphi, \bar{T}}^1(u) = B_1^u(0, 0)$. Выбор оптимальной стратегии u может быть осуществлен с помощью алгоритма, основанного на методе ветвей и границ [19].

Для решения задачи (6) используется метод динамического программирования, соотношения которого имеют вид:

$$\begin{aligned} B_{n+1}(T_n, S_n) &= I\{S_n \geq \varphi\}; \\ B_k(T_{k-1}, S_{k-1}) &= \\ &= \max_{u_k \in \{0,1\}} \mathbf{M}[B_{k+1}(T_{k-1} + \tau_k u_k, S_{k-1} + \\ &+ b_k X_k I\{T_{k-1} + \tau_k u_k \leq \bar{T}\}) | T_{k-1}, S_{k-1}]. \end{aligned}$$

В результате вычислений по приведенным формулам получится оптимальное значение целевой функции в задаче (6):

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} P_{\varphi, \bar{T}}^2(\mathbf{u}) = B_1(0, 0).$$

4 Численные результаты

Задачи с квантильным критерием для поиска программных и позиционных стратегий в динамической модели тестирования были успешно решены для данных из статьи [16]. В рассматриваемом тесте имеются 10 заданий, за которые можно получить баллы $b_1 = \dots = b_5 = 1$, $b_6 = b_8 = 2$, $b_7 = b_{10} = 3$ и $b_9 = 4$. Известны вероятности правильных ответов на каждое из заданий. Каждой задаче сопоставляются три возможные реализации времени решения в случае правильного решения и три реализации в случае неправильного решения, условные вероятности которых известны и приведены в [16]. Будем считать, что на прохождения теста выделяется $\bar{T} = 2700$ с (45 мин).

В табл. 1 приведены решения задач (5) и (6) в зависимости от параметра φ . Указано время счета при использовании алгоритмов из [19] для поиска программной (прогр.) и позиционной (поз.) стратегий соответственно.

На основании полученных результатов можно построить зависимость решения задачи (3) от уровня α . Данные результаты приведены в табл. 2. Аналогичная зависимость для задачи (4) приведена в табл. 3.

Таблица 1 Зависимость решений задач (5) и (6) от параметра φ

φ	Оптимальная программная стратегия u^*	$P_{\varphi, \bar{T}}^1(u^*)$	$\max_{u \in U} P_{\varphi, \bar{T}}^2(u)$	Время счета (прогр. / поз.), с
4	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,9997	0,9997	0,16 / 0,11
5	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,9973	0,9980	0,16 / 0,11
6	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,9893	0,9924	0,16 / 0,11
7	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,9725	0,9798	0,17 / 0,08
8	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,9262	0,9436	0,49 / 0,10
9	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,8721	0,9072	0,15 / 0,09
10	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,7735	0,8329	0,39 / 0,12
11	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,6956	0,7283	0,41 / 0,09
12	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,5504	0,6362	0,38 / 0,10
13	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,4374	0,4868	0,43 / 0,12

Таблица 2 Зависимость решения задачи (3) от параметра α

α	Оптимальная программная стратегия u^*	$\varphi_{\alpha}^1(u^*)$
(0,9973; 0,9997]	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	4
(0,9893; 0,9973]	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	5
(0,9725; 0,9893]	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	6
(0,9262; 0,9725]	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	7
(0,8721; 0,9262]	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	8
(0,7735; 0,8721]	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	9
(0,6956; 0,7735]	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	10
(0,5504; 0,6956]	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	11
(0,4374; 0,5504]	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	12

Таблица 3 Зависимость решения задачи (4) от параметра α

α	$\varphi_{\alpha}^2(u^*)$
(0,9980; 0,9997]	4
(0,9924; 0,9980]	5
(0,9798; 0,9924]	6
(0,9436; 0,9798]	7
(0,9072; 0,9436]	8
(0,8329; 0,9072]	9
(0,7283; 0,8329]	10
(0,6362; 0,7283]	11
(0,4868; 0,6362]	12

Все расчеты проводились на компьютере Acer Aspire A315-54K (Intel Core i5-6300U 2,4 GHz, 8Gb RAM).

5 Заключение

Рассмотрена динамическая модель прохождения ограниченного по времени теста. Исследованы задачи с вероятностным и квантильным критериями. Доказана эквивалентность рассмотренных задач. Основываясь на доказанном свойстве и предложенном ранее алгоритме решения задачи с вероятностным критерием, авторы сформулирова-

ли модифицированный алгоритм решения задачи с критерием в форме квантили. Полученные результаты численных экспериментов демонстрируют вычислительную эффективность предложенного алгоритма. Реализация тестируемым предложенной позиционной стратегии может представляться довольно затруднительной задачей. Однако полученные в работе результаты скорее направлены на построение в адаптивных системах тестирования некоторой рекомендательной системы для тестируемого, которая на основе текущего состояния при прохождении теста выдает совет, какую следующую задачу решать тестируемому с целью наилучшей демонстрации своего уровня знаний. Кроме того, спектр практических приложений рассматриваемой в работе модели выходит далеко за рамки адаптивной теории тестирования.

Модификации предложенной модели могут быть эффективно использованы, например, в задачах логистики, подобных [21]; кроме того, в задачах анализа поведения мультиагентных систем [22], таких как управление группами роботов, для которых нужно устанавливать цели для выполнения в условиях ограниченного времени функционирования системы, и других задачах экономического характера и финансовой математики, подобных [23].

