

# Информатика и её применения

Том 19 Выпуск 1 Год 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

Универсальные конструкции в алгебраической спецификации распределенных систем	
<b>С. П. Ковалёв</b>	<b>2</b>
Об оптимизации сетевой структуры коммуникации в мультиагентных системах	
<b>Н. С. Васильев</b>	<b>9</b>
Гарантированные оценки показателей работоспособности многопользовательской сети при повреждениях	
<b>Ю. Е. Малашенко, И. А. Назарова</b>	<b>16</b>
Фильтрация состояний и параметров специальных марковских скачкообразных процессов по косвенным наблюдениям без шума	
<b>А. В. Борисов</b>	<b>25</b>
Анализ использования доплеровских измерений для идентификации параметров движения по наблюдениям со случайными запаздываниями	
<b>А. В. Босов</b>	<b>33</b>
Методы нормальной условно-оптимальной фильтрации для наблюдаемых неявных стохастических систем	
<b>И. Н. Сеницын</b>	<b>44</b>
Об одной системе обслуживания с коррелированным входящим потоком	
<b>А. К. Берговин, А. М. Рязанов, В. Г. Ушаков</b>	<b>52</b>
Сравнительный анализ тестов стабильности системы массового обслуживания	
<b>М. П. Кривенко</b>	<b>61</b>
Perturbation and truncation bounds for one class of Markov processes of birth-and-death type with catastrophes	
<b>I. A. Usov, Y. A. Satin, A. I. Zeifman, and V. Yu. Korolev</b>	<b>67</b>
Решение обратных статистических задач с помощью методов пороговой обработки, допускающих построение несмещенной оценки среднеквадратичного риска	
<b>О. В. Шестаков</b>	<b>74</b>
Метризация дискретных топологических пространств в контексте теории решеток. Часть 1. О нормальности пространств	
<b>И. Ю. Торшин</b>	<b>82</b>
Об авторах	<b>89</b>
Правила подготовки рукописей	<b>90</b>
Requirements for manuscripts	<b>93</b>

# УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СПЕЦИФИКАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

С. П. Ковалёв<sup>1</sup>

**Аннотация:** Работа посвящена развитию предложенного ранее метода обобщенной алгебраической спецификации распределенных систем на базе новой теоретико-категорной конструкции графалгебры. Основой графалгебраической спецификации служит ориентированный мультиграф, ребра которого представляют вычислительные операции, выполняемые в узлах системы, а вершины задают порты обмена данными между узлами. Таким способом размещение операций по узлам системы задается явно. В явной форме также целесообразно описывать на языке графалгебр процедуры конструирования систем, приводящие к целевому размещению. С этой целью в работе впервые даны определения и доказаны ключевые свойства конструкций подграфалгебры, фактор-графалгебры и бисимуляции графалгебр. Предложены способы построения пределов и копределов подходящих диаграмм графалгебр. Теоретические результаты проиллюстрированы примером вычисления предела в категории глубоких нейронных сетей.

**Ключевые слова:** алгебраическая спецификация; распределенная система; универсальная алгебра; теория категорий; графалгебра; подалгебра; бисимуляция

DOI: 10.14357/19922264250101

EDN: GPUTZJ

## 1 Введение

Алгебраическая спецификация относится к числу наиболее часто применяемых формальных методов разработки программных систем [1]. Ее основной единицей служит абстрактный тип данных (АТД) — множество значений вместе с определенными на нем операциями, свойства которых задаются аксиомами. Формально совокупность взаимосвязанных АТД, реализованных в некоторой вычислительной системе, образует многосортную алгебру. В алгебраической форме представляются не только готовые системы, но и процедуры их конструирования, такие как вложение подтипа в объемлющий тип, факторизация типа по отношению эквивалентности (конгруэнции), замена компонента поведенческим аналогом, сборка целостной системы из набора взаимосвязанных составляющих. Таким процедурам отвечают абстрактные математические конструкции, изучаемые в рамках специальной дисциплины — универсальной алгебры [2]. При этом средствами алгебраической спецификации невозможно в явном виде описать структуру многокомпонентной распределенной программной системы.

Операции всех АТД описываются так, будто выполняются одним универсальным абстрактным вычислительным устройством. Для преодоления этого недостатка была предложена конструкция графалгебры [3] — структуры алгебраического типа над произвольным ориентированным (мульти)графом.

Ребра этого графа представляют вычислительные операции, выполняемые в узлах системы, а вершины представляют порты обмена данными между узлами. Сигнатура графалгебры состоит из такого графа и семейства функторов, по одному для каждой его вершины. Функторы задают правила представления данных в портах, и все имеют одну и ту же область и одну и ту же кообласть (в общем случае отличную от области). Если развертывание вычислительных единиц по узлам не фиксировано априори (например, изменяется во времени), то для его описания используется модифицированная конструкция гибкой графалгебры [4].

В развитие этого подхода в настоящей работе вводится графалгебраическое представление процедур конструирования распределенных систем. Впервые даны определения и доказаны ключевые свойства конструкций гомоморфизма, подграфалгебры, фактор-графалгебры, бисимуляции графалгебр. Предложены способы построения пределов и копределов подходящих диаграмм графалгебр. Фактически заложены основы «универсальной графалгебры».

## 2 Конструкция графалгебры

Начнем с формального определения.

**Определение 1** [3]. Пусть  $I$  — произвольная малая категория (схема, форма),  $F_i : D \rightarrow C$ ,  $i \in \text{Об} I$ , — произвольное семейство функторов. *Графалгеброй*

<sup>1</sup>Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, kovalyov@sibnet.ru

сигнатуры  $\langle I, F \rangle$  (кратко —  $\langle I, F \rangle$ -алгеброй) называется произвольная пара  $(A, \Delta)$ , состоящая из  $D$ -объекта  $A$  (носителя) и диаграммы  $\Delta : I \rightarrow C$  (структуры), такая что  $\Delta i = F_i A$ ,  $i \in \text{Ob } I$ . Гомоморфизмом  $\langle I, F \rangle$ -алгебр  $(A, \Delta)$  в  $(A', \Delta')$  называется  $D$ -морфизм  $f : A \rightarrow A'$ , удовлетворяющий следующему условию сохранения структуры: семейство  $C$ -морфизмов  $F_i f : \Delta i \rightarrow \Delta' i$ ,  $i \in \text{Ob } I$ , образует естественное преобразование  $\Delta$  в  $\Delta'$  (т. е. для любых вершин формы  $i, k \in \text{Ob } I$  и стрелки  $h : i \rightarrow k$  выполняется условие  $F_k f \circ \Delta h = \Delta' h \circ F_i f$ ). Областью или пространством данных  $\langle I, F \rangle$ -алгебры называется категория  $D$ , а кообластью или пространством вычислений — категория  $C$ .  $\square$

Для любой фиксированной сигнатуры  $\langle I, F \rangle$  все  $\langle I, F \rangle$ -алгебры и все их гомоморфизмы образуют категорию, обозначаемую через  $A_I F$ . На ней действуют канонические забывающие функторы: функтор носителя  $U_I^F : A_I F \rightarrow D : (A, \Delta) \mapsto A$  и функтор структуры  $S_I^F : A_I F \rightarrow C^I : (A, \Delta) \mapsto \Delta$  [3]. Категория обычных алгебр с сигнатурным функтором вида  $T : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$  получается, если в качестве формы  $I$  выбрать однострелочную диаграмму  $0 \rightarrow 1$  (обозначаемую символом  $\mathbf{2}$ ), вершине  $0$  сопоставить  $T$ , а вершине  $1$  — тождественный функтор  $1_{\text{Set}}$ . Двойственно, если сопоставить  $1_{\text{Set}}$  вершине  $0$  и  $T$  вершине  $1$ , то получится категория  $T$ -коалгебр.

Графалгебры общего вида выступают спецификациями распределенных систем: стрелки диаграммы структуры помечаются вычислительными операциями в узлах системы, а вершины описывают передаваемые между узлами данные. С этой точки зрения обычная алгебра действительно представляет единичный вычислительный узел, а, например, многослойная нейросеть прямого распространения имеет форму нетривиальной конечной цепочки: это граф множеств и отображений вида

$$A^{k_0} \rightarrow A^{k_1} \rightarrow \dots \rightarrow A^{k_l},$$

где  $A$  — множество значений распознаваемого сигнала (например,  $A = \mathbb{R}$ );  $l > 1$  — глубина сети;  $k_i \geq 0$  — число нейронов в  $i$ -м слое,  $i = 0, l-1$ . Обработка сигнала в каждом слое  $f_i : A^{k_i} \rightarrow A^{k_{i+1}}$  состоит из отображений-компонентов (например,  $f_{is} : \mathbb{R}^{k_i} \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_{k_i}) \mapsto \sum_{j=1}^{k_i} w_{ijs} \sigma_{ij}(x_j + b_{ij})$ ,  $s = 1, k_{i+1}$ , где  $\sigma_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция активации  $j$ -го нейрона  $i$ -го слоя;  $w_{ijs}$  и  $b_{ij}$  — веса и смещения, подбираемые при обучении нейросети). Сигнатура графалгебраической спецификации такой нейросети имеет форму цепочки из  $l$  стрелок, каждой вершине которой соответствует эндифунктор возведения в конечную степень в **Set**.

В общем случае распределенные системы могут иметь графалгебраическую спецификацию любой

конечной формы. Форма может включать не только цепочки последовательной обработки данных («конвейеры»), но и параллельную обработку (например, граф  $\bullet \rightrightarrows \bullet$ ), обратную связь (например, граф  $\bullet \rightleftarrows \bullet$ ), разделяемую память (например, граф  $\subset, \bullet \supset$ ), экземпляры других шаблонов проектирования.

### 3 Изоморфизмы и подалгебры графалгебр

Обобщим на графалгебры некоторые результаты из универсальной алгебры. Начнем с классического свойства изоморфизмов, обеспечивающего фактическую неразличимость систем, имеющих изоморфные алгебраические спецификации.

**Предложение 1.** Гомоморфизм  $f : A \rightarrow B$   $\langle I, F \rangle$ -алгебры  $(A, \Delta)$  в  $(B, \Theta)$  представляет собой изоморфизм этих алгебр тогда и только тогда, когда он является изоморфизмом их носителей.

**Доказательство.** Если указанный в условии гомоморфизм  $f$  служит изоморфизмом в пространстве данных, то семейство  $F_i f$ ,  $i \in \text{Ob } I$ , образует естественный изоморфизм  $\Delta$  в  $\Theta$ . Следовательно, семейство  $F_i f^{-1}$ ,  $i \in \text{Ob } I$ , образует естественный изоморфизм  $\Theta$  в  $\Delta$ , так что  $f^{-1} : B \rightarrow A$  — гомоморфизм  $\langle I, F \rangle$ -алгебр, обратный к  $f$ .

Обратное утверждение очевидным образом вытекает из того, что  $U_I^F$  — функтор.  $\square$

Теперь рассмотрим конструкцию подалгебры, порождающую спецификации подсистем (подтипов). Говоря буквально, подалгебра в  $\langle I, F \rangle$ -алгебре  $(B, \Theta)$  — это подобъект, т. е. область любого гомоморфизма с кообластью  $(B, \Theta)$ , сократимого слева (left-cancellable). Однако для соответствующих сигнатур подобъекты могут не иметь привычно ожидаемых свойств: не задаваться мономорфизмом носителей и/или неоднозначно определяться носителем. Поэтому целесообразно ввести, в дополнение к подобъекту, следующие разновидности конструкции подграфалгебры. Обозначим через  $I_{\downarrow}$  множество всех точек формы  $I$ , в каждую из которых входит хотя бы одна нетождественная стрелка:  $I_{\downarrow} = \text{codom}(\text{Mor } I \setminus \{1_i | i \in \text{Ob } I\})$ .

**Определение 2.**  $\langle I, F \rangle$ -алгебра  $(A, \Delta)$  вместе с гомоморфизмом  $m : A \rightarrow B$  в  $\langle I, F \rangle$ -алгебру  $(B, \Theta)$  называется слабой подалгеброй (или подалгеброй данных) в  $(B, \Theta)$ , если  $m$  — мономорфизм в пространстве данных, и сильной подалгеброй (или подалгеброй вычислений) в  $(B, \Theta)$ , если  $F_i m$  — мономорфизм в пространстве вычислений для любого  $i \in I_{\downarrow}$ .  $\square$

**Предложение 2.** Если  $(A, \Delta)$  и  $(A, \Delta')$  — две сильные подалгебры в  $\langle I, F \rangle$ -алгебре  $(B, \Theta)$  с гомоморфизмами, имеющими один и тот же морфизм носителей  $m : A \rightarrow B$ , то  $\Delta = \Delta'$ .

*Доказательство.* Для любой нетождественной стрелки  $h : i \rightarrow k$  формы  $I$  по определению гомоморфизма графалгебр имеем  $F_k m \circ \Delta h = \Theta h \circ F_i m = F_k m \circ \Delta' h$ . А поскольку  $F_k m$  — мономорфизм, получаем, что  $\Delta h = \Delta' h$ .  $\square$

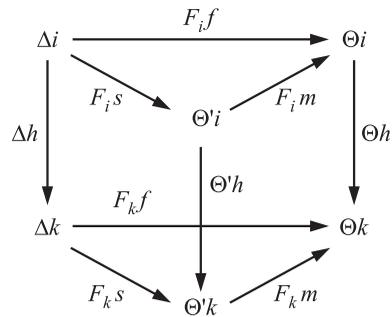
У классической алгебры (над любой категорией) и сильные, и слабые подалгебры — это подалгебры в обычном смысле. Аналогично сильные подалгебры многослойной нейросети совпадают со слабыми. Однако у коалгебры слабая подалгебра, которая традиционно называется подкоалгеброй, может не быть сильной, и наоборот. Тем не менее в категории **Set** все мономорфизмы с непустой областью обратимы слева [5, пример 7.20(1)], так что любые функторы множеств сохраняют их. Следовательно, нетривиальные слабые подалгебры графалгебр с пространством данных **Set** оказываются сильными и однозначно определяются на уровне носителей.

Для примера неоднозначности рассмотрим графалгебры сигнатуры  $\langle 2, (O, O) \rangle$ , где  $O : 2 \rightarrow \mathbf{Set}$  — функтор, сопоставляющий нетождественной стрелке диаграммы **2** отображение множеств  $o : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} : 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 0$ .  $\langle 2, (O, O) \rangle$ -алгебра  $(1, o)$  имеет две не изоморфные друг другу слабые подалгебры с носителем  $0$  (а именно:  $(0, 1_{\{0,1\}})$  и  $(0, o)$ ) и не имеет ни одной собственной сильной подалгебры. Отметим, что любой гомоморфизм  $\langle 2, (O, O) \rangle$ -алгебр задает слабую подалгебру; в свою очередь, у графалгебр любой сигнатуры с тонкой категорией в качестве пространства вычислений любой гомоморфизм задает сильную подалгебру. В общем случае любая слабая подалгебра служит подобъектом, поскольку функтор носителя унивалентен, а любой унивалентный функтор отражает мономорфизмы [5, предложение 7.37(2)]. С учетом этого все три рассмотренных класса подграфалгебр могут быть попарно различными.

Стандартная процедура «проекции» гомоморфизма на подалгебру обобщается на сильные подалгебры графалгебр.

**Предложение 3.** Пусть  $f : A \rightarrow B$  — гомоморфизм  $\langle I, F \rangle$ -алгебры  $(A, \Delta)$  в  $(B, \Theta)$ ,  $(B', \Theta')$  — сильная подалгебра в  $(B, \Theta)$  с гомоморфизмом  $m : B \rightarrow B'$ . Любой морфизм носителей  $s : A \rightarrow B'$ , удовлетворяющий условию  $m \circ s = f$ , задает гомоморфизм  $(A, \Delta)$  в  $(B', \Theta')$ .

*Доказательство.* Проверим, что семейство морфизмов  $F_i s : \Delta i \rightarrow \Theta' i$ ,  $i \in \text{Ob } I$ , образует естественное преобразование  $\Delta$  в  $\Theta'$ . Для любой



Диаграмма

нетождественной стрелки  $h : i \rightarrow k$  формы  $I$  имеем  $F_k m \circ (\Theta' h \circ F_i s) = \Theta h \circ F_i m \circ F_i s = \Theta h \circ F_i f = F_k f \circ \Delta h = F_k m \circ (F_k s \circ \Delta h)$ , а поскольку  $F_k m$  — мономорфизм, получаем, что  $\Theta' h \circ F_i s = F_k s \circ \Delta h$  (см. диаграмму).  $\square$

Двойственно, при помощи эпиморфизмов строятся стандартные, слабые и сильные гомоморфные образы графалгебр (в том числе для спецификации фактор-типов), и для них доказываются аналогии предложений 2–3.

## 4 Бисимуляции и пределы

Введем для графалгебр фундаментальную конструкцию бисимуляции, представляющую алгебраические спецификации систем, внешне неотличимых друг от друга. За основу возьмем определение бисимуляции для диалгебр над **Set** [6].

**Определение 3.** Бисимуляцией между двумя  $\langle I, F \rangle$ -алгебрами  $(A, \Delta)$  и  $(B, \Theta)$  называется совместно мономорфная (jointly monic) пара морфизмов носителей с общей областью  $a : A \leftarrow R \rightarrow B : b$  при условии, что существует  $\langle I, F \rangle$ -алгебра с носителем  $R$ , такая что  $a$  и  $b$  служат ее гомоморфизмами в  $(A, \Delta)$  и в  $(B, \Theta)$  соответственно.  $\square$

Заметим, что классическая бисимуляция (ко-, ди-)алгебр над **Set** определяется как подходящее подмножество декартова произведения носителей. Однако в произвольном пространстве данных может не быть произведений, поэтому привлекается свойство совместной мономорфности. Но если произведение носителей существует, то определение бисимуляции можно придать классический вид.

**Предложение 4.** Если в произвольной категории существует произведение  $A \times B$  объектов  $A$  и  $B$ , то произвольный морфизм  $m : R \rightarrow A \times B$  будет мономорфизмом тогда и только тогда, когда пара  $p_A \circ m : A \leftarrow R \rightarrow B : p_B \circ m$ , где  $p_A : A \leftarrow A \times B \rightarrow B : p_B$  — проекции произведения на компоненты, совместно мономорфна.

Доказательство. Напомним, что пара  $a : A \leftarrow R \rightarrow B : b$  называется совместно мономорфной, если для любой пары параллельных морфизмов  $s, t : X \rightrightarrows R$  из соотношений  $a \circ s = a \circ t$  и  $b \circ s = b \circ t$  вытекает, что  $s = t$ . Предположим, что  $p_A \circ m$  и  $p_B \circ m$  совместно мономорфны, а пара  $s, t : X \rightrightarrows R$  удовлетворяет соотношению  $m \circ s = m \circ t$ . Из этого соотношения непосредственно вытекает, что  $(p_A \circ m) \circ s = (p_A \circ m) \circ t$  и  $(p_B \circ m) \circ s = (p_B \circ m) \circ t$ , так что  $s = t$  и  $m$  — мономорфизм. Обратное, предположим, что  $m$  — мономорфизм и имеют место соотношения  $(p_A \circ m) \circ s = (p_A \circ m) \circ t$  и  $(p_B \circ m) \circ s = (p_B \circ m) \circ t$ . Из этих соотношений непосредственно вытекает, что  $p_A \circ s' = p_A \circ t'$  и  $p_B \circ s' = p_B \circ t'$ , где  $s' = m \circ s$  и  $t' = m \circ t$ . А поскольку пара проекций произведения любых объектов на компоненты совместно мономорфна [5, предложение 10.21], имеем  $m \circ s = m \circ t$ , откуда  $s = t$ , так что пара  $p_A \circ m, p_B \circ m$  совместно мономорфна.  $\square$

Легко проверить непосредственно, что бисимуляции порождаются, в частности, гомоморфизмами графалгебр, в том числе слабыми подалгебрами.

**Предложение 5.** Для любых двух  $\langle I, F \rangle$ -алгебр  $(A, \Delta)$  и  $(B, \Theta)$  морфизм носителей  $f : A \rightarrow B$  задает их гомоморфизм тогда и только тогда, когда пара  $1_A : A \leftarrow A \rightarrow B : f$  служит бисимуляцией между ними.  $\square$

**Предложение 6.** Если пара  $a : A \leftarrow R \rightarrow B : b$  служит бисимуляцией между  $\langle I, F \rangle$ -алгебрами  $(A, \Delta)$  и  $(B, \Theta)$ ,  $(A, \Delta)$  — слабая подалгебра в  $(A', \Delta')$  с вложением  $m : A \hookrightarrow A'$  и  $(B, \Theta)$  — слабая подалгебра в  $(B', \Theta')$  с вложением  $n : B \hookrightarrow B'$ , то пара  $m \circ a : A' \leftarrow R \rightarrow B' : n \circ b$  служит бисимуляцией между  $(A', \Delta')$  и  $(B', \Theta')$ .  $\square$

**Предложение 7.** Если пара  $a : A \leftarrow R \rightarrow B : b$  служит бисимуляцией между  $\langle I, F \rangle$ -алгебрами  $(A, \Delta)$  и  $(B, \Theta)$ ,  $(R, \Omega)$  — соответствующая  $\langle I, F \rangle$ -алгебра из определения бисимуляции,  $(R', \Omega')$  — слабая подалгебра в  $(R, \Omega)$  с вложением  $m : R' \hookrightarrow R$ , то пара  $a \circ m : A \leftarrow R' \rightarrow B : b \circ m$  служит бисимуляцией между  $(A, \Delta)$  и  $(B, \Theta)$ .  $\square$

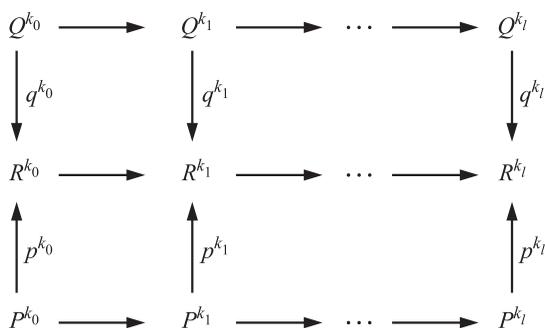
Определение совместной мономорфности очевидно обобщается (на самом деле исходно формулируется [5, определение 10.5]) для произвольного семейства морфизмов с общей областью. Соответственно можно определить полисимуляцию любого семейства графалгебр. Можно строить композиции полисимуляций со слабыми подалгебрами, обобщив предложения 6–7, а примеры полисимуляции можно получить, вычисляя пределы подходящих диаграмм графалгебр.

**Теорема 1.** Для произвольной диаграммы  $\Gamma : J \rightarrow A_I F$  предположим, что диаграмма  $U_I^F \Gamma : J \rightarrow D$  имеет

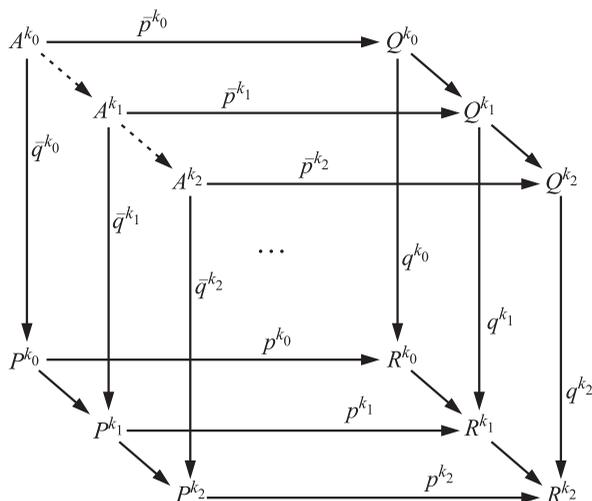
в пространстве данных предел с вершиной  $A$  и ребрами  $r_j : A \rightarrow U_I^F \Gamma_j$ ,  $j \in \text{Ob } J$ , и любой функтор  $F_i : D \rightarrow C$ ,  $i \in I_1$ , сохраняет его (т.е. морфизмы  $F_i r_j$  образуют в пространстве вычислений предел диаграммы  $F_i U_I^F \Gamma : J \rightarrow C$ ). Существует  $\langle I, F \rangle$ -алгебра  $(A, \Delta)$ , такая что все морфизмы  $r_j$  служат ее гомоморфизмами в  $\Gamma_j$ , в совокупности задают предел диаграммы  $\Gamma$  в категории  $\langle I, F \rangle$ -алгебр и ввиду этого образуют полисимуляцию семейства всех  $\Gamma_j$ .

Доказательство. Прежде всего напомним, что совокупность всех ребер любого предела совместно мономорфна [5, предложение 11.6]. Поэтому, в частности, если существует искомым предел, то его ребра образуют полисимуляцию. Далее, для любой нетождественной стрелки  $h : i \rightarrow k$  формы  $I$  и точки  $j$  формы  $J$  положим  $q_{hj} = (S_I^F \Gamma_j)h \circ F_i r_j : F_i A \rightarrow F_k U_I^F \Gamma_j$ . Для любой стрелки  $l : j \rightarrow n$  формы  $J$  имеем  $F_k U_I^F \Gamma_l \circ (S_I^F \Gamma_j)h = (S_I^F \Gamma_n)h \circ F_i U_I^F \Gamma_l$  по определению гомоморфизма и  $U_I^F \Gamma_l \circ r_j = r_n$  по определению предела, откуда  $F_k U_I^F \Gamma_l \circ q_{hj} = (F_k U_I^F \Gamma_l \circ (S_I^F \Gamma_j)h) \circ F_i r_j = ((S_I^F \Gamma_n)h \circ F_i U_I^F \Gamma_l) \circ F_i r_j = (S_I^F \Gamma_n)h \circ F_i (U_I^F \Gamma_l \circ r_j) = (S_I^F \Gamma_n)h \circ F_i r_n = q_{hn}$ , так что семейство  $q_{hj}$ ,  $j \in \text{Ob } J$ , образует конус диаграммы  $F_k U_I^F \Gamma$  с вершиной  $F_i A$ . А поскольку морфизмы  $F_k r_j$  задают предел этой диаграммы, существует единственная стрелка  $t_h : F_i A \rightarrow F_k A$ , такая что  $F_k r_j \circ t_h = q_{hj}$ . Ввиду вышеуказанного свойства совместной мономорфности ребер предела отображение  $h \mapsto t_h$  задает функтор — диаграмму в  $C$  формы  $I$  с вершинами  $F_i A$ ,  $i \in \text{Ob } I$ , которую обозначим через  $\Delta$ . Получается  $\langle I, F \rangle$ -алгебра  $(A, \Delta)$ , такая что любой морфизм  $r_j$  задает ее гомоморфизм в  $\Gamma_j$ . Непосредственно проверяется, что эти гомоморфизмы задают предел диаграммы  $\Gamma$ .  $\square$

Например, условие теоремы 1 выполняется для любой диаграммы классических алгебр, поэтому, как хорошо известно, ее предел вычисляется на уровне носителей. Сохраняют предел любой диаграммы также все сигнатурные функторы графалгебраической спецификации многослойной нейросети (поскольку функтор возведения в любую фиксированную степень имеет левый сопряженный — таковым служит функтор умножения на показатель степени [7, § 4.6]). Продемонстрируем «последнее» вычисление предела в категории нейросетей на примере декартова квадрата пары заданных гомоморфизмов с общей кообластью. Пусть  $P, Q$  и  $R$  — носители трех нейросетей прямого распространения одинаковой архитектуры с глубиной  $l$  и мощностями слоев  $k_i$ ,  $i = \overline{0, l-1}$ . Рассмотрим пару гомоморфизмов  $p : P \rightarrow R \leftarrow Q : q$  — она порождает коммутативную диаграмму (рис. 1).



**Рис. 1** Коммутативная диаграмма, порожденная парой гомоморфизмов  $p : P \rightarrow R \leftarrow Q : q$



**Рис. 2** Декартов квадрат нейросетей, построенный по принципу, описанному в доказательстве теоремы 1

Пусть  $\bar{q} : P \leftarrow A \rightarrow Q : \bar{p}$  — ребра декартова квадрата над  $p$  и  $q$  в пространстве данных. Декартов квадрат нейросетей строится послойно путем конструирования стрелок переходов между слоями в целевой нейросети по принципу, описанному в доказательстве теоремы 1 (рис. 2).

В частности, у произведения двух нейросетей каждый слой формируется путем конкатенации слоев сомножителей без появления новых связей, так что каждая сеть не «узнает» о другой. Поэтому обычное произведение годится на роль тензорного в гипотетической симметричной моноидальной категории, представляющей семантику глубоких нейросетей (ср. [8]).

Контрпримеры к теореме 1 могут быть легко найдены в категориях коалгебр. Например, рассмотрим функтор вычисления множества всех подмножеств  $P : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Он не сохраняет терминальный объект (поскольку  $P1 = \{\emptyset, 1\}$ ), и пустая диаграмма в категории  $P$ -коалгебр не имеет предела [9, пример 3.8(iv)].

Двойственно, можно определить *косимуляцию* семейства графалгебр как совместно эпиморфное (jointly epic) семейство морфизмов их носителей с общей кообластью, которое поднимается до соответствующего семейства гомоморфизмов графалгебр. Косимуляцию можно рассматривать как обобщение отношения конгруэнции на алгебре. Легко сформулировать утверждения, двойственные к предложениям 4–7, в том числе о задании косимуляции эпиморфизмом суммы носителей и о композиции косимуляций с эпиморфизмами. Имеется также способ вычисления копределов некоторых диаграмм графалгебр, двойственный к приведенному в теореме 1. Копределы играют исключительно важную роль в теоретико-категорных основаниях инженерии программных систем: с их помощью моделируется сборка систем из составных частей с учетом их интеграционных взаимосвязей [10]. Поэтому указанный способ заслуживает явной формулировки.

**Теорема 2.** Для произвольной диаграммы  $\Gamma : J \rightarrow \mathbf{A}_I F$  предположим, что диаграмма  $\cup_I^F \Gamma : J \rightarrow D$  имеет в пространстве данных копредел с вершиной  $B$  и ребрами  $s_j : \cup_I^F \Gamma_j \rightarrow B, j \in \text{Ob } J$ , и любой функтор  $F_i : D \rightarrow C, i \in (I^{op})_\downarrow$ , сохраняет его (т. е. морфизмы  $F_i s_j$  образуют в пространстве вычислений копредел диаграммы  $F_i \cup_I^F \Gamma : J \rightarrow C$ ). Существует  $\langle I, F \rangle$ -алгебра  $(B, \Theta)$ , такая что все морфизмы  $s_j$  служат гомоморфизмами  $\langle I, F \rangle$ -алгебр  $\Gamma_j$  в нее, в совокупности задают копредел диаграммы  $\Gamma$  в категории  $\langle I, F \rangle$ -алгебр и ввиду этого образуют косимуляцию семейства всех  $\Gamma_j$ .

**Доказательство.** Двойственно по отношению к доказательству теоремы 1. □

## 5 Заключение

Расширение выразительных возможностей алгебраической спецификации, направленное на представление многокомпонентных распределенных систем произвольной архитектуры, естественным образом приводит к «размыванию» привычных понятий универсальной алгебры. Например, взгляды на конструкцию подалгебры с точек зрения, отображающих различные части «строительного материала» графалгебр, порождают различные частные конструкции, удобные для использования в различных прикладных контекстах, а фундаментальная конструкция бисимуляции получает элегантно абстрактное определение. В ходе дальнейшей работы планируется исследовать обобщения других конструкций, релевантные для построения и анализа алгебраических спецификаций распреде-

ленных систем (например, многообразия графалгебр).

## Литература

1. Sannella D., Tarlecki A. Foundations of algebraic specification and formal software development. — New York, NY, USA: Springer, 2012. 584 p. doi: 10.1007/978-3-642-17336-3.
2. Пинус А. Г. Основы универсальной алгебры. — М.: КНОРУС, 2021. 182 с.
3. Ковалёв С. П. Алгебраическая спецификация графовых вычислительных структур // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 1. С. 2–9. doi: 10.14357/19922264220101. EDN: GXHPZI.
4. Ковалёв С. П. Алгебраическая спецификация распределенных систем с изменяющейся архитектурой // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 11–17. 10.14357/19922264240102. EDN: MZAHBS.
5. Adámek J., Herrlich H., Strecker G. E. Abstract and concrete categories. — New York, NY, USA: John Wiley, 1990. 507 p.
6. Voutsadakis G. Universal dialgebra: Unifying universal algebra and coalgebra // Far East J. Mathematical Sciences, 2010. Vol. 44. Iss. 1. P. 1–53.
7. Маклейн С. Категории для работающего математика / Пер. с англ. — М.: Физматлит, 2004. 352 с. (Mac Lane S. Categories for the working mathematician. — New York, NY, USA: Springer, 1978. 317 p.)
8. Shiebler D., Gavranovic B., Wilson P. W. Category theory in machine learning. — Cornell University, 2021. arXiv: 2106.07032 [cs.LG]. 43 p.
9. Adámek J. Introduction to coalgebra // Theor. Appl. Categ., 2005. Vol. 14. No. 8. P. 157–199.
10. Ковалёв С. П. Теоретико-категорный подход к проектированию программных систем // Фундаментальная и прикладная математика, 2014. Т. 19. № 3. С. 111–170.

Поступила в редакцию 05.12.2023

Принята к публикации 15.01.2025

---



---

# UNIVERSAL CONSTRUCTIONS IN ALGEBRAIC SPECIFICATION OF DISTRIBUTED SYSTEMS

S. P. Kovalyov

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya Str., Moscow 117997, Russian Federation

**Abstract:** The paper presents recent developments in the previously proposed generalized approach to algebraic specification of distributed systems based on the novel category-theoretic construction called graphalgebra. The graphalgebraic specification is based upon a directed multigraph, the edges of which represent computational operations performed in the nodes of the system and the vertices denote the data exchange ports between the components. Thus, deployment of operations upon the system nodes is specified explicitly. It is also advisable to explicitly describe, in the language of graphalgebras, the procedures for constructing systems towards the target deployment. To this end, the paper defines the constructions of subgraphalgebra, quotient graphalgebra, and bisimulation of graphalgebras and proves their key properties for the first time. The means to construct limits and colimits of suitable diagrams of graphalgebras are proposed. The theoretical results are illustrated by an example of calculating a limit in the category of deep neural networks.

**Keywords:** algebraic specification; distributed system; universal algebra; category theory; graphalgebra; subalgebra; bisimulation

**DOI:** 10.14357/19922264250101

**EDN:** GPUTZJ

## References

1. Sannella, D., and A. Tarlecki. 2012. *Foundations of algebraic specification and formal software development*. New York, NY: Springer. 584 p. doi: 10.1007/978-3-642-17336-3.
2. Pinus, A. G. 2021. *Osnovy universal'noy algebrы* [Foundations of universal algebra]. Moscow: KNORUS. 182 p.
3. Kovalyov, S. P. 2022. Algebraicheskaya spetsifikatsiya grafovykh vychislitel'nykh struktur [Algebraic specification of graph computational structures]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(1):2–9. doi: 10.14357/19922264220101. EDN: GXHPZI.
4. Kovalyov, S. P. 2024. Algebraicheskaya spetsifikatsiya raspredelennykh sistem s izmenyayushcheysya arkhitekturoy [Algebraic specification of graph computational structures]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):11–17. doi: 10.14357/19922264240102. EDN: MZAHBS.
5. Adámek, J., H. Herrlich, and G. E. Strecker. 1990. *Abstract and concrete categories*. New York, NY: John Wiley. 507 p.

6. Voutsadakis, G. 2010. Universal dialgebra: Unifying universal algebra and coalgebra. *Far East J. Mathematical Sciences* 44(1):1–53.
7. Mac Lane, S. 1978. *Categories for the working mathematician*. New York, NY: Springer. 317 p.
8. Shiebler, D., B. Gavranovic, and P. W. Wilson. 2021. Category theory in machine learning. Cornell University. 43 p.
9. Adámek, J. 2005. Introduction to coalgebra. *Theor. Appl. Categ.* 14(8):157–199.
10. Kovalyov, S. P. 2016. Category-theoretic approach to software systems design. *J. Mathematical Sciences* 214(6):814–853. doi: 10.1007/s10958-016-2814-1.

Available at: <https://arxiv.org/pdf/2106.07032> (accessed January 30, 2025).

*Received December 5, 2023*

*Accepted January 15, 2025*

## Contributor

**Kovalyov Sergey P.** (b. 1972) — Doctor of Science in physics and mathematics, leading scientist, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya Str., Moscow 117997, Russian Federation; kovalyov@sibnet.ru

# ОБ ОПТИМИЗАЦИИ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ КОММУНИКАЦИИ В МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

Н. С. Васильев<sup>1</sup>

**Аннотация:** Для формализации и исследования больших мультиагентных систем (МС), представленных в форме игровой модели, применяется моноидальная категория бинарных отношений. Решению проблемы нахождения оптимальной коммуникационной сети способствует композициональность рассматриваемой задачи. Сетевая структура должна складываться в процессе рационального разрешения конфликта интересов на основе принципов равновесия и эффективности и служить одной из целей применения выбираемых игроками стратегий. Предложен метод построения этой структуры, основанный на использовании семейства естественных отношений, позволяющих сравнивать предпочтения участников операции. Выбор сетевой структуры игры моделируется процессом формирования эффективных коалиций агентов, в которых происходит оптимальная коммуникация. Изложенный подход может служить основой технологии создания больших МС, основанной на применении компьютерной алгебры теории категорий и матричной алгебры бинарных отношений.