Литература

1. *Rasch G.* Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. — Chicago, IL, USA: The University of Chicago Press, 1980. 199 p.
2. *Van der Linden W.J., Scrams D.J., Schnipke D.L.* Using response-time constraints to control for differential speededness in computerized adaptive testing // *Appl. Psych. Meas.*, 1999. Vol. 23. No.3. P. 195–210. doi: 10.1177/01466219922031329.
3. *Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Алхимов В.И., Юрьев Г.А.* Новый подход к построению интеллектуальных и компетентностных тестов // *Моделирование и анализ данных*, 2013. № 1. С. 4–28. EDN: PYOMRR.
4. *Kuravsky L.S., Margolis A.A., Marmalyuk P.A., Panfilova A.S., Yuryev G.A., Dumin P.N.* A probabilistic model of adaptive training // *Applied Mathematical Sciences*, 2016. Vol. 10. No.48. P. 2369–2380. doi: 10.12988/ams.2016.65168.
5. *Наумов А.В., Мартюшова Я.Г.* Адаптация системы дистанционного обучения на основе статистической обработки результатов работы пользователей // *Труды МАИ*, 2019. № 109. Ст. 21. 13 с. doi: 10.34759/trd-2019-109-21. EDN: DTEXUO.
6. *Босов А.В., Мартюшова Я.Г., Наумов А.В., Санунова А.П.* Байесовский подход к построению индивидуальной траектории пользователя в системе дистанционного обучения // *Информатика и её применения*, 2020. Т. 14. Вып. 3. С. 86–93. doi: 10.14357/19922264200313. EDN: WAKFJR.
7. *Босов А.В.* Применение самоорганизующихся нейронных сетей к процессу формирования индивидуальной траектории обучения // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 3. С. 7–15. doi: 10.14357/19922264220302. EDN: HJQANN.
8. *Босов А.В., Иванов А.В.* Технология классификации типов контента электронного учебника // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 4. С. 63–72. doi: 10.14357/19922264220410. EDN: YERCNH.
9. *Босов А.В., Иванов А.В.* Технология многофакторной классификации математического контента электронной системы обучения // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 32–41. doi: 10.14357/19922264230405. EDN: LISHHZ.
10. *Наумов А.В., Джумурат А.С., Иноземцев А.О.* Система дистанционного обучения математическим дисциплинам CLASS.NET // *Вестник компьютерных и информационных технологий*, 2014. № 10. С. 36–44. doi: 10.14489/vkit.2014.010.pp.036-044. EDN: SQIRWX.
11. СДО МАИ CLASS.NET. <https://distance.kaf804.ru>.
12. *Мартюшова Я.Г., Минеева Т.А., Наумов А.В.* Методы классификации пользователей СДО в модели построения их индивидуальной траектории // *Системы и средства информатики*, 2023. Т. 33. № 1. С. 68–77. doi: 10.14357/08696527230107. EDN: FHLWMC.
13. *Босов А.В., Мхитарян Г.А., Наумов А.В., Санунова А.П.* Использование модели гамма-распределения в задаче формирования ограниченного по времени теста в системе дистанционного обучения // *Информатика и её применения*, 2019. Т. 13. Вып. 4. С. 11–17. doi: 10.14357/19922264190402. EDN: XUBLZX.
14. *Наумов А.В., Мхитарян Г.А., Черыгова Е.Е.* Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения // *Вестник компьютерных и информационных технологий*, 2019. № 2. С. 37–46. doi: 10.14489/vkit.2019.02.pp.037-046. EDN: TGXYNG.
15. *Xiao J., Bulut O.* Item selection with collaborative filtering in On-the-fly multistage adaptive testing // *Appl. Psych. Meas.*, 2022. Vol. 46. No.8. P. 690–704. doi: 10.1177/01466216221124089.
16. *Наумов А.В., Устинов А.Э., Степанов А.Е.* О задаче максимизации вероятности успешного прохождения ограниченного по времени теста // *Автоматика и телемеханика*, 2024. № 1. С. 83–94. doi: 10.31857/S0005231024010056. EDN: QGPKTR.
17. *Мартюшова Я.Г., Наумов А.В., Степанов А.Е.* Оптимизация прохождения ограниченного по времени теста по квантильному критерию // *Информатика и её применения*, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 44–51. doi: 10.14357/19922264240406. EDN: WVKTIIF.
18. *Степанов А.Е.* Максимизация среднего числа набранных баллов в ограниченном по времени тесте // *Моделирование и анализ данных*, 2025. Т. 15. № 1. С. 158–167. doi: 10.17759/mda.2025150109. EDN: EJSOU.
19. *Иванов С.В., Степанов А.Е.* Оптимизация по вероятностному критерию в динамической модели прохождения теста // *Автоматика и телемеханика*, 2025. № 6. С. 118–130. doi: 10.31857/S0005231025060073. EDN: IKHNWB.
20. *Rosenblatt-Roth M.* Quantiles and medians // *Ann. Math. Stat.*, 1965. Vol. 36. P. 921–925. doi: 10.1214/aoms/1177700064.
21. *Santoso T., Ahmed S., Goetschalckx M., Shapiro A.* A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty // *Eur. J. Oper. Res.*, 2005. Vol. 167. Iss. 1. P. 95–115. doi: 10.1016/j.ejor.2004.01.046.
22. *Kuravsky L.S., Popkov S.I.* Forecasting macro parameters representing the behavior of an applied multi-agent system // *Int. J. Modeling Simulation Scientific Computing*, 2018. Vol. 9. No.6. Art. 1850052. 15 p. doi: 10.1142/S1793962318500526.
23. *Игнатов А.Н.* О формировании позиционного управления в многошаговой задаче портфельной оптимизации с вероятностным критерием // *Автоматика и телемеханика*, 2020. № 12. С. 50–66. doi: 10.31857/S000523102012003X. EDN: UVZMQM.

Поступила в редакцию 21.08.2025

Принята к публикации 15.11.2025

OPTIMIZATION ACCORDING TO THE QUANTILE CRITERION OF THE TEST TAKER POSITION STRATEGY IN THE DYNAMIC MODEL OF PASSING THE TIME-LIMITED TEST

S. V. Ivanov, Ya. G. Martyushova, A. V. Naumov, and A. E. Stepanov

Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation

Abstract: The problem of building optimal program and positional strategy in dynamic model of passing time-limited test is considered. The tester sequentially solves the test tasks, gaining a certain number of points for each task in case of the correct solution. The correctness of the test of each task is modeled by a random variable with a Bernoulli distribution. The time spent on solving each task is also considered to be random. The positional strategy is a function of the number of points scored after solving the next task and the total time spent on solving previous test tasks. The function takes the value one if the tester solves the next task and zero if misses. The criterion is the number of points scored for the test, the excess of which, while simultaneously fulfilling the limit on the test execution time, is guaranteed with a predetermined level of confidence which acts as a task parameter. To solve the problems under consideration, the equivalence property is used between the problem with the quantile criterion and the problem of maximizing the corresponding probability function. After that, a modification of the algorithm for solving a similar problem with a probabilistic quality criterion proposed earlier by the authors is used.

Keywords: time-limited test; dynamic model; positional strategy; quantile criterion

DOI: 10.14357/19922264250407

EDN: LZGUSS

References

1. Rasch, G. 1980. *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Chicago, IL: University of Chicago Press. 199 p.
2. Van der Linden, W.J., D.J. Scrams, and D.L. Schnipke. 1999. Using response-time constraints to control for differential speededness in computerized adaptive testing. *Appl. Psych. Meas.* 23(3):195–210. doi: 10.1177/01466219922031329.
3. Kuravsky, L.S., P.A. Marmalyuk, V.I. Alkhimov, and G.A. Yuryev. 2013. Novyy podkhod k postroeniyu intellektual'nykh i kompetentnostnykh testov [A new approach to constructing intellectual and competence-based tests]. *Modelirovanie i analiz dannykh* [Modelling and Data Analysis] 1:4–28. EDN: PYOMRR.
4. Kuravsky, L.S., A.A. Margolis, P.A. Marmalyuk, A.S. Panfilova, G.A. Yuryev, and P.N. Dumin. 2016. A probabilistic model of adaptive training. *Applied Mathematical Sciences* 10(48):2369–2380. doi: 10.12988/ams.2016.65168.
5. Naumov, A. V., and Ya. G. Martyushova. 2019. Adaptatsiya sistemy distantsionnogo obucheniya na osnove statisticheskoy obrabotki rezul'tatov raboty pol'zovateley [Distance learning system adaptation based on statistical processing of the results of users activities]. *Trudy MAI* [Trudy MAI] 109:21. 13 p. doi: 10.34759/trd-2019-109-21. EDN: DTEXUO.
6. Bosov, A. V., Ya. G. Martyushova, A. V. Naumov, and A. P. Sapunova. 2020. Bayesovskiy podkhod k postroeniyu individual'noy traektorii pol'zovatelya v sisteme distantsionnogo obucheniya [Bayesian approach to the construction of an individual user trajectory in the system of distance learning]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(3):86–93. doi: 10.14357/19922264200313. EDN: WAKFJR.
7. Bosov, A. V. 2022. Primenenie samoorganizuyushchikhsya neyronnykh setey k protsessu formirovaniya individual'noy traektorii obucheniya [Application of self-organizing neural networks to the process of forming an individual learning path]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(3):7–15. doi: 10.14357/19922264220302. EDN: HJQANN.
8. Bosov, A. V., and A. V. Ivanov. 2022. Tekhnologiya klassifikatsii tipov kontenta elektronnoy uchebnika [Technology for classification of content types of e-textbooks]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(4):63–72. doi: 10.14357/19922264220410. EDN: YERCNH.
9. Bosov, A. V., and A. V. Ivanov. 2023. Tekhnologiya mnogofaktornoy klassifikatsii matematicheskogo kontenta elektronnoy sistemy obucheniya [Multifactor classification technology of mathematical content of e-learning system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):32–41. doi: 10.14357/19922264230405. EDN: LISHHZ.
10. Naumov, A. V., A. S. Dzhumurat, and A. O. Inozemtsev. 2014. Sistema distantsionnogo obucheniya matematicheskimi distsiplinami CLASS.NET [Distance learning system for mathematical disciplines CLASS.NET]. *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy* [Herald of Computer and Information Technologies] 10:36–44. doi: 10.14489/vkit.2014.010.pp.036-044. EDN: SQIRWX.
11. SDO MAI CLASS.NET [Distance learning system MAI CLASS.NET]. Available at: <https://distance.kaf804.ru> (accessed November 28, 2025).
12. Martyushova, Ya. G., T. A. Mineyeva, and A. V. Naumov. 2023. Metody klassifikatsii pol'zovateley SDO v mode-