**Ключевые слова:** моноидальная категория; отношение предпочтения; сеть коммуникации; сетевая структура игры; эффективная коалиция; характеристическое отношение; результирующее отношение; композициональность

**DOI:** 10.14357/19922264250102

**EDN:** IORGJI

## 1 Введение

Грубой моделью оптимизируемой МС служит игра многих лиц с непротивоположными интересами [1]. Каждый агент — это игрок, предпочтения которого известны всем остальным участникам операции. Выбирая свои контролируемые факторы, агенты стремятся по возможности максимизировать свои отношения предпочтений. Неопределенность при принятии решения и конфликт интересов разрешаются посредством организации сетевого взаимодействия игроков, определяющего качество работы МС.

Рассматриваемые сетевые игры нуждаются в объективном исследовании. До сих пор преобладают эвристические методы их изучения, основанные на выдвижении различных гипотез о способах коммуникации агентов [2]. Чтобы восполнить этот пробел, предложено выбирать сетевую структуру, руководствуясь принципами эффективности и равновесия, применяемыми к игровой модели, представленной на языке моноидальной категории бинарных отношений [3]. В отличие от традиционной нормальной формы игры, интересы партнеров описываются произвольными отношениями, отражающими, например, неточность представлений об интересах игроков [1]. Динамические модели МС охватывают случай, когда предпочтения агентов изменяются во времени [4]. Применяемый

композициональный подход к МС расширяет круг приложений [5–9].

Целью исследования ставится создание рациональной теории выбора сетевой структуры коммуникации. Во всякой игре с фиксированной сетевой структурой существует результирующее отношение (РО) [3, 4], выражаемое с помощью операций моноидальной категории бинарных отношений [10, 11]. Максимизация РО обеспечивает эффективное функционирование МС. Способы коммуникации агентов определяют классы допустимых стратегий. При изучении многомасштабных моделей всегда применяется композиционный подход [12]. Сетевая структура нуждается в оптимизации. Для ее выбора применимы генетические алгоритмы [13]. Сетевое взаимодействие влияет на вид РО. Бесконфликтному функционированию МС отвечают равновесные стратегии игроков, которые естественно искать с помощью РО. К равновесному состоянию системы можно также прийти за счет согласования целей агентов [14], а конфликты разрешать автоматически [15, 16]. Агент как компьютерная система, способная к автономным действиям, все более наделяется свойствами искусственного интеллекта по принятию рациональных решений в условиях неточно известного окружения [3, 4, 16–18].

Результирующее отношение зависит от данных, которыми обмениваются игроки. Поэтому его не удается задавать заранее и говорить о сведении МС

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, nik8519@yandex.ru

к деятельности одного агента. Для достижения равновесия сетевую структуру коммуникации придется дополнительно модифицировать. Даже ее оптимизация далеко не однозначна.

Оптимальная сетевая структура (ОСС) строится с помощью поиска эффективных коалиций агентов. Предлагаемая технология организации работы МС основана на приложении компьютерной алгебры теории категорий [11], поддерживаемой матричной алгеброй бинарных отношений [10].

## 2 Постановка задачи

В игровой модели МС каждый участник  $i \in K = \{1, 2, \dots, k\}$  стремится по возможности максимизировать свое отношение предпочтения  $\rho_i \subset X^2$ , заданное на множестве всех допустимых ситуаций игры  $X \equiv X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ , за счет выбора своего контролируемого фактора  $x_i \in X_i$  [1, 3, 4]. Под рациональным поведением участников конфликта понимается достижимость ситуации равновесия

$$x^* \in X^* \equiv \bigcap_{i \in I} \text{MAX } \tilde{\rho}_i \quad (1)$$

в подходящих классах допустимых стратегий. В (1) максимизируют отношения предпочтений игроков  $\tilde{\rho}_i \neq \rho_i$ , производные от заданных и определяемые коммуникацией. Это приходится делать для уменьшения неопределенности выбора решения. Обмен данными равносильно формированию коалиций (подыгр) [1]. Каждый участник коалиции руководствуется отношением  $\tilde{\rho} \equiv \rho|_A = \rho \cap A$ ,  $A \subset \subset X^2$ , равным сужению исходного отношения  $\rho$  на некоторое множество  $A$ , представляющее информированность этого игрока. Последняя приобретает в процессе коммуникации.

Классы допустимых стратегий агентов зависят от структуры  $G$  сетевого взаимодействия. Помимо информированности коммуникация определяет порядок ходов [1]. Игроки выбирают структуру  $G$  для согласования действий по рациональному разрешению конфликта, которое воплощается в РО игры  $\rho^g = \rho^g(G)$ . Композициональность задачи состоит в том, что РО  $\rho^g = \rho^g(G)$  «собирается» из составных частей  $\rho^{g'} = \rho^g(G')$  — характеристических отношений предпочтения коалиций. При этом  $G'$  — часть графа коммуникаций  $G$  [3].

**Определение 2.1.** Отношение  $\rho^g$  называется результирующим, если во всех подыграх  $G' \subset G$  оптимизация (1) при  $G = G'$  сводится к задаче

$$\text{MAX } \rho^g = X^g \wedge (X^* \neq \emptyset \Rightarrow X^* = j_G X^g). \quad (2)$$

В формуле (2) отображение  $j_G$  зависит от структуры коммуникаций  $G$  [3].

Например, в бескоалиционной игре РО равно дизъюнктивной сумме  $\rho^g(G) = \prod_{i \in I} \rho_i$  отношений предпочтения игроков, а  $j_G : \prod_{i \in I} X_i^g \rightarrow \prod_{i \in I} j_i X_i^g$ , где  $j_i$  — соответствующие копроекции [11]. Рациональное разрешение конфликта интересов отвечает поиску максимального элемента  $x^{g*} \in \text{MAX } \rho^{g*}$  в (2), если только это обеспечивает существование решения задачи (1). Если этого не происходит, то приходится изменять РО, исходя из дополнительных соображений. Задачу (2) будем решать для РО игры, определяемого ОСС  $G = \Gamma^*$ .

Исходя из принципов эффективности поведения игроков и равновесия, требуется определить понятие ОСС и, с опорой на композициональность задачи в форме РО, предложить методы ее построения.

## 3 Понятие оптимальной сетевой структуры

Возможность сравнения сетевых структур унаследована от отношений предпочтения игроков  $\rho : X \rightarrow X$ , которые далее предполагаются рефлексивными и транзитивными. На множествах отношений предпочтения игроков  $R = \{\rho_i, i = 1, 2, \dots, k\}$  введем порядка  $\prec_\rho$ . Сначала продолжим отношение  $\rho \in R$  с множества  $X$  на его степень  $2^X$ .

**Определение 3.1.** Элементы  $A, B \in 2^X$  связаны отношением  $\prec_\rho$ , если

$$A \prec_\rho B \Leftrightarrow \forall_a (a \in A) \Rightarrow \exists_b (b \in B) \wedge ((a, b) \in \rho).$$

**Утверждение 3.1.** Если  $\rho$  — частичный порядок на  $X$ , то и  $(2^X, \prec_\rho)$  — частично упорядоченное множество. Имеет место импликация  $A \subset B \Rightarrow \forall_\rho A \prec_\rho B$ .

Рассмотрим произведение  $(X, \rho_1) \times (X, \rho_2) \simeq (X^2, \rho_1 \times \rho_2)$  объектов  $(X, \rho_i)$ ,  $i = 1, 2$  [10, 11]. Так как  $\rho_1 \times \rho_2$  — бинарное отношение на множестве  $X^2$ , то применим определение 3.1 и построим частичный порядок  $(2^{X \times X}, \prec_{\rho_1 \times \rho_2})$ . Конструкцию  $\prec_{\rho \times \rho}$  будем записывать, как и прежде,  $\prec_\rho$ .

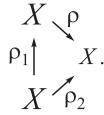
Теперь введем отношение  $\rho_1 \prec_\rho \rho_2$  между произвольными морфизмами  $\rho_i \in \text{REL}(X, X)$ , а именно:

$$\begin{aligned} \rho_1 \prec_\rho \rho_2 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall_{a_1, a_2} (a_1, a_2) \in \rho_1 \Rightarrow \exists_{b_2} a_1 \rho_2 b_2 \wedge a_2 \rho b_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно (3),  $\rho \circ \rho_1 \subset \rho_2$ . Отсюда следует включение  $\rho \circ \rho_1 \subset \rho \circ \rho_2$ , означающее возможность пропуска морфизма  $\rho_1$  через  $\rho_2$  с помощью морфизма  $\rho$  (см. рисунок).

Игровой смысл формулы (3) проясняется с помощью ее следствия

$$\rho \circ \rho_1 \subset \rho \circ \rho_2, \quad (4)$$



**Рис. 1** Коммутативная диаграмма отношения  $\rho_1 \prec_\rho \rho_2$

верного ввиду равенства  $\rho \circ (\rho \circ \rho_1) = (\rho \circ \rho) \circ \rho_1 = \rho \circ \rho_1$ . Если в формуле (4) взять  $\rho = \rho_i$ , то вложение (4) свяжет характеристические отношения таких коалиций игроков  $i \rightarrow 1$  и  $i \rightarrow 2$ , в которых регламентируется лишь порядок ходов участников [1, 3]. Например, в случае  $\rho_i \circ \rho_1$  сначала свой ход выполнит игрок 1, стремясь оптимизировать свое отношение предпочтения  $\rho_1$ , а затем это сделает игрок  $i$ . Последний ограничивается выбором среди элементов верхнего конуса  $(\text{MAX } \rho_k)^\Delta$  относительно порядка  $\rho_i$  [1, 10]. Для этой последовательной коалиции множество  $X^g$  в (2) имеет вид

$$X^g = \text{MAX } \rho_i \circ \rho_1 = \underset{(\text{MAX } \rho_1)^\Delta}{\text{MAX}} \rho_i$$

(см. определение 2.1). Итак, отношением предпочтений коалиции  $i \rightarrow 1$  служит следующее транзитивное замыкание:  $\overline{\rho_i \circ \rho_1}$ .

Диаграмма из рисунка означает, что коалиция  $i \rightarrow 1$  обладает меньшими «возможностями» по увеличению своего результата по сравнению с коалицией  $i \rightarrow 2$ .

**Определение 3.2.** Отношение  $\rho_1 \prec_\rho \rho_2$  выполняется, если имеет место формула (4). В игре с двумя участниками для любого  $\rho$  положим  $\rho_1 \prec_\rho \rho_2 \Leftrightarrow \rho_1 \subset \rho_2$ .

**Замечание 3.1.** В каждой коалиции игрок может сообщать партнерам свою допустимую стратегию  $\tilde{x}_i$ . Сказанное отражено в следующем обозначении:  $C : i \xrightarrow{\tilde{x}_i} 1$  [3]. В этом случае характеристическим отношением станет  $\rho_C = \rho_i \circ (\rho_1|_{\tilde{x}_i})$ , отличающееся от отношения  $\rho_i \circ \rho_1$ , представляющего интересы коалиции  $i \rightarrow 1$  без передачи данных. Определение 3.2 должно применяться с учетом классов допустимых стратегий:  $\tilde{\rho}_1 \prec_{\rho_i} \tilde{\rho}_2$ ,  $\tilde{\rho}_k = \rho_k|_{\tilde{x}_i}$ ,  $k = 1, 2$ . Теперь игрок  $i$  предпочитает коалицию  $i \xrightarrow{\tilde{x}_i} 2$  с игроком 2 коалиции  $i \xrightarrow{\tilde{x}_i} 1$  с игроком 1, если имеем диаграмму (см. рисунок),  $\rho_k = \tilde{\rho}_k$ .

Например, если сообщается стратегия  $\tilde{x}_i$ , представляющая собой функцию вида  $x_i = \tilde{x}_i(x_k)$ ,  $k = 1, 2$ , то  $\rho_i \circ \tilde{\rho}_k = \rho_k \circ \rho_i$ . И тогда отношение предпочтения подобной коалиции будет вводиться с помощью диаграммы, двойственной к диаграмме рисунка [3].

Пусть игрок  $i$  передает партнеру свою стратегию — константу  $x_i$ . Тогда характеристическое отношение коалиции  $i \xrightarrow{x_i} 1$  равно  $\overline{\rho_1} = \rho_i \circ (\rho_1|_{x_i})$ .

Далее будем рассматривать только этот случай коммуникации и для упрощения записи за морфизмом  $\overline{\rho}_k$  сохраним обозначение  $\rho_k$ . Наличие графа сетевой структуры всегда позволяет сказать, когда речь идет о сужении  $\overline{\rho}_k$  отношения  $\rho_k$ . Передача данных уменьшает неопределенность в процессе принятия решений, и поэтому целесообразно всегда рассматривать лишь коалиции с передачей сообщений вида  $x_i$ .

**Утверждение 3.2.** Отношение  $\prec_\rho$  рефлексивно и транзитивно.

**Доказательство.** Пусть  $\rho_1 \prec_\rho \rho_2$  и  $\rho_2 \prec_\rho \rho_3$ . Тогда имеем

$$\rho \circ \rho_1 \subset \rho \circ \rho_2 \wedge \rho \circ \rho_2 \subset \rho \circ \rho_3 \Rightarrow \rho \circ \rho_1 \subset \rho \circ \rho_3.$$

Не исключено, что одновременно справедливы противоположные отношения  $\rho' \prec_\rho \rho''$  и  $\rho'' \prec_\rho \rho'$ . Тогда, в соответствии с утверждением 3.2, введем эквивалентность  $\rho' \sim_\rho \rho''$  и классы эквивалентности отношений. Теперь надлежит сравнивать эти классы с помощью отношения  $\prec_\rho$ . Сохраним прежнее обозначение  $R$  за областью задания  $\prec_\rho$ . Тогда можно считать, что существуют максимальные элементы отношения  $\prec_\rho$  на множестве  $R \setminus \rho$ . С их помощью создаются естественные, наиболее «выгодные» коалиции, из которых формируются ОСС игры  $\Gamma^*$ .

**Определение 3.3.** Для всякого игрока  $i$  оптимальная коммуникация осуществляется с тем партнером  $j = j(i)$ , который удовлетворяет условию

$$\rho_{j(i)} \in \underset{R_i}{\text{MAX}}(\prec_{\rho_i}), \quad \prec_{\rho_i} \neq \sigma, \quad i = \overline{1, k}. \quad (5)$$

В (5) через  $\sigma$  обозначено тривиальное отношение на множестве  $R_i = R \setminus \{\rho_i\}$ . Если  $\prec_{\rho_i} = \sigma$ , то правая часть включения (5) совпадает с множеством  $R_i$  и возникает неопределенность, препятствующая появлению коалиции с ведущим игроком  $i$ .

Коалиция из двух участников  $D_i : i \xrightarrow{\tilde{x}_i} j(i)$  (см. (5)), называется *эффективной*, игрок  $i$  — ведущим, а  $j = j(i)$  — подчиненным. Далее индуктивно, из попарно различных коалиций  $D_i$  с общими партнерами, формируются эффективные коалиции  $D$  с произвольным числом участников.

Взаимодействие агентов  $i, j(i)$  составляет лишь часть искомого сетевого графа. Будем считать, что коммуникация игроков, вступивших в коалиции  $D^l \neq D^k$ , осуществляется на уровне коалиций: сообщения  $s \xrightarrow{\tilde{x}_s} r$  игрока  $s$  из коалиции  $D^l$  получают все партнеры игрока  $r$  по коалиции  $D^k$ . Каждую построенную коалицию можно рассматривать как одного игрока  $D$ , представляющего интересы всех ее членов, предпочтения которого опи-

связываются характеристическим отношением коалиции  $\rho_D$ . Композициональность МС позволяет проводить указанную *редукцию* задачи, уменьшающую число участников конфликта. В редуцированной МС агенты — это либо исходные игроки, либо некоторые коалиции.

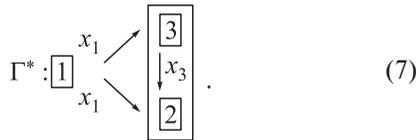
**Определение 3.4.** Сетевая структура называется оптимальной, если в ней все попарные коммуникации оптимальны.

Оптимальные коммуникации происходят либо между эффективными коалициями, либо между партнерами по эффективным коалициям

**Пример 3.1.** Рассмотрим МС с функциональными отношениями предпочтения игроков на бинарном кубе  $X$ , которые имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= x_1 + x_2 + x_3; & f_2 &= x_1 - x_2 + x_3; \\ f_3 &= x_1 - x_2 - x_3; & X &= 2^3. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Вычисления показывают, что  $f_1 \prec_{f_3} f_2$ . По формуле (5) находим часть  $D : 3 \xrightarrow{x_3} 2$  искомой сетевой структуры. Сравнивая предпочтения игроков 2 и 3 с помощью отношения  $\prec_{f_1}$ , обнаруживаем, что  $f_2 \sim_{f_1} f_3$ . Поэтому эффективные коалиции  $1 \xrightarrow{x_1} 2$  и  $1 \xrightarrow{x_1} 3$ , объединяясь с  $D$ , дают искомый оптимальный граф коммуникаций:



Результирующее отношение игры (7)  $\rho_{\Gamma^*} = f_1 \circ f_3|_{x_1} \circ f_2|_{x_1, x_3}$  позволяет найти равновесие в МС — рациональное решение  $x^* = (100) \in \text{MAX } \rho_{\Gamma^*}$  игровой задачи (6), отвечающее ОСС коммуникаций (7).

## 4 Матричная алгебра отношений

Для работы с бинарными отношениями применима матричная алгебра. Перенумеруем множество всех ситуаций игры  $X = \{x^i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Для задания бинарных отношений будем использовать (0,1)-квадратные матрицы размера  $n \times n$  с элементами  $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow x^i \rho x^j$ . Например, рассмотрим функциональное отношение  $f = x_1 - x_2, x \in 2^2$ , заданное на множестве бинарных чисел  $x^i$ , занумерованных в порядке возрастания. Его матрица имеет вид:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Операции, выполняемые в моноидальной категории, выразим в матричной форме. Композиция отношений  $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$  задается произведением матриц  $A = A^2 * A^1$ , вычисляемым с помощью операций булевой алгебры:

$$a_{ks} = \bigvee_{l=1}^n a_{kl}^2 \wedge a_{ls}^1, \quad k, s = \overline{1, n}.$$

Отношение предпочтения  $\rho = \rho_1 \coprod \rho_2$  имеет «коалиция» равноправных игроков  $\{1, 2\}$ , не обменивающихся данными. Копроизведению отвечает блочная матрица

$$A_\rho = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

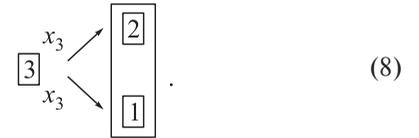
Операциям объединения и пересечения отношений соответствуют матрицы

$$A_{\rho_1 \cup \rho_2} = (a_{ij}^1 \vee a_{ij}^2), \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$A_{\rho_1 \cap \rho_2} = (a_{ij}^1 \wedge a_{ij}^2), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Рефлексивное замыкание отношения  $\rho$  строится заполнением единицами диагонали матрицы  $A_\rho$ . Возведением в степень  $A_{\bar{\rho}} = A_\rho^{n-1}$  строится транзитивное замыкание  $\bar{\rho}$ .

Покажем, что всегда возможно создание иерархически организованных эффективных коалиций:



Прямоугольниками (или скобками) будем выделять коалиции (см. (8)). Графу коммуникаций (8) отвечает РО  $\rho_3 \circ (\rho_1 \coprod \rho_2)$ .

**Утверждение 4.1.** При любых  $\rho, \rho_1$  и  $\rho_2$  выполняется условие  $\rho_1 \prec_\rho \rho_1 \coprod \rho_2$ .

Это следует из справедливости включения  $\rho_1 \subset \rho_1 \coprod \rho_2$  и определения 3.2. Поэтому можно считать, что всегда выполнено условие редуцирования МС  $\prec_\rho \neq \sigma$ .

**Пример 4.1.** Всегда найдутся морфизмы  $\rho_1, \rho_2$  и  $\rho_3$ , для которых  $\rho_3 \prec_\rho \rho_1 \coprod \rho_2$ , даже если  $\forall \rho \in R \wedge \prec_\rho = \sigma$ . Это так для предпочтений игроков, матрицы которых имеют ненулевые элементы  $i = \overline{1, n}, k, l = \overline{1, [n/2]}$ , равные

$$a_{ij}^1 = 1 \Leftrightarrow j = 2k - 1; \quad a_{ij}^2 = 1 \Leftrightarrow j = 2k;$$

$$a_{ij}^3 = \begin{cases} 1, & i = 2k - 1, j = 2l; \\ 1, & i = 2k, j = 2l - 1, \end{cases} \quad i \leq j.$$

## 5 Метод построения оптимальной сетевой структуры

Выше показано, как формируются оптимальные иерархические подструктуры искомой сетевой структуры игры (см. (5), (7) или (8)). При создании некоторой коалиции порождается частичное отношение предшествования ходов игроков. Ведущие игроки каждой коалиции совершают ходы раньше остальных членов. Сетевая структура игры распространяет отношение предшествования ходов на всех игроков.

Пусть построены некоторые коалиции  $D^k$  и  $D^l$ ,  $k \neq l$ , содержащие общего участника. Тогда имеется единая коалиция  $C = D^k \cup D^l$ , состоящая из более чем двух игроков. Интересы этого агента представлены характеристическим отношением  $\rho_C$  [3]. Таким образом, с помощью редукции МС посредством семейства отношений  $\prec_\rho$ ,  $\rho \in R$  (см. замечание 3.1) исходное множество игроков разбивается на попарно непересекающиеся эффективные коалиции  $C_1, \dots, C_s$ . Происходит и выделение оптимальных сетевых подструктур  $\Gamma_r^*$ ,  $r = \overline{1, s}$ . Благодаря композиционности, исходная проблема выбора коммуникационной сети сводится к исследованию редуцированной МС  $(C_1, \rho_{C_1}); \dots; (C_s, \rho_{C_s})$ . Процесс построения ОСС можно продолжить, сравнивая элементы множества  $R_{C_i} = \{\rho_{C_1}, \dots, \rho_{C_s}\} \setminus \{\rho_{C_i}\}$  с помощью отношений  $\prec_{\rho_C}$ ,  $C = C_i$ , и находя эффективные коалиции игроков вида  $C_i \xrightarrow{x_{C_i}} C_j$ .

Если все отношения  $\prec_{\rho_C} = \sigma$ , то можно воспользоваться утверждением 4.1. Продолжим отношение  $\prec_\rho$  с множеств  $R$  на множества  $\tilde{R}^2 = R^{(2)} = R \amalg R$ , рассмотрев копроизведение морфизмов [11]:

$$\prec_{\rho^{(2)}} \equiv \prec_\rho \amalg \prec_\rho.$$

Исходный объект  $R$  рассматривается как часть множества  $R^{(2)}$ .

Иерархическая эффективная коалиция  $D_{C,E}$  создается с помощью применения следующего обобщения формулы (5):

$$\rho_E^{(2)} \in \text{MAX}_{\tilde{R}_i^2}(\prec_{\rho^{(2)}}), \quad \prec_{\rho^{(2)}} \neq \sigma, \quad \rho = \rho_C. \quad (9)$$

Ввиду финитности описываемого процесса, вычисления завершатся нахождением редуцированной системы с не более чем двумя агентами  $D^1$  и  $D^2$ . Остается один агент, только если  $\rho_{D^1} \prec \rho_{D^2}$  (см. определение 3.2).

**Теорема 5.1.** *Во всякой МС существует ОСС коммуникации игроков.*

**Пример 5.1.** Рассмотрим игровую операцию, в которой предпочтения игроков представлены транзитивными, рефлексивными замыканиями отношений вида:

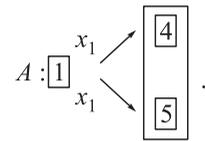
$$\begin{aligned} \rho_1 &= \{17, 73\}; & \rho_2 &= \{27, 73\}; \\ \rho_3 &= \{73, 45, 53\}; & \rho_4 &= \{27, 45, 56\}; \\ \rho_5 &= \{17, 56\}; & \rho_6 &= \{53, 56\}. \end{aligned}$$

Здесь пары номеров состояний игры  $st$  связаны отношениями  $s\rho_it$ .

Изначально все  $\prec_{\rho_i} = \sigma$ . Поэтому сразу ищем эффективные иерархические коалиции, рассматривая отношения  $\prec_{\rho_i^{(2)}}$  на  $R^{(2)}$ . Для игроков 1, 6,  $B = 2 \amalg 3$  и  $E = 4 \amalg 5$  выполнены следующие сравнения отношений предпочтения:

$$\rho_j \prec_{\rho_1^{(2)}} \rho_2 \amalg 3 \prec_{\rho_1^{(2)}} \rho_4 \amalg 5, \quad j = \overline{2, 5}. \quad (10)$$

По формулам (9) и (10) определена эффективная коалиция  $A$ :



Руководствуясь формулой (10), проводим очередную редукцию задачи. Ввиду

$$\rho_B \prec_{\rho_6^{(2)}} \rho_A, \quad A : 1 \rightarrow 4 \amalg 5, \quad B : 2 \amalg 3, \quad (11)$$

в полученной игре с участниками  $B$ , 6 и  $A$  имеется эффективная коалиция  $C : 6 \xrightarrow{x_6} A$ . Теперь в системе остались лишь два агента —  $B$  и  $C$ , для которых  $\rho_B \prec \rho_C$  (см. (11)). По определению 3.2, между ними происходит оптимальная коммуникация  $B \xrightarrow{x_B} C$ . Порядок ходов в МС задается графом:

$$\begin{aligned} B \rightarrow C &\equiv 2 \amalg 3 \rightarrow (6 \rightarrow A) \equiv \\ &\equiv 2 \amalg 3 \rightarrow (6 \rightarrow (1 \rightarrow 4 \amalg 5)). \end{aligned}$$

В результате найдена ОСС коммуникации следующего вида:

$$\Gamma^* : \left( \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array} \right) \xrightarrow{x_2, x_3} \left( \boxed{6} \xrightarrow{x_6} \left( \begin{array}{c} \boxed{1} \xrightarrow{x_1} \boxed{4} \\ \xrightarrow{x_1} \boxed{5} \end{array} \right) \right). \quad (12)$$

Оптимизация (2) РО

$$\rho^{\Gamma^*} = (\rho_2 \amalg \rho_3) \circ (\rho_6 \circ (\rho_1 \circ (\rho_4 \amalg \rho_5)))$$

в сетевой игре (12) дает множество равновесных ситуаций  $X^g = X^* = \{3, 6\}$ .

## 6 Заключение

Определено понятие оптимальной сетевой структуры МС. Использовано свойство композиционности сетевых игр в моноидальной категории бинарных отношений. Решена проблема существования оптимальной структуры коммуникации агентов. Предложен системный метод ее построения, основанный на формировании эффективных коалиций игроков. Для их поиска вводится семейство отношений на множестве предпочтений игроков, которые являются их наследниками. Программная реализация метода позволит изучать большие МС, проводя численные эксперименты.

## Литература

1. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1976. 326 с.
2. Губко М. В. Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. I. Обзор теории сетевых игр // Автоматика и телемеханика, 2004. № 8. С. 115–132. EDN: NQYWEZ.
3. Васильев Н. С. Композициональное представление структуры игры многих лиц в моноидальной категории бинарных отношений // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 18–26. doi: 10.14357/19922264230203. EDN: GPMZTS.
4. Васильев Н. С. О функторном представлении оптимизируемых динамических мультиагентных систем // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 2. С. 2–8. doi: 10.14357/19922264240201. EDN: CLMBXC.
5. Group formation in economics: Networks, clubs, and coalitions / Eds. G. Demange, M. Wooders. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 475 p.
6. Dixit A. K., Natebuff B. J. The art of strategy. — New York, London: W. W. Norton & Co., 2008. 446 p.
7. Shoham Y., Leyton-Brown R. Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 532 p.
8. Multi-agent and complex systems / Eds. Q. Bai, F. Ren, K. Fujita, M. Znanj, T. Ito. — Studies in computational intelligence ser. — Singapore: Springer, 2016. Vol. 670. 210 p. doi: 10.1007/978-981-10-2564-8.
9. Dixit A. K., Skeath S., Reiley D. H., Jr. Games of strategy. — New York, London: W. W. Norton & Co., 2017. 880 p.
10. Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. — М.: Наука, 1983. 272 с.
11. Маклейн С. Категории для работающего математика / Пер. с англ. — М.: Физматлит, 2004. 352 с. (Mac Lane S. Categories for the working mathematician. — 2nd ed. — New York, NY, USA: Springer, 1998. 318 p.)
12. Абгарян К. К., Осипова В. А. Применение методов поддержки принятия решений для многокритериальной задачи отбора многомасштабных композиций // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 2. С. 47–53. doi: 10.14357/19922264190207. EDN: TVWFDB.
13. Потанин М. С., Вайсер К. О., Жолобов В. А. Структурная оптимизация структуры сетей глубокого обучения // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 4. С. 55–62. doi: 10.14357/19922264200408. EDN: XNTAJN.
14. Кириков И. А., Листонад С. В. Согласование целей сплоченных гибридных интеллектуальных многоагентных систем // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 2. С. 66–71. doi: 10.14357/19922264210210. EDN: UJPYBQ.
15. Листонад С. В., Кириков И. А. Разрешение конфликтов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 1. С. 54–60. doi: 10.14357/19922264220108. EDN: VHRAQC.
16. Листонад С. В., Кириков И. А. Метод на основе нечетких правил для управления конфликтами агентов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 66–72. doi: 10.14357/19922264230109. EDN: DCWSOQ.
17. Wooldridge M. An introduction to multiagent systems. — New York, NY, USA: Wiley, 2009. 484 p.
18. Листонад С. В. Жизненный цикл методологии построения рефлексивно-активных систем искусственных гетерогенных интеллектуальных агентов // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 84–91. doi: 10.14357/19922264240112. EDN: GUAMVE.

Поступила в редакцию 24.04.2024

Принята к публикации 15.01.2025

## ON GAME NETWORKS STRUCTURE OPTIMIZATION IN MULTIAGENT SYSTEMS

N. S. Vasilyev

Bauman Moscow State Technical University, 5-1 Baumanskaya 2nd Str., Moscow 105005, Russian Federation

**Abstract:** Monoidal category of binary relations is applied to study and optimize large multiagent systems. Agents' communication networks structure choice is essential part of players' strategies. It must be selected to resolve the conflict of interests. Compositionality of the problem in the monoidal category gives possibility to solve it. Notion of

the optimal game networks structure is contributed. The definition is based on equilibria and effectiveness principles usage. A method is proposed to find the optimal structure. It uses families of binary relations to compare given agents' preferences relations. Players' optimal communication structure is built by means of the most expedient players' coalitions search. Matrix algebra presentation of binary relations allows computing it. On the ground of the method, a new technology to study and optimize large multiagent systems can be built. Its program realization is supported by computer category algebra.

**Keywords:** monoidal category; preference relation; communication network; game network structure; expedient coalition; characteristic relation; resulting relation; compositionality

**DOI:** 10.14357/19922264250102

**EDN:** IORGJI

## References

- Germeyer, Yu. B. 1976. *Igry s neprotivopolozhnyimi interesami* [Games with nonopposing interests]. Moscow: Nauka. 326 p.
- Gubko, M. V. 2004. Control of organizational systems with network interaction of agents. I. A review of network game theory. *Automat. Rem. Contr.* 65(8):1276–1291. doi: 10.1023/B:AURC.0000038730.85322.dc. EDN: CKCFXO.
- Vasilyev, N. S. 2023. Kompozitsional'noe predstavlenie struktury igry mnogikh lits v monoidal'noy kategorii binarnykh otnosheniy [Multiplayers' games compositional structure in the monoidal category of binary relations]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):18–26. doi: 10.14357/19922264230203. EDN: GPMZTS.
- Vasilyev, N. S. 2024. O funktnom predstavlenii optimiziruemyykh dinamicheskikh mul'tiagentnykh sistem [On functor representation of optimized dynamic multiagent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(2):2–8. doi: 10.14357/19922264240201. EDN: CLM-BXC.
- Demange, G., and M. Wooders, eds. 2005. *Group formation in economics: Networks, clubs, and coalitions*. Cambridge: Cambridge University Press. 475 p.
- Dixit, A. K., and B. J. Nalebuff. 2008. *The art of strategy*. New York, London: W. W. Norton & Co. 446 p.
- Shoham, Y., and R. Leyton-Brown. 2010. *Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations*. Cambridge: Cambridge University Press. 532 p.
- Bai, Q., F. Ren, K. Fujita, and M. Zhan, eds. 2016. *Multiagent and complex systems*. Studies in computational intelligence ser. Singapore: Springer. 210 p. doi: 10.1007/978-981-10-2564-8.
- Dixit, A. K., S. Skeath, and D. H. Reiley, Jr. 2017. *Games of strategy*. New York, London: W. W. Norton & Co. 880 p.
- Skornyakov, L. A. 1983. *Elementy obshchey algebrы* [Elements of general algebra]. Moscow: Nauka. 272 p.
- Mac Lane, S. 1998. *Categories for the working mathematician*. 2nd ed. New York, NY: Springer. 318 p.
- Abgaryan, K. K., and V. A. Osipova. 2019. Primenenie metodov podderzhki prinyatiya resheniy dlya mnogokriterial'noy zadachi otbora mnogomasshtabnykh kompozitsiy [Application of decision support methods for the multicriterial selection of multiscale compositions]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(2):47–53. doi: 10.14357/19922264190207. EDN: TVWFDB.
- Potanin, M. S., K. O. Vayser, V. A. Zholobov, and V. V. Strijov. 2020. Optimizatsiya struktury setey glubokogo obucheniya [Deep learning neural network structure optimization]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(4):55–62. doi: 10.14357/19922264200408. EDN: XNTAJN.
- Kirikov, I. A., and S. V. Listopad. 2021. Soglasovanie tseley agentov splochnykh gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistem [Coordination of agents' goals in cohesive hybrid intelligent multiagent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(2):66–71. doi: 10.14357/19922264210210. EDN: UJPYBQ.
- Listopad, S. V., and I. A. Kirikov. 2022. Razreshenie konfliktov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Conflict resolution in hybrid intelligent multiagent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(1):54–60. doi: 10.14357/19922264220108. EDN: VHRAQC.
- Listopad, S. V., and I. A. Kirikov. 2023. Metod na osnove nechetkikh pravil dlya upravleniya konfliktami agentov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Fuzzy rules based method for agent conflict management in hybrid intelligent multiagent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(1):66–72. doi: 10.14357/19922264230109. EDN: DCWSOQ.
- Listopad, S. V. 2024. Zhiznennyi tsikl metodologii postroyeniya reflektivno-aktivnykh sistem iskusstvennykh geterogennykh intellektual'nykh agentov [Life cycle of methodology for constructing reflexive-active systems of artificial heterogeneous intelligent agents]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):84–91. doi: 10.14357/19922264240112. EDN: GUAMVE.
- Wooldridge, M. 2009. *An introduction to multiagent systems*. New York, NY: Wiley. 484 p.

Received April 24, 2024

Accepted January 15, 2025

## Contributor

**Vasilyev Nikolai S.** (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Bauman Moscow State Technical University, 5-1 Baumanskaya 2nd Str., Moscow 105005, Russian Federation; nik8519@yandex.ru

# ГАРАНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАБОТОСПОСОБНОСТИ МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СЕТИ ПРИ ПОВРЕЖДЕНИЯХ

Ю. Е. Малащенко<sup>1</sup>, И. А. Назарова<sup>2</sup>

**Аннотация:** В рамках вычислительных экспериментов исследуются показатели работоспособности многопользовательской сети связи при разрушении отдельных узлов. При моделировании создаются массивы данных о маршрутах передачи максимальных межузловых потоков. Изучаются изменения загрузки ребер и транзитных потоков через неповрежденные сетевые узлы. Определяются относительные дифференцированные показатели, характеризующие зависимость передаваемых потоков от уменьшения пропускной способности сети при выходе из строя каждого узла. Формируются многокритериальные гарантированные оценки максимально возможных отклонений от показателей функционирования сети в стационарном режиме. Проводится сравнительный анализ результатов, полученных при использовании двух схем маршрутизации для равных межузловых потоков. Приводятся итоговые диаграммы для сетей с различными структурными особенностями.

**Ключевые слова:** потоковая модель сети связи; гарантированные оценки при повреждении узлов

**DOI:** 10.14357/19922264250103

**EDN:** MYNICH

## 1 Введение

В рамках математической модели передачи многопродуктового потока анализируется функционирование многопользовательской сетевой системы связи [1] при повреждениях. Обеспечение информационного обмена между узлами-корреспондентами рассматривается как основная функция сети связи, а вектор допустимых межузловых потоков различных видов — как функциональная характеристика системы.

На основе результатов вычислительных экспериментов изучаются отклонения от показателей стационарного режима для равных межузловых потоков при удалении некоторой вершины графа сети. Как в исходной, так и в поврежденной сети для каждой пары узлов-корреспондентов определяются максимально допустимый межузловой поток и загрузка ребер вдоль маршрутов. Опираясь на полученные массивы данных для каждой поврежденной сети, подсчитывается загрузка ребер при одновременной передаче равных межузловых потоков между всеми парами корреспондентов. Далее указанные значения сравниваются с нагрузками ребер в исходной сети.

Вводится понятие вектор-отклика системы на выход из строя некоторого узла. В данной модели компоненты вектор-отклика вычисляются с помощью оценки изменения загрузки ребер и пропускной способности сети при разрушении узла.

Для оценки функционирования поврежденной сети компоненты вектор-отклика переупорядочиваются по максиминному правилу. Полученная лексикографически упорядоченная последовательность представляет собой набор гарантированных оценок предельно возможных отклонений от показателей функционирования системы в стационарном режиме. Построенные агрегированные расчетные показатели положены в основу недоминируемых многокритериальных оценок компонент вектор-откликов в случае выхода из строя отдельных узлов.