- li postroeniya ikh individual'noy traektorii [Methods of classifying the distance learning system users in the model of constructing their personalized learning strategies]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 33(1):68–77. doi: 10.14357/08696527230107. EDN: FHLWMC.
13. Bosov, A. V., G. A. Mkhitarian, A. V. Naumov, and A. P. Sapunova. 2019. Ispol'zovanie modeli gamma-raspredeleniya v zadache formirovaniya ogranichenno po vremeni testa v sisteme distantsionnogo obucheniya [Using the model of gamma distribution in the problem of forming a time-limited test in a distance learning system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(4):11–17. doi: 10.14357/19922264190402. EDN: XUBLZX.
 14. Naumov, A. V., G. A. Mkhitarian, and E. E. Cherygova. 2019. Stokhasticheskaya postanovka zadachi formirovaniya testa zadannogo urovnya slozhnosti s minimizatsiey kvantili vremeni vypolneniya [Stochastic statement of the problem of generating tests with defined complexity with the minimization of quantile of test passing time]. *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy* [Herald of Computer and Information Technologies] 2:37–46. doi: 10.14489/vkit.2019.02.pp.037-046. EDN: TGXYNG.
 15. Xiao, J., and O. Bulut. 2022. Item selection with collaborative filtering in On-the-fly multistage adaptive testing. *Appl. Psych. Meas.* 46(8):690–704. doi: 10.1177/0146621622112408.
 16. Naumov, A. V., A. E. Stepanov, and A. E. Ustinov. 2024. On the problem of maximizing the probability of successful passing of a time-limited test. *Automat. Rem. Contr.* 85(1):60–67. doi: 10.1134/s0005117924010053. EDN: XKGXWC.
 17. Martyushova, Ya. G., A. V. Naumov, and A. E. Stepanov. 2024. Optimizatsiya prokhozheniya ogranichenno po vremeni testa po kvantil'nomu kriteriyu [Optimization of the strategy of passing the time-limited test according to the quantile criterion]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):44–51. doi: 10.14357/19922264240406. EDN: WVKTIF.
 18. Stepanov, A. E. 2025. Maksimizatsiya srednego chisla nabrannykh ballov v ogranichennom po vremeni teste [Maximizing the average score in a timed test]. *Modelirovanie i analiz dannykh* [Modeling and Data Analysis] 15(1):158–167. doi: 10.17759/mda.2025150109. EDN: EJSYOU.
 19. Ivanov, S. V., and A. E. Stepanov. 2025. Optimization by a probabilistic criterion in a dynamic test passing model. *Automat. Rem. Contr.* 85(6):589–597. doi: 10.31857/S0005117925060076.
 20. Rosenblatt-Roth, M. 1965. Quantiles and medians. *Ann. Math. Stat.* 36(3):921–925. doi: 10.1214/aoms/1177700064.
 21. Santoso, T., S. Ahmed, M. Goetschalckx, and A. Shapiro. 2005. A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty. *Eur. J. Oper. Res.* 167(1):96–115. doi: 10.1016/j.ejor.2004.01.046.
 22. Kuravsky, L. S., and S. I. Popkov. 2018. Forecasting macro parameters representing the behavior of an applied multi-agent system. *Int. J. Modeling Simulation Scientific Computing* 9(6):1850052. 15 p. doi: 10.1142/S1793962318500526.
 23. Ignatov, A. N. 2020. On the construction of positional control in a multistep portfolio optimization problem with probabilistic criterion. *Automat. Rem. Contr.* 81(12):2181–2193. doi: 10.1134/S0005117920120036. EDN: MSUFBA.

Received August 21, 2025

Accepted November 15, 2025

Contributors

Ivanov Sergey V. (b. 1989) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; sergeyivanov89@mail.ru

Martyushova Yanina G. (b. 1970) — Candidate of Science (PhD) in pedagogy, senior lecturer, Department of Probability Theory and Computer Simulations, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; ma1554@mail.ru

Naumov Andrey V. (b. 1966) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Probability Theory and Computer Simulations, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; naumovav@mail.ru

Stepanov Alexey E. (b. 1981) — PhD student, Department of Probability Theory and Computer Simulations, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; Rus.fta@yandex.ru

КОСВЕННЫЕ ПРИЗНАКИ В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ ДАННЫХ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ

А. А. Грушо¹, Н. А. Грушо², М. И. Забейло³, В. В. Кульченков⁴, Е. Е. Тимонина⁵

Аннотация: Использование причинно-следственных связей для классификации небольших наборов данных большой размерности может порождать конфликты, связанные с тем, что значительная часть данных не играет существенной роли в задаче классификации и может рассматриваться как случайные данные. В таком случае случайные данные могут порождать информативные с точки зрения причинно-следственных связей фрагменты информации, мешающие правильной классификации или порождающие ошибки классификации. Для нейтрализации таких ошибок необходима дополнительная информация. Такую дополнительную информацию в данной работе удалось найти также с помощью причинно-следственных связей. В работе определены косвенные признаки, которые можно использовать для устранения конфликтов и уточнения правильности классификации. На примере задачи классификации по трем информативным классам показано, как получать и как использовать косвенные признаки для разрешения конфликтных ситуаций в процессе классификации и предотвращения ошибок.

Ключевые слова: классификация; причинно-следственные связи; косвенные признаки правильной классификации

DOI: 10.14357/19922264250408

EDN: UZKQSR

1 Введение

Причинно-следственные связи стали фундаментальным подходом к объяснению взаимосвязи между событиями и результатами в различных областях исследования [1, 2]. Доверие и надежность входят в число важнейших требований к результатам использования искусственного интеллекта (ИИ) в практических задачах [3].

Использование в задачах классификации причинно-следственных связей в условиях шума исследовалось в работах [4–7]. В работе [8] начато исследование задачи классификации данных очень большой размерности, когда используется только ограниченный набор обучающих образцов таких данных. В этих условиях проверялась возможность использования причинно-следственных связей в решении классификационных задач указанного типа. В тех случаях когда причин образования данных мало и известны прецеденты по каждой причине, использовалось обучение на прецедентах.

В работе [8] рассматривался случай двух классов, из которых один порожден существованием одной причины появления свойств в данных, содержащих следствия этой причины, и добавлением случай-

ных свойств, а второй класс порожден целиком случайной последовательностью свойств. В связи с моделированием неинформативных свойств случайными последовательностями может возникнуть конфликт между информативными свойствами для классификации и ложными свойствами, возникшими случайно. Для разрешения конфликтных случаев рассматривались большие параметры, при которых конфликт не появляется с вероятностью, стремящейся к 1.

В данной работе также рассматриваются данные большой размерности, но соотношение больших параметров допускает возникновение конфликтных случаев. Основная проблема при классификации с помощью причинно-следственных связей в данной постановке задачи состоит в том, что для разрешения потенциальных конфликтов необходима дополнительная информация.

Проблема конфликтов часто возникает при различных подходах к использованию систем ИИ. Например, в работе [9] описаны подходы к разрешению конфликтов в задачах интеграции различных фрагментов информации из разных источников. В работе [10] использованы причинно-следственные связи между элементами данных для повыше-

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, grusho@yandex.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, info@itake.ru

³Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, zabezhailo@yandex.ru

⁴Банк ВТБ (ПАО), vlad.kulchenkov@gmail.com

⁵Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, eltimon@yandex.ru

ния надежности классификации, построена контрфактуальная модель [11] для повышения доверия к результатам классификации.

В представленной работе найдены источники дополнительной информации для разрешения конфликтов классификации на основе причинно-следственных связей, приведен один из примеров использования такой дополнительной информации.

2 Математическая модель ситуационной осведомленности на основе причинно-следственных связей

Обозначим через R конечное множество свойств, $|R| = M$, через D — множество данных, которые могут поступать для классификации. Элементами множества D служат векторы x одинаковой длины N , состоящие из свойств множества R .

Ситуацию определим как множество свойств, используемых для принятия решения лицом, принимающим решение, для прогноза развития или определения дальнейших действий. В качестве ситуации можно рассматривать описание медицинского диагноза, схему мошенничества, прогнозы развития анализируемой системы [8]. Предполагаем, что выполняется условие контрфактуальности [11], т. е. определено конечное фиксированное множество различных возможных ситуаций. Для простоты будем рассматривать три выявленные ситуации, при этом данные о ситуациях получены из исторических данных D_1 , D_2 и D_3 .

Причинно-следственные отношения определяются следующим образом. Если множество A свойств (возможно, не принадлежащих R) порождает множество свойств B из R (при наличии возможности взаимодействия свойств A и B), то A называется *причиной*, а B называется *следствием*. Если из множества A исчезает хоть одно свойство, то следствие B не может появиться. Если к множеству свойств A добавлено хоть одно новое свойство, то при наличии возможности связи A и B множество свойств B все равно появится, однако расширенное множество, содержащее A , будем называть *покрытием* причины A и обозначать через C . Таким образом, в покрытие может входить множество причин, каждая из которых порождает свое множество следствий.

Для простоты рассмотрим три возможные ситуации (классы 1, 2 и 3) покрытия причин C_1 , C_2 и C_3 . Классификация каждой ситуации может быть описана сокращенным набором следствий каждого

из этих покрытий, а именно: если c_1^* — минимальный вектор свойств длины n , в который входят следствия покрытия C_1 , а c_2^* и c_3^* — минимальные векторы следствий длины n , в которые входят следствия соответственно C_2 и C_3 , то каждый из этих векторов определяет минимальное множество свойств, достаточных для принятия решения лицами, принимающими решения, или для прогноза развития или определения дальнейших действий. Дополнительно потребуем, чтобы свойства в c_1^* , c_2^* и c_3^* не имели совпадений. Эти векторы были получены из обучающих данных в множествах D_1 , D_2 и D_3 как совпадающие части всех обучающих выборок в каждом из этих множеств и не встречающиеся в других D_i . Кроме свойств из c_1^* , c_2^* и c_3^* существуют в покрытиях другие причины, не порождающие в своих классах векторы следствий c_1^* , c_2^* , c_3^* . Более того, сами причины, порождающие c_1^* , c_2^* , c_3^* , могут иметь другие следствия, которые присутствуют в данных или появляются в данных других классов.

При анализе могут появиться данные, которые не обладают ни одним из наборов свойств c_1^* , c_2^* и c_3^* . Это может произойти из-за сильных искажений или появления данных, не соответствующих классам 1, 2 и 3. В этом случае будем считать, что имеется 4-й класс, целиком состоящий из случайных данных.

Пусть $x \in D$ и не является информацией из исторических данных. Рассмотрим варианты классификации данных x по одному из 4-х классов. Обозначим функцию классификатора через $K_p(x)$, принимающую значения 1, 2, 3, 4 и противоречие.

Вариант 1. Данные x содержат в точности свойства из одного из векторов c_1^* , c_2^* , c_3^* и не содержат свойств из других векторов c_1^* , c_2^* , c_3^* .

Однозначная, казалось бы, классификация в этом варианте может оказаться ошибочной.

Вариант 2. Данные x содержат по крайней мере свойства из двух векторов из c_1^* , c_2^* , c_3^* . В этом случае K_p фиксирует противоречие.

Вариант 3. Данные x не содержат ни одного полного набора свойств из какого-либо векторов из c_1^* , c_2^* , c_3^* . В этом случае K_p фиксирует класс, состоящий из целиком случайных данных. Но на самом деле случайные данные могут порождать ошибку классификации.

Замечание. Всюду предполагается, что фраза «содержит вектор» не подразумевает подряд идущие свойства векторов из наборов свойств c_1^* , c_2^* и c_3^* . Свойства могут появляться в любом порядке вперемешку со случайно появившимися свойствами. Присутствие всех элементов какого-либо из векторов c_1^* , c_2^* , c_3^* или нескольких из них определяется с помощью алгоритмов, разработанных в работе [12].

3 Пример условий разрешимости противоречий

Рассмотрим противоречие варианта 2 в случае появления в данных x свойств целиком из c_1^* , c_2^* и c_3^* , т.е. идентификаторов 1-го и 3-го классов. Предположим, что какая-то причина из C_1 порождает свойство $\alpha \in R$, также порождаемое какой-то причиной в C_2 , но не порождаемой какой-либо причиной из C_3 . Тогда непоявление в x свойства α однозначно определяет класс $K_p(x) = 3$. Но при наличии α с ненулевой вероятностью противоречие сохраняется: $K_p(x) = 3$ или 1. Если при истинном классе 3 свойство α возникло случайно или детерминированно при истинном классе 1, то противоречие сохраняется.

Определение. Свойство α , порождаемое ровно двумя из трех покрытиями причин в классах, называется *косвенным* признаком разрешения противоречия в классификации данных.

Наличие в рассматриваемом случае в данных x одного косвенного признака, порожденного α , означает, что при равновероятном появлении случайных свойств в данных вероятность разрешения противоречия в рассматриваемом примере (вероятность случайного непоявления α при истинном 3-м классе) равна $(1 - 1/M)^{N-2n}$.

При больших M и N и соотношении, например, $N/M = 1/2$ эта вероятность приблизительно равна $1/2$. В то же время вероятность случайного появления всех элементов идентификатора ложного класса (т.е. случайного набора свойств одного из векторов c_1^* , c_2^* , c_3^*) приблизительно равна $(1/2)^n$, что позволяет разрешить конфликт с вероятностью приблизительно $(1/2)^{n+1}$.

Если C_1 порождает два косвенных признака α_1 и α_2 со свойствами α и в данных отсутствует хотя бы один из них, то класс 3 определяется однозначно.

Рассмотрим случай, когда C_3 порождает свойство β , которое порождается также C_2 , но не порождается свойством C_1 . Тогда если в данных x присутствуют c_1^* и c_3^* и α , но не присутствует β , то однозначно определяется класс 1.

Отметим, что косвенные признаки работают независимо друг от друга и они могут появляться в любом количестве.

При классификации случайной последовательности также могут работать косвенные признаки. Предположим, что в целиком случайной последовательности x случайно образовались все свойства из c_1^* , но в данных x нет α или других косвенных признаков 1-го класса. Тогда отсутствие косвенных признаков появления C_1 служит подтверждением принадлежности x классу целиком случайных

последовательностей. Эти рассуждения относятся к другим случаям появления в случайных данных c_1^* , c_2^* , c_3^* .

4 Выявление косвенных признаков

Рассмотрим задачу нахождения косвенных признаков, использование которых было рассмотрено в предыдущем разделе.

Отметим, что свойство, которое порождает косвенный признак класса i ($i = 1, 2, 3$), всегда появляется в данных, когда порождение происходит за счет причины, находящейся в покрытии C_i . В примере, построенном выше, косвенный признак порождается причинами ровно двух покрытий. Если этот признак порождается всеми покрытиями, то он не может использоваться в классификации. Если этот признак порожден ровно одним покрытием, то он может быть включен в соответствующий вектор c^* . Весь смысл построения c_1^* , c_2^* , c_3^* состоит в том, что эти свойства принадлежат одному и только одному классу. Поэтому свойство α не может быть включено в соответствующий идентификационный набор свойств c_1^* . В то же время в данных может случайно появиться любое свойство.

Для построения алгоритма поиска косвенных признаков будем использовать множества D_1 , D_2 и D_3 . Векторы c_1^* , c_2^* и c_3^* строились следующим образом. В силу причинно-следственных связей в каждом экземпляре данных x из D_1 должны находиться все свойства из c_1^* . Кроме них должны находиться все свойства остальных причин в C_1 . Свойства из c_1^* не могут встречаться в свойствах, порожденных покрытиями C_2 и C_3 . Для проверки этого условия необходимо проверить, что среди свойств, порожденных C_2 и C_3 , нет свойств из c_1^* . Этот перебор можно совместить с построением c_2^* и c_3^* и поиском свойств, порождающих косвенные признаки.

Сначала выявим все свойства, порожденные причинами покрытия C_1 . Эти свойства обязательно присутствуют во всех данных множества D_1 (достаточно работать с обучающей выборкой S_1). Такие наборы свойств определяются со сложностью $|S_1|N \ln N$ [12]. Обозначим такой набор H_1 . Также, используя множества D_2 и D_3 , строятся наборы свойств H_2 и H_3 , порождаемые C_2 и C_3 . Небольшой модификацией алгоритма работы [12] выделяются свойства, встречающиеся во всех трех наборах (эти свойства не используются для порождения косвенных признаков). Исключаем эти свойства из наборов следствий C_1 , C_2 и C_3 . Далее рассматриваем па-

ры сокращенных наборов и ищем в них повторения. Все найденные повторения порождают различные косвенные признаки. Оставшиеся неповторившиеся свойства могут использоваться для построения векторов c_1^* , c_2^* и c_3^* .