Данная работа продолжает исследования функциональных характеристик сетей связи при повреждениях [2, 3]. В них рассматривались межузловые потоки, которые передавались только по кратчайшим маршрутам с минимальным числом ребер. В разд. 5 сравниваются результаты для двух различных способов выбора маршрута. Вычислительные эксперименты проводились в рамках методологии исследования операций [4, 5] с использованием методов потокового программирования [6].

## 2 Математическая модель

Для описания многопользовательской сетевой системы связи воспользуемся следующей математической записью модели передачи многопродуктового потока (далее — М-модель). Сеть  $G$  задается

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, malash09@ccas.ru

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, irina-nazar@yandex.ru

множествами  $\langle V, R, U, P \rangle$ : узлов (вершин) сети  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$ ; неориентированных ребер  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$ ; ориентированных дуг  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$ ; пар узлов-корреспондентов  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ . Предполагается, что в сети отсутствуют петли и сдвоенные ребра.

Ребро  $r_k \in R$  соединяет смежные вершины  $v_{n_k}$  и  $v_{j_k}$ . Каждому ребру  $r_k$  ставятся в соответствие две ориентированные дуги  $u_k$  и  $u_{k+E}$  из множества  $U$ . Дуги  $\{u_k, u_{k+E}\}$  определяют прямое и обратное направление передачи потока по ребру  $r_k$  между концевыми вершинами  $v_{n_k}$  и  $v_{j_k}$ . Для каждой вершины  $v_n$  формируется список  $K(n)$  номеров инцидентных ей ребер:  $K(n) = \{k_1, k_2, \dots, k_{a(n)}\}$ , где  $a(n)$  — число инцидентных ребер для  $v_n$ .

В многопользовательской сети  $G$  рассматриваются  $M = N(N-1)$  независимых, невазимоаменяемых и равноправных межузловых потоков различных видов. Каждой паре узлов-корреспондентов  $p_m$  из множества  $P$  соответствуют: вершина-источник с номером  $s_m$ , из  $s_m$  входной поток  $m$ -го вида поступает в сеть; вершина-приемник с номером  $t_m$ , из  $t_m$  поток  $m$ -го вида покидает сеть. Для каждой вершины  $v_n \in V, n = \overline{1, N}$ , в подмножество  $P(v_n)$  входят все пары-корреспонденты, для которых  $v_n$  служит узлом-источником:  $P(v_n)\{p_m | s_m = n, t_m \neq n, t_m = \overline{1, N}\}$ , а для каждого  $P(v_n)$  — список номеров  $M(n)$  пар  $p_m$ , входящих в подмножество  $P(v_n)$ :  $M(n) = \{m_1(n), m_2(n), \dots, m_{N-1}(n)\}$ .

Обозначим через  $z_m$  величину межузлового потока  $m$ -го вида, поступающего в сеть через узел с номером  $s_m$  и покидающего сеть из узла с номером  $t_m$ ;  $x_{mk}, x_{m(k+E)}$  — поток  $m$ -го вида, который передается по дугам  $u_k$  и  $u_{k+E}$  согласно направлению передачи,  $x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$ ;  $S(v_n)$  — множество номеров исходящих дуг, по ним поток покидает узел  $v_n$ ;  $T(v_n)$  — множество номеров входящих дуг, по ним поток поступает в узел  $v_n$ . Состав множеств  $S(v_n)$  и  $T(v_n)$  однозначно формируется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро  $r_k \in R$  соединяет вершины с номерами  $n$  и  $j$ , такими что  $n < j$ . Тогда ориентированная дуга  $u_k = (v_n, v_j)$ , направленная из вершины  $v_n$  в  $v_j$ , считается *исходящей* из вершины  $v_n$  и ее номер  $k$  заносится в множество  $S(v_n)$ , а дуга  $u_{k+E}$ , направленная из  $v_j$  в  $v_n$ , — *входящей* для  $v_n$  и ее номер  $k+E$  помещается в список  $T(v_n)$ . Дуга  $u_k$  является *входящей* для  $v_j$ , и ее номер  $k$  попадает в  $T(v_j)$ , а дуга  $u_{k+E}$  — *исходящей*, и номер  $k+E$  вносится в список исходящих дуг  $S(v_j)$ .

Во всех узлах сети  $v_n \in V, n = \overline{1, N}$ , для каждого вида потока должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}; \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ n = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}, x_{mi} \geq 0, z_m \geq 0. \quad (1)$$

Величина  $z_m$  равна входному межузловому потоку  $m$ -го вида, проходящему от источника  $s_m$  к приемнику  $t_m$  пары  $p_m$  при распределении потоков  $\{x_{mi}\} = \mathbf{x}$  по дугам сети.

Каждому ребру  $r_k \in R$  приписывается неотрицательное число  $d_k$  — суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру  $r_k$  в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$  — положительные числа  $d_k > 0$ . Вектор  $\mathbf{d}$  определяет следующие ограничения на сумму потоков всех видов, передаваемых по ребру  $r_k$  одновременно:

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \\ x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0, k = \overline{1, E}. \quad (2)$$

Ограничения (1), (2) задают множество допустимых значений вектора межузловых потоков  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$ :

$$\mathcal{Z}(\mathbf{d}) = \{ \mathbf{z} \geq 0 \mid \exists \mathbf{x} \geq 0 : (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1), (2)} \}.$$

### 3 Оценка отклика системы при повреждении сети

Для анализа изменений потоковых характеристик при повреждении узлов сети на М-модели проводились вычислительные эксперименты, в ходе которых многократно решалась задача о поиске максимального однопродуктового потока. На начальном этапе задается исходная *неповрежденная* сеть  $G(0)$ , пропускные способности  $d_k(0), k = \overline{1, E}$ , и предполагается, что между парой узлов  $p_m \in P$  передается поток  $m$ -го вида.

В *неповрежденной* сети  $G(0)$  для каждой пары корреспондентов  $p_m \in P$  определяется максимальный однопродуктовый поток  $m$ -го вида, передаваемый в монопольном режиме из  $s_m$  в  $t_m$ .

**Задача 1.** Для некоторого  $p_m \in P$  найти

$$z_m^0(1) = \max_{\mathbf{z}, \mathbf{x}} z_m$$

при условиях: (1), (2),  $z_i = 0$  для  $i \neq m, p_i \in P$ .

Решение задачи 1 — величина максимального потока  $z_m^0(1)$  с соответствующими значениями дуговых потоков  $x_{mk}^0(1)$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $k = \overline{1, 2E}$ . Для выбранного  $p_m \in P$  формируется список номеров ребер, образующих минимальный разрез из  $a(m)$  ребер,  $L(m) = \{l_1, l_2, \dots, l_{a(m)}\}$ , такой что

$$z_m^0(1) = \sum_{l \in L(m)} d_l(0) = \sum_{l \in L(m)} [x_{ml}^0(1) + x_{m(l+E)}^0(1)].$$

После решения последовательности задач 1 для всех  $p_m \in P$  определяются нормирующие коэффициенты  $\omega_m^0(1) = 1/z_m^0(1)$ ,  $z_m^0(1) \neq 0$ ,  $m = \overline{1, M}$ , и нормированные дуговые потоки

$$x_{mk}^0 = \omega_m^0(1)x_{mk}^0(1), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}. \quad (3)$$

Согласно условиям нормировки для дуговых потоков (3) при передаче всех  $x_{mk}^0$  по ребрам сети меж-узловой поток из узла  $s_m$  в узел  $t_m$  равен единице для всех  $p_m \in P$ .

В сети  $G(0)$  для каждого ребра  $r_k$  подсчитывается суммарная загрузка:

$$\Delta_k(0) = \sum_{m=1}^M [x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0],$$

т. е.  $\Delta_k(0)$  находится на основании значений  $x_{mk}^0$  при одновременной передаче всех меж-узловых потоков, таких что  $z_m^0 = 1$  для всех  $p_m \in P$ . Описанный способ передачи потоков будем называть стационарным, как и режим функционирования системы.

Для оценки последствий выхода из строя узла  $v_j$  на основе исходной сети  $G(0)$  формируется сеть  $G(v_j)$ , в которой пропускная способность ребер, инцидентных вершине  $v_j$ , полагается равной нулю:

$$d_k(v_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \in K(v_j); \\ d_k(0) & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$D(v_j) = D(0) - \sum_{k \in K(v_j)} d_k(0).$$

Здесь и далее  $K(v_j)$  — множество номеров ребер, инцидентных вершине  $v_j$ .

Формально в поврежденной сети  $G(v_j)$  для всех  $p_m \in P$  последовательно решается задача 1. В результате определяются новые маршруты передачи единичных меж-узловых потоков и согласно (3) строятся дуговые потоки  $\{x_{mk}^0(v_j)\}$ ,  $k = \overline{1, 2E}$ , для меж-узловых потоков  $z_m^j$ . Вводятся обозначения:  $P^-(v_j) = \{m_1, m_2, \dots\}$  — список номеров пар, для которых в сети  $G(v_j)$  не существует пути соединения;  $M^-(v_j)$  — число таких пар. Для всех пар

$p_m \in P^-(v_j)$  соответствующие потоки  $z_m^j$  равны нулю. Обозначим через  $P^+(v_j)$  список номеров пар узлов, таких что поток между ними в сети  $G(v_j)$  не равен нулю, т. е. для всех пар-корреспондентов выполняется

$$z_m^j = 0, \quad m \in P^-(v_j), \quad z_m^j \neq 0, \quad m \in P^+(v_j).$$

Пусть  $M^+(v_j)$  — число пар в  $P^+(v_j)$ , а  $M^-(v_j)$  — соответственно в  $P^-(v_j)$ . При этом

$$P = P^+(v_j) \cup P^-(v_j), \quad M = M^+(v_j) + M^-(v_j).$$

В каждой сети  $G(v_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , относительное изменение (превышение/уменьшение) загрузки для каждого ребра  $r_k$  рассчитывается исходя из начальных показателей:

$$\xi_k^j = \left[ \frac{\Delta_k(v_j)}{\Delta_k(0)} - 1 \right], \quad k = \overline{1, E}, \quad j = \overline{1, N},$$

где

$$\Delta_k(v_j) = \sum_{m=1}^M [x_{mk}^0(v_j) + x_{m(k+E)}^0(v_j)],$$

$$m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, E}.$$

Для оценки относительного изменения пропускной способности сети при удалении узла  $v_j$  вычисляется

$$\delta^j = \frac{\sum_{k \in K(v_j)} d_k(0)}{D(0)}, \quad j = \overline{1, N},$$

где  $K(v_j)$  — множество номеров ребер, инцидентных узлу  $v_j$ . Для указанных ребер пропускная способность в сети  $G(v_j)$  становится равной нулю. Для получения количественных оценок изменения функциональных показателей системы при удалении узла  $v_j$  подсчитываются величины  $\theta_k^j = \xi_k^j / \delta^j$ ,  $k = \overline{1, E}$ . Фактически если значения  $\xi_k^j$  и  $\delta^j$  записать в процентах, то величина  $\theta_k^j$  покажет, на сколько процентов увеличится загрузка  $k$ -го ребра при уменьшении пропускной способности сети на 1% при удалении  $j$ -го узла. Значения  $\theta_k^j$  упорядочиваются по величине от большего к меньшему (по невозрастанию) и перенумеровываются согласно порядку  $\{\theta_i^j\}$ :  $\theta_i^j \geq \theta_{i+1}^j$ ,  $i = \overline{1, E-1}$ . Полученные лексикографически упорядоченные величины  $\{\theta_i^j\}$  служат  $i$ -ми компонентами вектор-отклика  $\theta(j)$ .

Для каждой фиксированной  $i$ -й компоненты вектор-отклика  $\theta(j)$  среди всех повреждений во всех сетях  $G(v_j)$  определяются

$$\Theta_i^* = \max_j \theta_i^j; \quad \Theta_i^{**} = \min_j \theta_i^j, \quad i = \overline{1, E}.$$

Последовательность  $\{\Theta_i^*\}$ ,  $i = \overline{1, E}$ , представляет собой гарантированные оценки компонент вектор-откликов системы на выход из строя отдельного узла.

## 4 Оценка загрузки узлов при повреждениях

На основании (3) для получения оценки максимального значения равных межузловых потоков для сети  $G(0)$  решается следующая задача.

**Задача 2.** Найти  $\tilde{\alpha} = \max_{\alpha} \alpha$  при условиях:

$$\alpha \sum_{m=1}^M [x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0] \leq d_k(0), \quad \alpha \geq 0, \quad k = \overline{1, E}.$$

С помощью решения задачи 2 для всех  $p_m \in P$  определяется вектор  $\tilde{z}(\tilde{\alpha})$ , все компоненты которого равны  $\tilde{\alpha}$ , т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{z}_m &= \tilde{\alpha}, \quad m = \overline{1, M}; \\ \tilde{x}_{mk} &= \tilde{\alpha} x_{mk}^0, \quad m = \overline{1, M}, k = \overline{1, 2E}. \end{aligned}$$

При одновременной передаче всех потоков в сети  $G(0)$  для каждого ребра  $r_k$  загрузка  $\tilde{\Delta}_k$  подсчитывается исходя из дуговых потоков  $\tilde{x}_{mk}$ :

$$\tilde{\Delta}_k = \sum_{m=1}^M [\tilde{x}_{mk} + \tilde{x}_{m(k+E)}].$$

Для каждой пары узлов-корреспондентов  $p_m \in P$ , для полученного допустимого межузлового потока  $\tilde{z}_m$  и соответствующих значений дуговых потоков  $\tilde{x}_{mk}$ ,  $k = \overline{1, 2E}$ , величина

$$\tilde{y}_m = \sum_{k=1}^{2E} \tilde{x}_{mk}, \quad m = \overline{1, M},$$

характеризует результирующую межузловую нагрузку на ребра сети  $G(0)$  при передаче межузлового потока  $\tilde{z}_m$  из узла-источника  $s_m$  в узел-приемник  $t_m$ . Величина  $\tilde{y}_m$  показывает, какая суммарная пропускная способность сети требуется для дуговых потоков  $\tilde{x}_{mk}$ .

В рамках модели отношение результирующей межузловой нагрузки и межузлового потока

$$\tilde{w}_m = \frac{\tilde{y}_m}{\tilde{z}_m}, \quad m = \overline{1, M},$$

можно трактовать как удельные затраты ресурсов сети при передаче потока  $m$ -го вида между узлами  $s_m$  и  $t_m$  при дуговых потоках  $\tilde{x}_{mk}$ .

В каждой поврежденной сети  $G(v_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , решается последовательность задач 1, определяются новые маршруты для максимальных потоков и соответствующие дуговые потоки. Согласно нормировке (3)

$$z_m^j = 1, \quad m \in P^+(v_j); \quad x_{mk}^0(v_j), \quad m = \overline{1, M}, k = \overline{1, 2E},$$

и далее формируется набор:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_m(v_j) &= \tilde{\alpha}, \quad m \in P^+(v_j); \\ \tilde{x}_{mk}(v_j) &= \tilde{\alpha} x_{mk}^0(v_j), \quad m = \overline{1, M}, k = \overline{1, 2E}. \end{aligned}$$

В сети  $G(v_j)$  для каждого ребра  $r_k$  подсчитывается загрузка

$$\tilde{\Delta}_k(v_j) = \sum_{m=1}^M [\tilde{x}_{mk}(v_j) + \tilde{x}_{m(k+E)}(v_j)].$$

При одновременной передаче всех межузловых потоков из множества  $P^+(v_j)$

$$\tilde{z}_m(v_j) = \tilde{\alpha} \text{ для всех } m \in P^+(v_j).$$

Для каждой неповрежденной вершины  $v_n$  в сети  $G(v_j)$  загрузка всех инцидентных ей ребер равна

$$\gamma_n(v_j) = \sum_{k \in K(v_n)} \tilde{\Delta}_k(v_j),$$

пропускная способность всех инцидентных ребер составляет

$$D_n(v_j) = \sum_{k \in K(v_n)} d_k(v_j).$$

Для  $n = \overline{1, N}$ ,  $n \neq j$ , относительная величина

$$\rho_n(v_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } D_n(v_j) = 0; \\ \frac{\gamma_n(v_j)}{D_n(v_j)} & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

показывает, как меняется загрузка узла с номером  $n$  при сохранении передачи межузловых потоков  $\tilde{z}_n$ , равных  $\tilde{\alpha}$ , в поврежденной сети  $G(v_j)$ .

Для получения гарантированных оценок функционирования сети все  $\rho_n(v_j)$  при фиксированном  $v_j$  переупорядочиваются от большего к меньшему (по неубыванию):

$$\{\rho_i(v_j)\} : \rho_i(v_j) \geq \rho_{i+1}(v_j), \quad i = \overline{1, N-1},$$

и определяются верхняя и нижняя оценки:

$$\rho_i^* = \max_j \rho_i(v_j); \quad \rho_i^{**} = \min_j \rho_i(v_j).$$

## 5 Результаты вычислительных экспериментов

Вычислительный эксперимент проводился на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1. В каждой сети имеются 69 узлов. Пропускные способности ребер  $d_k(0)$  равномерно распределены на отрезке [990, 1099].

В ходе исследования была сделана нормировка, и поэтому суммарная пропускная способность в обеих сетях одинакова:

$$\sum_{k=1}^E d_k(0) = D(0) = 75082.$$

На рис. 2 для базовой и кольцевой сетей представлены оценки  $\Theta_i^*$  при передаче максимального межузлового потока. Оценки  $\Theta_i^*$  упорядочены по величине от большего к меньшему, а номера указаны по горизонтальной оси. Кривые, описывающие  $\Theta_i^*$ , служат верхними огибающими для всех распределений вектор-откликов  $\theta(j)$  при повреждении узлов  $v_j$ . По построению  $\Theta_i^*$  можно рассматривать как гарантированные верхние оценки

откликов при разрушении любой вершины графа сети. В случае выхода из строя любого узла  $v_j$  точки, описывающие лексикографически упорядоченное распределение вектор-откликов  $\theta_i^j$ , лежат ниже  $\Theta_i^*$ .

Анализ рис. 2 показывает, что при уменьшении пропускной способности сети на 1% рост загрузки ребер в базовой сети не превышает 20%, однако в кольцевой сети при некоторых повреждениях может достигать 30%. В ходе экспериментов с выходом из строя узла пропускная способность сети  $G(v_j)$  в среднем уменьшается на 3%–4%. Таким образом, в базовой сети реберная нагрузка может увеличиться в 1,5 раза, а в кольцевой возрасти в 2 раза. Разрушение отдельного узла требует изменения маршрутов передачи потока для значительного числа пар-корреспондентов, вызывает перегрузки на определенных участках сети и ухудшает ее работоспособность. Рисунок 2 иллюстрирует количественные оценки последствий разрушений.

В работах [2, 3] при передаче потока, анализе повреждений и вычислении вектор-откликов использовались только кратчайшие маршруты с ми-

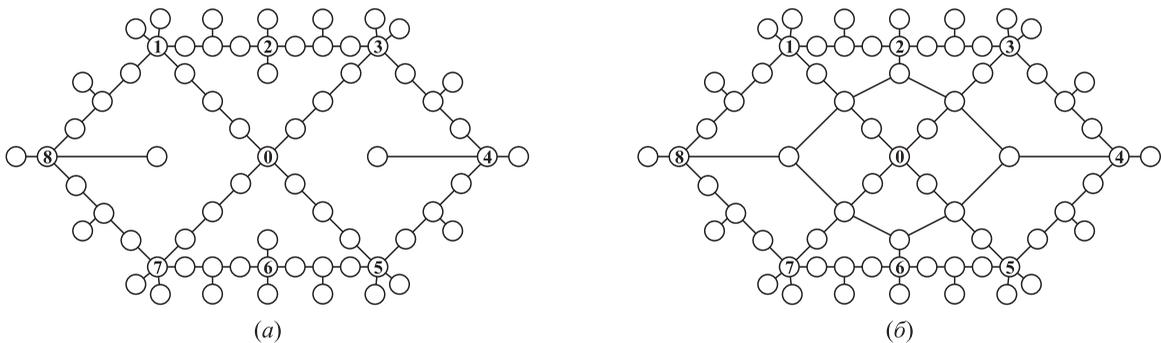


Рис. 1 Базовая (а) и кольцевая (б) сети

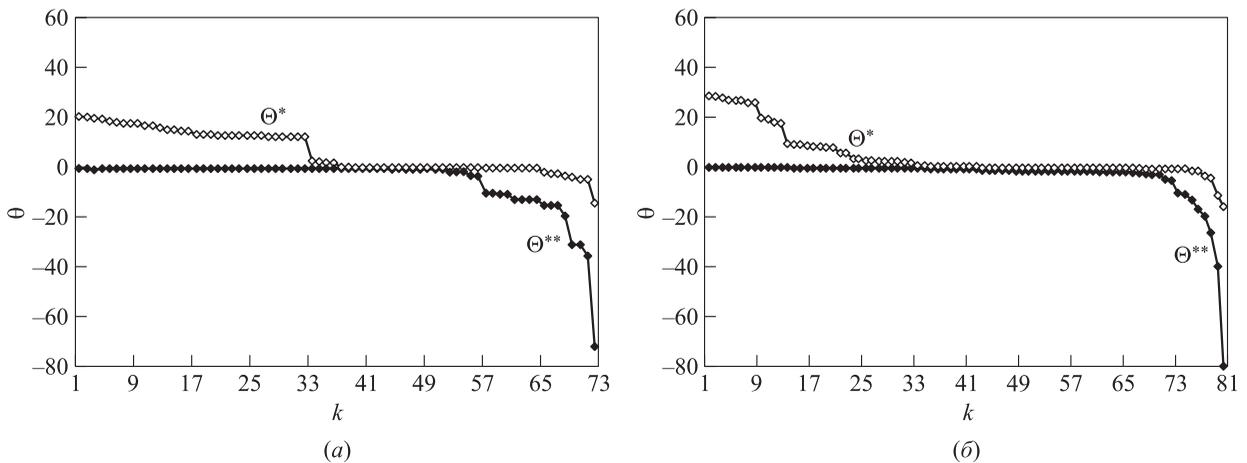


Рис. 2 Оценки вектор-откликов в базовой (а) и кольцевой (б) сетях

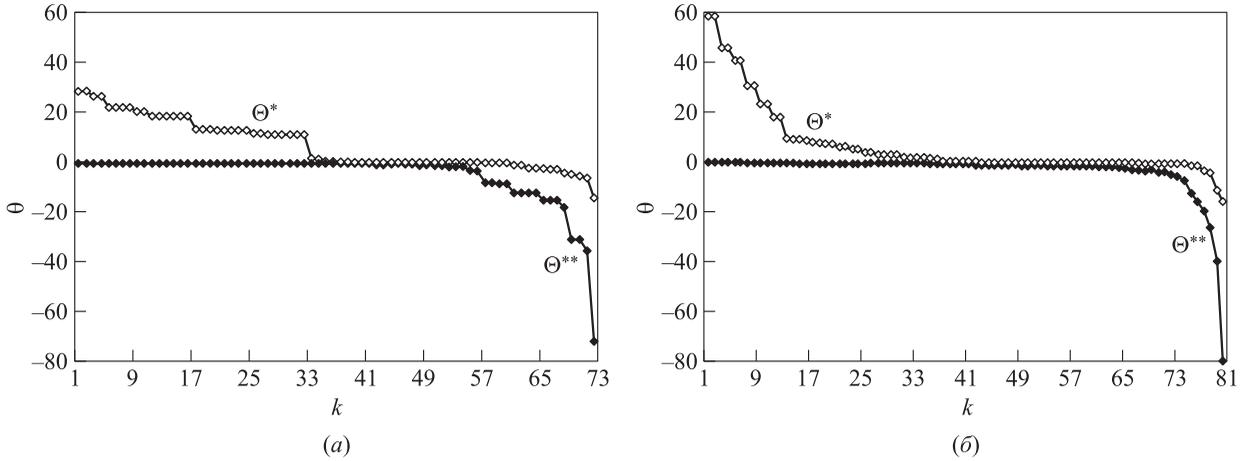


Рис. 3 Оценки вектор-откликов для кратчайших маршрутов в базовой (а) и кольцевой (б) сетях

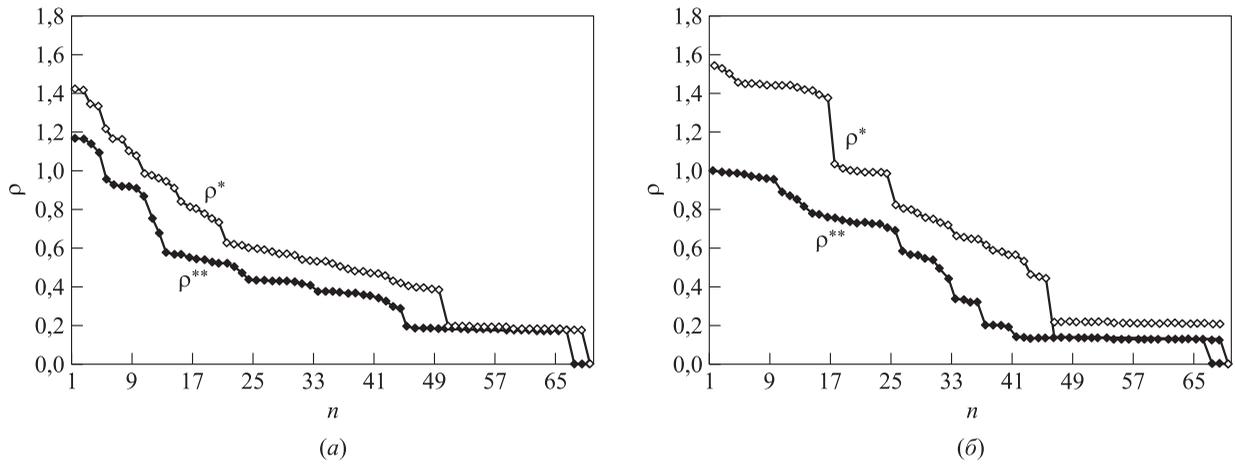


Рис. 4 Перегрузки узлов в базовой (а) и кольцевой (б) сетях

нимальным числом ребер. На рис. 3 приводятся результирующие диаграммы гарантированных оценок  $\Theta_i^*$  и  $\Theta_i^{**}$ . Анализ рис. 2 и 3 свидетельствует, что при передаче потока только по кратчайшим маршрутам перегрузки оказываются больше, чем при использовании маршрутов для максимальных потоков.

На рис. 4 представлены диаграммы значений  $\rho_i^{**}$  и  $\rho_i^*$  при передаче максимального межузлового потока для базовой и кольцевой сетей. Из диаграмм следует, что в базовой сети величины перегрузок больше и возникают они чаще, чем в кольцевой. В базовой сети удаление узла, расположенного, например, на «кольцевой» линии, приводит к удлинению маршрутов (соединений) для большого числа корреспондентов и, как следствие, увеличению транзитной нагрузки на оставшиеся узлы. В кольцевой сети на 10% больше ребер и маршрутов соединения, что уменьшает суммарную загрузку сети. Однако высокая загрузка ребер на внутреннем

кольце приводит к перегрузкам в узлах. Узлы в этом случае становятся транзитными для тех потоков, которые передавались в неповрежденной сети по другим маршрутам.

На рис. 5 представлены диаграммы значений  $\rho_i^{**}$  и  $\rho_i^*$  для базовой и кольцевой сетей при передаче межузловых потоков по кратчайшим маршрутам [2, 3]. На рис. 5 также наблюдаются большие отклонения по сравнению с диаграммами на рис. 4. Меньшее число ребер в маршруте при выходе из строя узла создает большие перегрузки — транзитные потоки через неповрежденные узлы возрастают.

## 6 Заключение

Предложенная выше агрегированная гарантированная оценка отклонений от стационарных показателей функционирования может использоваться

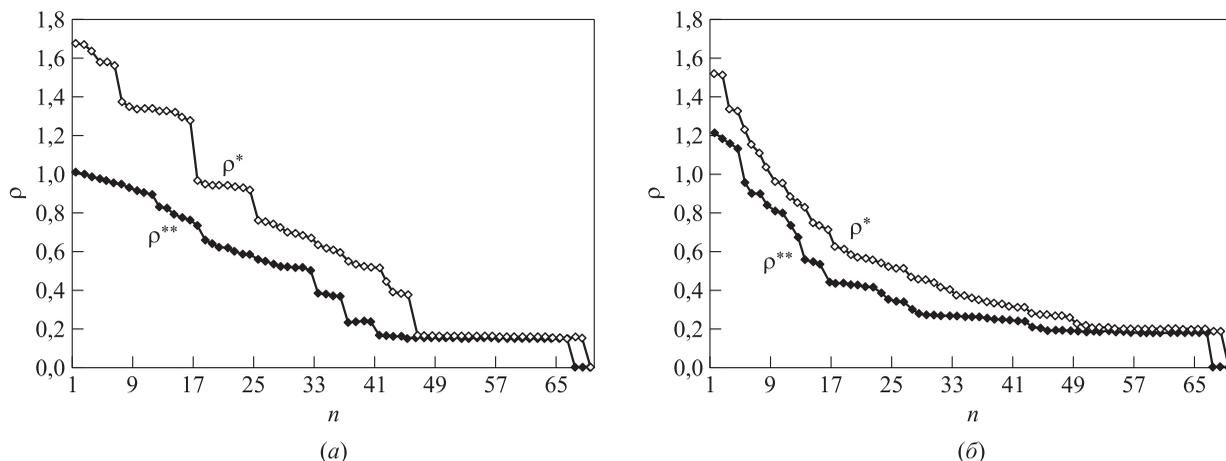


Рис. 5 Перегрузки узлов для кратчайших маршрутов в базовой (а) и кольцевой (б) сетях

ся для поиска и определения критически опасных повреждений. Представленный в настоящей работе способ вычисления вектор-откликов можно рассматривать более широко — как меру эластичности сети при нарушениях ее работы. В [7] эластичность потоков рассматривается при справедливом дележе ресурсов сети с использованием специальных индексов.

В настоящее время, несмотря на появление новых технологий передачи потоков, по-прежнему актуальным вопросом остается распределение ресурсов первичной сети между составными частями вторичной. Специализированные модели позволяют получать многопараметрические оценки функциональных характеристик и показателей работоспособности многослойных сетевых систем. Большое число работ посвящено разделению базовой сети на отдельные слои, каждый из которых может иметь свою систему управления и предоставлять специальные услуги [8–13]. Оценка функционирования и работоспособности современных сетевых систем является многопараметрическим вектором и зависит от управления перераспределением ресурсов при повреждениях. Анализ взаимодействия вторичных и первичных сетей предусматривает изучение возможных перегрузок в первичной сети в случае выхода из строя ее частей и при нарушении введенных ограничений на передачу потоков.

## Литература

1. Пехтерев С. В., Макаренко С. И., Ковальский А. А. Описательная модель системы спутниковой связи Starlink // Системы управления, связи и безопасности, 2022. № 4. С. 190–255. doi: 10.24412/2410-9916-2022-4-190-255. EDN: QMOLDV.
2. Малашенко Ю. Е., Назарова И. А. Сравнительный анализ показателей функционирования сети при повреждении узлов // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 52–60. doi: 10.14357/19922264240307. EDN: YUEGZT.
3. Малашенко Ю. Е., Назарова И. А. Дифференцированные оценки многопользовательской сети при повреждении узлов // Известия РАН. Теория и системы управления, 2024. № 6. С. 79–90.
4. Данскин Дж. М. Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения / Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1970. 200 с. (*Danskin J. M. The theory of Max-Min and its application to weapons allocation problems.* — Berlin: Springer-Verlag, 1970. 128 p. doi: 10.1007/978-3-642-46092-0.)
5. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971. 384 с.
6. Йенсен П., Барнес Д. Потокное программирование / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1984. 392 с. (*Jensen P. A., Barnes J. W. Network flow programming.* — New York, NY, USA: Wiley, 1980. 408 p.)
7. Кочеткова И. А., Власкина А. С., Эсенг Манге П. Л. Э., Шоргин В. С. Задача разделения ресурса беспроводной сети по задержке передачи эластичного трафика // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 1. С. 23–32. doi: 10.14357/08696527240102. EDN: WXYRQV.
8. Агеев К. А., Сопин Э. С., Яркина Н. В., Самуйлов К. Е., Шоргин С. Я. Анализ механизмов нарезки сети с учетом гарантий для различных типов трафика // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 3. С. 94–100. doi: 10.14357/19922264200314. END: ZVBQXA.
9. Бесчастный В. А., Острикова Д. Ю., Шоргин С. Я., Молчанов Д. А., Гайдамака Ю. В. Анализ плотности базовых станций 5G NR для предоставления услуг виртуальной и дополненной реальности // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 102–108. doi: 10.14357/19922264220213. EDN: VPIRYN.

10. Аду К. И. Б., Маркова Е. В., Гайдамака Ю. В., Шоргин С. Я. Анализ схемы доступа с прерыванием при нарезке радиоресурсов сети пятого поколения // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 96–106. doi: 10.14357/19922264230113. EDN: TNKSWK.
11. Самуйлов А. К., Платонова А. А., Шоргин В. С., Гайдамака Ю. В. К моделированию эффектов обслуживания многоадресного трафика в сетях 5G NR // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 71–77. doi: 10.14357/19922264230210. EDN: SLMGZU.
12. Горшенин А. К., Горбунов С. А., Волканов Д. Ю. О классификации объектов сетевой вычислительной инфраструктуры на основе анализа статистических аномалий в трафике // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 76–87. doi: 10.14357/19922264230311. EDN: ХНТМVI.
13. Острикова Д. Ю., Голос Е. С. Бесчастный В. А., Мачнев Е. А., Шоргин В. С., Гайдамака Ю. В. Метод оценки характеристик систем 5G/6G «новое радио» с учетом макро- и микроподвижности пользователей // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 2. С. 32–39. doi: 10.14357/19922264240205. EDN: JCUFHS.

Поступила в редакцию 16.12.2024

Принята к публикации 15.01.2025

## GUARANTEED ESTIMATES OF THE MULTIUSER NETWORK PERFORMANCE INDICATORS IN CASE OF DAMAGE

Yu. E. Malashenko and I. A. Nazarova

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** Within the framework of computational experiments, the performance indicators of a multiuser communication network are investigated when single node is destroyed. In the simulation, arrays of data on the transmission routes of maximum internodal flows are analyzed. Changes in edge loading and transit flows through undamaged network nodes are being studied. Relative differentiated indicators are calculated that characterize the dependence of transmitted flows on a decrease in network capacity when one node is damaged. Multicriteria guaranteed estimates of the maximum possible deviations from the indicators of functioning of undamaged network in stationary mode are formed. A comparative analysis of the results obtained by using two routing schemes for the transmission of equal interstitial flows is carried out. Summary diagrams for networks with various structural features are provided.

**Keywords:** streaming model of the communication network; guaranteed estimate in case of node damage

DOI: 10.14357/19922264250103

EDN: MYHICH

### References

1. Pekhterev, S. V., S. I. Makarenko, and A. A. Kovalsky. 2022. Opisatel'naya model' sistemy sputnikovoy svyazi Starlink [Descriptive model of Starlink satellite communication system]. *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti* [Systems of Control, Communication and Security] 4:190–255. doi: 10.24412/2410-9916-2022-4-190-255. EDN: QMOLDV.
2. Malashenko, Yu. E., and I. A. Nazarova. 2024. Sravnitel'nyy analiz pokazateley funktsionirovaniya seti pri povrezhdenii uzlov [Analysis of network performance indicators in case of node damage]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):52–60. doi: 10.14357/19922264240307. EDN: YUEGZT.
3. Malashenko, Yu. E., and I. A. Nazarova. 2024. Differentiated estimates of a multiuser network in case of node damage. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 63(6):909–921.
4. Danskin, J. M. 1970. *The theory of Max-Min and its application to weapons allocation problems*. Berlin: Springer-Verlag. 128 p. doi: 10.1007/978-3-642-46092-0.
5. Germeyer, Yu. B. 1971. *Vvedenie v teoriyu issledovaniya operatsiy* [Introduction to operations research theory]. Moscow: Nauka. 384 p.
6. Jensen, P. A., and J. W. Barnes. 1980. *Network flow programming*. New York, NY: Wiley. 408 p.
7. Kochetkova, I. A., A. S. Vlaskina, P. L. E. Eseng Mangu, and V. S. Shorgin. 2024. Zadacha razdeleniya resursa besprovodnoy seti po zaderzhke peredachi elastichnogo trafika [Radio resource allocation for elastic traffic transmission with latency fairness in wireless networks]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(1):23–32. doi: 10.14357/08696527240102. EDN: WXYPQV.
8. Ageev, K. A., E. S. Sopin, N. V. Yarkina, K. E. Samouylov, and S. Ya. Shorgin. 2020. Analiz mekhanizmov narezki seti s uchetom garantii dlya razlichnykh tipov trafika [Analysis of mechanisms of network slicing with consideration of guarantees for different types of traffic].