5 Обсуждение

Несколько замечаний относительно перспективности исследования и использования косвенных признаков. В рассмотренных примерах способов получения дополнительной информации для принятия решений существуют другие источники, например совпадения событий во времени, контр-примеры и др. С другой стороны, в данной работе сделаны сильные предположения о следствиях, хорошо идентифицирующих причины. Ослабление этих предположений (например, использование только частичной информации о следствиях причин) может только усилить значимость косвенных признаков для принятия правильных решений. Доказано [13], что при использовании машинного обучения нельзя говорить о гарантиях доверия к результатам проведенного ИИ анализа. Поэтому использование дополнительной информации в форме косвенных данных может только повышать доверие к результатам анализа, что соответствует логике использования других источников информации. В некоторых задачах нет других источников информации кроме косвенных признаков. Например, анализ сбоев приложений в распределенных системах ведется с помощью центров сбора жалоб пользователей (имеются в виду down-detectors [14]).

Вместе с тем развитие теории косвенных признаков тесно переплетается с проблемами в других задачах систем ИИ. В частности, существует проблема синхронизации источников дополнительной информации и нормализации данных из различных информационных пространств. Точно такие же проблемы возникают в задачах объяснимости результатов, полученных после обработки данных системами ИИ [15].

6 Заключение

Использование причинно-следственных связей для классификации небольших наборов данных большой размерности может порождать конфликты, связанные с тем, что значительная часть данных не играет существенной роли в задаче классификации и может рассматриваться как случайные данные. В таком случае случайные данные могут порождать информативные с точки зрения

причинно-следственных связей фрагменты информации, мешающие правильной классификации или порождающие ошибки классификации. Для нейтрализации таких ошибок необходима дополнительная информация. Такую дополнительную информацию в данной работе удалось найти также с помощью причинно-следственных связей. В работе определены косвенные признаки, которые можно использовать для устранения конфликтов и уточнения правильности классификации.

На примере задачи классификации по трем информативным классам показано, как получать и как использовать косвенные признаки для разрешения конфликтных ситуаций в процессе классификации и предотвращения ошибок.

Работа использует результаты применения причинно-следственных связей для задачи классификации в других условиях, чем в статье [8], и результаты работы по построению быстрых алгоритмов поиска необходимой информации в обучающих данных [12].

Литература

1. Weinberg A. I., Premebida C., Faria D. R. Causality from bottom to top: A survey // *Mach. Learn.*, 2025. Vol. 114. Art. 234. 37 p. doi: 10.1007/s10994-025-06855-5.
2. Lamsaf A., Carrilho R., Neves J. C., Proença H. Causality, machine learning, and feature selection: A survey // *Sensors*, 2025. Vol. 25. No. 8. Art. 2373. 25 p. doi: 10.3390/s25082373.
3. Afroogh S., Akbari A., Malone E., et al. Trust in AI: Progress, challenges, and future directions // *Humanities Social Sciences Communications*, 2024. Vol. 11. Art. 1568. 30 p. doi: 10.1057/s41599-024-04044-8.
4. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Зацаринный А. А., Тимонина Е. Е., Шоргин С. Я. Анализ цепочек причинно-следственных связей // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 68–74. doi: 10.14357/19922264220209. EDN: HPSLTU.
5. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Кульченков В. В., Тимонина Е. Е., Шоргин С. Я. Причинно-следственные связи в задачах классификации // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 43–49. doi: 10.14357/19922264230106. EDN: DTQZPK.
6. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Тимонина Е. Е., Шоргин С. Я. Сложные причинно-следственные связи // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 84–89. doi: 10.14357/19922264230212. EDN: TGXQIW.
7. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Смирнов Д. В., Тимонина Е. Е. Классификация с помощью причинно-следственных связей // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 71–75. doi: 10.14357/19922264230310. EDN: AKWBZD.

8. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забейжайло М. И., Кульченков В. В., Тимонина Е. Е. Классификация малых наборов данных большой размерности // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 3. С. 67–72. doi: 10.14357/19922264250308. EDN: SUSRRC.
9. Nakhaei Z., Ahmadi A., Sharifi A., Badie K. Conflict resolution using relation classification: High-level data fusion in data integration // Comput. Sci. Inf. Syst., 2021. Vol. 18. No. 3. P. 1101–1138. doi: 10.2298/CSIS200131014N.
10. Duong T. D., Li Q., Xu G. Causality-based counterfactual explanation for classification models. — Cornell University, 2023. arXiv:2105.00703v3 [cs.LG]. 35 p.
11. Höfler M. Causal inference based on counterfactuals // BMC Med. Res. Methodol., 2005. Vol. 5. Art. 28. 12 p. doi: 10.1186/1471-2288-5-28.
12. Грушо А. А., Забейжайло М. И., Кульченков В. В., Тимонина Е. Е. Сложность алгоритма поиска совпадений в нескольких последовательностях // Системы и средства информатики, 2025. Т. 35. № 4. С. 28–37. doi: 10.14357/08696527250409.
13. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забейжайло М. И., Писковский В. О., Тимонина Е. Е. Машинное обучение и доверие к результатам классификации // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 2. С. 63–68. doi: 10.14357/19922264250208. EDN: CXRNK.
14. Смирнов Д. В., Грушо А. А., Забейжайло М. И. К задаче идентификации сбоев в информационно-технологической инфраструктуре путем мониторинга и анализа косвенных данных // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 3. С. 14–22. doi: 10.14357/08696527240302. EDN: QZYOGK.
15. Joshi G., Walambe R., Kotecha K. A review on explainability in multimodal deep neural nets // IEEE Access, 2021. Vol. 9. P. 59800–59821. doi: 10.1109/ACCESS.2021.3070212.

Поступила в редакцию 01.09.2025

Принята к публикации 15.11.2025

INDIRECT PROPERTIES IN CLASSIFICATION OF LARGE DATA WITH THE HELP OF CAUSE-AND-EFFECT RELATIONSHIPS

A. A. Grusho¹, N. A. Grusho¹, M. I. Zabezhailo¹, V. V. Kulchenkov², and E. E. Timonina¹

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation

²VTB Bank, 43-1 Vorontsovskaya Str., Moscow 109147, Russian Federation

Abstract: The usage of cause-and-effect relationships to classify small data sets of high dimension can generate conflicts due to the fact that a significant part of the data does not play a significant role in the classification task and can be considered as random data. In this case, in terms of cause-and-effect relationships, random data can generate pieces of information that interfere with correct classification or generate classification errors. Additional information is needed to neutralize characteristics errors. In the present paper, such additional information was also found using causal relationships. The authors define indirect characteristics that can be used to resolve conflicts and to refine the classification. Using the task of classifying of three informative classes as an example, it is shown how to obtain and how to use indirect characteristics to resolve conflict situations during the classification process and error prevention process.

Keywords: classification; cause-and-effect relationships; indirect characteristics of correct classification

DOI: 10.14357/19922264250408

EDN: UZKQSR

References

1. Weinberg, A. I., C. Prenebida, and D. R. Faria. 2025. Causality from bottom to top: A survey. *Mach. Learn.* 114:234. 37 p. doi: 10.1007/s10994-025-06855-5.
2. Lamsaf, A., R. Carrilho, J. C. Neves, and H. Proença. 2025. Causality, machine learning, and feature selection: A survey. *Sensors* 25(8):2373. 25 p. doi: 10.3390/s25082373.
3. Afroogh, S., A. Akbari, E. Malone, et al. 2024. Trust in AI: Progress, challenges, and future directions. *Humanities Social Sciences Communications* 11:1568. 30 p. doi: 10.1057/s41599-024-04044-8.
4. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, A. A. Zatsarinny, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2022. Analiz tsepochek prichinno-sledstvennykh svyazey [Cause-and-effect chain analysis]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):68–74. doi: 10.14357/19922264220209. EDN: HPSLTU.
5. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, V. V. Kulchenkov, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2023. Prichinno-sledstvennyye svyazi v zadachakh klassifikatsii [Causal relationships in classification problems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(1):43–49. doi: 10.14357/19922264230106. EDN: DTQZPK.
6. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin. 2023. Slozhnye prichinno-

- sledstvennye svyazi [Complex cause-and-effect relationships]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):84–89. doi: 10.14357/19922264230212. EDN: TGXQIW.
7. Grusho, A.A., N.A. Grusho, M.I. Zabezhailo, D.V. Smirnov, and E.E. Timonina. 2023. Klassifikatsiya s pomoshch'yu prichinno-sledstvennykh svyazey [Classification by cause-and-effect relationships]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):71–75. doi: 10.14357/19922264230310. EDN: AKWBZD.
 8. Grusho, A.A., N.A. Grusho, M.I. Zabezhailo, V.V. Kulchenkov, and E.E. Timonina. 2025. Klassifikatsiya malykh naborov dannykh bol'shoi razmernosti [Classification of small sets of data of large dimension]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(3):67–72. doi: 10.14357/19922264250308. EDN: SUSRRC.
 9. Nakhaei, Z., A. Ahmadi, A. Sharifi, and K. Badie. 2021. Conflict resolution using relation classification: High-level data fusion in data integration. *Comput. Sci. Inf. Syst.* 18(3):1101–1138. doi: 10.2298/CSIS200131014N.
 10. Duong, T.D., Q. Li, and G. Xu. 2023. Causality-based counterfactual explanation for classification models. Cornell University. 35 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2105.00703v3> (accessed December 9, 2025).
 11. Höfler, M. 2005. Causal inference based on counterfactuals. *BMC Med. Res. Methodol.* 5:28. 12 p. doi: 10.1186/1471-2288-5-28.
 12. Grusho, A.A., M.I. Zabezhailo, V.V. Kulchenkov, and E.E. Timonina. 2025. Slozhnost' algoritma poiska sovpadeniy v neskol'kikh posledovatel'nostyakh [Complexity of the algorithm for finding coincidences in several sequences]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(4):28–37. doi: 10.14357/08696527250409.
 13. Grusho, A.A., N.A. Grusho, M.I. Zabezhailo, V.O. Piskovski, and E.E. Timonina. 2025. Mashinnoe obuchenie i doverie k rezul'tatam klassifikatsii [Machine learning and trust in classification results]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(2):63–68. doi: 10.14357/19922264250208. EDN: CXRNK.
 14. Smirnov, D.V., A.A. Grusho, and M.I. Zabezhailo. 2024. K zadache identifikatsii sboev v informatsionno-tekhnologicheskoy infrastrukture putem monitoringa i analiza kosvennykh dannykh [To the problem of identifying failures in the information technology infrastructure by monitoring and analyzing indirect data]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(3):14–22. doi: 10.14357/08696527240302. EDN: QZYOGK.
 15. Joshi, G., R. Walambe, and K. Kotecha. 2021. A review on explainability in multimodal deep neural nets. *IEEE Access* 9:59800–59821. doi: 10.1109/ACCESS.2021.3070212.

Received September 1, 2025

Accepted November 15, 2025

Contributors

Grusho Alexander A. (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; grusho@yandex.ru

Grusho Nikolai A. (b. 1982) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; info@itake.ru

Zabezhailo Michael I. (b. 1956) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; m.zabezhailo@yandex.ru

Kulchenkov Vladislav V. (b. 1989) — deputy head, Portfolio Analysis Department, VTB Bank, 43-1 Vorontsovskaya Str., Moscow 109147, Russian Federation; vlad.kulchenkov@gmail.com

Timonina Elena E. (b. 1952) — Doctor of Science in technology, professor, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; eltimon@yandex.ru

Бесчастный Виталий Александрович (р. 1992) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы

Борисов Андрей Владимирович (р. 1965) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Босов Алексей Вячеславович (р. 1969) — доктор технических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Гайдамака Юлия Васильевна (р. 1971) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Грушо Александр Александрович (р. 1946) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Грушо Николай Александрович (р. 1982) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Драгунов Никита Аркадьевич (р. 1997) — младший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Дюкова Елена Всеволодовна (р. 1945) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Забежайло Михаил Иванович (р. 1956) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Иванов Сергей Валерьевич (р. 1989) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Коновалов Михаил Григорьевич (р. 1950) — доктор технических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Кульченков Владислав Владимирович (р. 1989) — заместитель начальника управления портфельного анализа Банка ВТБ

Мартюшова Янина Германовна (р. 1970) — кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Мачнев Егор Андреевич (р. 1996) — младший научный сотрудник кафедры теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы

Морозова Ульяна Константиновна (р. 2003) — студент магистратуры кафедры теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы

Наумов Андрей Викторович (р. 1966) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теория

рия вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Разумчик Ростислав Валерьевич (р. 1984) — доктор физико-математических наук, заместитель директора Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Степанов Алексей Евгеньевич (р. 1981) — аспирант кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Тимонина Елена Евгеньевна (р. 1952) — доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского цент-

ра «Информатика и управление» Российской академии наук

Урюпин Илья Вадимович (р. 1993) — кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Чумарин Григорий Анатольевич (р. 2003) — математик Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; студент физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Шоргин Всеволод Сергеевич (р. 1978) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ЗА 2025 г.

	Вып.	Стр.
Берговин А. К., Рязанов А. М., Ушаков В. Г. Об одной системе обслуживания с коррелированным входящим потоком	1	52–60
Бесчастный В. А. см. Мачнев Е. А.		
Битюков П. Ю. см. Битюков Ю. И.		
Битюков Ю. И., Битюков П. Ю. Об одном алгоритме геометрического моделирования конструкций по результатам лазерного сканирования	2	45–54
Борисов А. В. Фильтрация состояний и параметров специальных марковских скачкообразных процессов по косвенным наблюдениям без шума	1	25–32
Борисов А. В. Фильтрация специальных марковских скачкообразных процессов по наблюдениям с мультипликативными шумами	4	2–11
Борисов А. В., Игнатов А. Н., Борисов В. А. Оптимизация скоростного режима грузового поезда по критерию среднего ущерба от аварий	3	27–35
Борисов А. В., Куринов Ю. Н., Смелянский Р. Л. Математическое обеспечение мониторинга состояний и характеристик сетевого соединения по комплексной статистической информации	2	35–44
Борисов В. А. см. Борисов А. В.		
Босов А. В. Анализ использования доплеровских измерений для идентификации параметров движения по наблюдениям со случайными запаздываниями	1	33–43
Босов А. В. Стабилизация траектории линейной системы со скачкообразным дрейфом при целочисленных ограничениях на управление	3	10–18
Босов А. В., Урюпин И. В. Модифицированный вариант расширенного фильтра Калмана по методу линейных псевдонаблюдений	2	17–26
Босов А. В., Урюпин И. В. Практическое исследование вопроса неустойчивости расширенного фильтра Калмана	4	12–25
Васильев Н. С. Об оптимизации сетевой структуры коммуникации в мультиагентных системах	1	9–15
Гайдамака Ю. В. см. Мачнев Е. А.		
Гончаров А. А., Ярошенко П. В. Автоматизация разметки имплицитных логико-семантических отношений: возможности и ограничения	3	73–81
Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Кульченков В. В., Тимонина Е. Е. Классификация малых наборов данных большой размерности	3	67–72
Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Кульченков В. В., Тимонина Е. Е. Косвенные признаки в задачах классификации данных большой размерности с помощью причинно-следственных связей	4	72–77
Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Писковский В. О., Тимонина Е. Е. Машинное обучение и доверие к результатам классификации	2	63–68
Грушо Н. А. см. Грушо А. А.		
Грушо Н. А. см. Грушо А. А.		
Грушо Н. А. см. Грушо А. А.		
Драгунов Н. А., Дюкова Е. В. Правильные представительные элементарные классификаторы над произведением частичных порядков	4	43–52
Дьяченко Ю. Г. см. Тюрин С. Ф.		
Дюкова Е. В. см. Драгунов Н. А.		
Забежайло М. И. см. Грушо А. А.		
Забежайло М. И. см. Грушо А. А.		
Забежайло М. И. см. Грушо А. А.		