- ysis of the network slicing mechanisms with guaranteed allocated resources for various traffic types]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(3):94–100. doi: 10.14357/19922264200314. EDN: ZBBQXA.
9. Beschastnyi, V. A., D. Yu. Ostrikova, S. Ya. Shorgin, D. A. Moltchanov, and Yu. V. Gaidamaka. 2022. Analiz plotnosti bazovykh stantsiy 5G NR dlya predostavleniya uslug virtual'noy i dopolnennoy real'nosti [Density analysis of mmWave NR deployments for delivering scalable AR/VR video services]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):102–108. doi: 10.14357/19922264220213. EDN: VPIRYN.
  10. Adou, K. Y. B., E. V. Markova, Yu. V. Gaidamaka, and S. Ya. Shorgin. 2023. Analiz skhemy dostupa s preryvaniem pri narezke radioresursov seti pyatogo pokoleniya [Preemption-based prioritization scheme for network resources slicing in 5G systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(1):96–106. doi: 10.14357/19922264230113. EDN: TNKSWK.
  11. Samoylov, A. K., A. A. Platonova, V. S. Shorgin, and Yu. V. Gaidamaka. 2023. K modelirovaniyu effektivov ob-sluzhivaniya mnogoadresnogo trafika v setyakh 5G NR [On modeling the effects of multicast traffic servicing in 5G NR networks]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):71–77. doi: 10.14357/19922264230210. EDN: SLMGZU.
  12. Gorshenin, A. K., S. A. Gorbunov, and D. Yu. Volkanov. 2023. O klasterizatsii ob"ektov setevoy vychislitel'noy infrastruktury na osnove analiza statisticheskikh anomalii v trafike [Toward clustering of network computing infrastructure objects based on analysis of statistical anomalies in network traffic]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):76–87. doi: 10.14357/19922264230311. EDN: XHTMVI.
  13. Ostrikova, D. Yu., E. S. Golos, V. A. Beschastnyi, E. A. Machnev, V. S. Shorgin, and Yu. V. Gaidamaka. 2024. Metod otsenki kharakteristik sistem 5G/6G “novoe radio” s uchetom makro- i mikromobil'nosti pol'zovateley [Assessing the characteristics of 5G/6G “new radio” systems with user’s macro- and micromobility]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(2):32–39. doi: 10.14357/19922264240205. EDN: JCUFHS.

Received December 16, 2024

Accepted January 15, 2025

## Contributors

**Malashenko Yuri E.** (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; malash09@ccas.ru

**Nazarova Irina A.** (b. 1966) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; irina-nazar@yandex.ru

# ФИЛЬТРАЦИЯ СОСТОЯНИЙ И ПАРАМЕТРОВ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО КОСВЕННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ БЕЗ ШУМА\*

А. В. Борисов<sup>1</sup>

**Аннотация:** Исследована задача оптимальной фильтрации состояний некоторого класса стохастических дифференциальных систем (СДС) наблюдения. Оцениваемое состояние включает в себя две блочные компоненты. Первая представляет собой марковский скачкообразный процесс (МСП) с конечным множеством состояний. Вторая изменяется синхронно с первой и при фиксированной первой компоненте образует последовательность независимых векторов. Доступная статистическая информация включает в себя известные функции состояния, наблюдаемые без шумов. Задача заключается в построении условного распределения состояния системы по имеющимся наблюдениям. В системах наблюдения с вырожденными шумами невозможно применение стандартных приемов решения задачи фильтрации, сводящих с помощью подходящей гирсановской замены меры доступные наблюдения к совокупности винеровских и пуассоновских процессов. Условное распределение состояния удастся представить с помощью рекуррентно связанной последовательности обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений.

**Ключевые слова:** марковский скачкообразный процесс; стохастическая дифференциальная система наблюдения; косвенные наблюдения без шума; мартингалное разложение; регулярная версия условного распределения

**DOI:** 10.14357/19922264250104

**EDN:** MZAJVZ

## 1 Введение

Задачи оптимальной фильтрации состояний СДС по наблюдаемым функциям состояния, фиксируемым без каких-то дополнительных шумов, имеют достаточно давнюю историю [1]. С одной стороны, наличие «чистых» данных, не подвергнутых зашумлению, порождает надежду на высокую точность итоговых оценок. С другой стороны, отсутствие шумов делает невозможным применение стандартного подхода, используемого при решении задачи фильтрации, когда с помощью подходящей гирсановской замены меры наблюдения сводятся к совокупности винеровских и пуассоновских процессов [2]. Даже в классическом случае линейных гауссовских СДС с вырожденными шумами в наблюдениях задача построения оптимальной оценки фильтрации нетривиальна: стандартный фильтр Калмана–Бьюси с заменой операции обращения на псевдообращение доставляет оптимальную оценку только в случае синхронного вырождения полезного сигнала и шумов в наблюдениях [3].

Существуют различные способы решения данного класса задач. Один из них — аппроксимация оценки оптимальной фильтрации с помощью

последовательности оценок, строящихся с помощью известных оптимальных оценщиков в предположении наличия в наблюдениях малого шума. Эти оценщики — преобразования наблюдений — в действительности применяются к наблюдениям, не содержащим шумов. В дальнейшем доказывалось, что с уменьшением интенсивности предполагаемого шума, заложенной в алгоритме оценщика, полученные оценки сходятся к искомой оптимальной оценке. Именно в таком виде представлено решение упомянутой выше задачи оптимальной фильтрации состояний линейных гауссовских систем [4]. Приближенное вычисление коэффициента усиления фильтра с помощью процедуры стохастической аппроксимации или применения нейронных сетей [5] можно считать разновидностью этого подхода.

Второй подход заключается в преобразовании состояния системы [1], когда сокращается размерность оцениваемого процесса, или в трансформации доступных наблюдений [6, 7]: компоненты наблюдений без шума подвергаются операции дифференцирования. Третий подход состоит в построении оценок, исходя из общего решения задачи оптимальной фильтрации [8]. Задача фильтрации

\* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

<sup>1</sup> Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук, aborisov@frccsc.ru

по наблюдениям без шумов была решена сначала для МСП с конечным множеством состояний [9], а затем и для МСП общего вида [10]. Уравнения, описывающие оптимальную оценку, получены с помощью математического аппарата стохастических мер и имеют сложный вид для их последующего использования при решении прикладных задач.

Данная заметка продолжает цикл исследований, инициированных работами [11, 12]. Она посвящена решению задачи оптимальной фильтрации состояний предложенного в [11] класса специальных МСП по косвенным незашумленным наблюдениям.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 представляет общие сведения об исследуемом классе МСП, а также содержит формальную постановку задачи фильтрации. Раздел 3 посвящен решению вспомогательных задач, составляющих базу решения задачи фильтрации. Она приведена в разд. 4. Раздел 5 содержит заключительные замечания.

## 2 Постановка задачи

Ниже кратко представлены сведения об исследуемом классе МСП, необходимые для корректной постановки и решения задачи оптимальной фильтрации.

Рассматриваются процессы  $Z_t \triangleq \text{col}(\theta_t, Y_t) \in \mathbb{R}^{N+M}$  [11] с двумя блочными компонентами. Первая компонента,  $\theta_t$ , представляет собой МСП с множеством состояний  $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \dots, e_N\}$ , матрицей интенсивностей переходов (МИП)  $\Lambda = \|\Lambda_{ij}\|_{i,j=\overline{1,N}}$  и начальным распределением  $p_0 = \text{col}(p_0^1, \dots, p_0^N)$ . Вторая компонента,  $Y_t \in \mathbb{R}^M$ , — кусочно-постоянный процесс, терпящий скачки синхронно с  $\theta_t$ . Если  $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  — последовательность моментов скачков  $\theta_t$ , то при известной траектории  $\theta_t$  последовательность  $\{Y_{\tau_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  составлена из независимых случайных векторов, условное распределение которых определяется вектором распределений  $\Pi(\cdot) = \text{row}(\Pi^1(\cdot), \dots, \Pi^N(\cdot))$ :

$$\mathcal{P}\{Y_{\tau_i} \in B | \theta_{\tau_i} = e_n\} = \Pi^n(B), \\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M), \quad n = \overline{1, N}.$$

Распределение начального значения  $Y_0$  определяется аналогично с помощью вектора распределений  $\Phi_0(\cdot) = \text{row}(\Phi_0^1(\cdot), \dots, \Phi_0^N(\cdot))$ :

$$\mathcal{P}\{Y_0 \in B | \theta_0 = e_n\} = \Phi_0^n(B), \\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M), \quad n = \overline{1, N}.$$

Известно [11], что процесс  $Z_t \triangleq \text{col}(\theta_t, Y_t^1 \theta_t, \dots, Y_t^N \theta_t) \in \mathbb{R}^{(M+1)N}$ , ассоциированный с процессом  $Z_t$ , представим в виде решения линейной СДС

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t D^Z Z_s ds + \mu_t^Z, \quad (1)$$

где  $D^Z$  — известная неслучайная матрица;  $\mu_t^Z$  — мартингал.

Наблюдению доступен процесс  $\xi_t \in \mathbb{R}^k$ :

$$\xi_t = g(Z_t), \quad (2)$$

где  $g(\cdot) : \mathbb{R}^{(M+1)N} \rightarrow \mathbb{R}^k$  — известная функция, для которой  $\max_{t \geq 0} \mathbb{E} \{\|g(Z_t)\|^2\} < \infty$ .

Задача оптимальной фильтрации заключается в вычислении условного распределения состояния  $Z_t$  относительно  $\mathcal{O}_t \triangleq \sigma\{\xi_s, 0 \leq s \leq t\}$  — естественного потока  $\sigma$ -алгебр, порожденных процессом наблюдений  $\xi_t$ .

## 3 Вспомогательные задачи

Ниже в изложении используются следующие обозначения:

- $I$  — единичная матрица подходящей размерности;
- $\mathbf{1}$  — вектор-строка подходящей размерности, составленная из единиц;
- $I_A(x)$  — индикаторная функция множества  $A$ ;
- $\lambda \triangleq \text{row}(\Lambda_{11}, \dots, \Lambda_{NN})$  — вектор-строка, составленная из диагональных элементов МИП  $\Lambda$ ;  $\bar{\Lambda} \triangleq \Lambda - \text{diag}(\lambda)$ .

Для решения проблемы оптимальной фильтрации необходимо решить две вспомогательные задачи.

**Задача 1.** Рассматривается специальный МСП  $Z_t$ , начальное распределение  $\Phi$  которого сосредоточено на некотором множестве  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M)$ . Пусть  $\sigma^A$  — момент первого выхода  $Z_t$  из множества  $A$ . Необходимо найти

- (1) распределение марковского момента  $\sigma^A$ ;
- (2) распределение  $\theta_t$  при условии, что  $\sigma^A$  к моменту  $t$  еще не наступил;
- (3) распределение  $Z_t$  при условии, что  $\sigma^A$  к моменту  $t$  еще не наступил.

Заметим, что любое множество  $A$  представимо в виде

$$A = \bigcup_{n=1}^N (\{e_n\} \times A_n),$$

где  $A_n \triangleq \{y \in \mathbb{R}^M : (e_n, y) \in A\}$  — «сечение»  $A$  «плоскостью»  $e = e_n$ .

Введем в рассмотрение процессы

$$\mathcal{I}_t^A \triangleq \text{col}(\theta_t^1 I_{A_1}(Y_t), \dots, \theta_t^N I_{A_N}(Y_t)); \\ U_t^A \triangleq I_{[0, \sigma^A)}(t); \quad V_t^A \triangleq \mathcal{I}_t^A U_t^A; \quad W_t^A \triangleq \theta_t U_t^A.$$

Заметим, что при  $Z_0 \in A$  и  $t < \sigma^A$  процессы  $V_t^A$  и  $W_t^A$  тождественны:  $W_t^A \equiv V_t^A$ .

Ниже в изложении процессы типа  $\mathcal{I}_t^A$  называются *индикаторными*; согласно [11] они допускают следующее разложение:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t^A &= \\ &= \theta_0 + \int_0^t \left[ \text{diag}(\lambda) \mathcal{I}_{s-}^A + \text{diag}(\Pi(A)) \bar{\Lambda}^\top \theta_{s-} \right] ds + M_t^1, \end{aligned}$$

где  $M_t^1$  — некоторый мартингал;  $\Pi(A) \triangleq \text{row}(\Pi^1(A_1), \dots, \Pi^N(A_N))$ .

Процесс  $U_t^A$  имеет не более одного скачка; по формуле Долеан [8]

$$\begin{aligned} U_t^A &= I_A(Z_0) + \int_0^t U_{s-}^A \mathbf{1} d\mathcal{I}_s^A = I_A(Z_0) + \\ &+ \int_0^t \left[ \lambda V_{s-}^A + \Pi(A) \bar{\Lambda}^\top W_{s-}^A \right] ds + \int_0^t U_{s-}^A \mathbf{1} dM_s^1. \end{aligned}$$

Найдем СДС, описывающую эволюцию  $V_t^A$ , для чего воспользуемся правилом Ито:

$$\begin{aligned} V_t^A &= \theta_0 + \int_0^t d\mathcal{I}_s^A U_{s-}^A + \int_0^t \mathcal{I}_{s-}^A dU_s^A + \underbrace{\sum_{s \leq t} \Delta \mathcal{I}_s^A \Delta U_s^A}_{= - \int_0^t \mathcal{I}_{s-}^A dU_s^A} = \\ &= \theta_0 + \int_0^t \left[ \text{diag}(\lambda) + \text{diag}(\Pi(A)) \bar{\Lambda}^\top \right] V_{s-}^A ds + M_t^2, \end{aligned}$$

где  $M_t^2$  — мартингал. Усредняя обе части последнего равенства, можно получить систему линейных дифференциальных уравнений, описывающих  $m^A(t) = \mathbb{E} \{ V_t^A \}$ :

$$\begin{aligned} \dot{m}^A &= \left[ \text{diag}(\lambda) + \text{diag}(\Pi(A)) \bar{\Lambda}^\top \right] m^A, \\ t > 0, \quad m^A(0) &= p_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из определения  $m^A$  следует, что  $\mathbf{1} m^A(t) = \sum_{n=1}^N \mathcal{P} \{ \theta_t = e_n, t < \sigma^A \} = \mathcal{P} \{ t < \sigma^A \}$  — «функция дожития»  $\sigma^A$ , которая дает ответ на первый вопрос задачи 1.

По формуле умножения вероятностей вектор-функция

$$\mu^A = \mu^A(t) \triangleq m^A (\mathbf{1} m^A(t))^{-1} \quad (4)$$

состоит из компонент  $\mu^{A,n}(t) = \mathcal{P} \{ \theta_t = e_n | t < \sigma^A \}$ ,  $n = \overline{1, N}$ ; из (4) следует, что она определяется решением системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mu}^A &= \left[ \text{diag}(\lambda) + \text{diag}(\Pi(A)) \bar{\Lambda}^\top \right] \mu^A - \\ &- \mu^A \left( \lambda + \Pi(A) \bar{\Lambda}^\top \right) \mu^A, \quad t > 0, \quad \mu^A(0) = p_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Функция  $\mu^A(t)$  определяет распределение  $\theta_t$  при условии, что  $\sigma^A$  к моменту  $t$  еще не наступил, т. е. дает ответ на второй вопрос задачи 1.

Рассмотрим множество  $B = \bigcup_{n=1}^N (\{e_n\} \times B_n) \subseteq \subseteq A$  и соответствующий индикаторный процесс  $\mathcal{I}_t^B \triangleq \text{col}(\theta_t^1 I_{B_1}(Y_t), \dots, \theta_t^N I_{B_N}(Y_t))$ . Он допускает представление

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t^B &= \mathcal{I}_0^B + \\ &+ \int_0^t \left[ \text{diag}(\lambda) \mathcal{I}_{s-}^B + \text{diag}(\Pi(B)) \bar{\Lambda}^\top \theta_{s-} \right] ds + M_t^3, \end{aligned}$$

где  $M_t^3$  — некоторый мартингал. По правилу Ито процесс  $Q_t^B \triangleq \mathcal{I}_t^B U_t^A$  допускает представление

$$\begin{aligned} Q_t^B &= \\ &= \mathcal{I}_0^B + \int_0^t d\mathcal{I}_s^B U_{s-}^A + \int_0^t \mathcal{I}_{s-}^B dU_s^A + \underbrace{\sum_{s \leq t} \Delta \mathcal{I}_s^B \Delta U_s^A}_{= - \int_0^t \mathcal{I}_{s-}^B dU_s^A} = \\ &= \mathcal{I}_0^B + \int_0^t \left[ \text{diag}(\lambda) Q_{s-}^B + \text{diag}(\Pi(B)) \bar{\Lambda}^\top W_{s-}^A \right] ds + \\ &+ M_t^4, \end{aligned}$$

где  $M_t^4$  — мартингал. Усредняя обе части последнего равенства, получаем систему уравнений, описывающих эволюцию  $q^B(t) = q(t, B) = \mathbb{E} \{ \mathcal{I}_t^B I_{[0, \sigma^A)}(t) \}$ :

$$\begin{aligned} \dot{q}^B &= \text{diag}(\lambda) q^B + \text{diag}(\Pi(B)) \bar{\Lambda}^\top m^A, \\ t > 0, \quad q^B(0) &= \Phi(B), \end{aligned}$$

где  $m^A = m^A(t)$  — решение системы (3).

По формуле умножения вероятностей функция  $\varkappa^B(t) = \varkappa(t, B) \triangleq \mathbb{E} \{ \mathcal{I}_t^B | t < \sigma^A \}$ , определяющая условное распределение процесса  $Z_t$  относительно события  $\{t < \sigma^A\}$ , вычисляется по формуле

$$\varkappa(t, B) = q(t, B) (\mathbf{1} m^A(t))^{-1}.$$

Она также служит решением следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa}^B &= \left[ \text{diag}(\lambda) - (\lambda + \Pi(A)) \bar{\Lambda}^\top \right] \varkappa^B + \\ &+ \text{diag} \left( \bar{\Lambda}^\top \mu^A \right) \Pi(B), \quad t > 0, \quad \varkappa(0, B) = \Phi(B), \end{aligned} \quad (6)$$

где вектор-функция  $\mu^A(t)$  определяется системой (5).

При фиксированном значении  $t$  функция  $\varkappa(t, B)$  определяет вероятностную меру на  $(2^{\mathbb{S}^N} \times \mathbb{R}^M, \mathcal{B}(2^{\mathbb{S}^N} \times \mathbb{R}^M))$ , однако описание ее эволюции с помощью (6) не вполне практично: для приложений было бы удобнее описывать это распределение в терминах плотностей.

Функция  $\mu^A(t)$  может быть вычислена независимо от  $\varkappa^B$  с помощью решения линейной системы (3) и применения формулы (4) или путем решения нелинейной системы (5). При известной  $\mu^A(t)$  система (6) распадается на  $N$  независимых линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \varkappa^{B,n}(t) &= \mathbb{E} \{ \theta_t = e_n, Y_t \in B_n \mid t < \sigma^A \} = \\ &= \alpha_n(0, t) \Phi_n(B_n) + \beta_n(t) \Pi_n(B_n); \\ \alpha_n(s, t) &\triangleq \exp \left\{ \int_s^t \left[ \Lambda_{nn} - \sum_{i=1}^N \left( \Lambda_{ii} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sum_{j:j \neq i} \Pi_j(A_j) \Lambda_{ij} \right) \mu^{A,i}(u) \right] du \right\}; \\ \beta_n(t) &= \int_0^t \alpha_n(s, t) \sum_{i:i \neq n} \mu^{A,i}(s) ds. \end{aligned} \right\} (7)$$

Пусть  $\nu$  — такая мера на  $(2^{\mathbb{S}^N} \times \mathbb{R}^M, \mathcal{B}(2^{\mathbb{S}^N} \times \mathbb{R}^M))$ , что  $\Pi \ll \nu$ ;  $\Phi \ll \nu$  и  $\pi(y) = \text{col}(\pi^1(y), \dots, \pi^N(y))$ ,  $\phi(y) = \text{col}(\phi^1(y), \dots, \phi^N(y))$  — производные Радона–Никодима:

$$\begin{aligned} \Pi(\{e_n\} \times B_n) &= \int_{B_n} \pi_n(y) \nu(dy); \\ \Phi(\{e_n\} \times B_n) &= \int_{B_n} \phi_n(y) \nu(dy) \end{aligned}$$

для  $\forall e_n \in \mathbb{S}^N$  и  $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ .

Из представления (7) следует, что мера  $\varkappa^B(t)$  также абсолютно непрерывна относительно  $\nu$  и ее производная Радона–Никодима  $\psi(t, y) = \text{col}(\psi^1(t, y), \dots, \psi^N(t, y))$  такова, что

$$\mathcal{P} \{ \theta_t = e_n, Y_t \in B_n \mid t < \sigma^A \} = \int_{B_n} \psi^n(t, y) \nu(dy).$$

Из (7) следует, что  $\psi(t, y)$  представляет собой решение системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \psi'_t(t, y) &= \\ &= \left[ \text{diag}(\lambda) - (\lambda + \Pi(A) \bar{\Lambda}^\top) \mu^A(t) I \right] \psi(t, y) + \\ &\quad + \text{diag}(\bar{\Lambda}^\top \mu^A(t)) \pi(y); \\ \psi(0, y) &= \phi(y). \end{aligned} \right\} (8)$$

Таким образом, ответ на третий вопрос задачи 1 получен: эволюция распределения состояния  $Z_t$  при условии  $t < \sigma^A$  описывается системами (7) или (8).

**Задача 2.** Пусть в условиях задачи 1 момент  $\sigma^A$  таков, что  $\mathcal{P}\{\sigma^A < +\infty\} = 1$ , т.е.  $\sigma^A$  — момент остановки. Найти распределение  $Z_{\sigma^A}$  относительно  $\sigma^A$ .

Рассмотрим такое множество  $C \in \mathcal{B}(2^{\mathbb{S}^N} \times \mathbb{R}^M)$ , что  $C \cap A = \emptyset$ , и построим индикаторный процесс  $\mathcal{I}_t^C$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t^C &= \mathcal{I}_0^C + \\ &+ \int_0^t \left[ \text{diag}(\lambda) \mathcal{I}_{s-}^C + \text{diag}(\Pi(C)) \bar{\Lambda}^\top \theta_{s-} \right] ds + M_t^4. \end{aligned}$$

Из определения следует, что  $\mathcal{I}_t^C I_{[0, \sigma^A)}(t) \equiv 0$ . Для «остановленного» процесса  $\mathcal{I}_{t \wedge \sigma^A}^C$  верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{t \wedge \sigma^A}^C &= \underbrace{\mathcal{I}_t^C I_{[0, \sigma^A)}(t)}_{\equiv 0} + \mathcal{I}_{\sigma^A}^C I_{[\sigma^A, +\infty)}(t) = \\ &= \underbrace{\mathcal{I}_0^C}_{=0} + \int_0^{t \wedge \sigma^A} \left[ \underbrace{\text{diag}(\lambda) \mathcal{I}_{s-}^C}_{\equiv 0} + \text{diag}(\Pi(C)) \bar{\Lambda}^\top \theta_{s-} \right] ds + \\ &+ M_{t \wedge \sigma^A}^4 = \int_0^t \text{diag}(\Pi(C)) \bar{\Lambda}^\top W_{s-}^A ds + M_{t \wedge \sigma^A}^4, \end{aligned}$$

где процесс  $W_t^A$  определен выше. Осредняя обе части последнего равенства и используя теорему Дуба об остановке [4], получаем, что

$$\begin{aligned} r^C(t) &= r(C, t) \triangleq \mathbb{E} \{ \mathcal{I}_{\sigma^A}^C I_{[\sigma^A, +\infty)}(t) \} = \\ &= \int_0^t \text{diag}(\Pi(C)) \bar{\Lambda}^\top m^A(s) ds, \end{aligned}$$

где  $m^A(t)$  определяется системой (3). Компоненты  $r^C(t)$  несут следующий вероятностный смысл:

$$r^{C,n}(t) = \mathcal{P} \{ \theta_{\sigma^A} = e_n, Y_{\sigma^A} \in C_n, \sigma^A \leq t \}.$$

Определим функцию распределения  $Z_{\sigma^A}$  относительно  $\sigma^A$ :

$$\rho^C(t) = \mathbb{E} \{ Z_{\sigma^A} \mid \sigma^A \}, \quad C \in \mathcal{B}(2^{\mathbb{S}^N} \times \mathbb{R}^M).$$

Используя выражение  $r^C(t)$  и определение условного математического ожидания, можно показать, что

$$\rho^C(t) = \rho(t, C) = \text{diag}(\Pi(C \setminus A)) \Lambda^\top m^A(\sigma^A) \times \\ \times [(\mathbf{1} - \Pi(A)) \Lambda^\top m^A(\sigma^A)]^{-1}. \quad (9)$$

Если на  $(2^{\mathbb{S}^N} \times \mathbb{R}^M, \mathcal{B}(2^{\mathbb{S}^N} \times \mathbb{R}^M))$  существует такая мера  $\nu$ , что  $\Pi \ll \nu$ , и  $\pi$  — соответствующая производная Радона–Никодима, то условная плотность  $\psi(y|\sigma^A)$  состояния  $Z_{\sigma^A}$  относительно  $\sigma^A$  также существует и определена формулой

$$\psi(y|\sigma^A) = \text{diag}(\pi(y)) \mathbf{I}_A(y) \Lambda^\top m^A(\sigma^A) \times \\ \times [(\mathbf{1} - \Pi(A)) \Lambda^\top m^A(\sigma^A)]^{-1}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{I}_A(y) \triangleq \text{diag}(I_{A_1}(y), \dots, I_{A_N}(y))$ . Формулы (9) и (10) дают решение задачи 2.

## 4 Алгоритм оптимальной фильтрации

Пара процессов  $(Z_t, \xi_t)$  имеет кусочно-постоянные траектории со скачками в моменты  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$  скачков компонента  $\theta_t$  ( $\tau_0 \triangleq 0$ ) и поэтому однозначным образом определяется последовательностью  $X^\tau \triangleq \{(\tau_n, Z_{\tau_n}, \xi_{\tau_n})\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ .

Предполагается, что все моменты  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — моменты остановки. Последовательность обладает  $X^\tau$  марковским свойством. Следует отметить, что последовательность  $\{\sigma_m\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$  ( $\sigma_0 \triangleq 0$ ) скачков наблюдаемого процесса  $\xi_t$  в общем случае определяет лишь подпоследовательность  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ . Тем не менее  $\{\sigma_m\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$  согласована с последовательностью  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{F}_n^{X^\tau}\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ , порожденной  $X^\tau$ . Поэтому, благодаря строгому марковскому свойству, стохастическая последовательность  $X^\sigma \triangleq \{(\sigma_m, Z_{\sigma_m}, \xi_{\sigma_m})\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$  также сохраняет марковское свойство. Используем его при выводе формул оптимальной фильтрации как в дискретные моменты скачков наблюдений  $\{\sigma_m\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$  [13], так и в промежутках между ними. Также будут использованы решения задач 1 и 2. Уравнения, описывающие эволюцию условного распределения, имеют непрерывно-дискретную структуру и представлены с помощью метода индукции.

**Начальное условие.** Распределение  $Z_0$  определяется из условия задачи:

$$\mathcal{P}\{\theta_0 = e_n, Y_0 \in B_n\} = p_0^n \Phi_0^n(B_n).$$

В нулевой момент времени в качестве наблюдения выступает  $\xi_0 = g(Z_0)$ . Тогда решение определяется  $\widehat{\Phi}_0(\cdot|\xi_0)$  — регулярной версией условного распределения  $Z_0$  относительно  $\xi_0$ .

**Шаг индукции.** Пусть  $\widehat{\Phi}_\ell(\cdot|u_0, s_1, u_1, \dots, s_\ell, u_\ell) = \text{col}(\widehat{\Phi}_\ell^1(\cdot|u_0, s_1, u_1, \dots, s_\ell, u_\ell), \dots, \widehat{\Phi}_\ell^N(\cdot|u_0, s_1, u_1,$

$\dots, s_\ell, u_\ell)$  — регулярная версия условного распределения  $Z_{\sigma_\ell}$  относительно  $\mathcal{O}_{\sigma_\ell}$  и для любого  $\{e_n\} \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M)$   $\mathcal{P}\{\theta_{\sigma_\ell} = e_n, Y_{\sigma_\ell} \in B_n | \mathcal{O}_{\sigma_\ell}\} = \widehat{\Phi}_\ell^n(B_n | \sigma_0, \xi_{\sigma_0}, \dots, \sigma_\ell, \xi_{\sigma_\ell})$   $\mathcal{P}$ -п. н. Также обозначим через  $\widehat{\Psi}(t, \cdot) = \text{col}(\widehat{\Psi}^1(t, \cdot), \dots, \widehat{\Psi}^N(t, \cdot))$  условное распределение  $Z_t$  относительно  $\mathcal{O}_t$  на событии  $\{\sigma_\ell \leq t < \sigma_{\ell+1}\}$ , т. е.

$$\mathcal{P}\{\theta_t = e_n, Y_t \in B_n | \mathcal{O}_t\} = \\ = \widehat{\Psi}^n(t, B_n) \{\sigma_\ell \leq t < \sigma_{\ell+1}\} \text{-п. н.}$$

Согласно решению задачи 1 для любого множества  $B = \cup_{n=1}^N (\{e_n\} \times B_n)$  эволюция  $\widehat{\Psi}(t, B)$ ,  $t \in [\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1})$  описывается системой

$$\widehat{\Psi}'_t(t, B) = \\ = \left[ \text{diag}(\lambda) - (\lambda + \Pi(g^{-1}(\xi_{\sigma_\ell})) \overline{\Lambda}^\top) \mu_\ell(t) I \right] \widehat{\Psi}(t, B) + \\ + \text{diag}(\overline{\Lambda}^\top) \mu_\ell(t) \Pi(B);$$

$$\mu'_\ell(t) = \left[ \text{diag}(\lambda) + \text{diag}(\Pi(g^{-1}(\xi_{\sigma_\ell})) \overline{\Lambda}^\top) \right] \mu_\ell(t) - \\ - \mu_\ell(t) \left[ \lambda + \Pi(g^{-1}(\xi_{\sigma_\ell})) \overline{\Lambda}^\top \right] \mu_\ell(t);$$

$$\widehat{\Psi}(\sigma_\ell, B) = \widehat{\Phi}_\ell(B | u_0, s_1, u_1, \dots, s_\ell, u_\ell);$$

$$\mu_\ell(\sigma_\ell) = \widehat{\Phi}_\ell(g^{-1}(\xi_{\sigma_\ell}) | \xi_0, \sigma_1, \xi_{\sigma_1}, \dots, \sigma_\ell, \xi_{\sigma_\ell}),$$

где  $\mu_\ell(t) = \mathbf{E}\{\theta_t | \mathcal{O}_t\}$  на событии  $\{\sigma_\ell \leq t < \sigma_{\ell+1}\}$ ;  $g^{-1}(u) \triangleq \{(e, y) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M : g(e, y) = u\}$  — полный прообраз значения  $u$  при преобразовании  $g(\cdot)$ .

В силу решения задачи 2 функция  $\widehat{f}_{\ell+1}(B) \triangleq \text{col}(\widehat{f}_{\ell+1}^1(B_1), \dots, \widehat{f}_{\ell+1}^N(B_N))$ , задающая условное распределение  $Z_{\sigma_{\ell+1}}$  относительно  $\mathcal{O}_{\sigma_\ell} \vee \sigma_{\ell+1}$ , определяется формулой:

$$\widehat{f}_{\ell+1}(B) \triangleq \mathbf{E}\left\{ \mathcal{I}_{\sigma_{\ell+1}}^B | \mathcal{O}_{\sigma_\ell} \vee \sigma_{\ell+1} \right\} = \\ = \text{diag}(\Pi(B \setminus g^{-1}(\xi_{\sigma_\ell})) \overline{\Lambda}^\top) \mu_\ell(\sigma_{\ell+1}) \times \\ \times \left[ (\mathbf{1} - \Pi(g^{-1}(\xi_{\sigma_\ell})) \overline{\Lambda}^\top) \mu_\ell(\sigma_{\ell+1}) \right]^{-1}. \quad (11)$$

На основании  $\widehat{f}_{\ell+1}(\cdot)$  строится  $\widehat{\Phi}_{\ell+1}(\cdot|u_0, s_1, u_1, \dots, s_{\ell+1}, u_{\ell+1})$  — регулярная версия условного распределения  $Z_{\sigma_{\ell+1}}$  относительно  $\mathcal{O}_{\sigma_{\ell+1}}$ .

Рассмотрим безусловное распределение  $P(\sigma_{\ell+1}, B)$  МСП  $Z$  в момент времени  $\sigma_{\ell+1}$ :

$$P(\sigma_{\ell+1}, B) = \text{diag}(\Pi(B)) p(\sigma_{\ell+1}) \quad \mathcal{P} \text{ - п. н.}$$

В отличие от него, условное распределение  $\widehat{f}_{\ell+1}(B)$  (11) определяется распределением  $\Pi(\cdot)$ , «усеченным» значением предыдущего наблюдения  $\xi_{\sigma_\ell}$ : вместо всего пространства  $\mathbb{R}^M$  в качестве

носителя распределения выступает  $\mathbb{R}^M \setminus g^{-1}(\xi_{\sigma_\ell})$ . При этом веса этих компонент зависят от вектора  $\mu_\ell(\cdot)$  — условного распределения  $\theta_{\sigma_{\ell+1}}$ .

Условное распределение вектора  $Z$  относительно наблюдения  $g(Z)$  может быть представлено в терминах плотностей относительно некоторых абстрактных распределений [10]. Тем не менее в ряде значимых с практической точки зрения частных случаев может быть получено явно. Такая ситуация возникает, когда

- распределение  $\Pi$  дискретно;
- отображение  $g$  имеет конечный полный прообраз;
- отображение  $g$  линейно и пр.

Таким образом, явная формула вычисления  $\widehat{\Phi}_{\ell+1}(\cdot | u_0, s_1, u_1, \dots, s_{\ell+1}, u_{\ell+1})$  будет зависеть от конкретного вида системы наблюдения (1), (2).

## 5 Заключение

В работе предложено решение задачи оптимальной фильтрации состояний специальных МСП [11] по косвенным наблюдениям в отсутствие шумов. Условное распределение процесса описывается системой связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, терпящих разрывы в моменты смены наблюдений. Полученный теоретический результат может быть полезен при решении прикладных задач мониторинга процессов обработки информации [14], а также стохастического управления в системах массового обслуживания по неполной информации [15, 16].

## Литература

1. Bryson A., Johansen D. Linear filtering for time-varying systems using measurements containing colored noise // IEEE T. Automat. Contr., 1964. Vol. 10. Iss. 1. С. 4–10. doi: 10.1109/TAC.1965.1098063.
2. Wong E., Hajek B. Stochastic processes in engineering systems. — New York, NY, USA: Springer, 1985. 361 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5060-9.
3. Бутлов А. Оптимальная линейная фильтрация при рождении шума в наблюдениях // Автоматика и телемеханика, 1980. Вып. 11. С. 33–39.
4. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — Серия «Теория вероятностей и математическая статистика». — М.: Наука, 1974. 696 с.
5. Qian H., Zhang Q., Yin G. Filtering with degenerate observation noise: A stochastic approximation approach // Automatica, 2022. Vol. 142. Art. 110376. doi: 10.1016/j.automatica.2022.110376.
6. Joannides M., LeGland F. Nonlinear filtering with continuous time perfect observations and non-informative quadratic variation // 36th IEEE Conference on Decision and Control Proceedings. — San Diego, CA, USA: IEEE, 1997. Vol. 2. P. 1645–1650. doi: 10.1109/CDC.1997.657750.
7. Борисов А. Оптимальная фильтрация в системах с вырожденными шумами в наблюдениях // Автоматика и телемеханика, 1998. Вып. 11. С. 32–45.
8. Липцер Р., Ширяев А. Теория мартингалов. — М.: Физматлит, 1986. 512 с.
9. Confortola F., Fuhrman M. Filtering of continuous-time Markov chains with noise-free observation and applications // Stochastics, 2012. Vol. 85. Iss. 2. P. 216–251. doi: 10.1080/17442508.2011.651214.
10. Calvia A. Stochastic filtering and optimal control of pure jump Markov processes with noise-free partial observation // ESAIM Contr. Op. Ca. Va., 2020. Vol. 26. Art. 25. 47 p. doi: 10.1051/cocv/2019020.
11. Борисов А., Куринов Ю., Смелянский Р. Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 30–37. doi: 10.14357/19922264240304. EDN: XPVTGJ.
12. Борисов А., Куринов Ю., Смелянский Р. Фильтрация состояний класса марковских скачкообразных процессов по разнородным наблюдениям с аддитивными шумами // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 45–53. doi: 10.14357/19922264240402. EDN: FEMNQL.
13. Бертсекас Д., Шрив С. Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени / Пер. с англ. — М.: Наука, 1985. 280 с. (Bertsekas D., Shreve S. Stochastic optimal control: The discrete-time case. — New York, San Francisco, London: Academic Press, 1978. 323 p.)
14. Коновалов М., Разумчик Р. О диспетчеризации в одном классе двухфазных систем массового обслуживания // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 52–58. doi: 10.14357/19922264240407. EDN: KGCBFL.
15. Агаларов Я. Оптимальное управление подключением резервного прибора в системе массового обслуживания G/M/1 // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 4. С. 34–41. doi: 10.14357/19922264220406. EDN: QGZLUX.
16. Агаларов Я. Оптимизация схемы распределения буферной памяти узла пакетной коммутации // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 39–48. doi: 10.14357/19922264230306. EDN: QLXCKV.

Поступила в редакцию 05.12.2024

Принята к публикации 15.01.2025

# FILTERING OF STATES AND PARAMETERS OF SPECIAL MARKOV JUMP PROCESSES VIA INDIRECT PERFECT OBSERVATIONS

A. V. Borisov

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The paper investigates the problem of optimal state filtering of a class of stochastic differential observation systems. The state to be estimated consists of two compound components. The first is a finite-state Markov jump process. The second component changes synchronously with the first one and, given a fixed first component, forms a sequence of independent vectors. The available statistical information includes the known functions of the estimated state observed without noise. The problem is to construct the conditional distribution of the system’s state given the available observations. In observation systems with degenerate noise, it is impossible to apply standard filtering techniques, which typically involve reducing the observations to a combination of Wiener and Poisson processes using a suitable Girsanov measure transform. The conditional distribution of the state can be represented using a recursively linked sequence of ordinary differential and difference equations.