	Вып.	Стр.
Зацман И. М. Иерархия Акоффа и задачи извлечения знания из текстов	3	82–89
Зейфман А. И. см. Усов И. А.		
Иванов С. В., Мартюшова Я. Г., Наумов А. В., Степанов А. Е. Оптимизация по квантильному критерию позиционной стратегии тестируемого в динамической модели прохождения ограниченного по времени теста	4	65–71
Игнатов А. Н. см. Борисов А. В.		
Кириков И. А. см. Листопад С. В.		
Ковалёв С. П. Универсальные конструкции в алгебраической спецификации распределенных систем	1	2–8
Козлов М. В. см. Малащенко Ю. Е.		
Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. Об одной эвристической диспетчеризации для двухфазных систем массового обслуживания по запаздывающей информации об их состоянии	4	35–42
Королев В. Ю. см. Усов И. А.		
Кривенко М. П. Оценивание параметров смеси нормальных многомерных распределений с ограничениями на ковариационные матрицы	2	2–8
Кривенко М. П. Сравнительный анализ тестов стабильности системы массового обслуживания	1	61–66
Кульченков В. В. см. Грушо А. А.		
Кульченков В. В. см. Грушо А. А.		
Куринов Ю. Н. см. Борисов А. В.		
Листопад С. В., Кириков И. А. Концептуальная модель идентификации структуры проблемы в гибридных интеллектуальных многоагентных системах	2	69–75
Малащенко Ю. Е., Назарова И. А. Гарантированные оценки показателей работоспособности многопользовательской сети при повреждениях	1	16–24
Малащенко Ю. Е., Назарова И. А., Козлов М. В. Модель развития многопользовательской системы связи при наращивании пропускной способности сети	3	36–45
Мартюшова Я. Г. см. Иванов С. В.		
Мачнев Е. А., Морозова У. К., Бесчастный В. А., Шоргин В. С., Гайдамака Ю. В. Анализ задержек в сетях интегрированного доступа и транзита для сценария развертывания с линейной топологией	4	26–34
Морозова У. К. см. Мачнев Е. А.		
Назарова И. А. см. Малащенко Ю. Е.		
Назарова И. А. см. Малащенко Ю. Е.		
Назарьин А. И. см. Сопин Э. С.		
Наумов А. В. см. Иванов С. В.		
Никитин М. С. см. Тюрин С. Ф.		
Писковский В. О. см. Грушо А. А.		
Разумчик Р. В. см. Коновалов М. Г.		
Рязанов А. М. см. Берговин А. К.		
Сатин Я. А. см. Усов И. А.		
Синицын И. Н. Методы нормальной условно-оптимальной фильтрации для наблюдаемых неявных стохастических систем	1	44–51
Синицын И. Н. Методы условно-оптимальной фильтрации по байесову критерию для наблюдаемых неявных стохастических систем	3	2–9
Синицын И. Н. Методы условно-оптимальной фильтрации по сложному статистическому критерию для наблюдаемых неявных стохастических систем	2	27–34
Смелянский Р. Л. см. Борисов А. В.		
Сопин Э. С., Назарьин А. И., Шоргин С. Я. Разработка модели для расчета производительности планирования передач в сетях 5G NR с учетом сигнального трафика	3	46–54
Степанов А. Е. см. Иванов С. В.		
Степченков Ю. А. см. Тюрин С. Ф.		
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.		
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.		

	Вып.	Стр.
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.		
Торшин И. Ю. Метризация дискретных топологических пространств в контексте теории решеток. Часть 1. О нормальности пространств	1	82–88
Торшин И. Ю. Метризация дискретных топологических пространств в контексте теории решеток. Часть 2. Практический анализ следствий теоремы о регулярности и нормальности	2	55–62
Тюрин С. Ф., Никитин М. С., Степченков Ю. А., Дьяченко Ю. Г. Многовариантное резервирование с учетом логико-топологических особенностей транзисторных схем	3	55–66
Урюпин И. В. см. Босов А. В.		
Урюпин И. В. см. Босов А. В.		
Усов И. А., Сатин Я. А., Зейфман А. И., Королев В. Ю. Некоторые оценки для одного класса марковских процессов типа рождения и гибели с двумя типами катастроф	1	67–73
Ушаков В. Г. см. Берговин А. К.		
Чумарин Г. А. Восстановление цветных изображений методом решеточных уравнений Больцмана для анизотропной нелинейной диффузии	4	53–64
Шестаков О. В. Несмещенная оценка риска при решении обратных статистических задач с помощью пороговой обработки с двумя пороговыми значениями	2	9–16
Шестаков О. В. Оценка риска метода блочной пороговой обработки при решении обратных статистических задач с данными, заданными на случайной сетке	3	19–26
Шестаков О. В. Решение обратных статистических задач с помощью методов пороговой обработки, допускающих построение несмещенной оценки среднеквадратичного риска	1	74–81
Шоргин В. С. см. Мачнев Е. А.		
Шоргин С. Я. см. Сопин Э. С.		
Ярошенко П. В. см. Гончаров А. А.		

2025 AUTHOR INDEX

	Issue	Page
Bergovin A. K., Ryazanov A. M., and Ushakov V. G. One queuing system with correlated input flow	1	52–60
Beschastnyi V. A. see Machnev E. A.		
Bityukov P. Yu. see Bityukov Yu. I.		
Bityukov Yu. I. and Bityukov P. Yu. About an algorithm for geometric modeling of structures based on the results of laser scanning	2	45–54
Borisov A. V. Filtering of special Markov jump processes by observations with multiplicative noise	4	2–11
Borisov A. V. Filtering of states and parameters of special Markov jump processes via indirect perfect observations	1	25–32
Borisov A. V., Ignatov A. N., and Borisov V. A. Optimization of a train speed profile based on the expected accident damage criterion	3	27–35
Borisov A. V., Kurinov Yu. N., and Smeliansky R. L. Mathematical support for monitoring of states and numerical characteristics of network connection based on compound statistical information	2	35–44
Borisov V. A. see Borisov A. V.		
Bosov A. V. Doppler measurements application analysis to identify motion parameters from observations with random delays	1	33–43
Bosov A. V. Stabilization of the trajectory of a linear system with jumping drift under integer control constraints	3	10–18
Bosov A. V. and Uryupin I. V. A modified extended Kalman filter by the linear pseudomeasurement method	2	17–26
Bosov A. V. and Uryupin I. V. A practical study of the extended Kalman filter instability	4	12–25
Chumarin G. A. Color image restoration via the lattice Boltzmann method for anisotropic nonlinear diffusion	4	53–64
Diachenko Yu. G. see Tyurin S. F.		
Djukova E. V. see Dragunov N. A.		
Dragunov N. A. and Djukova E. V. Regular representative elementary classifiers over the product of partial products	4	43–52
Gaidamaka Yu. V. see Machnev E. A.		
Goncharov A. A. and Iaroshenko P. V. Automation of annotating implicit discourse relations: Challenges and opportunities	3	73–81
Grusho A. A., Grusho N. A., Zabezhailo M. I., Kulchenkov V. V., and Timonina E. E. Classification of small sets of data of large dimension	3	67–72
Grusho A. A., Grusho N. A., Zabezhailo M. I., Kulchenkov V. V., and Timonina E. E. Indirect properties in classification of large data with the help of cause-and-effect relationships	4	72–77
Grusho A. A., Grusho N. A., Zabezhailo M. I., Piskovski V. O., and Timonina E. E. Machine learning and trust in classification results	2	63–68
Grusho N. A. see Grusho A. A.		
Grusho N. A. see Grusho A. A.		
Grusho N. A. see Grusho A. A.		
Iaroshenko P. V. see Goncharov A. A.		
Ignatov A. N. see Borisov A. V.		
Ivanov S. V., Martyushova Ya. G., Naumov A. V., and Stepanov A. E. Optimization according to the quantile criterion of the test taker position strategy in the dynamic model of passing the time-limited test	4	65–71

	Issue	Page
Kirikov I. A. see Listopad S. V.		
Konovalov M. G. and Razumchik R. V. Heuristic online load balancing in two-phase tandem queues with delays	4	35–42
Korolev V. Yu. see Usov I. A.		
Kovalyov S. P. Universal constructions in algebraic specification of distributed systems	1	2–8
Kozlov M. V. see Malashenko Yu. E.		
Krivenko M. P. Comparative analysis of queuing system stability tests	1	61–66
Krivenko M. P. Estimation of parameters of a mixture of normal multivariate distributions with constraints on covariance matrices	2	2–8
Kulchenkov V. V. see Grusho A. A.		
Kulchenkov V. V. see Grusho A. A.		
Kurinov Yu. N. see Borisov A. V.		
Listopad S. V. and Kirikov I. A. Conceptual model for problem structure identification in hybrid intelligent multiagent systems	2	69–75
Machnev E. A., Morozova U. K., Beschastnyi V. A., Shorgin V. S., and Gaidamaka Yu. V. On latency analysis in integrated access and backhaul deployments with linear topology	4	26–34
Malashenko Yu. E. and Nazarova I. A. Guaranteed estimates of the multiuser network performance indicators in case of damage	1	16–24
Malashenko Yu. E., Nazarova I. A., and Kozlov M. V. Multicommodity flow model for analysis projects of communication network capacity scaling	3	36–45
Martyushova Ya. G. see Ivanov S. V.		
Morozova U. K. see Machnev E. A.		
Naumov A. V. see Ivanov S. V.		
Nazarin A. I. see Sopin E. S.		
Nazarova I. A. see Malashenko Yu. E.		
Nazarova I. A. see Malashenko Yu. E.		
Nikitin M. S. see Tyurin S. F.		
Piskovski V. O. see Grusho A. A.		
Razumchik R. V. see Konovalov M. G.		
Ryazanov A. M. see Bergovin A. K.		
Satin Y. A. see Usov I. A.		
Shestakov O. V. Risk estimate for the block thresholding method of solving inverse statistical problems with data on a random grid	3	19–26
Shestakov O. V. Solving inverse statistical problems using threshold processing methods that allow the construction of an unbiased estimate of the mean-square risk	1	74–81
Shestakov O. V. Unbiased risk estimate for the firm shrinkage method of solving linear inverse problems	2	9–16
Shorgin S. Ya. see Sopin E. S.		
Shorgin V. S. see Machnev E. A.		
Sinitsyn I. N. Bayes criterion conditionally optimal filtering methods for observable implicit stochastic systems	3	2–9
Sinitsyn I. N. Complex statistical criterion conditionally optimal filtering methods for observable implicit stochastic systems	2	27–34
Sinitsyn I. N. Normal conditionally-optimal filtering methods for implicit stochastic systems	1	44–51
Smeliansky R. L. see Borisov A. V.		
Sopin E. S., Nazarin A. I., and Shorgin S. Ya. Model development for performance of transmission scheduling in 5G New Radio networks under signaling and user traffic constraints	3	46–54
Stepanov A. E. see Ivanov S. V.		
Stepchenkov Yu. A. see Tyurin S. F.		
Timonina E. E. see Grusho A. A.		
Timonina E. E. see Grusho A. A.		
Timonina E. E. see Grusho A. A.		

	Issue	Page
Torshin I. Yu. Metrization of discrete topological spaces in the context of lattice theory. Part 1. On the normality of spaces	1	82–88
Torshin I. Yu. Metrization of discrete topological spaces in the context of lattice theory. Part 2. Practical analysis of the consequences of the theorem on regularity and normality	2	55–62
Tyurin S. F., Nikitin M. S., Stepchenkov Yu. A., and Diachenko Yu. G. Multioption redundancy taking into account logical and topological features of transistor circuit	3	55–66
Uryupin I. V. see Bosov A. V.		
Uryupin I. V. see Bosov A. V.		
Ushakov V. G. see Bergovin A. K.		
Usov I. A., Satin Y. A., Zeifman A. I., and Korolev V. Yu. Perturbation and truncation bounds for one class of markov processes of birth-and-death type with catastrophes	1	67–73
Vasilyev N. S. On game networks structure optimization in multiagent systems	1	9–15
Zabezhailo M. I. see Grusho A. A.		
Zabezhailo M. I. see Grusho A. A.		
Zabezhailo M. I. see Grusho A. A.		
Zatsman I. M. Ackoff's hierarchy and tasks of knowledge discovery in texts	3	82–89
Zeifman A. I. see Usov I. A.		

Правила подготовки рукописей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Если при подготовке статьи авторы использовали инструменты на основе искусственного интеллекта, они обязаны включить эту информацию в текст статьи.

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации предоставленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.
3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам.
Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.
5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.
6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или L^AT_EX (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи обязательно.

7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — A4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 10 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны оформления представлены в интернете:

http://www.ipiran.ru/journal/template_jiep_ssi_2024.zip

8. Статья должна содержать следующую информацию на *русском и английском языках*:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием почтового адреса организации и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp и
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами;
- источники финансирования работы (ссылки на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.).

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний. Если источник имеет DOI и/или EDN, то их необходимо указывать.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала;
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://www.translit.net/ru/bgn/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Ниже приведены примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”.

Описание статьи из журнала:

Zagurenko, A. G., V. A. Korotovskikh, A. A. Kolesnikov, A. V. Timonov, and D. V. Kardymon. 2008. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizayna gidrorazryva plasta [Technical and economic optimization of the design of hydraulic fracturing]. *Neftyanoe hozyaystvo* [Oil Industry] 11:54–57.

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

Описание статьи из электронного журнала:

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’—kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel—composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem”* [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]. 593:125–130.

Описание материалов конференций:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

Описание книги (монографии, сборники):

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Latyshev, V. N. 2009. *Tribologiya rezaniya. Kn. 1: Friksionnye protsessy pri rezanii metallov* [Tribology of cutting. Vol. 1: Frictional processes in metal cutting]. Ivanovo: Ivanovskii State Univ. 108 p.

Описание переводной книги (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (*Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. Vibration problems in engineering. — 4th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 1974. 521 p.*)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. New York: Wiley. 521 p.

Описание неопубликованного документа:

Latypov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004 (unpubl.). *Geologiya i dobycha (NGT GiD)* [Geology and production (NGT GiD)]. Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198.

Описание интернет-ресурса:

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

Описание диссертации или автореферата диссертации:

Semenov, V. I. 2003. *Matematicheskoe modelirovaniye plazmy v sisteme kompaktnyy tor* [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. Moscow. D.Sc. Diss. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. *Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa* [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

Описание ГОСТа:

GOST 8.586.5-2005. 2007. *Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichstva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv* [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publs. 10 p.

Описание патента:

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. *Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya* [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- указывать в тексте письма название статьи, авторов и журнал, в который направляется статья;
- использовать attach (присоединение);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

12. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

Адрес редакции журнала «Информатика и её применения»:

Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН

Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05

e-mail: iiep@frccsc.ru (Стригина Светлана Николаевна)

<http://www.ipiran.ru/journal/issues/>

Requirements for manuscripts submitted to Journal “Informatics and Applications”

Journal “Informatics and Applications” (Inform. Appl.) publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of informatics and its applications.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

The topics covered include the following areas:

- theoretical fundamentals of informatics;
- mathematical methods for studying complex systems and processes;
- information systems and networks;
- information technologies; and
- architecture and software of computational complexes and networks.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

Agreement on the transfer of rights to publish:

“We, the undersigned authors of the manuscript “. . .”, pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Informatics and Applications” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations. Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

If authors used artificial intelligence (AI)-based tools in preparing their manuscript, they must include this information in the text of the article.

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If the authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved for publication. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or L^AT_EX (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.
7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 10 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site:

http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip.

8. The articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author’s name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format (see site):

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp and

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;

- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae;
- indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.
Important! Keywords must not be sentences; and
- Acknowledgments.

9. References. Russian references have to be presented both in English translation and Latin transliteration (refer <http://www.translit.net/ru/bgn/>).

Please take into account the following examples of Russian references appearance:

Article in journal:

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

Journal article in electronic format:

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

Article from the continuing publication (collection of works, proceedings):

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem”* [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]. 593:125–130.

Conference proceedings:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma “Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol’zovaniya i povysheniya neftegazootdachi”* [6th Symposium (International) “New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact” Proceedings]. Moscow. 267–272.

Books and other monographs:

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Dissertation and Thesis:

Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

State standards and patents:

GOST 8.586.5–2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publs. 10 p.

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

References in Latin transcription are presented in the original language.

References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets. All items from the reference list should be cited.

10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.

11. Submissions of files by e-mail must include:

- the journal title and author’s name in the “Subject” field;
- the article title, authors’ names, and the journal title, whereto the paper is being submitted, in the text of the email;
- an article and additional materials have to be attached using the “attach” function; and
- an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.

12. “Informatics and Applications” journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

Editorial Board address:

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia

Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05

e-mail: iiep@frccsc.ru (to Svetlana Strigina)

<http://www.ipiran.ru/english/journal.asp>