**Keywords:** Markov jump process; stochastic differential observation system; indirect perfect observations; martingale decomposition; regular version of conditional distribution

**DOI:** 10.14357/1992264250104

**EDN:** MZAJVZ

## Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (CKP “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

## References

1. Bryson, A., and D. Johansen. 1964. Linear filtering for time-varying systems using measurements containing colored noise. *IEEE T. Automat. Contr.* 10(1):4–10. doi: 10.1109/TAC.1965.1098063.
2. Wong, E., and B. Hajek. 1985. *Stochastic processes in engineering systems*. New York, NY: Springer. 361 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5060-9.
3. Butov, A. 1980. Optimal linear filtering with degenerate observation noise. *Automat. Rem. Contr.* 41(11):1506–1511.
4. Liptser, R. S., and A. N. Shiryaev. 1974. *Statistika sluchaynykh protsessov (nelineynaya fil'tratsiya i smezhnye voprosy)* [Statistics of random processes. Nonlinear filtering and related problems]. Seriya “Teorya veroyatnostey i matematicheskaya statistika” [Probability theory and mathematical statistics ser.]. Moscow: Nauka. 696 p.
5. Qian, H., Q. Zhang, and G. Yin. 2022. Filtering with degenerate observation noise: A stochastic approximation approach. *Automatica* 142:110376. doi: 10.1016/j.automatica.2022.110376.
6. Joannides, M., and F. LeGland. 1997. Nonlinear filtering with continuous time perfect observations and non-informative quadratic variation. *36th IEEE Conference on Decision and Control Proceedings*. San Diego, CA: IEEE. 2:1645–1650. doi: 10.1109/CDC.1997.657750.
7. Borisov, A. 1998. Optimal filtering in systems with degenerate noises in observations. *Automat. Rem. Contr.* 59(11-1):1526–1537. EDN: LFDCVH.
8. Liptser, R. Sh., and A. N. Shiryaev. 1989. *Theory of martingales*. New York, NY: Springer. 812 p.
9. Confortola, F., and M. Fuhrman. 2012. Filtering of continuous-time Markov chains with noise-free observation and applications. *Stochastics* 85(2):216–251. doi: 10.1080/17442508.2011.651214.
10. Calvia, A. 2020. Stochastic filtering and optimal control of pure jump Markov processes with noise-free partial observation. *ESAIM Contr. Opt. Ca. Va.* 26:25. 47 p. doi: 10.1051/cocv/2019020.
11. Borisov, A., Yu. Kurinov, and R. Smeliansky. 2024. Veroyatnostnyy analiz klassa markovskikh skachkoobraznykh protsessov [Probabilistic analysis of a class of Markov jump processes]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):30–37. doi: 10.14357/1992264240304. EDN: XPVTGJ.
12. Borisov, A., Yu. Kurinov, and R. Smeliansky. 2024. Fil'tratsiya sostoyaniy klassa markovskikh skachkoobraznykh protsessov po raznorodnym nablyudeniyam s additivnymi shumami [Filtering of a class of Markov jump processes by heterogeneous observations with additive noises]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):45–53. doi: 10.14357/1992264240402. EDN: FEMNQL.
13. Bertsekas, D., and S. Shreve. 1978. *Stochastic optimal control: The discrete-time case*. New York, San Francisco, London: Academic Press. 323 p.
14. Konovalov, M. G., and R. V. Razumchik. 2024. O dispetcherizatsii v odnom klasse dvukhfaznykh sistem masovogo obsluzhivaniya [On one problem of load balancing in two-phase tandem queues]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):52–58. doi: 10.14357/1992264240407. EDN: KGCBFL.

15. Agalarov, Ya. 2022. Optimal'noe upravlenie podklyucheniem rezervnogo pribora v sisteme massovogo obsluzhivaniya  $G/M/1$  [Optimal control of a queue-length dependent additional server in  $GI/M/1$  queue]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(4):34–41. doi: 10.14357/19922264220406. EDN: QGZLUX.
16. Agalarov, Ya. 2023. Optimizatsiya skhemy raspredeleniya bufernoy pamyati uzla paketnoy kommutatsii [Optimization of the buffer memory allocation scheme of the packet switching node]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):39–48. doi: 10.14357/19922264230306. EDN: QLXCKV.

*Received December 5, 2024*

*Accepted January 15, 2025*

## Contributor

**Borisov Andrey V.** (b. 1965) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; aborisov@frcsc.ru

# АНАЛИЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДОПЛЕРОВСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ\*

А. В. Босов<sup>1</sup>

**Аннотация:** Для постановки задачи позиционирования движущегося объекта использована модель стохастической динамической системы наблюдения, учитывающая случайные временные задержки между поступившим наблюдением и фактическим состоянием объекта и наличие неизвестных параметров движения. Для такой модели на примере подводного аппарата (ПА) анализируются варианты формирования наблюдений. В первом используются только стационарные акустические сенсоры, позволяющие измерять только угловые координаты. Во втором варианте углы дополняются измерениями скорости, выполненными как на борту движущегося объекта, так и внешними наблюдателями. Каждая модель используется в двух видах: в предположении наличия полной априорной информации о параметрах движения ПА и при отсутствии данных о значениях части параметров. В последнем варианте задача позиционирования решается совместно с задачей идентификации неизвестных параметров движения. Модели и результаты их экспериментального применения сравниваются с целью качественной оценки эффективности использования измерений скорости. Для этого к задаче применен условно-минимаксный нелинейный фильтр (УМНФ). Сравнительный анализ моделей системы наблюдения выполнен в рамках масштабного вычислительного эксперимента.

**Ключевые слова:** нелинейная стохастическая система наблюдения; байесовская идентификация параметров; наблюдения со случайными временными запаздываниями; условно-минимаксный нелинейный фильтр; позиционирование; акустические сенсоры; эффект Доплера

DOI: 10.14357/19922264250105

EDN: MZKWC1

## 1 Введение

Рассматриваемая модель системы наблюдения и задача оценивания ориентированы на прикладную область автономных ПА [1]. Для наблюдения за движущимся ПА водная среда прежде всего ограничивает возможные к использованию измерительные средства акустическими сенсорами [2]. Ключевым фактором для таких устройств становится скорость распространения звуковых волн, которая зависит от множества факторов [3], но в любом случае она не слишком велика, чтобы пренебречь временем распространения. Для математической модели системы наблюдения это обстоятельство требует учитывать случайную временную задержку поступления результатов измерений, выполняемых акустическими сенсорами. В [4] показано, что такая модель может быть приведена к типовому виду нелинейной стохастической системы наблюдения, что позволило записать для нее соотношения оптимальной байесовской фильтрации. Формально это позволяет применять известные эвристические методы оценивания, субоптимальные фильтры. Однако практически реализовать любой известный

эвристический алгоритм оценивания без предварительной доработки и тем более оптимальный фильтр не представляется возможным. Приведение модели с временной задержкой к виду типовой марковской системы наблюдения обеспечивается расширением вектора состояния. Размер расширенного вектора пропорционален времени задержки и частоте измерений, что в приближенных к реальным условиях делает эту размерность гигантской и исключает возможность выполнения даже модельных расчетов. Применить удастся только метод условно-оптимальной фильтрации Пугачёва [5, 6] и его развитие — УМНФ Панкова и его модификации [7, 8]. Расчетами на простом модельном примере это подтверждено в [9, 10]. Но реализовать измерения дальности от наблюдателей до ПА на практике не так просто, поэтому в предлагаемой в следующем разделе модели измеряются только угловые координаты ПА и его скорость.

Вторая особенность модели касается традиционного предположения о том, что уравнения состояния движущегося объекта известны точно. Если движущийся объект и его система управления доступны априорному исследованию, то можно ис-

\* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

<sup>1</sup> Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук, ABosov@frcsc.ru

пользовать уравнения движения с неизвестными параметрами, оценивать их заранее, выполняя таким образом идентификацию системы [11]. К идентифицированной системе можно применять типовые фильтры. Такой сценарий уместно охарактеризовать как кооперативный. В противном случае можно игнорировать неизвестные параметры, применяя нечувствительные, робастные алгоритмы [12], но точность при этом будет существенно падать: неспроста одним из синонимов для таких методов стал термин «грубый». Поскольку особых сложностей в моделировании движения ПА нет, наилучшим представляется даже в некооперативном сценарии выполнять идентификацию параметров движения, объединяя задачи фильтрации и идентификации. Для этого подойдет байесовский подход к параметрической идентификации. Далеко не все подходы к нелинейной фильтрации позволяют так делать. В [13] показано, что УМНФ остается эффективным средством решения как задачи позиционирования, так и задачи идентификации параметров движения как в традиционной постановке синхронных наблюдений, так и в модели с временными задержками по результатам угловых измерений. Открытым при этом остается вопрос повышения качества оценивания за счет реализации прямых измерений скорости. В выполненном исследовании такие измерения моделируются как на борту ПА, так и внешними наблюдателями и анализируется их эффективность.

## 2 Модель движения подводного аппарата и измерений со случайными задержками

Движение ПА и комплекс измерений описываются дискретной стохастической динамической системой наблюдения с неизвестными параметрами. Дискретное время  $t = -T, \dots, 0, 1, \dots$  представляет разбиение интервала наблюдения на равные отрезки времени длины  $\delta$ , так что значение реального времени в дискретный момент  $t$  равно  $\delta t$ . Априорно заданная величина  $T$  определяет максимально возможную временную задержку поступающих наблюдений, т. е. в момент  $t$  наблюдателю доступно измерение положения и/или скорости ПА, которые аппарат имел в неизвестный момент в интервале  $[t, t-T]$ . Вызвана эта задержка тем, что акустическое воздействие на ПА будет получено через время, необходимое звуковой волне на преодоление расстояния между ПА и сенсором. Поскольку можно считать известной скорость звука в воде, величина  $T$  получается в результате оценки макси-

мального расстояния между измерителями и ПА, что не должно представлять затруднения.

Положение ПА  $X(t) = (x(t), y(t), z(t))'$  задается декартовыми координатами в некоторой связанной с землей системе отсчета  $Oxyz$ . Движение описывается вектором скорости

$$V(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))',$$

который формируется неизвестной регулярной составляющей (средней постоянной скоростью), описываемой параметром  $\mu = (v_x^0, v_y^0, v_z^0)'$ , и случайными аддитивными возмущениями  $W(t) = (w_x(t), w_y(t), w_z(t))'$ , так что  $V(t) = \mu + W(t)$ . Здесь и далее «'» используется для обозначения транспонированного вектора или матрицы. Положение ПА  $X(t)$  получается в результате интегрирования скорости:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x(t-1) + \delta v_x(t), & v_x(t) &= v_x^0 + w_x(t); \\ y(t) &= y(t-1) + \delta v_y(t), & v_y(t) &= v_y^0 + w_y(t); \\ z(t) &= z(t-1) + \delta v_z(t), & v_z(t) &= v_z^0 + w_z(t). \end{aligned} \right\} (1)$$

Начальное положение ПА задается вектором  $X^0 = X(-T-1)$ , элементы которого предполагаются независимыми гауссовскими случайными величинами  $x^0, y^0$  и  $z^0$  с известными средними  $E\{x^0\}, E\{y^0\}$  и  $E\{z^0\}$  и дисперсиями  $D\{x^0\}, D\{y^0\}$  и  $D\{z^0\}$ . Также гауссовским и с независимыми элементами предполагается вектор параметров  $\mu$ , а величины моментов  $E\{v_x^0\}, E\{v_y^0\}$  и  $E\{v_z^0\}$  и  $D\{v_x^0\}, D\{v_y^0\}$  и  $D\{v_z^0\}$  — заданными. Таким образом, средняя постоянная скорость движения ПА в модели (1) изменяется от траектории к траектории, априорно не задана и описывается известным распределением, что отвечает байесовскому подходу к оцениванию. При наблюдении за движением ПА кроме оценки его положения  $X(t)$ , т. е. решения задачи фильтрации, требуется оценивать реализовавшееся значение  $\mu$ , т. е. решать задачу идентификации.

Измерения обеспечивают два стационарных акустических маяка (пассивное устройство определения направления движения, direction of arrival, DOA) [14]. Такие устройства позволяют измерять пеленг  $\varphi$  и угол возвышения  $\lambda$  на борту ПА, как проиллюстрировано на рис. 1. Из возможных вариантов таких измерений воспользуемся моделью из [15]. Для ПА  $(X_1, Y_1, Z_1)$  и маяка  $(X_M, Y_M, Z_M)$  измерятся

$$\begin{aligned} \tan \varphi_M &= \frac{Y_M - Y_1}{X_M - X_1}; \\ \tan \lambda_M &= \frac{Z_M - Z_1}{|X_M - X_1|} \cos \varphi_M. \end{aligned}$$

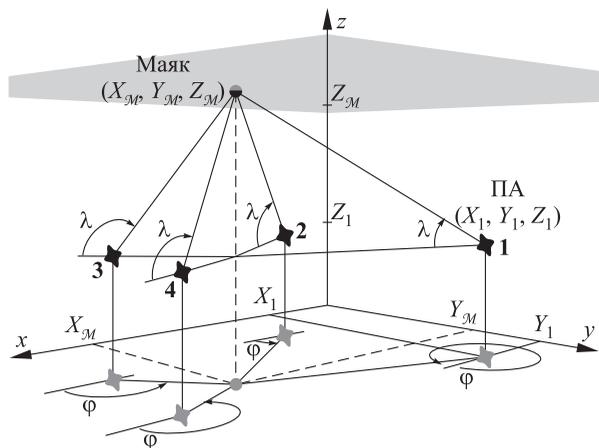


Рис. 1 Углы положения ПА

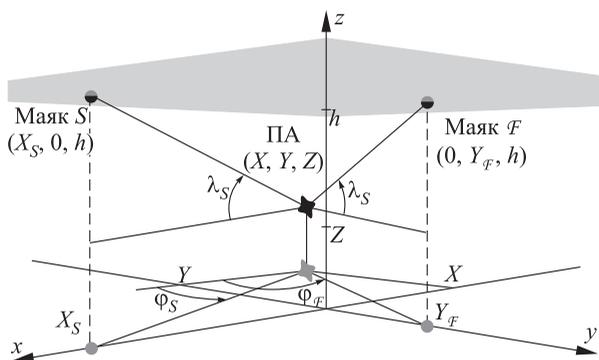


Рис. 2 Схема взаимного расположения ПА и измерительных комплексов

Такая модель удобна для выполнения расчетов, если в процессе движения ПА не пересекает линию  $X_M - X_1 = 0$ , что можно обеспечить выбором системы координат  $Oxyz$ . В описываемом эксперименте она выбрана так, чтобы плоскость  $Oxy$  совпала с дном, маяки расположены на одной глубине, первый ( $\mathcal{F}$ , first) находится в плоскости  $Oyz$ , второй ( $\mathcal{S}$ , second) — в плоскости  $Oxz$ . Таким образом, координаты маяков:  $(0, Y_{\mathcal{F}}, h)$  и  $(X_{\mathcal{S}}, 0, h)$ , где  $h$  — глубина расположения маяков. Далее можно выбрать начало координат так, что  $X_{\mathcal{F}} > 0$  и  $Y_{\mathcal{F}} > 0$ , и считать, что на протяжении всего периода движения ПА выполняются условия  $x(t) < 0$  и  $y(t) < 0$ . Тогда все измеряемые углы  $\varphi_{\mathcal{F}}$ ,  $\varphi_{\mathcal{S}}$ ,  $\lambda_{\mathcal{F}}$  и  $\lambda_{\mathcal{S}}$  будут изменяться в диапазоне  $(0, \pi/2)$ , так что

$$\cos \varphi_{\mathcal{F}} = \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{F}})^{1/2}};$$

$$\cos \varphi_{\mathcal{S}} = \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{S}})^{1/2}}.$$

Взаимное положение маяков и ПА иллюстрирует рис. 2.

В итоге маяки позволяют измерять следующие величины

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi_{\mathcal{F}} &= \frac{y(t) - Y_{\mathcal{F}}}{x(t)}; \\ \tan \varphi_{\mathcal{S}} &= \frac{y(t)}{x(t) - X_{\mathcal{S}}}; \\ \tan \lambda_{\mathcal{F}} &= \frac{z(t) - h}{x(t)} \cos \varphi_{\mathcal{F}}; \\ \tan \lambda_{\mathcal{S}} &= \frac{z(t) - h}{x(t) - X_{\mathcal{S}}} \cos \varphi_{\mathcal{S}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из уравнений (2) можно определить положение ПА как точку пересечения акустических лучей.

Наряду с сенсорами DOA предполагается использование сенсоров для измерения скорости. В водной среде этот процесс имеет некоторые особенности по сравнению с измерениями на поверхности, но физические законы, лежащие в основе как акселерометров и одометров, так и гироскопов [16, 17], движение под водой не отменяют. Определять ориентацию ПА не требуется, поэтому нужны только измерения скорости. Обеспечиваются эти измерения эффектом Доплера, таким же для акустической волны, как и для электромагнитной. Доплеровские сенсоры для ПА появились не очень давно, но успешно используются и дают прекрасные результаты в позиционировании [18–21]. Для применения эти устройства располагаются на борту движущегося ПА, хотя теоретически ограничений на использование технологии внешним наблюдателем нет. Кроме того, есть интересная альтернатива [15, 22]. Идея состоит в том, чтобы эксплуатировать известное понятие оптического потока, используемого для измерений параметров движения летательных аппаратов по результатам видеосъемки. Аналогично можно поступать и под водой, используя вместо фото данные от высокоточных гидролокаторов. Скорость определяется в результате анализа смещения «картинки». Такие измерения могут выполняться и внешним наблюдателем. Измеряться могут как модуль скорости ПА  $|V(t)|$ , так и элементы вектора скорости  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  и  $v_z(t)$ .

Итак, в вектор наблюдений  $Y(t)$  за положением ПА  $X(t)$  будут входить: измерения  $Y_1(t)$ ,  $Y_2(t)$ ,  $Y_3(t)$  и  $Y_4(t)$  четырех углов положения ПА относительно маяков  $\varphi_{\mathcal{F}}$ ,  $\varphi_{\mathcal{S}}$ ,  $\lambda_{\mathcal{F}}$  и  $\lambda_{\mathcal{S}}$ ;  $Y_5(t)$  — абсолютного значения скорости (опционально);  $Y_6(t)$ ,  $Y_7(t)$  и  $Y_8(t)$  — проекций скорости на оси (опционально). Измерения скорости будут выполняться на борту ПА или вторым маяком.

Модель временной задержки измерения, полученного в момент  $t$  с помощью маяков, служат дискретные случайные величины  $\tau_{\mathcal{F}}(t)$  и  $\tau_{\mathcal{S}}(t)$  со значениями в множестве  $\{0, 1, \dots, T\}$ . Для изме-

рений скорости на борту ПА задержка равна нулю. Исходя из текущего положения ПА  $(x(t), y(t), z(t))$  и координат маяков  $(0, Y_{\mathcal{F}}, h)$  и  $(X_S, 0, h)$ , задержки будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\mathcal{F}}(t) &= \min \left\{ T, \right. \\ &\left. \left[ \frac{\left( (x(t))^2 + (y(t) - Y_{\mathcal{F}})^2 + (z(t) - h)^2 \right)^{1/2}}{\delta v_s} \right] \right\}; \\ \tau_S(t) &= \min \left\{ T, \right. \\ &\left. \left[ \frac{\left( (x(t) - X_S)^2 + (y(t))^2 + (z(t) - h)^2 \right)^{1/2}}{\delta v_s} \right] \right\}, \end{aligned} \right\} (3)$$

где предполагается известной постоянная скорость звука  $v_s$  в воде и  $[x]$  обозначает целую часть  $x$ .

Наконец, каждая из измеряемых величин предполагается искаженной аддитивным шумом  $v_1(t), \dots, v_8(t)$ , все  $v_i(t)$  независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним и известной дисперсией  $D\{v_i(t)\}$ .

Таким образом, окончательный состав измерений принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} Y_1(t) &= \frac{y(t - \tau_{\mathcal{F}}(t)) - Y_{\mathcal{F}}}{x(t - \tau_{\mathcal{F}}(t))} + v_1(t); \\ Y_2(t) &= \frac{z(t - \tau_{\mathcal{F}}(t)) - h}{x(t - \tau_{\mathcal{F}}(t))} \times \\ &\times \left( 1 + \left( \frac{y(t - \tau_{\mathcal{F}}(t)) - Y_{\mathcal{F}}}{x(t - \tau_{\mathcal{F}}(t))} \right)^2 \right)^{-1/2} + v_2(t); \\ Y_3(t) &= \frac{y(t - \tau_S(t))}{x(t - \tau_S(t)) - X_S} + v_3(t); \\ Y_4(t) &= \frac{z(t - \tau_S(t)) - h}{x(t - \tau_S(t))} \times \\ &\times \left( 1 + \left( \frac{y(t - \tau_S(t))}{x(t - \tau_S(t)) - X_S} \right)^2 \right)^{-1/2} + v_4(t); \\ Y_5(t) &= \left( (v_x(t - \tau))^2 + \right. \\ &\left. + (v_y(t - \tau))^2 + (v_z(t - \tau))^2 \right)^{1/2} + v_5(t); \\ Y_6(t) &= v_x(t - \tau) + v_6(t); \\ Y_7(t) &= v_y(t - \tau) + v_7(t); \\ Y_8(t) &= v_z(t - \tau) + v_8(t), \tau = 0 \text{ или } \tau_S(t). \end{aligned} \right\} (4)$$

### 3 Алгоритм условно-минимаксной фильтрации

К модели движения (1) для оценивания как положения ПА, так и неизвестных параметров движения по наблюдениям (4) можно применить УМНФ [7]. Адаптированный для идентификации УМНФ [13] определяет оценку положения ПА  $\hat{X}(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))'$  и оценку средней постоянной скорости  $\hat{\mu}(t) = (\hat{v}_x^0(t), \hat{v}_y^0(t), \hat{v}_z^0(t))'$ . Оценки имеют вид прогноз-коррекции:

$$\hat{X}(t) = \tilde{X}(t) + \Delta \hat{X}(t); \quad \hat{\mu}(t) = \hat{\mu}(t-1) + \Delta \hat{\mu}(t).$$

Для вычисления прогноза положения  $\tilde{X}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))'$  нужно выбрать базовую прогнозирующую функцию  $\xi(t) = \xi(\tilde{X}(t-1), \hat{\mu}(t-1))$ , для обеих коррекций  $\Delta \hat{X}(t)$  и  $\Delta \hat{\mu}(t)$  – базовую корректирующую функцию  $\zeta(t) = \zeta(\tilde{X}(t), Y(t))$ . В [7] показано, что оптимальные в минимаксном смысле функции, преобразующие  $\xi(t)$  и  $\zeta(t)$  в прогноз и оценку фильтрации, линейны:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t) &= F_t \xi(t) + f_t; \\ \begin{pmatrix} \hat{X}(t) \\ \hat{\mu}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ \hat{\mu}(t-1) \end{pmatrix} + H_t \zeta(t) + h_t. \end{aligned}$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} F_t &= \text{cov}(X(t), \xi(t)) \text{cov}^+(\xi(t), \xi(t)); \\ f_t &= E\{X(t)\} - F_t E\{\xi(t)\}; \\ H_t &= \text{cov} \left( \begin{pmatrix} X(t) \\ \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ \hat{\mu}(t-1) \end{pmatrix}, \zeta(t) \right) \times \\ &\quad \times \text{cov}^+(\zeta(t), \zeta(t)); \\ h_t &= -H_t E\{\zeta(t)\}, \end{aligned} \right\} (5)$$

где  $E\{X\}$  – математическое ожидание  $X$ ;  $\text{cov}(X, Y)$  – ковариация  $X$  и  $Y$ ; «+» – операция псевдообращения по Муру–Пенроузу. При этом прогноз положения  $\tilde{X}(t)$  и оценки  $\hat{X}(t)$  и  $\hat{\mu}(t)$  являются несмещенными с ковариациями ошибок оценивания

$$\left. \begin{aligned} \tilde{K}_t &= \text{cov}(X(t) - \tilde{X}(t), X(t) - \tilde{X}(t)) = \\ &= \text{cov}(X(t), X(t)) - F_t \text{cov}(\xi(t), X(t)); \\ \hat{K}_t^x &= \text{cov}(X(t) - \hat{X}(t), X(t) - \hat{X}(t)) = \\ &= \tilde{K}_t - \Delta \hat{K}_t^x; \tilde{K}_0 = \text{cov}(X^0, X^0); \\ \hat{K}_t^\mu &= \text{cov}(\mu - \hat{\mu}(t), \mu - \hat{\mu}(t)) = \\ &= \hat{K}_{t-1}^\mu - \Delta \hat{K}_t^\mu, \tilde{K}_0 = \text{cov}(\mu, \mu), \end{aligned} \right\} (6)$$

где матрицы  $\Delta\hat{K}_t^X$  и  $\Delta\hat{K}_t^\mu$  — верхний и нижний диагональные блоки матрицы

$$H_t \text{cov} \left( \zeta(t), \begin{pmatrix} X(t) \\ \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ \hat{\mu}(t-1) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \Delta\hat{K}_t^X & \dots \\ \dots & \Delta\hat{K}_t^\mu \end{pmatrix}.$$

Вместо аналитического вычисления коэффициентов  $F_t$ ,  $f_t$ ,  $H_t$  и  $h_t$  в (5) согласно концепции УМНФ в практических расчетах используются оценки Монте-Карло, т.е. вместо  $E\{X\}$  в (5) подставляются

$$\bar{E}\{X\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i,$$

где  $\{X_i\}_{i=1}^N$  — выборочные значения  $X$ , смоделированные на компьютере.

Выбор структурных функций  $\xi(t)$  и  $\zeta(t)$  обоснован в [13]. Линейность (1) определяет выбор базового прогноза в силу системы, т.е. в виде

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \hat{x}(t-1) + \delta\hat{v}_x^0(t-1); \\ \xi_2(t) &= \hat{y}(t-1) + \delta\hat{v}_y^0(t-1); \\ \xi_3(t) &= \hat{z}(t-1) + \delta\hat{v}_z^0(t-1). \end{aligned}$$

Базовую коррекцию сформируем, исходя из геометрического смысла углов  $\varphi_F$ ,  $\varphi_S$ ,  $\lambda_F$  и  $\lambda_S$ , который выражают соотношения (2). Если не учитывать ошибки измерения в (4), то четыре уравнения (2) позволяют определить три координаты ПА  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  (подробнее см. [13]), причем единственное решение, расположенное на пересечении линий акустических лучей двух маяков, формально можно записать четырьмя способами, выбирая из четырех имеющихся угловых измерений любые три. В результате получится двенадцать равенств, из которых восемь будут различны, а именно:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{Y_F + y_3 X_S}{y_3 - y_1}; \\ y(t) &= \frac{y_3(Y_F + y_1 X_S)}{y_3 - y_1}; \\ z(t) &= h + y_2 \frac{Y_F + y_3 X_S}{y_3 - y_1} (1 + (y_1)^2)^{1/2}; \\ z(t) &= h + y_4 \left( \frac{Y_F + y_3 X_S}{y_3 - y_1} - X_S \right) (1 + (y_3)^2)^{1/2}; \\ x(t) &= \frac{y_4 X_S}{y_4 - y_2 ((1 + (y_1)^2)/(1 + (y_3)^2))^{1/2}}; \\ y(t) &= \frac{y_1 y_4 X_S}{y_4 - y_2 ((1 + (y_1)^2)/(1 + (y_3)^2))^{1/2}} + Y_F; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{y_2 y_3 X_S}{y_4 ((1 + (y_3)^2)/(1 + (y_1)^2))^{1/2} - y_2}; \\ z(t) &= h + \frac{y_2 y_4 X_S}{y_4/(1 + (y_1)^2)^{1/2} - y_2/(1 + (y_3)^2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

где  $y_1 = \tan \varphi_F$ ;  $y_2 = \tan \lambda_F$ ;  $y_3 = \tan \varphi_S$ ;  $y_4 = \tan \lambda_S$ . Искользованные обозначения  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  и  $y_4$  подразумевают, что в расчетах эти величины будут заменены на  $Y_1(t)$ ,  $Y_2(t)$ ,  $Y_3(t)$  и  $Y_4(t)$  из (4), т.е. на четыре измеренных тангенса. Эти восемь прямых оценок текущих координат ПА в фильтре заменяются на невязку, что и дает базовую коррекцию  $\zeta_t$  вида

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1(t) &= x_1 - \frac{Y_F + y_3 X_S}{y_3 - y_1}; \\ \zeta_2(t) &= x_2 - \frac{y_3(Y_F + y_1 X_S)}{y_3 - y_1}; \\ \zeta_3(t) &= x_3 - h - \\ &\quad - y_2 \frac{Y_F + y_3 X_S}{y_3 - y_1} (1 + (y_1)^2)^{1/2}; \\ \zeta_4(t) &= x_3 - h - \\ &\quad - y_4 \left( \frac{Y_F + y_3 X_S}{y_3 - y_1} - X_S \right) (1 + (y_3)^2)^{1/2}; \\ \zeta_5(t) &= x_1 - \\ &\quad - \frac{y_4 X_S}{y_4 - y_2 ((1 + (y_1)^2)/(1 + (y_3)^2))^{1/2}}; \\ \zeta_6(t) &= x_2 - \\ &\quad - \frac{y_1 y_4 X_S}{y_4 - y_2 ((1 + (y_1)^2)/(1 + (y_3)^2))^{1/2}} - Y_F; \\ \zeta_7(t) &= x_2 - \\ &\quad - \frac{y_2 y_3 X_S}{y_4 ((1 + (y_3)^2)/(1 + (y_1)^2))^{1/2} - y_2}; \\ \zeta_8(t) &= x_3 - h - \\ &\quad - \frac{y_2 y_4 X_S}{y_4 (1 + (y_1)^2)^{-1/2} - y_2 (1 + (y_3)^2)^{-1/2}}, \end{aligned} \right\} (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} (x_1, x_2, x_3)' &= \tilde{X}(t - \max(\hat{\tau}_F(t), \hat{\tau}_S(t))); \\ y_{1(2)} &= Y_{1(2)}(t - \max(\hat{\tau}_F(t), \hat{\tau}_S(t)) + \hat{\tau}_F(t)); \\ y_{3(4)} &= Y_{3(4)}(t - \max(\hat{\tau}_F(t), \hat{\tau}_S(t)) + \hat{\tau}_S(t)). \end{aligned} \right\} (8)$$

Применяемые в (8) оценки временных задержек  $\hat{\tau}_F(t)$  и  $\hat{\tau}_S(t)$  вычисляются согласно (3) и имеющемуся прогнозу положения ПА:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t) &= \min \left\{ T, \left[ \frac{((\hat{x}(t))^2 + (\hat{y}(t) - Y_{\mathcal{F}})^2 + (\hat{z}(t) - h)^2)^{1/2}}{\delta v_s} \right] \right\}; \\ \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t) &= \min \left\{ T, \left[ \frac{((\hat{x}(t) - X_{\mathcal{S}})^2 + (\hat{y}(t))^2 + (\hat{z}(t) - h)^2)^{1/2}}{\delta v_s} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} (9)$$

Надо отметить, что поскольку в наблюдениях  $Y(t)$  есть измерения, относящиеся к моментам времени, сдвинутым на разные величины  $\tau_{\mathcal{F}}(t)$  и  $\tau_{\mathcal{S}}(t)$ , то сдвиг, применяемый в (7), комбинирует обе оценки (9) так, чтобы измерения относились к одному и тому же моменту времени. Таким образом, прогноз  $\hat{X}(t)$  сдвинут на большую из величин  $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)$  или  $\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)$ , а наблюдения  $Y(t)$  — на разницу  $|\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t) - \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)|$ , т. е. в сторону более раннего измерения.

Оставшаяся часть базовой коррекции нужна для измерений скорости. Здесь подходит типовая невязка:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_9(t) &= y_5 - \left( (\hat{v}_x^0(t-1))^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\hat{v}_y^0(t-1))^2 + (\hat{v}_z^0(t-1))^2 \right)^{1/2}; \\ \zeta_{10}(t) &= y_6 - \hat{v}_x^0(t-1); \\ \zeta_{11}(t) &= y_7 - \hat{v}_y^0(t-1); \\ \zeta_{12}(t) &= y_8 - \hat{v}_z^0(t-1). \end{aligned} \right\} (10)$$

В (10) нет необходимости сдвигать прогноз измеряемой величины (модуля или проекций скорости), поскольку скорость в модели (1) имеет постоянное среднее значение.

В обсуждаемых в следующем разделе численных экспериментах комбинируются модели наблюдений и соответствующих коррекций:

- $(\mathbf{E}\{\mathbf{V}(t)\} = ?)$  идентификация  $\mathbf{E}\{\mathbf{V}(t)\}$  по угловым измерениям;
- $(\mathbf{E}\{\mathbf{V}(t)\} = ?, |\mathbf{V}(t)|)$  модуль скорости (на борту или на втором маяке);
- $(\mathbf{E}\{\mathbf{V}(t)\} = ?, \mathbf{V}(t))$  проекции скорости (на борту или на втором маяке).

## 4 Численные эксперименты

Для расчета параметров фильтра (5) и показателей качества  $\hat{K}_t^x$  и  $\hat{K}_t^\mu$  оценок (6) выполнялось

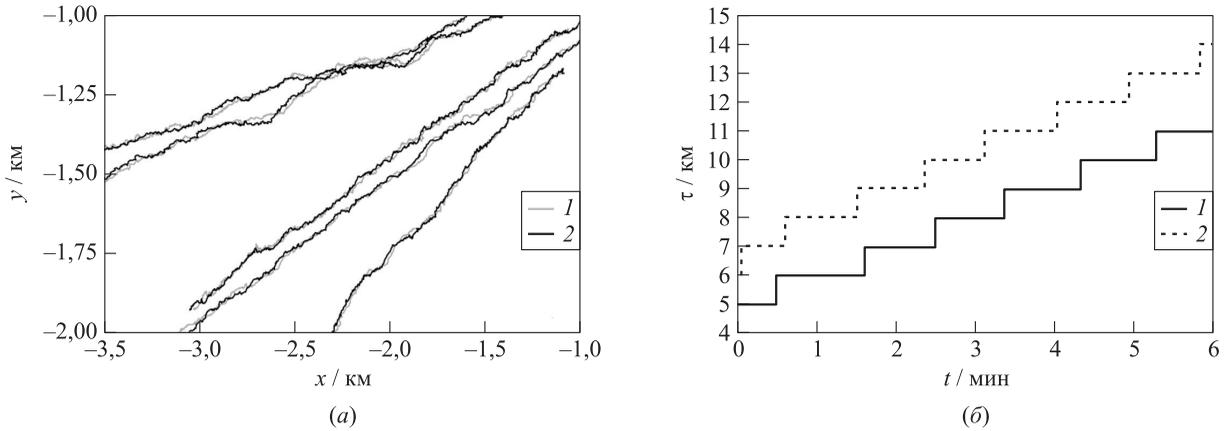
моделирование  $N = 10\,000$  траекторий. Столько же траекторий моделировалось для объективного контроля точности оценивания, который дают величины  $\sigma_{\hat{x}}(t) = \overline{\mathbf{E}\{|\hat{x}(t) - x(t)|^2\}}$ ,  $\sigma_{\hat{y}}(t) = \overline{\mathbf{E}\{|\hat{y}(t) - y(t)|^2\}}$  и  $\sigma_{\hat{z}}(t) = \overline{\mathbf{E}\{|\hat{z}(t) - z(t)|^2\}}$  для оценок  $X(t)$  и  $\sigma_{\hat{v}_x}(t) = \overline{\mathbf{E}\{|\hat{v}_x^0(t) - v_x^0(t)|^2\}}$ ,  $\sigma_{\hat{v}_y}(t) = \overline{\mathbf{E}\{|\hat{v}_y^0(t) - v_y^0(t)|^2\}}$  и  $\sigma_{\hat{v}_z}(t) = \overline{\mathbf{E}\{|\hat{v}_z^0(t) - v_z^0(t)|^2\}}$  для оценок  $\mu$ .

Заданы следующие параметры системы наблюдения (1), (4):

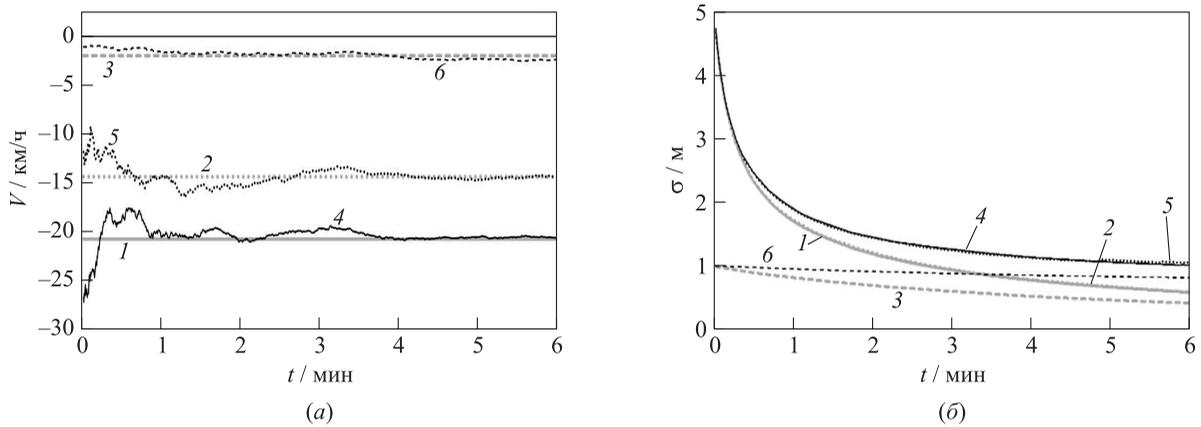
- для начального положения ПА  $X^0 = (x^0, y^0, z^0)$ :  $\mathbf{E}\{x^0\} = -1$  км,  $\mathbf{E}\{y^0\} = -1$  км,  $\mathbf{E}\{z^0\} = 1$  км,  $\mathbf{D}\{x^0\} = \mathbf{D}\{y^0\} = \mathbf{D}\{z^0\} = (0,1 \text{ км})^2$ ;
- для вектора параметров  $\mu$ :  $\mathbf{E}\{v_x^0\} = -25$  км/ч,  $\mathbf{E}\{v_y^0\} = -12,5$  км/ч,  $\mathbf{E}\{v_z^0\} = -1$  км/ч,  $\mathbf{D}\{v_x^0\} = \mathbf{D}\{v_y^0\} = (5 \text{ км/ч})^2$ ,  $\mathbf{D}\{v_z^0\} = (1 \text{ км/ч})^2$ ;
- дисперсии возмущений  $\mathbf{D}\{w_x(t)\} = \mathbf{D}\{w_y(t)\} = \mathbf{D}\{w_z(t)\} = (25 \text{ км/ч})^2$ ;
- шаг дискретизации  $\delta = 0,0001$  ч, фильтрация выполняется для 1000 шагов дискретизации,  $t = -T, \dots, 1000$ , т. е. 6 мин движения;
- расстояние между ПА и более удаленным маяком не превышает 8 км, поэтому  $T = 15$ , что соответствует 5,4 с (при  $v_s = 5400$  км/ч);
- ошибки измерения тангенсов:  $\mathbf{D}\{v_i(t)\} = 0,0001$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ;
- ошибки измерения модуля скорости:  $\mathbf{D}\{v_5(t)\} = (0,1 \text{ км/ч})^2$ ;
- ошибки измерения проекций скорости:  $\mathbf{D}\{v_i(t)\} = (0,1 \text{ км/ч})^2$ ;  $(1 \text{ км/ч})^2$ ;  $(5 \text{ км/ч})^2$ ,  $i = 6, 7, 8$ .

Характер движения ПА и точность фильтрации иллюстрирует рис. 3, качественный характер оценивания параметров — рис. 4.

В качестве объективной числовой характеристики качества оценивания положения ПА можно взять средние по времени от  $\sigma_{\hat{x}}(t)$ ,  $\sigma_{\hat{y}}(t)$  и  $\sigma_{\hat{z}}(t)$ . Они обозначены  $\sigma_{\hat{x}}^{(2)}$ ,  $\sigma_{\hat{y}}^{(2)}$  и  $\sigma_{\hat{z}}^{(2)}$  (например,  $\sigma_{\hat{x}}^{(2)} = (1/1000) \sum_{t=1}^{1000} \sigma_{\hat{x}}(t)$ ). Это реальные точности, поскольку они вычислены на втором (2), контрольном, наборе траекторий. Аналогично через  $\sigma_{\hat{x}}^{(1)}$ ,  $\sigma_{\hat{y}}^{(1)}$  и  $\sigma_{\hat{z}}^{(1)}$  обозначены усредненные по времени  $(\hat{K}_t^x)_{11}^{1/2}$ ,  $(\hat{K}_t^x)_{22}^{1/2}$  и  $(\hat{K}_t^x)_{33}^{1/2}$ , вычисленные на первом (1), обучающем, наборе. Близость теоретических и реальных средних отклонений ошибок должна подтвердить успешность синтеза УМНФ методом Монте-Карло. Качество идентификации можно также охарактеризовать интегралами, но для этого используется уже не вся траектория, а только 100 последних шагов. Так,  $\sigma_{\hat{v}_x}^{(1)} = (1/100) \sum_{t=901}^{1000} (\hat{K}_t^\mu)_{11}^{1/2}$



**Рис. 3** Примеры траекторий: (а) проекция положения  $(x(t), y(t))$  (1) и оценка фильтрации  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$  (2); (б) временные задержки  $\tau_F$  (1) и  $\tau_S$  (2)



**Рис. 4** Результаты идентификации: (а) средние скорости  $v_x^0$  (1),  $v_y^0$  (2) и  $v_z^0$  (3) и оценки  $\hat{v}_x^0$  (4),  $\hat{v}_y^0$  (5) и  $\hat{v}_z^0$  (6); (б) точность идентификации теоретическая (1 —  $\sigma_{\hat{v}_x}$ ; 2 —  $\sigma_{\hat{v}_y}$ ; 3 —  $\sigma_{\hat{v}_z}$ ) и реальная (1 —  $(\hat{K}_t^\mu)^{-1/2}$ ; 2 —  $(\hat{K}_t^\mu)^{-1/2}$ ; 3 —  $(\hat{K}_t^\mu)^{-1/2}$ )

и  $\sigma_{\hat{v}_x}^{(2)} = (1/100) \sum_{t=901}^{1000} \sigma_{\hat{v}_x}(t)$ . Эти числа точнее отражают смысл решения задачи идентификации. Результаты вычислений приведены в таблице.

## 5 Заключение

Полнота знаний о модели, используемой для описания стохастической системы наблюдения, принципиально важна для успешного применения алгоритмов оценивания. Неточное задание отдельных параметров может оказать принципиальное влияние на точность оценки. Параметрическая неопределенность требует анализа устойчивости и использования робастных алгоритмов. Недостаток такого подхода и цена устойчивости — потеря в качестве оценивания. Поэтому сохраняют актуальность другие подходы, в частности примененный в данном исследовании метод байесовской иденти-

фикации. Робастный алгоритм для модели (1), (4) получается просто: вместо оценивания неизвестной средней скорости можно взять ее априорную оценку. Фильтр будет работать так же, как на первых шагах, когда информация о текущей скорости ограничена только априорными данными. Но модель (1) допускает альтернативный подход, байесовская постановка дает возможность оценивать неизвестные параметры параллельно с решением основной задачи фильтрации.

Судить о результативности этого подхода можно по графикам на рис. 5, сравнивая погрешности на начальном этапе фильтрации (первые 10–15 с) и на всем оставшемся интервале. Нетрудно видеть, что у фильтра есть переходной процесс, который следует не столько за динамикой движущегося объекта, сколько за динамикой оценок идентификации, показанной на рис. 4. Кроме того, очевидное преимущество оценкам состояния обеспечивают изме-

Сравнение качества позиционирования и идентификации

Модель	$\sigma_{\hat{x}}^{(1)}/\sigma_{\hat{x}}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{y}}^{(1)}/\sigma_{\hat{y}}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{z}}^{(1)}/\sigma_{\hat{z}}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{v}_x}^{(1)}/\sigma_{\hat{v}_x}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{v}_y}^{(1)}/\sigma_{\hat{v}_y}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{v}_z}^{(1)}/\sigma_{\hat{v}_z}^{(2)}$
$E\{V(t)\} = ?, Y(t) \in \mathbb{R}^4, \zeta(t) \in \mathbb{R}^8$						
$T = 0$	11,27/11,62	11,45/11,78	8,81/8,92	0,67/1,00	0,66/0,98	0,48/0,80
$T = 15$	13,80/14,22	13,93/14,32	11,61/11,77	0,68/0,99	0,67/0,97	0,49/0,79
$E\{V(t)\} = ?,  V(t) , Y(t) \in \mathbb{R}^5, \zeta(t) \in \mathbb{R}^9, \sigma\{v_5\} = 0,1 \text{ км/ч},$ скорость измеряется или на маяке ( $T = 15$ ), или на борту ПА ( $T = 0$ )						
$T = 0$	9,80/10,20	10,45/10,76	8,68/8,80	0,66/1,03	0,65/1,00	0,47/0,83
$T = 15$ (углы), $T = 0$ (скорость)	11,72/12,20	12,88/13,27	11,53/11,69	0,66/1,01	0,64/1,01	0,46/0,81
$T = 15$ (углы и скорость)	12,57/13,06	13,10/13,50	11,52/11,58	0,66/1,01	0,65/1,01	0,45/0,80
$E\{V(t)\} = ?, V(t), Y(t) \in \mathbb{R}^7, \zeta(t) \in \mathbb{R}^{11}, \sigma\{v_8\} = 0,1; 1; 5 \text{ км/ч},$ скорость измеряется или на маяке ( $T = 15$ ), или на борту ПА ( $T = 0$ )						
$T = 0,$ $\sigma\{v_8\} = 1 \text{ км/ч}$	2,12/2,60	2,62/3,14	2,01/2,27	0,61/1,04	0,62/1,03	0,43/0,83
$T = 15$ (углы), $T = 0$ (скорость), $\sigma\{v_8\} = 0,1 \text{ км/ч}$	2,28/2,80	2,84/3,45	2,24/2,67	0,61/1,02	0,61/1,06	0,43/0,82
$T = 15$ (углы и скорость), $\sigma\{v_8\} = 0,1 \text{ км/ч}$	8,47/8,79	8,65/8,93	8,23/8,43	0,61/1,05	0,62/1,04	0,43/0,82
$T = 15$ (углы и скорость), $\sigma\{v_8\} = 1 \text{ км/ч}$	8,51/8,84	8,70/8,98	8,25/8,47	0,61/1,05	0,62/1,04	0,43/0,83
$T = 15$ (углы и скорость), $\sigma\{v_8\} = 5 \text{ км/ч}$	9,22/9,58	9,38/9,69	8,69/8,88	0,61/1,05	0,62/1,05	0,43/0,83

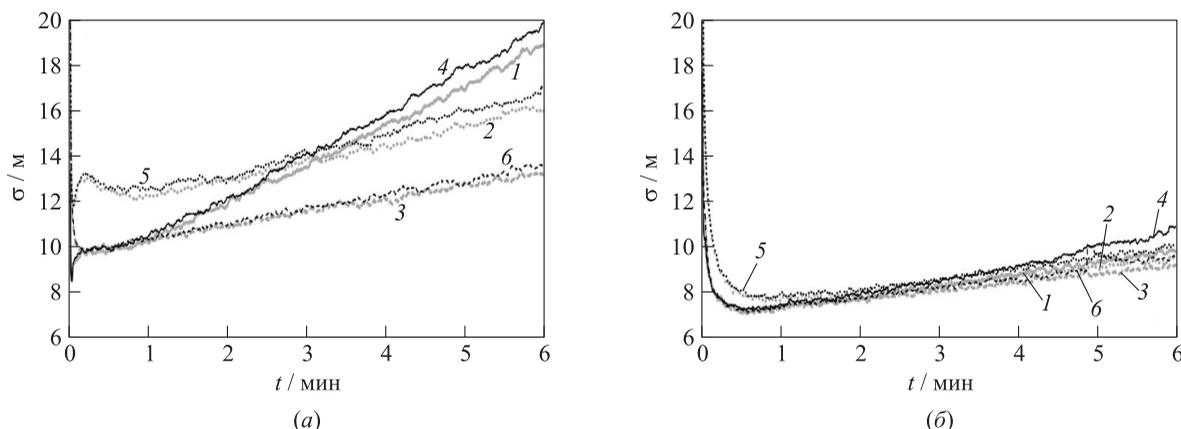


Рис. 5 Результаты фильтрации: (а) модель с угловыми измерениями; (б) модель с измерениями проекций скорости: 1 –  $\sigma_{\hat{x}}$ ; 2 –  $\sigma_{\hat{y}}$ ; 3 –  $\sigma_{\hat{z}}$ ; 4 – реальная  $(\hat{K}_t^x)_{11}^{1/2}$ ; 5 – реальная  $(\hat{K}_t^x)_{221}^{1/2}$ ; 6 – реальная  $(\hat{K}_t^x)_{33}^{1/2}$

рения скорости. Это ответы на вопросы, нужно ли идентифицировать параметры и повышать качество измерений.

Другие заключительные положения сформулированы как выводы к результатам выполненного эксперимента.

1. Во всех расчетах оказалась небольшой разницей между теоретической точностью оценок фильтрации  $\hat{K}_t^x$ , рассчитанных на обучающем наборе из сравнительно небольшого числа  $N = 10\,000$  траекторий, и реальной точностью  $\sigma_{\hat{x}}(t)$ ,  $\sigma_{\hat{y}}(t)$  и  $\sigma_{\hat{z}}(t)$ , показанной фильтром на втором кон-

трольном пучке. Это важный аспект синтеза УМНФ, поскольку устойчивый характер оценки в отношении неточного задания коэффициентов фильтра никакими свойствами не гарантирован. Этот результат также можно интерпретировать как подтверждение применимости метода в выбранной предметной области.

2. Задача идентификации во всех моделях имеет решение примерно одинакового качества. При этом отличие теоретического качества идентификации  $\hat{K}_t^\mu$  и реальной точности  $\sigma_{\hat{v}_x}(t)$ ,  $\sigma_{\hat{v}_y}(t)$

- и  $\sigma_{\hat{v}_z}(t)$  существенно больше, чем у оценок состояния. Важно, что это не мешает решать основную задачу позиционирования, оценки идентификации остаются для этого достаточно точными и не демонстрируют неконтролируемого поведения. Добиться близости теоретической и реальной точности можно, увеличивая число моделируемых траекторий обучающего набора. Но при таких размерностях издержки вычислительных ресурсов становятся значительными. Таким образом, хотя идентификация и оказалась гораздо требовательнее к методу Монте-Карло, это компенсировалось ограниченным влиянием точности оценок параметров на точность оценки состояния.
3. В задаче позиционирования угловые измерения сильно проигрывают измерениям скорости. При этом нужно учитывать технические ограничения возможности измерения скорости ПА и сравнительную простоту акустических сенсоров DOA.
  4. Наличие автономных измерителей на борту ПА ожидаемо делает результат позиционирования существенно лучше. Цель эксперимента была в том, чтобы ответить на вопрос, будет ли подобный эффект в модели с временной задержкой наблюдений. Если бы движение ПА носило более регулярный характер, то, конечно, знание его скорости значительно компенсировало бы эту погрешность. В модели движения (1) постоянство средней скорости очень сильно скрыто за возмущениями, смысл которых не столько в том, чтобы учитывать воздействие сильных океанских течений, сколько в том, чтобы имитировать хаотичное управление ПА в ситуации, когда слежение за ним не ставится кооперативной задачей, а наоборот, решается наблюдателем-антагонистом. Но даже в таком сценарии наличие измерений скорости значительно улучшает точность оценки. И если в случае измерения только модуля скорости это незначительное улучшение порядка 5%, то измерения координатных проекций дают улучшение уже порядка 25%. При этом, что очень любопытно, от измерений скорости не требуется большая точность, оценка фильтра даже с ошибкой измерения скорости порядка 5 км/ч (а это очень грубое измерение) все равно дает фильтру ощутимые преимущества.
  2. *Кебкал К. Г., Машошин А. И.* Гидроакустические методы позиционирования автономных необитаемых подводных аппаратов // *Гиропропия и навигация*, 2016. Т. 24. № 3(94). С. 115–130. doi: 10.17285/0869-7035.2016.24.3.115-130. EDN: WTPSNR.
  3. *Christ R. D., Wernli R. L.* The ROV manual: A user guide for remotely operated vehicles. — 2nd ed. — Oxford, U.K.: Butterworth-Heinemann, 2013. 712 p.
  4. *Босов А. В.* Оптимальная фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 8–17. doi: 10.14357/19922264230302. EDN: CFVYJM.
  5. *Пугачев В. С.* Рекуррентное оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых разностными уравнениями // *Докл. Акад. наук СССР*, 1978. Т. 243. № 5. С. 1131–1133.
  6. *Пугачев В. С.* Оценивание переменных и параметров в дискретных нелинейных системах // *Автоматика и телемеханика*, 1979. № 4. С. 39–50.
  7. *Pankov A. R., Bosov A. V.* Conditionally minimax algorithm for nonlinear system state estimation // *IEEE T. Automat. Contr.*, 1994. Vol. 39. No. 8. P. 1617–1620. doi: 10.1109/9.310035.
  8. *Босов А. В., Миллер Г. Б.* О развитии концепции условно-минимаксной нелинейной фильтрации: модифицированный фильтр и его анализ // *Информатика и её применения*, 2019. Т. 13. Вып. 2. С. 7–15. doi: 10.14357/19922264190202. EDN: XZDVEV.
  9. *Босов А. В.* Фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // *Автоматика и телемеханика*, 2023. № 6. С. 49–66. doi: 10.31857/S000523102306003X. EDN: CSDMWT.
  10. *Bosov A.* Tracking a maneuvering object by indirect observations with random delays // *Drones*, 2023. Vol. 7. No. 7. Art. 468. 17 p. doi: 10.3390/drones7070468.
  11. *Льонг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя / Пер. с англ. — М.: Наука, 1991. 432 с. (*Ljung L.* System identification: Theory for the user. — Hoboken, NJ, USA: Prentice Hall, 1987. 519 p.)
  12. *Huber P. J., Ronchetti E. M.* Robust statistics. — 2nd ed. — Wiley ser. in probability and statistics. — New York, NY, USA: Wiley, 2011. 384 p.
  13. *Босов А. В.* Позиционирование и идентификация параметров движения подводного аппарата по наблюдениям со случайными запаздываниями // *Автоматика и телемеханика*, 2024. № 12. С. 23–48.
  14. *Hodges R.* Underwater acoustics: Analysis, design and performance of sonar. — New York, NY, USA: Wiley, USA, 2011. 384 p.
  15. *Miller A., Miller B., Miller G.* On AUV control with the aid of position estimation algorithms based on acoustic seabed sensing and DOA measurements // *Sensors* — Basel, 2019. Vol. 19. No. 24. Art. 5520. 21 p. doi: 10.3390/s19245520.
  16. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. — М.: Наука, 1976. 672 с.

## Литература

1. *Autonomous underwater vehicles: Design and practice (radar, sonar & navigation) / Ed. F. Ehlers.* — London, U.K.: SciTech Publishing, 2020. 592 p.

17. Бромберг П. В. Теория инерциальных систем навигации. — М.: Наука, 1979. 296 с.
18. Whitcomb L., Yoerger D., Singh H. Advances in Doppler-based navigation of underwater robotic vehicles // Conference (International) on Robotics and Automation Proceedings. — IEEE, 1999. Vol. 1. P. 399–406. doi: 10.1109/ROBOT.1999.770011.
19. Hegrenaes O., Berglund E. Doppler water-track aided inertial navigation for autonomous underwater vehicle // OCEANS Europe Proceedings. — IEEE, 2009. Art. 5278307. 10 p. doi: 10.1109/OCEANSE.2009.5278307.
20. Snyder J. Doppler velocity log (DVL) navigation for observation-class ROVs // OCEANS MTS/IEEE Seattle Proceedings. — IEEE, 2010. Art. 5664561. 9 p. doi: 10.1109/OCEANS.2010.5664561.
21. Tal A., Klein I., Katz R. Inertial navigation system / Doppler velocity log (INS/DVL) fusion with partial DVL measurements // Sensors — Basel, 2017. Vol. 17. No. 2. Art. 415. 20 p. doi: 10.3390/s17020415.
22. Miller A., Miller B., Miller G. AUV navigation with seabed acoustic sensing // Australian & New Zealand Control Conference Proceedings. — IEEE, 2018. P. 166–171. doi: 10.1109/ANZCC.2018.8606561.

Поступила в редакцию 20.11.2024

Принята к публикации 15.01.2025

---

---

## DOPPLER MEASUREMENTS APPLICATION ANALYSIS TO IDENTIFY MOTION PARAMETERS FROM OBSERVATIONS WITH RANDOM DELAYS

A. V. Bosov

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The moving object positioning problem statement uses a model of a stochastic dynamic observation system with random time delays between the subsequent observation and the actual state of the object and the presence of unknown motion parameters. For such a model, using the example of an underwater vehicle (UV), the variants of the observation formation are analyzed. The first uses only stationary acoustic sensors which allow measuring only angular coordinates. In the second variant, the measurements are supplemented by velocity measurements performed both on board the moving object and by external observers. Each model is used in two ways: assuming that there is complete *a priori* information about the parameters of the UV movement and in the absence of data on the values of some of the parameters. In the latter variant, the positioning problem is solved in conjunction with the task of unknown motion parameters identification. The models and the results of their experimental application are compared in order to qualitatively assess the effectiveness of using velocity measurements. To do this, a conditionally minimax nonlinear filter is applied to the problem. A comparative analysis of the models of the observation system was performed as a part of a large-scale computational experiment.

**Keywords:** nonlinear stochastic observation system; Bayesian parameter identification; observations with random time delays; conditionally minimax nonlinear filter; positioning; acoustic sensors; Doppler effect

**DOI:** 10.14357/19922264250105

**EDN:** MZKWC1

### Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (СКР “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

### References

1. Ehlers, F., ed. 2020. *Autonomous underwater vehicles: Design and practice (radar, sonar & navigation)*. London, U.K.: SciTech Publishing. 592 p.
2. Kebkal, K. G., and A. I. Mashoshin. 2017. AUV acoustic positioning methods. *Gyroscopy Navigation* 8:80–89. doi: 10.1134/S2075108717010059.
3. Christ, R. D., and R. L. Wernli. 2013. *The ROV manual: A user guide for remotely operated vehicles*. 2nd ed. Oxford, U.K.: Butterworth-Heinemann. 712 p.
4. Bosov, A. V. 2023. Optimal'naya fil'tratsiya sostoyaniya nelineynoy dinamicheskoy sistemy po nablyudeniym so sluchaynymi zapazdyvaniyami [Nonlinear dynamic system state optimal filtering by observations with random de-

- lays]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform Appl.* 17(3):8–17. doi: 10.14357/19922264230302. EDN: CFVYJM.
5. Pugachev, V. S. 1978. Recursive estimation of variables and parameters in stochastic systems described by difference equations. *Soviet Mathematics Doklady* 19:1495–1497.
  6. Pugachev, V. S. 1979. Estimation of variables and parameters in discrete time non-linear systems. *Automat. Rem. Contr.* 40(4):512–521.
  7. Pankov, A. R., and A. V. Bosov. 1994. Conditionally minimax algorithm for nonlinear system state estimation. *IEEE T. Automat. Contr.* 39(8):1617–1620. doi: 10.1109/9.310035.
  8. Bosov, A. V., and G. B. Miller. 2019. O razvitii kontseptsii uslovno-minimaksnoy nelineynoy fil'tratsii: modifitsirovanny fil'tr i ego analiz [On the conditionally minimax nonlinear filtering concept development: Filter modification and analysis]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(2):7–15. doi: 10.14357/19922264190202. EDN: XZDVEV.
  9. Bosov, A. V. 2023. Observation-based filtering of state of a nonlinear dynamical system with random delays. *Automat. Rem. Contr.* 84(6):594–605. doi: 10.1134/S0005117923060036. EDN: GVWEAB.
  10. Bosov, A. 2023. Tracking a maneuvering object by indirect observations with random delays. *Drones* 7(7):468. 17 p. doi: 10.3390/drones7070468.
  11. Ljung, L. 1987. *System identification: Theory for the user*. Hoboken, NJ: Prentice Hall. 519 p.
  12. Huber, P. J., and E. M. Ronchetti. 2011. *Robust statistics*. 2nd ed. Wiley ser. in probability and statistics. New York, NY: Wiley. 384 p.
  13. Bosov, A. V. 2024. AUV positioning and motion parameter identification based on observations with random delays. *Automat. Rem. Contr.* 85(12):1149–1167. doi: 10.31857/S0005117924120029.
  14. Hodges, R. 2011. *Underwater acoustics: Analysis, design and performance of sonar*. New York, NY: Wiley. 384 p.
  15. Miller, A., B. Miller, and G. Miller. 2019. On AUV control with the aid of position estimation algorithms based on acoustic seabed sensing and DOA measurements. *Sensors — Basel* 19(24):5520. 21 p. doi: 10.3390/s19245520.
  16. Ishlinskiy, A. Yu. 1976. *Oriyentatsiya, giroskopy i inertsi-al'naya navigatsiya* [Orientation, gyroscopes, and inertial navigation]. Moscow: Nauka. 672 p.
  17. Bromberg, P. V. 1979. *Teoriya inertsi-al'nykh sistem navigatsii* [Theory of inertial navigation systems]. Moscow: Nauka. 296 p.
  18. Whitcomb, L., D. Yoerger, and H. Singh. 1999. Advances in Doppler-based navigation of underwater robotic vehicles. *Conference (International) on Robotics and Automation Proceedings*. IEEE. 1:399–406. doi: 10.1109/ROBOT.1999.770011.
  19. Hegrenaes, O., and E. Berglund. 2009. Doppler water-track aided inertial navigation for autonomous underwater vehicle. *OCEANS Europe Proceedings*. IEEE. Art. 5278307. 10 p. doi: 10.1109/OCEANSE.2009.5278307.
  20. Snyder, J. 2010. Doppler velocity log (DVL) navigation for observation-class ROVs. *OCEANS MTS/IEEE Seattle Proceedings*. IEEE. Art. 5664561. 9 p. doi: 10.1109/OCEANS.2010.5664561.
  21. Tal, A., I. Klein, and R. Katz. 2017. Inertial navigation system / Doppler velocity log (INS/DVL) fusion with partial DVL measurements. *Sensors — Basel* 17(2):415. 20 p. doi: 10.3390/s17020415.
  22. Miller, A., B. Miller, and G. Miller. 2018. AUV navigation with seabed acoustic sensing. *Australian & New Zealand Control Conference Proceedings*. IEEE. 166–171. doi: 10.1109/ANZCC.2018.8606561.

Received November 20, 2024

Accepted January 15, 2025

## Contributor

**Bosov Alexey V.** (b. 1969) — Doctor of Science in technology, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; ABosov@frccsc.ru

# МЕТОДЫ НОРМАЛЬНОЙ УСЛОВНО-ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ НАБЛЮДАЕМЫХ НЕЯВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. Н. Синицын<sup>1</sup>

**Аннотация:** Рассмотрены методы синтеза нелинейных нормальных условно-оптимальных фильтров (НУОФ) по среднеквадратичному критерию (т. е. в смысле В. С. Пугачёва) для обработки информации во взаимосвязанных наблюдаемых непрерывных и дискретных гауссовских и негауссовских неявных стохастических систем (СтС), приводимых к явным. Представлены уравнения наблюдаемых непрерывных и дискретных явных и неявных гауссовских и негауссовских СтС, методы приведения неявных гладких и разрывных СтС к явным. Для взаимосвязанных неявных объектовых и явных систем наблюдения разработаны методы синтеза НУОФ, основанные на решении методом нормальной аппроксимации (МНА) совместных приведенных уравнений объекта, системы наблюдения и уравнений линейных и нелинейных условно-оптимальных фильтров (УОФ) для гауссовских и негауссовских СтС. В качестве дискретных неявных СтС, приводимых к дискретным, рассмотрены нелинейные регрессионные и авторегрессионные уравнения. Предложены обобщения методов синтеза УОФ для сложных неявных непрерывных и дискретных СтС.

**Ключевые слова:** метод нормальной аппроксимации распределения; неявная стохастическая система; нормальный условно-оптимальный фильтр (НУОФ); стохастический процесс (СтП); условно-оптимальный фильтр Пугачёва

DOI: 10.14357/19922264250106

EDN: TERFUE

## 1 Введение

Теория условно-оптимальной фильтрации в среднеквадратичном смысле (по В. С. Пугачёву) стохастических процессов (СтП), описываемых явными стохастическим дифференциальными уравнениями, нашла практическое применение при решении задач обработки информации в реальном масштабе времени. Для неявных дифференциальных СтС, допускающих приведение к явным дифференциальным, развиты соответствующие методы условно-оптимальной фильтрации В. С. Пугачёва. Так, в [1] разработаны математические модели наблюдаемых неявных дифференциальных СтС, приводимых к дифференциальным, для задач фильтрации. Получены базовые уравнения нелинейных УОФ. Сформулированы основные выводы, обсуждены примеры синтеза и даны предложения по развитию УОФ для неявных дифференциальных и функционально-дифференциальных СтС.

Развитие методов условно-оптимальной фильтрации при автокоррелированных помехах в наблюдениях на случай неявных непрерывных и дискретных СтС, приводимых к явным, дано в [2]. Представлены математические модели неявных не-

прерывных и дискретных гауссовских и негауссовских СтС, приводимых к явным. Для приведенных неявных СтС в условиях, когда наблюдения не оказывают влияния на объект наблюдения и описываются явными уравнениями, разрешенными относительно производных (разностей), получены уравнения базовых методов УОФ. Обсуждены три примера, представлены выводы и направления дальнейших исследований.

Статья [3] посвящена методам условно-оптимального синтеза фильтров для неявных дискретных СтС, приводимых к явным, путем эквивалентной гауссовской и негауссовской линеаризации. Предполагается, что наблюдения не влияют на объект наблюдения и описываются дискретными нелинейными уравнениями с некоррелированными и автокоррелированными помехами. Дан обзор работ в области синтеза УОФ для явных и неявных дискретных наблюдаемых СтС. Приведены основные модели дискретных неявных СтС и методы их эквивалентной линеаризации. Получены уравнения УОФ. В качестве примера рассмотрены УОФ для авторегрессионных приведенных уравнений. Обсуждены примеры и направления дальнейших исследований.

\* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, sinitsin@dol.ru

Рассмотрим методы синтеза НУОФ по среднеквадратичному критерию для обработки информации во взаимосвязанных наблюдаемых непрерывных и дискретных гауссовских и негауссовских неявных СтС, приводимых к явным.

## 2 Уравнения наблюдаемых непрерывных и дискретных неявных стохастических систем

Как известно [4, 5], для наблюдаемых непрерывных явных дифференциальных СтС задача среднеквадратичной фильтрации ставится следующим образом. Векторный СтП  $[X_t^T Y_t^T]^T$  определяется векторными стохастическими дифференциальными уравнениями Ито:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_t &= \varphi(X_t, Y_t, t) + \psi(X_t, Y_t, t)V; \\ \dot{Y}_t &= \varphi_1(X_t, Y_t, t) + \psi_1(X_t, Y_t, t)V, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $Y_t$  —  $n_y$ -мерный наблюдаемый СтП;  $X_t$  —  $n_x$ -мерный ненаблюдаемый процесс;  $V = \dot{W}$ ,  $W$  —  $n_w$ -мерный процесс с независимыми приращениями;  $\varphi(X_t, Y_t, t)$  и  $\varphi_1(X_t, Y_t, t)$  — известные векторные функции, отображающие пространство  $R^{n_x} \times R^{n_y} \times R$  соответственно в пространства  $R^{n_x}$  и  $R^{n_y}$ ;  $\psi(X_t, Y_t, t)$  и  $\psi_1(X_t, Y_t, t)$  — известные матричные функции, отображающие  $R^{n_x} \times R^{n_y} \times R$  в  $R^{n_x n_w}$  и  $R^{n_y n_w}$  соответственно. Требуется найти оценку  $\hat{X}_t$  вектора состояния  $X_t$  системы в любой момент  $t > t_0$  по результатам непрерывного наблюдения процесса  $Y_t$  в интервале времени  $[t_0, t]$ ,  $Y_{t_0}^t = \{Y(\tau) : t_0 \leq \tau \leq t\}$ .

В общем случае уравнения наблюдаемых дифференциальных СтС имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} dX_t &= \varphi(X_t, Y_t, t) dt + \psi'(X_t, Y_t, t) dW_0 + \\ &\quad + \int_{R_0^q} \psi''(X_t, Y_t, t, v) P^0(dt, dv); \\ dY_t &= \varphi_1(X_t, Y_t, t) dt + \psi'_1(X_t, Y_t, t) dW_0 + \\ &\quad + \int_{R_0^q} \psi''_1(X_t, Y_t, t, v) P^0(dt, dv). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь  $Y_t = Y(t)$  —  $n_y$ -мерный наблюдаемый СтП;  $X_t = X(t)$  —  $n_x$ -мерный ненаблюдаемый СтП;  $W_0 = W_0(t)$  —  $n_w$ -мерный винеровский процесс ( $n_w \geq n_y$ );  $P^0(\Delta, A)$  — центрированная пуассоновская мера, независимая от винеровского процесса  $W_0(t)$ , а интегрирование распространяется на все пространство  $R_0^q$  с выколотым началом координат,  $\varphi = \varphi(X_t, Y_t, t)$ ,  $\varphi_1 = \varphi_1(X_t, Y_t, t)$ ,  $\psi' = \psi'(X_t, Y_t, t)$  и  $\psi'_1 = \psi'_1(X_t, Y_t, t)$  — известные функции, отображающие  $R^{n_x} \times R^{n_y} \times R$  соот-

ветственно в  $R^{n_x}$ ,  $R^{n_y}$ ,  $R^{n_x n_w}$  и  $R^{n_y n_w}$ ;  $\psi'' = \psi''(X_t, Y_t, t, v)$  и  $\psi''_1(X_t, Y_t, t, v)$  — известные функции, отображающие  $R^{n_x} \times R^{n_y} \times R^q$  в  $R^{n_x}$ ,  $R^{n_y}$ . Требуется найти оценку  $\hat{X}_t$  процесса  $X_t$  в каждый момент времени  $t$  по результатам наблюдения процесса  $Y(\tau)$  до момента  $t$ ,  $Y_{t_0}^t = \{Y(\tau) : t_0 \leq \tau < t\}$ .

Уравнения (2) приводятся к уравнениям (1) в случае, когда

$$\begin{aligned} \psi''(X_t, Y_t, t, v) &= \psi'(X_t, Y_t, t) \bar{\psi}''(v); \\ \psi'_1(X_t, Y_t, t, v) &= \psi'_1(X_t, Y_t, t) \bar{\psi}''(v); \\ W(t) &= W_0(t) + \int_{R_0^q} \bar{\psi}''(\rho) P^0(t, d\rho). \end{aligned}$$

Для наблюдаемых дискретных явных СтС задача фильтрации формулируется следующим образом [4, 5]. Пусть векторный дискретный СтП  $[X_k^T Y_k^T]^T$  определяется явными стохастическими разностными уравнениями нелинейной регрессии вида

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \omega_k(X_k, Y_k, V_k); \quad Y_k = \omega_{1k}(X_k, Y_k, V_k) \\ &\quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Здесь  $X_k$  — ненаблюдаемый  $n_x$ -мерный векторный дискретный СтП (вектор состояния);  $Y_k$  — наблюдаемый  $n_y$ -мерный дискретный СтП;  $V_k$  — дискретный  $n_v$ -мерный векторный белый шум с известной характеристической функцией  $h_k = h_k(\varepsilon)$ ;  $\omega_k$  и  $\omega_{1k}$  — известные векторные  $n_x$ - и  $n_y$ -мерные функции отмеченных переменных. Требуется оценить вектор состояния системы  $X_k$  в любой момент времени  $k > 1$  по результатам наблюдения дискретного процесса  $Y_k$  в интервале времени  $[1, k]$ ,  $Y_1^k = \{Y_j, j = 1, \dots, k\}$ .

Аналогично ставятся задачи оценивания для дискретных СтС, описываемых уравнениями авторегрессии вида

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \varphi_k(X_k, Y_k) + \psi_k(X_k, Y_k) V_k; \\ Y_k &= \varphi_{1k}(X_k, Y_k) + \psi_k(X_k, Y_k) V_k. \end{aligned}$$

Далее, обобщая [1–3], рассмотрим векторную неявную дифференциальную СтС с нелинейностями, описываемыми гладкими детерминированными функциями размерности  $(n^\Phi \times 1)$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(t, Z_t, \dot{Z}_t, \dots, Y_t^{(k)}, U_t) = 0, \\ Z(t_0) &= Z_0, \quad \dot{Z}(t_0) = \dot{Z}_0, \dots, Y^{(k)}(t_0) = Z_0^{(k)}. \quad (3) \end{aligned}$$

При этом уравнение нелинейного формирующего фильтра для стохастических возмущений  $U_t$  возьмем в виде, разрешенном относительно белых шумов:

$$\dot{U}_t = a^U(t, U_t) + b^U(t, U_t) V_t^U, \quad U(t_0) = U_0. \quad (4)$$

Здесь  $a^U(t, U_t)$  и  $b^U(t, U_t)$  —  $(n^Z \times 1)$ - и  $(n^Z \times n^V)$ -мерные функции;  $V_t^U$  — белый шум в строгом смысле, допускающий представление вида

$$V_t^U = \dot{W}_t^U, \quad W_t^U = W_0^U(t) + \int_{R_0^g} c^U(\rho) P^0(t, d\rho),$$

где  $\nu_t$  — его интенсивность:

$$\nu_t = \nu_t^W = \nu_t^{W_0} + \int_{R_0^g} c^U(\rho) [c^U(\rho)]^T \nu_P(t, \rho) d\rho;$$

$c^U = c^U(\rho)$  — известная векторная функция той же размерности, что и  $W_0^U$ , а интеграл при любом  $t \geq t_0$  представляет собой стохастический интеграл по центрированной пуассоновской мере  $P^0(dt, \mathcal{A})$ , независимой от  $W_0^U$  и имеющей независимые значения на попарно непересекающихся множествах,  $\mathcal{A}$  — борелевское множество пространства  $R_0^g$  с выколотым началом;  $\nu_t^W, \nu_t^{W_0}$  и  $\nu_P$  — интенсивности СтП  $W_t^U, W_0^U$  и  $P^0$ . Уравнение (4) понимается в смысле Ито и имеет единственное среднеквадратичное решение.

Для гладких функций в (3), допускающих стохастические производные Ито до  $h$ -го порядка, выполним следующие преобразования. Будем дифференцировать по  $t$  левые части уравнений (3) по обобщенной формуле Ито [4, 5] до тех пор, пока не появятся производные белого шума. В результате получим следующую систему неявных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\Phi = 0; \quad \dot{\Phi} = 0 \dots; \Phi^{(h)} = 0. \quad (5)$$

Далее введем составной вектор  $[\bar{Z}_t^T Z_t'^T]^T$ , где

$$\bar{Z}_t = [Z_t^T \dot{Z}_t^T \dots Z_t^{(k-1)T}]^T,$$

и вспомогательный вектор  $Z_t'$ , определяемый уравнениями (5) в виде конечного (функционального) уравнения

$$\Psi(\bar{Z}_t, Z_t') = 0. \quad (6)$$

Таким образом, если неявные гладкие вектор-функции и конечные неявные уравнения (3) и (6) допускают гладкую замену переменных, то они приводятся к системе, состоящей из векторного стохастического дифференциального уравнения Ито и конечного неявного векторного уравнения (теорема 2.1):

$$d\bar{Z}_t = a^\Pi(t, \bar{Z}_t) dt + b^\Pi(t, \bar{Z}_t) dW_0 + \int_{R_0^g} c^\Pi(t, \bar{Z}_t, \rho) P^0(dt, d\rho), \quad \Psi^\Pi(\bar{Z}_t, Z_t', t) = 0.$$

Приводимые неявные дискретные регрессионные и авторегрессионные СтС описываются разностными уравнениями вида (теоремы 2.2 и 2.3)

$$\bar{Z}_{k+1} = \omega_k^\Pi(\bar{Z}_k, V_k); \quad \Psi_k^\Pi(\bar{Z}_k, Z_k') = 0; \quad (7)$$

$$\bar{Z}_{k+1} = a_k^\Pi(\bar{Z}_k) + b_k^\Pi(\bar{Z}_k) V_k; \quad \Psi_k^\Pi(\bar{Z}_k, Z_k') = 0. \quad (8)$$

Здесь функции  $\omega^\Pi(\bar{z}_k, v_k)$ ,  $a_k^\Pi(\bar{z}_k)$  и  $b_k^\Pi(\bar{z}_k)$  имеют размерности  $(n_{\bar{z}} \times 1)$ ,  $(n_{\bar{z}} \times 1)$  и  $(n_{\bar{z}} \times n_v)$  соответственно,  $k = 1, 2, \dots$

В задачах фильтрации и идентификации параметров в условиях теоремы 2.1 обычно принимается, что объектовая неявная СтС допускает приведение к явной СтС, измерительная система вполне наблюдаема, причем уравнение наблюдения разрешено относительно вектора наблюдения. Введем новые обозначения для составных векторов состояния объекта  $X_t$ , вспомогательного вектора  $Z_t'$  и системы наблюдения  $Y_t$ . Тогда в качестве приведенных уравнений состояния объекта и наблюдений будем рассматривать для дифференциальных СтС следующие уравнения (теорема 2.4):

$$\dot{X}_t = \varphi^\Pi(X_t, Y_t, t) + \psi^\Pi(X_t, Y_t, t) V,$$

$$\Psi^\Pi(X_t, Z_t', t) = 0,$$

$$\dot{Y}_t = \varphi_1(X_t, Y_t, t) + \psi_1(X_t, Y_t, t) V, \quad V = \dot{W}. \quad (9)$$

Здесь

$$V = \dot{W}, \quad W(t) = W_0(t) + \int_{R_0^g} c(\rho) P^0(t, d\rho),$$

где  $c(\rho)$  — векторная функция размерности  $(n^W \times 1)$   $q$ -мерного аргумента  $\rho$ , а интеграл при любом  $t \geq t_0$  представляет собой стохастический интеграл по центрированной пуассоновской мере  $P^0$ , независимой от СтП  $W_0$  и имеющей независимые значения на непересекающихся множествах. Интенсивность  $\nu = \nu(t)$  СтП  $W(t)$  в этом случае определяется формулой:

$$\nu(t) = \nu_0(t) + \nu'(t), \quad \nu'(t) = \int_{R_0^g} c(\rho) c(\rho)^T \nu_P(t, \rho) d\rho, \quad (10)$$

где  $\nu_0(t)$  и  $\nu_P(t, \rho)$  — интенсивности СтП  $W_0$  и  $P^0$ .

Для разностного случая в условиях теорем 2.2 и 2.3 приведенные уравнения состояния и наблюдения будут следующими (теоремы 2.5 и 2.6):

$$X_{k+1} = \omega_k^\Pi(X_k, Y_k, V_k), \quad \Psi^\Pi(X_k, Z_k') = 0, \quad Y_k = \omega_{1k}(X_k, Y_k, V_k); \quad (11)$$

$$X_{k+1} = \varphi_k^\Pi(X_k, Y_k) + \psi_k^\Pi(X_k, Y_k) V_k, \quad \Psi_k^\Pi(X_k, Z_k') = 0, \quad Y_k = \varphi_{1k}(X_k, Y_k) + \psi_{1k}(X_k, Y_k) V_k, \quad (12)$$

где  $V_k$  — дискретные негауссовские в общем случае белые шумы с известной одномерной характеристической функцией  $h_k = h_k(\varepsilon; t)$ .

### 3 Нормальные условно-оптимальные фильтры

#### 3.1 Непрерывные фильтры

Введем составной нормальный вектор  $Z_t = [Y_t^T X_t^T \hat{X}_t^T]^T$  и его одномерную характеристическую функцию

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left\{ i\lambda^T m_t - \frac{1}{2} \lambda^T K_t \lambda \right\},$$

$$g_1(\lambda; t_0) = g_0(\lambda), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Здесь  $m_t$  и  $K_t$  — вектор математического ожидания и ковариационной матрицы вектора  $Z_t$ . Зададим НУОФ следующим уравнением Пугачёва [4, 5]:

$$\dot{\hat{X}}_t = \alpha_t \xi(Y_t, \hat{X}_t, t) + \beta_t \eta(Y_t, \hat{X}_t, t) \dot{Y}_t + \gamma_t, \quad (13)$$

где  $\xi(Y_t, \hat{X}_t, t)$  и  $\eta(Y_t, \hat{X}_t, t)$  — известные структурные функции;  $\alpha_t, \beta_t$  и  $\gamma_t$  определяются известными формулами [5]:

$$\alpha_t m_1 + \beta_t m_2 + \gamma_t = m_0, \quad m_0 = M_N \varphi^\Pi,$$

$$m_1 = M_N \xi, \quad m_2 = M_N \eta \varphi_1; \quad (14)$$

$$\alpha_t \kappa_{11} + M_N (\hat{X}_t - X_t) (\xi^T \alpha_t^T + \gamma_t^T) \frac{\partial \xi^T}{\partial \hat{X}_t} =$$

$$= \kappa'_{01} - \beta_t \kappa'_{21}, \quad \kappa_{11} = M_N (\xi - m_1) \xi^T,$$

$$\kappa'_{01} = \kappa_{01} + M_N (X_t - \hat{X}_t) \frac{\partial \xi^T}{\partial t} +$$

$$+ M_N \left\{ (X_t - \hat{X}_t) \left[ \varphi_1^T - \int_{R_0^q} c(\rho)^T \nu_P(t, \rho) d\rho \psi_1^T \right] + \right.$$

$$\left. + \psi^\Pi \nu_0 \psi_1^T - \beta_t \eta \psi_1 \nu_0 \psi_1^T \right\} \left( \frac{\partial}{\partial y} + \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \xi^T +$$

$$+ \frac{1}{2} M_N (X_t - \hat{X}_t) \left\{ \text{tr} \left[ \psi_1 \nu_0 \psi_1^T \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left( \frac{\partial}{\partial y} + 2\eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \frac{\partial^T}{\partial y} \right] + \right.$$

$$\left. + \text{tr} \left[ \beta_t \eta \psi_1 \nu_0 \psi_1^T \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \frac{\partial^T}{\partial \hat{X}_t} \right] \right\} \xi^T +$$

$$+ \int_{R_0^q} M_N \left[ X_t - \hat{X}_t + (\psi^\Pi - \beta_t \eta \psi_1) c(\rho) \right] \times$$

$$\times \left[ \xi(Y_t + \psi^\Pi c(\rho)), \hat{X}_t + (\beta_t \eta \psi_1 c(\rho), t)^T - \xi^T \right]^T \times$$

$$\times \nu_P(t, \rho) d\rho,$$

$$\kappa'_{21} = M_N (\eta \varphi_1 - m_2) \xi^T,$$

$$\kappa_{01} = M_N (\varphi^\Pi - m_0) \xi^T; \quad (15)$$

$$\beta_t = \kappa_{02} \kappa_{22}^{-1},$$

$$\kappa_{02} = M_N (X_t - \hat{X}_t) \varphi_1^T \eta^T + M_N \psi^\Pi \nu \psi_1^T \eta^T,$$

$$\kappa_{22} = M_N \eta \psi_1 \nu \psi_1^T \eta^T. \quad (16)$$

Далее решим МНА [4, 5] уравнения (9) и (13). В результате приходим к следующим уравнениям:

$$\dot{m}_t = B_1 = M_N a^\Pi, \quad m_{t_0} = m_0; \quad (17)$$

$$\dot{K}_t = B_2 = B_{21} + B_{21}^T + B_{22}, \quad K_{t_0} = K_0. \quad (18)$$

Здесь

$$B_{21} = M_N a^\Pi (Z_t^T - m_t^T) = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial m_t} \right) B_1^T \right]^T K_t; \quad (19)$$

$$B_{22} = M_N b^{\Pi T} \nu(t) b^\Pi, \quad (20)$$

где

$$a^\Pi = \left[ \begin{array}{c} \varphi_1(X_t, Y_t, t) \\ \varphi^\Pi(X_t, Y_t, t) \\ \alpha_t \xi(Y_t, \hat{X}_t, t) + \\ + \beta_t \eta(Y_t, \hat{X}_t, t) \varphi_1(X_t, Y_t, t) + \gamma_t \end{array} \right]; \quad (21)$$

$$b^\Pi = \left[ \begin{array}{c} \psi_1(X_t, Y_t, t) \\ \psi^\Pi(X_t, Y_t, t) \\ \beta_t \eta(Y_t, \hat{X}_t, t) \psi_1(X_t, Y_t, t) \end{array} \right];$$

$M_N$  — символ математического ожидания для нормального распределения с параметрами  $m_t$  и  $K_t$ ; интенсивность белого шума  $V$  определяется (10).

**Теорема 3.1.** Пусть в условиях теоремы 2.4 взаимосвязанная наблюдаемая неявная дифференциальная негауссовская СтС (4) приводима к явной (12), (13). Тогда непрерывный НУОФ определяется уравнениями (13), (17), (18) при условиях (14)–(16), (19)–(21).

#### 3.2 Дискретные фильтры

**Теорема 3.2.** Пусть в условиях теоремы 2.5 взаимосвязанная наблюдаемая дискретная регрессионная неявная негауссовская СтС (7) приводима к явной (11), а УОФ описывается уравнением

$$\hat{X}_{k+1} = \delta_k \zeta_k (\omega_{1k}, \hat{X}_k) + \gamma_k.$$

Тогда дискретный НУОФ описывается уравнениями вида [5]

$$m_{k+1} = B_{1k} = M_N \omega_k^\Pi, \quad m_1 = M_N Z_1;$$

$$K_{k+1} = B_{2k} = M_N \omega_k^\Pi \omega_k^{\Pi T} - M_N \omega_k^\Pi M_N \omega_k^{\Pi T},$$

$$K_1 = M_N (Z_1 - m_1) (Z_1 - m_1)^T;$$

$$\gamma_k = m_{k+1} - \delta_k \rho_k, \quad \delta_k = D_k^\Pi B_k^{-1};$$

$$m_{k+1} = M_N \omega_k^\Pi;$$

$$\rho_k = M_N \zeta_k \left( \omega_{1k}, \hat{X}_k \right);$$

$$B_k = M_N \left[ \zeta_k \left( \omega_{1k}, \hat{X}_k \right) - \rho_k \right] \zeta_k \left( \omega_{1k}, \hat{X}_k \right)^T;$$

$$D_k^\Pi = M_N \left[ \omega_k^\Pi - m_{k+1} \right] \zeta_k \left( \omega_{1k}, \hat{X}_k \right)^T.$$

**Теорема 3.3.** Пусть в условиях теоремы 2.6 взаимосвязанная наблюдаемая дискретная неявная негауссовская СтС (8) приводима к явной (12), а УОФ описывается уравнением

$$\hat{X}_{k+1} = \alpha_k \xi_k + \beta_k \eta_k Y_k + \gamma_k. \quad (22)$$

Тогда дискретный НУОФ удовлетворяет уравнениям (22) при следующих условиях:

$$\rho_k = \left[ \rho_1^{(k)T} \rho_2^{(k)T} \right]^T, \quad \rho_1^{(k)} = M_N \xi_k, \quad \rho_2^{(k)} = M_N \eta_k;$$

$$B_k = \begin{bmatrix} \kappa_{11}^{(k)} & \kappa_{12}^{(k)} \\ \kappa_{21}^{(k)} & \kappa_{22}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \det |B_k| \neq 0,$$

$$\kappa_{11} = M_N \left[ \xi_k - \rho_1^{(k)} \right] \xi_k^T,$$

$$\kappa_{12}^{(k)} = \kappa_{12}^{(k)T} = M_N \left[ \xi_k - \rho_1^{(k)} \right] \varphi_{1k}^T \eta_k^T,$$

$$\kappa_{22}^{(k)} = M_N \left[ \eta_k \varphi_{1k} - \rho_2^{(k)} \right] \varphi_{1k}^T \eta_k^T + M_N \eta_k \psi_{1k} \nu_k \psi_{1k}^T \eta_k^T;$$

$$D_k^\Pi = \left[ \kappa_{01}^{(k)} \kappa_{02}^{(k)} \right], \quad \kappa_{01}^{(k)} = M_N \left[ \varphi_k^\Pi - m_{k+1} \right] \xi_k^T,$$

$$\kappa_{02}^{(k)} = M_N \left[ \varphi_k^\Pi - m_{k+1} \right] \varphi_{1k}^T \eta_k^T + M_N \psi_k^\Pi \nu_k \psi_{1k}^T \eta_k^T,$$

$$m_{k+1} = \rho_0^{(k)}, \quad \rho_0^{(k)} = M_N \varphi_k^\Pi,$$

$$\alpha_k \kappa_{11}^{(k)} + \beta_k \kappa_{21}^{(k)} = \kappa_{01}^{(k)}, \quad \alpha_k \kappa_{12}^{(k)} + \beta_k \kappa_{22}^{(k)} = \kappa_{02}^{(k)};$$

$$\gamma_k = \rho_0^{(k)} - \alpha_k \rho_1^{(k)} - \beta_k \rho_2^{(k)},$$

где  $M_N V_k = 0$ ;  $M_N V_k V_k^T = \nu_k$ .

**Замечание 3.1.** В условиях теорем 3.1–3.3, когда функции приведенных систем  $\varphi^\Pi$ ,  $\varphi_k^\Pi$ ,  $\psi^\Pi$ ,  $\psi_k^\Pi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_{1k}$ ,  $\psi_1$  и  $\psi_{1k}$ , а также структурные функции  $\xi$ ,  $\xi_k$ ,  $\eta$ ,  $\eta_k$ ,  $\gamma$  и  $\gamma_k$  не зависят от  $Y$  и  $Y_k$  достаточно знать параметры нормального распределения только переменных  $X_t$ ,  $\hat{X}_k$ ,  $\hat{X}_t$  и  $\hat{X}_k$ . Соответствующие результаты приведены в [1–3].

**Замечание 3.2.** При синтезе НУОФ используют только априорные данные и не опираются на результаты наблюдений. Поэтому их надо выполнять для каждой конкретной задачи (или класса задач) лишь один раз — при синтезе фильтра (алгоритма фильтрации). Практическое применение НУОФ при каждом конкретном эксперименте требует только решения уравнения УОФ при известных функциях времени  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$  и  $\gamma_t$  ( $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  и  $\gamma_k$ ).

**Замечание 3.3.** В общем случае НУОФ хуже оптимального, но зато легко реализуем. Если оптимальный фильтр в каком-либо классе допустимых фильтров удовлетворяет уравнениям теоремы 3.1 (13) при каких-нибудь функциях времени  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$  и  $\gamma_t$  ( $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  и  $\gamma_k$ ), то по теории УОФ будем иметь именно этот фильтр.

**Замечание 3.4.** Теория НУОФ также дает возможность оценивать не все компоненты состояния приведенной системы, а только некоторые из них. Для этого достаточно взять структурные функции  $\xi$  и  $\eta$  зависящими от соответствующих компонент вектора  $\hat{Y}_t$  ( $\hat{Y}_k$ ). Так, взяв  $\xi$  и  $\eta$  зависящими лишь от  $Y_t$  ( $Y_k$ ),  $t_k$  и оценок неизвестных параметров приведенной системы, можно оценивать только параметры приведенной системы, не оценивая ее состояние. В таких случаях будут получаться НУОФ, порядок которых меньше размерности вектора состояния приведенной системы.

**Замечание 3.5.** Линейные НУОФ, когда структурные функции в (13)  $\xi = (y, \hat{x}, t) = [y^T \hat{x}^T]^T$ ,  $\eta(y, \hat{x}, t) = I_{n_y}$ , могут применяться для обработки информации в гладких квазилинейных гауссовских и негауссовских взаимозависимых объектовых и системах наблюдения. Для негладких наблюдаемых объектов в прикладных задачах достаточно провести регрессионную линеаризацию нелинейных функций. В этом случае коэффициенты линеаризации будут зависеть от  $m_t$  и  $K_t$ . Последние находятся путем решения соответствующих уравнений [5].

**Замечание 3.6.** Нелинейные НУОФ также могут использоваться для обработки информации в разрывных системах переменной явной стохастической структуры [6–8], а также неявной стохастической структуры.

**Замечание 3.7.** Для приведенных СтС большой размерности НУОФ будут предпочтительней нормальных субоптимальных фильтров [9].

## 4 Заключение

Для задач обработки информации в реальном времени в предположении, что наблюдения влияют на объект наблюдения, для неявных объектовых гауссовских и негауссовских СтС, приводимых к явным, разработаны непрерывные и дискретные методы синтеза НУОФ. Такие фильтры основаны на среднеквадратичной оптимизации. Большую практическую ценность представляют НУОФ в случае, когда объектовые приведенные функции не зависят от результатов наблюдений [1–3]. Особый интерес представляет развитие модифицированных версий

НУОФ, а также негауссовских УОФ на основе параметризации одномерного распределения методами вероятностных моментов квазимоментов.

Полученные методы допускают обобщение на случай приводимых неявных СтС, зависящих от случайных параметров, определяемых стохастическими каноническими представлениями [10, 11], для приводимых явных и неявных функционально-дифференциальных (функционально-разностных) СтС [12–17], а также управляемых систем [18, 19].

## Литература

1. *Синицын И. Н.* Методы условно-оптимальной фильтрации и экстраполяции в наблюдаемых неявных стохастических системах // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 2–9. doi: 10.14357/19922264240401. EDN: TFRJYK.
2. *Синицын И. Н.* Условно-оптимальная фильтрация и экстраполяция в неявных дифференциальных гауссовских стохастических системах при автокоррелированной помехе в наблюдениях // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 19–25. doi: 10.14357/19922264240403. EDN: CVUETK.
3. *Синицын И. Н.* Дискретное условно-оптимальное оценивание в неявных наблюдаемых стохастических системах // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 4. С. 16–30. doi: 10.14357/08696527240402. EDN: TLHYUA.
4. *Пугачёв В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — 2-е изд. — М.: Наука, 1990. 632 с.
5. *Синицын И. Н.* Фильтры Калмана и Пугачёва. — 2-е изд. — М.: Логос, 2007. 776 с.
6. *Казаков И. Е.* Статистическая динамика систем переменной структуры. — М.: Наука, 1977. 416 с.
7. *Казаков И. Е., Артемьев В. М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры. — М.: Наука, 1980. 384 с.
8. *Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А.* Анализ систем случайной структуры. — М.: Физматлит, 1993. 272 с.
9. *Синицын И. Н.* Методы нормальной субоптимальной фильтрации в наблюдаемых неявных гауссовских стохастических системах // Системы и средства информатики, 2025 (в печати). Т. 35. № 1.
10. *Пугачёв В. С., Синицын И. Н.* Теория стохастических систем. — 2-е изд. — М.: Логос, 2004. 1000 с.
11. *Синицын И. Н.* Канонические представления случайных функций. Теория и применения. — 2-е изд. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2023. 816 с.
12. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. — М.: Наука, 1981. 448 с.
13. *Финогенко И. А.* О неявных функционально-дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве // Динамика нелинейных систем. — Новосибирск: Наука, 1983. С. 151–164.
14. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. 277 с.
15. *Борисов А. В.* Оптимальная фильтрация в системах с вырожденными шумами в наблюдениях // Автоматика и телемеханика, 1998. № 11. С. 32–45.
16. *Босов А. В.* Исследование робастности численных аппроксимаций фильтра Вонэма // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 41–49. doi: 10.14357/19922264230206. EDN: BGILKR.
17. *Босов А. В.* Оптимальная фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 8–17. doi: 10.14357/19922264230302. EDN: CFVYJM.
18. *Босов А. В.* Управление линейным выходом марковской цепи по квадратичному критерию. Случай полной информации // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 19–26. doi: 10.14357/19922264220203. EDN: FEQKUN.
19. *Коновалов М. Г., Разумчик Р. В.* Синтез управления двумерным случайным блужданием с эталонным стационарным распределением // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 109–117. doi: 10.14357/19922264220214. EDN: WVMОВH.

Поступила в редакцию 10.10.2024

Принята к публикации 15.01.2025

# NORMAL CONDITIONALLY-OPTIMAL FILTERING METHODS FOR IMPLICIT STOCHASTIC SYSTEMS

I. N. Sinitsyn

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The paper is dedicated to nonlinear synthesis of normal conditionally-optimal (in Pugachev sense) filters (NCOF) for information processing in interconnected observable implicit object stochastic systems (StS) reducible to explicit. Differential and difference equations of observable non-Gaussian StS are presented and methods of its reduction are considered. Special attention is paid to nonsmooth implicit StS. Differential NCOF equations are derived by methods of normal approximation (NAM) of the set of differential equations for object, observation system, and Pugachev conditionally-optimal filters. Difference NCOF equations based on NAM are given for nonlinear regression and autoregression StS models. Some generalizations for complex implicit StS and control StS are formulated.

**Keywords:** conditionally-optimal (in Pugachev sense) filter; implicit stochastic system; normal approximation method (NAM); normal suboptimal filter (NSOF); stochastic process (StP)

**DOI:** 10.14357/19922264250106

**EDN:** TEPFUE

## References

1. Sinitsyn, I. N. 2024. Metody uslovno-optimal'noy fil'tratsii i ekstrapolyatsii v nablyudaemykh neyavnykh stokhasticheskikh sistemakh [Conditionally optimal filtering and extrapolation methods for observable implicit stochastic systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):2–9. doi: 10.14357/19922264240401. EDN: TFPJYK.
2. Sinitsyn, I. N. 2024. Uslovno-optimal'naya fil'tratsiya i ekstrapolyatsiya v neyavnykh differentsial'nykh gaussovskikh stokhasticheskikh sistemakh pri avtokorrelirovannoy pomekhe v nablyudeniyakh [Conditionally optimal filtering and extrapolation for differential Gaussian implicit stochastic systems at autocorrelated noise in observations]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):19–25. doi: 10.14357/19922264240403. EDN: CVUETK.
3. Sinitsyn, I. N. 2024. Diskretnoe uslovno-optimal'noe otsenivanie v neyavnykh nablyudaemykh stokhasticheskikh sistemakh [Discrete conditionally-optimal estimation in observable implicit stochastic systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(4):16–30. doi: 10.14357/08696527240402. EDN: TLHYA.
4. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 1987. *Stochastic differential systems. Analysis and filtering*. Chichester, NY: J. Wiley & Sons. 549 p.
5. Sinitsyn, I. N. 2007. *Fil'try Kalmana i Pugacheva* [Kalman and Pugachev filters]. 2nd ed. Moscow: Logos. 776 p.
6. Kazakov, I. E. 1977. *Statisticheskaya dinamika sistem pere-mennoy struktury* [Statistical dynamics of systems of variable structure]. Moscow: Nauka. 416 p.
7. Kazakov, I. E., and V. M. Artem'ev. 1980. *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem sluchaynoy struktury* [Optimization of dynamic systems of random structure]. Moscow: Nauka. 384 p.
8. Kazakov, I. E., V. M. Artem'ev, and V. A. Bukhalev. 1993. *Analiz sistem sluchaynoy struktury* [Analysis of random structure systems]. Moscow: Fizmatlit. 272 p.
9. Sinitsyn, I. N. 2025 (in press). Metody normal'noy suboptimal'noy fil'tratsii v nablyudaemykh neyavnykh gaussovskikh stokhasticheskikh sistemakh [Normal suboptimal filtering methods in implicit observable Gaussian stochastic systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(1).
10. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 2001. *Stochastic systems. Theory and applications*. Singapore: World Scientific. 908 p.
11. Sinitsyn, I. N. 2023. *Kanonicheskie predstavleniya sluchaynykh funktsiy. Teoriya i primeneniya* [Canonical expansions of random functions. Theory and applications]. 2nd ed. Moscow: TORUS PRESS. 816 p.
12. Kolmanovskiy, V. B., and V. R. Nosov. 1981. *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyykh sistem s posledstviem* [Stability and periodic modes of regulated systems with consequences]. Moscow: Nauka. 448 p.
13. Finogenko, I. A. 1983. O neyavnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniyakh v banakhovom prostranstve [On implicit functional differential equations in a Banach space]. *Dinamika nelineynykh sistem* [Dynamics of nonlinear systems]. Novosibirsk: Nauka. 151–164.
14. Azbelev, N. V., V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatulina. 1991. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of functional differential equations]. Moscow: Nauka. 277 p.
15. Borisov, A. 1998. Optimal filtering in systems with degenerate noises in observations. *Automat. Rem. Contr.* 59(11,1):1526–1537. EDN: LFDCVH.
16. Bosov, A. V. 2023. Issledovanie robnosti chislennykh approksimatsiy fil'tra Vonema [Robustness investigation of the numerical approximation of the Wonham filter]. *In-*

- formatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):41–49. doi: 10.14357/19922264230206. EDN: BGILKR.
17. Bosov, A. V. 2023. Optimal'naya fil'tratsiya sostoyaniya nelineynoy dinamicheskoy sistemy po nablyudeniya so sluchaynymi zapazdyvaniyami [Nonlinear dynamic system state optimal filtering by observations with random delays]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):8–17. doi: 10.14357/19922264230302. EDN: CFVYJM.
  18. Bosov, A. V. 2022. Upravlenie lineynym vykhodom markovskoy tsepi po kvadratichnomu kriteriyu. Sluchay polnoy informatsii [Linear output control of Markov chain by square criterion. Complete information case]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):19–26. doi: 10.14357/19922264220203. EDN: FEQKUN.
  19. Konovalov, M. G., and R. V. Razumchik. 2022. Sintez upravleniya dvumernym sluchaynym bluzhdaniem s etalonnym statsionarnym raspredeleniem [Controlling a bounded two-dimensional Markov chain with a given invariant measure]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):109–117. doi: 10.14357/19922264220214. EDN: WVMOBH.

*Received October 10, 2024*

*Accepted January 15, 2025*

## Contributor

**Sinitsyn Igor N.** (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

# ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОРРЕЛИРОВАННЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ\*

А. К. Берговин<sup>1</sup>, А. М. Рязанов<sup>2</sup>, В. Г. Ушаков<sup>3</sup>

**Аннотация:** Изучена однолинейная система массового обслуживания с бесконечным числом мест для ожидания, произвольным распределением времени обслуживания и пуассоновским входящим потоком со случайной интенсивностью, которая подчиняется авторегрессионной зависимости первого порядка. Найдено распределение количества пакетов, а также виртуальное время пребывания пакета в системе в нестационарном режиме. Найдены стационарные распределения и их вероятностные характеристики: среднее и дисперсия. Графически проиллюстрировано среднее время задержки передачи пакета данных в стационарном режиме в разных предположениях на распределение времени обслуживания пакетов и на характеристики входящего потока, проведено сравнение с классической системой обслуживания  $M|G|1$ .

**Ключевые слова:** случайная интенсивность; длина очереди; время ожидания; пассивный анализ трафика; качество обслуживания

**DOI:** 10.14357/19922264250107

**EDN:** WVYUMU

## 1 Введение

Статистический анализ трафика в различных вычислительных и телекоммуникационных сетях показывает ярко выраженную статистическую зависимость соседних интервалов времени между поступлениями пакетов сообщений. В последние годы появилось много работ, в которых при построении математических моделей учитывается это явление.

В контексте изучения систем массового обслуживания значительный интерес представляет применение методов пассивного сбора трафика для оценки качества обслуживания в сетях. Пассивный анализ трафика, не требующий вмешательства в передачу данных, позволяет адекватно оценивать параметры трафика, не оказывая на него влияние. Этот подход особенно ценен при анализе реальных сетей, где важно сохранение естественного поведения трафика без искусственных воздействий.

Ключевым аспектом в этом направлении является возможность использования данных о временных интервалах между пакетами для вычисления характеристик качества обслуживания, таких как задержка (latency), джиттер (jitter) и потери пакетов (loss rate). Эти характеристики имеют критическое значение для определения уровня качества в сетях передачи данных. Адекватная оценка этих пара-

метров позволяет не только анализировать текущее состояние сети, но и прогнозировать ее поведение в будущем, опираясь на статистическую обработку наблюдаемых данных.

При моделировании процесса передачи информации важно концентрироваться на тех характеристиках трафика, которые могут быть эффективно оценены из реальных данных и поддаются физической интерпретации (см., например, [1–6]). С этой точки зрения перспективными представляются модели, в которых те или иные параметры входящих потоков предполагаются случайными величинами, связанными регрессионной зависимостью небольшого порядка. В работах [7–13] содержатся различные постановки задач в этом направлении и приведена обширная библиография. Потоки, рассматриваемые в настоящей работе, также относятся к потокам с регрессионной зависимостью параметров, в качестве которых выступают интенсивности.

## 2 Описание модели

В настоящей работе изучается одноканальная система с неограниченным числом мест для ожидания и произвольным распределением времени передачи пакета. Входящий поток имеет следующую

\* Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ, проект № 23-Ш03-03.

<sup>1</sup> Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, alexey.bergovin@gmail.com

<sup>2</sup> Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, alryaz@asvk.cs.msu.ru

<sup>3</sup> Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, vpushakov@mail.ru

структуру. Интервал времени до поступления первого пакета  $z_1$  и интервалы между поступлениями  $(n - 1)$ -го и  $n$ -го пакетов  $z_n$  имеют показательное распределение со случайным параметром  $a^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Значение  $a^{(n)}$  выбирается непосредственно перед началом промежутка  $z_n$ , причем  $\mathbf{P}(a^{(1)} = a_1) = c$ ,  $\mathbf{P}(a^{(1)} = a_2) = 1 - c$ ,  $a_1 \neq a_2$ , и  $a^{(n)} = \alpha_n a^{(n-1)} + (1 - \alpha_n) b^{(n)}$ , где  $b^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , — последовательность независимых и не зависящих от последовательности  $a^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , одинаково распределенных случайных величин, распределение которых такое же, как у  $a^{(1)}$ , а  $\alpha_n$  не зависят от  $a^{(n)}$  и  $b^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ :

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & p; \\ 0, & 1 - p. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{P}(z_n < t) = c(1 - e^{-a_1 t}) + (1 - c)(1 - e^{-a_2 t});$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z_n < t_1, z_{n+1} < t_2) = \\ = (1 - p)(c(1 - e^{-a_1 t_1}) + (1 - c)(1 - e^{-a_2 t_1})) \times \\ \times (c(1 - e^{-a_1 t_2}) + (1 - c)(1 - e^{-a_2 t_2})) + \\ + p(c(1 - e^{-a_1 t_1})(1 - e^{-a_1 t_2}) + \\ + (1 - c)(1 - e^{-a_2 t_1})(1 - e^{-a_2 t_2})), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В частности, при  $p = 0$  входящий поток будет гиперэкспоненциальным. При  $p = 1$  получается система, в которой в начальный момент времени случайно выбирается значение интенсивности из множества  $a_1, a_2$  с вероятностями  $c, 1 - c$ , и в дальнейшем система функционирует как система с пуассоновским входящим потоком с выбранной интенсивностью. В работе этот случай рассматриваться не будет.

Известно, что для любых  $\mu > 0$  и  $\sigma > \mu$  существует гиперэкспоненциальное распределение второго порядка, у которого математическое ожидание и дисперсия равны  $\mu$  и  $\sigma^2$ . Для этого параметры  $a_1, a_2$  и  $c$  необходимо задавать в виде

$$\begin{aligned} a_1^{-1} &= \mu + \sqrt{\frac{(1 - c)(\sigma^2 - \mu^2)}{2c}}, \\ a_2^{-1} &= \mu - \sqrt{\frac{c(\sigma^2 - \mu^2)}{2(1 - c)}}, \end{aligned}$$

а  $c$  взять любым из интервала  $0 < c < 2\mu^2/(\mu^2 + \sigma^2)$ . При таком выборе параметров коэффициент корреляции двух соседних интервалов для рассматриваемых в работе потоков равен  $(p/2)(1 - (\mu/\sigma)^2)$ . Таким образом, появляется возможность не только подогнать первые два момента интервалов между поступлениями пакетов реального потока, но и учесть их зависимость.

### 3 Обозначения и определения

Пусть  $B(x)$  и  $b(x)$  — соответственно функция распределения и плотность распределения времен передачи пакетов. Обозначим

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} b(x) dx; \\ \beta_i &= \int_0^\infty x^i b(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots; \\ \eta(x) &= \frac{b(x)}{1 - B(x)}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Введем следующие случайные процессы:

- $L(t)$  — число пакетов в системе в момент времени  $t$ ;
- $j(t)$  — процесс с состояниями 1 и 2 такой, что  $j(t) = j$ , если в момент времени  $t$  интенсивность входящего потока есть  $a_j$ ;
- $x(t)$  — время, прошедшее с начала передачи пакета, находящегося в канале, до момента  $t$ , если  $L(t) > 0$ , и  $x(t) = 0$ , если  $L(t) = 0$ ;
- $V(t)$  — виртуальное время задержки (виртуальное время пребывания в системе, см. [14]) пакета в момент времени  $t$ .

Трехмерный случайный процесс  $(L(t), x(t), j(t))$  — однородный марковский процесс. Положим

$$P_j(n, x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}(L(t) = n, j(t) = j, x(t) < x), \quad n > 0, x \geq 0;$$

$$P(n, t) = \mathbf{P}(L(t) = n), \quad n \geq 0;$$

$$p_j(z, x, s) = \sum_{n=1}^\infty z^n \int_0^\infty e^{-st} P_j(n, x, t) dt;$$

$$p(z, s) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{n=0}^\infty z^n P(n, t) dt;$$

$$P_{0j}(t) = \mathbf{P}(L(t) = 0, j(t) = j),$$

$$p_{0j}(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_{0j}(t) dt, \quad j = 1, 2;$$

$$V(w, t) = \mathbf{E} e^{-wV(t)}; \quad v(w, s) = \int_0^\infty e^{-st} V(w, t) dt;$$

$$\mu_1(z) = \frac{1}{2} \left( -(a_1 + a_2)(1 - pz) - (ca_1 + (1 - c)a_2)(1 - p)z + \sqrt{D} \right); \quad (1)$$

$$\mu_2(z) = \frac{1}{2} \left( -((a_1 + a_2)(1 - pz) - (ca_1 + (1 - c)a_2)(1 - p)z) - \sqrt{D} \right), \quad (2)$$

где

$$D = ((a_1 + a_2)(1 - pz) - (ca_1 + (1 - c)a_2)(1 - p)z)^2 - 4a_1a_2(1 - pz)(1 - z).$$

Легко видеть, что при  $0 \leq z < 1$

$$\mu_1(z) < 0; \quad \mu_2(z) < 0; \\ \mu_1(1) = 0; \quad \mu_2(1) = -(1 - p)(a_1(1 - c) + a_2c) < 0.$$

## 4 Нестационарный режим

**Лемма 1.** При каждом  $k = 1, 2$  уравнение

$$z = \beta(s - \mu_k(z))$$

имеет при  $s > 0$  единственное решение  $z = z_k(s)$ , причем  $|z_k(s)| < 1$ .

Положим  $\mu_k^*(s) = \mu_k(z_k(s))$ . При  $\rho_1 = a\beta_1 < 1$ ,  $a = (ca_1^{-1} + (1 - c)a_2^{-1})^{-1}$ , имеем  $\lim_{s \rightarrow 0} z_1(s) = 0$ . В дальнейшем условие  $\rho_1 < 1$  будем считать выполненным ( $\rho_1$  — нагрузка системы). Основное внимание будет уделено изучению стационарного (при  $t \rightarrow +\infty$ ) распределения процесса  $(L(t), x(t), j(t))$ , которое не зависит от его начального состояния. Поэтому при изучении нестационарного случая будем предполагать, что  $L(0) = 0$  и  $j(0) = 1$  или  $2$  с вероятностями  $c$  и  $1 - c$  соответственно. Это несколько упрощает вывод основных соотношений.

**Лемма 2.** Функция  $p_j(z, x, s)$  при каждом  $j = 1, 2$  определяется по формуле

$$p_j(z, x, s) = (1 - B(x))c_j \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma^{(k)}(z, s)}{\mu_k(z) + a_j(1 - pz)} e^{-(s - \mu_k(z))x}, \\ c_1 = c, \quad c_2 = 1 - c, \quad (3)$$

а функции  $\gamma^{(k)}(z, s)$ ,  $k = 1, 2$ , удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=1}^2 \frac{1 - z^{-1} \beta(s - \mu_k(z))}{\mu_k(z) + a_j(1 - pz)} \gamma^{(k)}(z, s) = f_j(z, s), \quad (4)$$

где

$$f_j(z, s) = 1 - (s + a_j - a_j pz)c_j^{-1}p_{0j}(s) + (1 - p)z \sum_{k=1}^2 a_k p_{0k}(s), \quad j = 1, 2.$$

**Доказательство.** Рассматривая при  $x > 0$  возможные изменения состояний процесса  $(L(t), x(t), j(t))$  в интервале времени  $(t, t + \Delta)$  и устремляя  $\Delta \rightarrow 0$ , получаем

$$\frac{\partial P_j(n, x, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_j(n, x, t)}{\partial x} = - (a_j + \eta(x)) P_j(n, x, t) + (1 - \delta_{n,1}) (pa_j P_j(n - 1, x, t) + (1 - p)c_j (a_1 P_1(n - 1, x, t) + a_2 P_2(n - 1, x, t))). \quad (5)$$

Начальные условия при  $t = 0$  имеют вид:

$$P_j(n, x, 0) = 0, \quad n > 0, \quad P_{0j}(0) = c_j, \quad j = 1, 2.$$

Переходя в (5) к производящим функциям и преобразованиям Лапласа, получаем

$$\frac{\partial p_j(z, x, s)}{\partial x} = - (s + a_j - pa_j z + \eta(x)) p_j(z, x, s) + (1 - p)c_j z \sum_{k=1}^2 a_k p_k(z, x, s). \quad (6)$$

Аналогично находим краевые условия при  $x = 0$  и уравнения для  $P_{0j}(t)$ :

$$P_j(n, 0, t) = \int_0^\infty P_j(n + 1, x, t) \eta(x) dx + \delta_{n,1} \left( pa_j P_{0j}(t) + (1 - p)c_j \sum_{k=1}^2 a_k P_{0k}(t) \right); \\ \frac{\partial P_{0j}(t)}{\partial t} = -a_j P_{0j}(t) + \int_0^\infty P_j(1, x, t) \eta(x) dx.$$

Отсюда

$$p_j(z, 0, s) = z^{-1} \int_0^\infty p_j(z, x, s) \eta(x) dx + c_j - (s + a_j)p_{0j}(s) + z \left( pa_j p_{0j}(s) + (1 - p)c_j \sum_{k=1}^2 a_k p_{0k}(s) \right), \\ j = 1, 2. \quad (7)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (6) имеет вид (3), где функции  $\gamma^{(k)}(z, s)$  определяются из краевых условий. Подставляя (3) в (7), получаем (4).

**Теорема 1.** Функция  $p(z, s)$  определяется по формуле:

$$p(z, s) = \sum_{k=1}^2 \left( p_{0k}(s) + \frac{z-1}{(1-p)z} \frac{(1-\beta(s-\mu_k(z)))\gamma^{(k)}(z, s)}{\mu_k(z)(s-\mu_k(z))} \right), \quad (8)$$

где

$$(1-z^{-1}\beta(s-\mu_k(z)))\gamma^{(k)}(z, s) = \frac{(-1)^k}{\mu_2(z)-\mu_1(z)} \times (\mu_k(z) + a_1(1-pz))(\mu_k(z) + a_2(1-pz)) \times \left( 1 - (1-p)z(s-\mu_k(z)) \left( \frac{a_1 p_{01}(s)}{\mu_k(z) + a_1(1-pz)} + \frac{a_2 p_{02}(s)}{\mu_k(z) + a_2(1-pz)} \right) \right), \quad k=1, 2; \quad (9)$$

$$p_{01}(s) = a_1^{-1} \times \frac{(\mu_1^*(s) + a_1(1-pz_1(s)))(\mu_2^*(s) + a_1(1-pz_2(s)))}{(a_1 - a_2)((1-pz_2(s))\mu_1^*(s) - (1-pz_1(s))\mu_2^*(s))} \times \left( \frac{\mu_1^*(s) + a_2(1-pz_1(s))}{(1-p)z_1(s)(s-\mu_1^*(s))} - \frac{\mu_2^*(s) + a_2(1-pz_2(s))}{(1-p)z_2(s)(s-\mu_2^*(s))} \right); \quad (10)$$

$$p_{02}(s) = a_2^{-1} \times \frac{(\mu_1^*(s) + a_2(1-pz_1(s)))(\mu_2^*(s) + a_2(1-pz_2(s)))}{(a_1 - a_2)((1-pz_1(s))\mu_2^*(s) - (1-pz_2(s))\mu_1^*(s))} \times \left( \frac{\mu_1^*(s) + a_1(1-pz_1(s))}{(1-p)z_1(s)(s-\mu_1^*(s))} - \frac{\mu_2^*(s) + a_1(1-pz_2(s))}{(1-p)z_2(s)(s-\mu_2^*(s))} \right). \quad (11)$$

Доказательство. Так как

$$p(z, s) = \sum_{k=1}^2 \left( p_{0k}(s) + \int_0^\infty p_k(z, x, s) dx \right),$$

то, учитывая (1) и (2), из (3) получаем (8). Решая систему уравнений (4) относительно  $\gamma^{(k)}(z, s)$ , имеем

$$(1-z^{-1}\beta(s-\mu_k(z)))\gamma^{(k)}(z, s) = (-1)^k(\mu_2(z)-\mu_1(z))^{-1}(1-p)z(\mu_k(z)+a_1(1-pz)) \times (\mu_k(z) + a_2(1-pz)) \left( \frac{c_1 a_1 f_1(z, s)}{\mu_k(z) + a_1(1-pz)} + \frac{c_2 a_2 f_2(z, s)}{\mu_k(z) + a_2(1-pz)} \right), \quad k=1, 2.$$

Подставляя сюда выражения для  $f_j(z, s)$ ,  $j=1, 2$ , через  $p_{0k}(s)$ ,  $k=1, 2$ , получаем (9). В силу леммы 1 левая часть (9) обращается в 0 при  $z=z^{(k)}(s)$ . Значит,

$$\frac{a_1 p_{01}(s)}{\mu_k^*(s) + a_1(1-pz_k(s))} + \frac{a_2 p_{02}(s)}{\mu_k^*(s) + a_2(1-pz_k(s))} = \frac{1}{(1-p)z_k(s)(s-\mu_k^*(s))}, \quad k=1, 2.$$

Решение последней системы уравнений имеет вид (10), (11).  $\square$

**Теорема 2.** Функция  $v(w, s)$  определяется по формуле

$$v(w, s) = \sum_{k=1}^2 p_{0k}(s)\beta(w) + \frac{\beta(w)-1}{(1-p)\beta(w)} \times \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\beta(w)-\beta(s-\mu_k(\beta(w)))}{s-w-\mu_k(\beta(w))} \times \frac{1}{\mu_k(\beta(w))} \gamma^{(k)}(\beta(w), s) \right). \quad (12)$$

Доказательство. Если в момент времени  $t$  система свободна от пакетов, то виртуальное время задержки пакета в момент времени  $t$  равно времени передачи пакета. Если в момент времени  $t$  в системе находится  $n$  пакетов, причем один из них уже передается время  $x$ , то время задержки складывается из времени завершения передачи пакета, находящегося в канале, и времен передачи остальных пакетов. Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(V(t) < x) = (P_{01}(t) + P_{02}(t))B(x) + \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty P_k(n, y, t) (B^{*n} * B_y(x)) dy, \quad (13)$$

где  $F * G(x) = \int_0^\infty F(x-u) dG(u)$  — свертка функций распределения  $F(x)$  и  $G(x)$  неотрицательных случайных величин;  $B^{*n}(x)$  —  $n$ -кратная свертка функции распределения  $B(x)$ ;  $B_y(u)$  — условная функция распределения времени до завершения передачи пакета при условии, что оно уже передавалось время  $y$ :

$$B_y(u) = \frac{B(u+y) - B(y)}{1 - B(y)}.$$

Из (13) получаем

$$v(w, s) = \sum_{k=1}^2 p_{0k}(s)\beta(w) + \sum_{k=1}^2 \int_0^\infty p_k(\beta(w), y, s)\beta_y(w) dy, \quad (14)$$

где

$$\beta_y(w) = \frac{\int_0^\infty e^{-wu} b(u+y) du}{1 - B(y)}.$$

Подставляя (3) в (14), получаем (12).

## 5 Стационарный режим

При загрузке системы  $\rho_1 < 1$  существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n, t) = p(z); \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} V(w, t) = v(w),$$

причем в силу тауберовых теорем

$$p(z) = \lim_{s \rightarrow 0} sp(z, s); \quad v(w) = \lim_{s \rightarrow 0} sv(w, s).$$

Это дает возможность для нахождения предельного при  $t \rightarrow +\infty$  (стационарного) распределения процессов  $L(t)$  и  $V(t)$  использовать результаты разд. 4. Обозначим через  $L$  и  $V$  число пакетов в системе и время задержки пакета соответственно в стационарном режиме.

**Теорема 3.** Функция  $p(z)$  определяется по формуле

$$p(z) = 1 - \rho_1 + \frac{z-1}{(1-p)z} \sum_{k=1}^2 \frac{(1 - \beta(-\mu_k(z))) \gamma^{(k)}(z)}{\mu_k(z)(-\mu_k(z))},$$

где

$$(1 - z^{-1} \beta(-\mu_k(z))) \gamma^{(k)}(z) = \frac{(-1)^{k+1}}{\mu_2(z) - \mu_1(z)} \times \\ \times (\mu_k(z) + a_1(1-pz)) (\mu_k(z) + a_2(1-pz)) \times \\ \times \left( (1-p)z(-\mu_k(z)) \left( \frac{a_1 p_{01}}{\mu_k(z) + a_1(1-pz)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a_2 p_{02}}{\mu_k(z) + a_2(1-pz)} \right) \right), \quad k = 1, 2,$$

$$p_{01} = \frac{\mu_2^*(0) + a_1(1-pz_2(0))}{(a_2 - a_1)\mu_2^*(0)} a_2(1 - \rho_1),$$

$$p_{02} = \frac{\mu_2^*(0) + a_2(1-pz_2(0))}{(a_1 - a_2)\mu_2^*(0)} a_1(1 - \rho_1).$$

**Теорема 4.** Функция  $v(w)$  определяется по формуле

$$v(w) = (1 - \rho_1) \beta(w) + \frac{\beta(w) - 1}{(1-p)\beta(w)} \times \\ \times \sum_{k=1}^2 \frac{\beta(w) - \beta(-\mu_k(\beta(w)))}{-w - \mu_k(\beta(w))} \frac{1}{\mu_k(\beta(w))} \gamma^{(k)}(\beta(w)).$$

Отметим, что стационарное среднее время задержки пакета в системе  $EV$  можно получить и из

формулы Литтла  $EV = a^{-1}EL$ , причем стационарное среднее число пакетов в системе  $EL$  равно:

$$EL = a\beta_1 + \frac{a^2\beta_2}{2(1-a\beta_1)} + \mu_1''(1) \frac{a\beta_1^2}{2(1-a\beta_1)} + \\ + \frac{a(a_1p_{01} + a_2p_{02})}{(1-p)a_1a_2} - \frac{a^2(1-a\beta_1)}{(1-p)a_1a_2} + \\ + \frac{\beta_1}{1-a\beta_1} \left( \frac{a^2(a_1p_{01} + a_2p_{02})}{(1-p)a_1a_2} - \frac{ap(1-a\beta_1)}{1-p} - \right. \\ \left. - \frac{a^2(1-a\beta_1)}{(1-p)a_1a_2} (a - \mu_2'(1)) \right),$$

где

$$\mu_2'(1) = -a + (a_1 + a_2)p + (ca_1 + (1-c)a_2)(1-p);$$

$$\mu_1''(1) = \frac{2a(a^2(ca_1^{-2} + (1-c)a_2^{-2}) - 1)}{1-p}.$$

При загрузке системы, стремящейся к единице, длина очереди и время задержки неограниченно возрастают. При этом численные процедуры, описанные выше, работают менее эффективно. Пусть

$$d = \frac{a\beta_2}{2} + \frac{a^2(ca_1^{-2} + (1-c)a_2^{-2}) - 1}{a(1-p)}.$$

Справедлива следующая предельная теорема.

**Теорема 5.**

$$\lim_{\rho_1 \uparrow 1} \mathbf{P}((1 - \rho_1)L < x) = 1 - e^{(ad)^{-1}x};$$

$$\lim_{\rho_1 \uparrow 1} \mathbf{P}((1 - \rho_1)V < x) = 1 - e^{d^{-1}x}.$$

Таким образом, при загрузках, близких к 1, вместо реальных распределений  $L$  и  $V$  можно использовать предельные. Поэтому, в частности,

$$EL \approx \frac{ad}{1 - \rho_1}; \quad DL \approx \frac{(ad)^2}{(1 - \rho_1)^2};$$

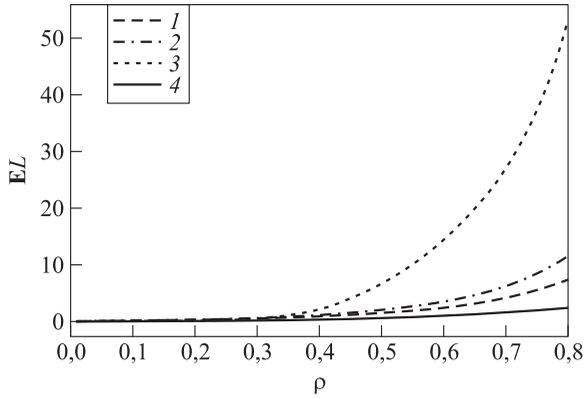
$$EV \approx \frac{d}{1 - \rho_1}; \quad DV \approx \frac{d^2}{(1 - \rho_1)^2}.$$

## 6 Численный анализ

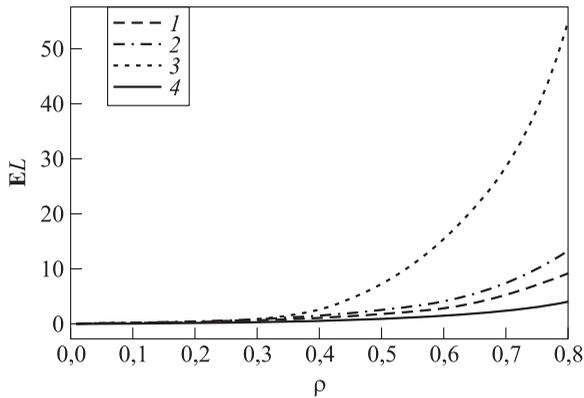
Посмотрим на поведение стационарного среднего времени задержки пакета в системе  $EV$  при различных типах распределения времени передачи  $B(x)$ . Пусть  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 2$  и  $c = 0, 2$ , а в качестве  $B(x)$  рассмотрим:

(1) постоянное время передачи:

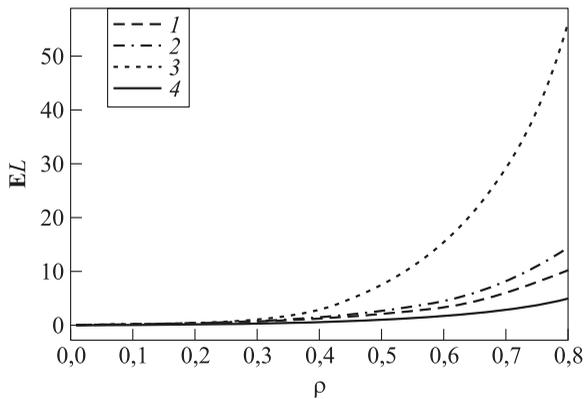
$$\beta(s) = e^{-s\beta_1}, \quad \beta_2 = \beta_1^2;$$



(a)



(б)



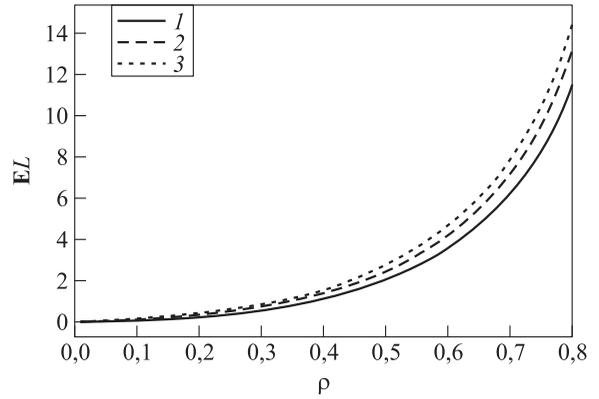
(e)

**Рис. 1** Среднее время задержки при постоянном (a), экспоненциальном (б) и гиперэкспоненциальном (e) времени обслуживания: 1 —  $p = 0$ ; 2 — 0,45; 3 —  $p = 0,9$ ; 4 —  $M|G|1$

(3) время передачи с экспоненциальным распределением:

$$\beta(s) = \frac{1}{s\beta_1 + 1}, \quad \beta_2 = 2\beta_1^2;$$

(4) время передачи с гиперэкспоненциальным распределением второго порядка:

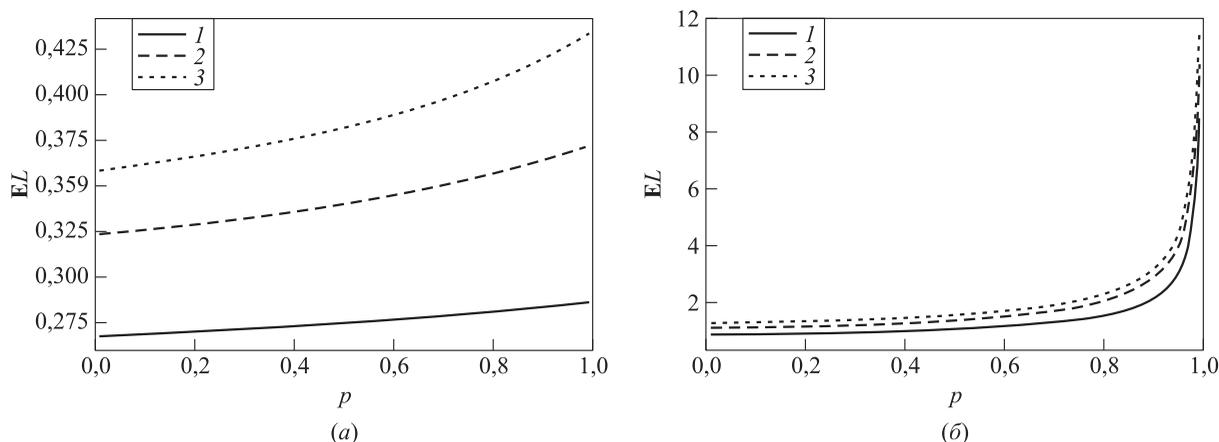


**Рис. 2** Среднее время задержки при  $p = 0,45$ : 1 — постоянное время обслуживания; 2 — экспоненциальное время обслуживания; 3 — гиперэкспоненциальное время обслуживания

$$\beta(s) = \frac{5}{16s\beta_1 + 10} + \frac{5}{4s\beta_1 + 10}, \quad \beta_2 = \frac{68}{25}\beta_1^2.$$

Изменение загрузки системы производилось путем варьирования среднего времени передачи пакета. На рис. 1 для каждого типа распределения приведены графики зависимости математического ожидания времени задержки передачи пакета от загрузки при трех значениях параметра  $p$  (0, 0,45 и 0,9), а также для пуассоновского потока. Из графиков видно значительное увеличение времени задержки как при переходе от пуассоновского потока (это часто предполагается при моделировании различных реальных систем) к гиперэкспоненциальному ( $p = 0$ ), так и при увеличении коэффициента корреляции (увеличение  $p$ ) интервалов между поступлениями пакетов. Также наблюдается увеличение времени задержки (при любых  $p$ ) в зависимости от дисперсии длительности передачи пакета, которая при рассмотренных типах ее распределения минимальна для постоянного времени и максимальна для гиперэкспоненциального. Это увеличение выражено менее ярко, чем при изменении величины  $p$ , поэтому на рис. 2 приведены графики при различных типах распределения времени передачи пакета при фиксированном  $p = 0,45$ .

На рис. 3 приведены графики зависимости математического ожидания времени задержки от вероятности  $p$ . Можно выделить два случая: если  $a_2\beta_1 < 1$ , то математическое ожидание времени задержки остается ограниченным при всех  $0 \leq p \leq 1$ ; если  $a_2\beta_1 \geq 1$ , то математическое ожидание времени задержки стремится к бесконечности при  $p \rightarrow 1$ . Это свойство объясняется тем, что при  $p = 1$  изменяется условие существования стационарного распределения времени задержки: оно принимает вид  $a_2\beta_1 < 1$ .



**Рис. 3** Среднее время задержки при  $\rho = 0,2$  (а) и  $0,4$  (б):  $a_1 = 0,29$ ;  $a_2 = 2,58$ ;  $a = 1,0$ ;  $c = 0,2$ ; 1 — постоянное время обслуживания; 2 — экспоненциальное время обслуживания; 3 — гиперэкспоненциальное время обслуживания

## 7 Заключение

В статье рассмотрена система массового обслуживания, входящий поток которой служит обобщением классических потоков: пуассоновского и гиперэкспоненциального. Рассматриваемый поток позволяет моделировать более широкий класс реальных потоков, так как можно не только «подогнать» первый и второй моменты интервалов между поступлениями пакетов, но и корреляцию соседних интервалов. Найдены нестационарное и стационарное распределения числа пакетов в системе и (виртуального) времени пребывания пакета в системе. В стационарном случае также найдены среднее и дисперсия указанных распределений. Результаты исследования проиллюстрированы численными примерами для различных распределений времени обслуживания. Одним из возможных направлений дальнейших исследований представляется рассмотрение входящего потока с зависимыми интервалами между поступлениями пакетов, но коэффициент вариации которого будет меньше 1.

## Литература

1. Власкина А. С., Бурицева С. А., Кочеткова И. А., Шоргин С. Я. Управляемая система массового обслуживания с эластичным трафиком и сигналами для анализа нарезки ресурсов в сети радиодоступа // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 3. С. 90–96. doi: 10.14357/19922264220312. EDN: MFWTPO.
2. Разумчик Р. В., Румянцев А. С., Гаримелла Р. М. Вероятностная модель для оценки основных характеристик производительности марковской модели суперкомпьютера // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 62–70. doi: 10.14357/19922264230209. EDN: KXUNPO.
3. Френкель С. Л., Захаров В. Н. Модели учета влияния статистических характеристик трафика вычислительных сетей на эффективность прогнозирования средствами машинного обучения // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 71–80. doi: 10.14357/19922264230410. EDN: CQYNFJ.
4. Кривенко М. П. Статистический критерий стабильности системы массового обслуживания, основанный на входном и выходном потоках // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 54–60. doi: 10.14357/19922264240108. EDN: JNJJMU.
5. Агаларов Я. М. Об однопороговом управлении очередью в системе массового обслуживания с нетерпеливыми заявками // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 2. С. 40–46. doi: 10.14357/19922264240206. EDN: JZNAKU.
6. Зорин А. В. К определению периода занятости при нелокальном описании потоков // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 45–51. doi: 10.14357/19922264240306. EDN: YKSIBJ.
7. Hwang G. U., Choi B. D., Kim J.-K. The waiting time analysis of a discrete-time queue with arrivals as an autoregressive process of order 1 // J. Appl. Probab., 2002. Vol. 39. No. 3. P. 619–629. doi: 10.1239/jap/1034082132.
8. Hwang G. U., Sohraby K. On the exact analysis of a discrete-time queueing system with autoregressive inputs // Queueing Syst., 2003. Vol. 43. P. 29–41. doi: 10.1023/A:1021848330183.
9. Kamoun F. The discrete-time queue with autoregressive inputs revisited // Queueing Syst., 2006. Vol. 54. P. 185–192. doi: 10.1007/s11134-006-9591-3.
10. Леонтьев Н. Д., Ушаков В. Г. Анализ системы обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 3. С. 39–44. doi: 10.14357/19922264140305. EDN: SMPBVH.
11. Леонтьев Н. Д., Ушаков В. Г. Исследование систем обслуживания с дискретным временем, входящим потоком авторегрессионного типа и обратной связью //

- Системы и средства информатики, 2015. Т. 25. № 2. С. 60–70. EDN: UBFBOX.
12. Леонтьев Н. Д., Ушаков В. Г. Анализ системы обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа и относительным приоритетом // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 3. С. 15–22. doi: 10.14357/19922264160303. EDN: WMJXQR.
  13. Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Одноканальная система обслуживания с зависимыми интервалами времени между поступлениями требований // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 2. С. 112–116. doi: 10.14357/19922264170212. EDN: YTYGBF.
  14. Матвеев В. Ф., Ушаков В. Г. Системы массового обслуживания. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1984. 240 с.
  15. QoS Technology White Paper. Iss. 01. — Shenzhen, People’s Republic of China: Huawei Technologies Co., Ltd., May 25, 2013. 118 p. <https://etcdf.tc.df.gov.br/?a=documento&f=downloadPDF&iddocumento=1598002>.

Поступила в редакцию 12.12.2024

Принята к публикации 15.01.2025

## ONE QUEUING SYSTEM WITH CORRELATED INPUT FLOW

A. K. Bergovin<sup>1</sup>, A. M. Ryazanov<sup>1</sup>, and V. G. Ushakov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskieskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

<sup>2</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** A single-line queuing system with an infinite number of waiting places, an arbitrary distribution of service time, and a Poisson incoming flow with random intensity is considered. The intensities are subordinated to the autoregressive dependence of the first order. The joint distribution of the number of total customers in the system is obtained as well as the sojourn time of a customer in the system in a nonstationary regime. Expressions for stationary distributions and their probabilistic characteristics are also presented. The average sojourn time in the system in the stationary regime is numerically studied and illustrated under different assumptions on the distribution of service time and on the characteristics of the incoming flow. Comparison is made with the classical  $M|G|1$  queue.

**Keywords:** random intensity; queue length; waiting time; passive traffic analysis; quality of service

DOI: 10.14357/19922264250107

EDN: WVIYMU

## Acknowledgments

The work was carried out with the support of the MSU Development Program, project No. 23-SH03-03.

## References

1. Vlaskina, A. S., S. A. Burtseva, I. A. Kochetkova, and S. Ya. Shorgin. 2022. Upravlyaemaya sistema massovogo obsluzhivaniya s elastichnym trafikom i signalami dlya analiza narezki resursov v seti radiodostupa [Controllable queuing system with elastic traffic and signals for analyzing network slicing]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(3):90–96. doi: 10.14357/19922264220312. EDN: MFWTPO.
2. Razumchik, R. V., A. S. Romyantsev, and R. M. Garimella. 2023. Veroyatnostnaya model’ dlya otsenki osnovnykh kharakteristik proizvoditel’nosti markovskoy modeli superkomp’yutera [A queueing system for performance evaluation of a Markovian supercomputer model]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):62–70. doi: 10.14357/19922264230209. EDN: KXYHPO.
3. Frenkel, S. L., and V. N. Zakharov. 2023. Modeli ucheta vliyaniya statisticheskikh kharakteristik trafika vychislitel’nykh setey na effektivnost’ prognozirovaniya sredstvami mashinnogo obucheniya [Models for study of the influence of statistical characteristics of computer networks traffic on the efficiency of prediction by machine learning tools]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):71–80. doi: 10.14357/19922264230410. EDN: CQYNFJ.
4. Krivenko, M. P. 2024. Statisticheskiy kriteriy stabil’nosti sistemy massovogo obsluzhivaniya, osnovanny na vkhodnom i vykhodnom potokakh [Statistical criterion for queuing system stability based on input and output flows]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):54–60. doi: 10.14357/19922264240108. EDN: JNJMMU.
5. Agalarov, Ya. M. 2024. Ob odnoporogovom upravlenii ochered’yu v sisteme massovogo obsluzhivaniya s neterpelivymi zayavkami [On single-threshold queue management in a queuing system with impatient customers]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(2):40–46. doi: 10.14357/19922264240206. EDN: JZHAKU.

6. Zorine, A. V. 2024. K opredeleniyu perioda zanyatosti pri nelokal'nom opisaniy potokov [Towards a definition of a busy period under nonlocal description of input flows]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):45–51. doi: 10.14357/19922264240306. EDN: YKSIBJ.
7. Hwang, G. U., B. D. Choi, and J.-K. Kim. 2002. The waiting time analysis of a discrete-time queue with arrivals as an autoregressive process of order 1. *J. Appl. Probab.* 39(3):619–629. doi: 10.1239/jap/1034082132.
8. Hwang, G. U., and K. Sohraby. 2003. On the exact analysis of a discrete-time queueing system with autoregressive inputs. *Queueing Syst.* 43(1-2):29–41. doi: 10.1023/A:1021848330183.
9. Kamoun, F. 2006. The discrete-time queue with autoregressive inputs revisited. *Queueing Syst.* 54:185–192. doi: 10.1007/s11134-006-9591-3.
10. Leontyev, N. D., and V. G. Ushakov. 2014. Analiz sistemy obsluzhivaniya s vkhodyashchim potokom avtoregressionnogo tipa [Analysis of a queueing system with autoregressive arrivals]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 8(3):39–44. doi: 10.14357/19922264140305. EDN: SMPBBH.
11. Leontyev, N. D., and V. G. Ushakov. 2015. Issledovanie sistem obsluzhivaniya s diskretnym vremenem, vkhodyashchim potokom avtoregressionnogo tipa i obratnoy svyaz'yu [A study of queueing systems with discrete time, autoregressive arrivals, and feedback]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 25(2):60–70. EDN: UBFBOX.
12. Leontyev, N. D., and V. G. Ushakov. 2016. Analiz sistemy obsluzhivaniya s vkhodyashchim potokom avtoregressionnogo tipa i otnositel'nym prioriteto [Analysis of a queueing system with autoregressive arrivals and nonpreemptive priority]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(3):15–22. doi: 10.14357/19922264160303. EDN: WMJXQR.
13. Ushakov, V. G., and N. G. Ushakov. 2017. Odnokanal'naya sistema obsluzhivaniya s zavisimymi intervalami vremeni mezhdu postupleniyami trebovaniy [Single server queueing system with dependent interarrival times]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(2):112–116. doi: 10.14357/19922264170212. EDN: YTYGBF.
14. Matveev, V. F., and V. G. Ushakov. 1984. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya* [Queueing systems]. Moscow: M. V. Lomonosov Moscow State University Publs. 240 p.
15. QoS technology white paper. May 25, 2013. Shenzhen, People's Republic of China: Huawei Technologies Co., Ltd. 118 p. Available at: <https://etcdf.tc.df.gov.br/?a=documento&f=downloadPDF&iddocumento=1598002> (accessed January 29, 2025).

Received December 12, 2024

Accepted January 15, 2025

## Contributors

**Bergovin Alexey K.** (b. 1995) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, assistant professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; alexey.bergovin@gmail.com

**Ryazanov Alexander M.** (b. 1996) — programmer, Department of Computing Systems and Automation, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; alryaz@asvk.cs.msu.ru

**Ushakov Vladimir G.** (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; vgushakov@mail.ru

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕСТОВ СТАБИЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

М. П. Кривенко<sup>1</sup>

**Аннотация:** Рассматриваются два типа процедур статистического контроля стабильности системы массового обслуживания (СМО): сравнение интенсивностей входного и выходного потоков и обнаружение нестационарности последовательности времен пребывания заявок в системе. В первом случае речь идет о методах обработки согласованных пар, а во втором — о тестах единичного корня для моделей авторегрессии первого порядка. Уточняется процедура сбора и фиксации исходных данных, так как в одном случае она привязана к моментам времени, а во втором — к номерам событий. Используемые тесты стабильности двух типов относятся к слабым критериям значимости, для которых базовые нулевые гипотезы различны и дополняют друг друга. Это сразу же проявляется при их сравнении: результаты получаются лучше, когда предположения соответствующих нулевых гипотез выполняются. Для учета подобных особенностей строится составной критерий на основе консенсуса и рандомизации, что приводит к увеличению числа безошибочных решений. Дальнейшего повышения качества принимаемых решений удастся добиться в процедуре сравнения критических уровней значимости отдельных критериев. Результаты были получены методом статистических испытаний и для конкретного типа СМО, функционирующей при простейшем пуассоновском входном потоке. Нарушение этого предположения может стать дестабилизирующим фактором, для описания чего была введена модель пакетного пуассоновского процесса. Для него, варьируя интенсивность поступления пакетов и средний размер пакета, можно формировать входные потоки различной структуры с одной и той же интенсивностью. Было выяснено: с ростом размера пакета увеличивается число порождаемых СМО реализаций, демонстрирующих неустойчивость; размер пакета может оказаться источником существенного роста времени пребывания заявок в системе по сравнению с вариантом единичных пакетов; применение тестов единичного корня может привести к ошибочным выводам относительно неустойчивости.

**Ключевые слова:** СМО (система массового обслуживания); стабильность выборочной траектории; критерии для согласованных пар; тесты единичного корня; тесты Дики–Фуллера; составной тест стабильности; пакетный пуассоновский процесс; размер пакета как дестабилизирующий фактор

DOI: 10.14357/19922264250108

EDN: XDTUNK

## 1 Введение

Сравнительный анализ процедур контроля стабильности обусловлен существующими теоретическими результатами, свойствами реальных данных, фактическими возможностями проведения экспериментов. Далее распространенное предположение о простейшем пуассоновском входном потоке было расширено за счет необходимости обрабатывать пакеты заявок. Подобная ситуация оказалась весьма распространенной и существенно влияющей на возможности процедур статистического анализа данных [1].

## 2 Критерии стабильности

Можно выделить две основные идеи статистического контроля стабильности СМО [2, 3]: сравнение интенсивностей входного-выходного потоков и обнаружение нестационарности

последовательности времен пребывания заявок в системе. В случае первой из них речь прежде всего идет о методах обработки согласованных пар, поэтому соответствующие процедуры назовем МР-тестами (Matched Pairs). В случае выявления нестационарности целесообразно обратить внимание на DF-тесты (Dickey–Fuller) для моделей авторегрессии первого порядка без и с добавлением константы.

Для сравнения эффективности тестов необходимо уточнить процедуру сбора и фиксации исходных данных, так как в одном случае она привязаны к моментам времени, а во втором — к номерам поступающих заявок. Обычно журнал трассировки функционирования СМО отражает последовательное во времени поступление заявок, что естественно приводит к заданию их номера  $k$ , фиксации надлежащих значений  $A_k$  и  $D_k$  соответственно для входного  $A(t)$  и выходного  $D(t)$  потоков, нахождения времени пребывания  $V_k = A_k - D_k$ . Заметим,

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, mkkrivenko@ipiran.ru

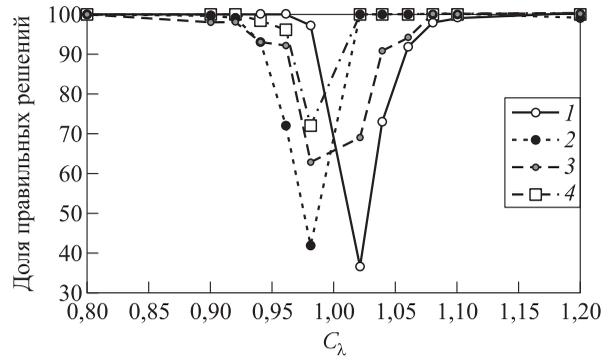
что для получения  $D(t)$  необходимо переупорядочение данных журнала.

По примеру существующих журналов трассировки строится и процедура моделирования СМО, используемая для сравнительного анализа тестов: генерируются события входного потока и прослеживается функционирование системы до завершения обработки всех заявок. Обозначим соответствующее общее время жизни системы как  $T$ . Для учета особенностей функционирования СМО и возможностей процедур анализа данных этот период делится на  $N_s$  последовательных, идущих одна за другой фаз одинаковой длительности  $T_p$ . Каждая фаза включает  $N_f$  фрагментов одинаковой продолжительности  $T_f$ , которые служат для оценивания интенсивности; их насыщенность данными должна обеспечивать возможность корректной аппроксимации распределения оценок. По совокупности фрагментов в фазе строится статистический вывод о свойствах наблюдаемых процессов, рост числа фрагментов повышает мощность критерия, применяемого к данным фазы.

Таким образом, для сравнительного анализа тестов необходимо наряду с параметрами СМО указывать период ее наблюдения: время начала  $t_0$  и длительность  $T_p$ . Для МР-тестов, кроме того, требуется задать значение параметра  $N_f$ . В случае DF-тестов выделение фрагментов не нужно, но необходимо уточнить, какие и как заявки учитывать. Было принято, что в последовательность  $\{V_k\}$  входят поступившие в СМО за период  $[t_0, t_0 + T_p)$  заявки с зафиксированным временем пребывания в виде  $V_k = \min\{D_k - A_k, t_0 + T_p - A_k\}$ , т.е. учитывается ограниченность периода наблюдения.

При моделировании будем считать предопределенными значения следующих характеристик:  $\lambda_{in}$  — интенсивность входного потока заявок;  $L_f$  — среднее число событий во фрагменте;  $N_f$  — число фрагментов в фазе;  $N_p$  — число фаз в общем времени жизни системы. Тогда определяющими становятся последовательно вычисляемые значения параметров:  $N = L_f N_f N_p$  — число моделируемых событий;  $T = N/\lambda_{in}$  — время жизни системы;  $T_f = T/N_f$  — длительность фазы;  $I_p$  — индекс анализируемой фазы (статистическому анализу обычно подвергаются «внутренние» фазы, чтобы исключить краевые эффекты).

При применении DF-тестов возникает необходимость подсчета критического уровня значимости  $\alpha^*$ , который основывается на имеющихся табличных данных процентилей для отдельных значений объема выборки  $N_s$  [4]. С целью унификации обработки данных была реализована следующая последовательность действий: нахождение с помощью линейной аппроксимации по  $N_s$  требу-



**Рис. 1** Зависимость доли правильных решений МР- (1), DF- (2), ОТ- (3) и ОС-тестов (4) стабильности от степени нестабильности  $C_\lambda$

емого набора процентилей, затем выявление для него и заданного значения статистики интервала требуемых значений и, наконец, линейная аппроксимация по границам полученного интервала и соответствующим вероятностям для определения нужного  $\alpha^*$ . Для хвостов распределения использовались значения  $\alpha^* = 0$  или 1.

Используемые МР- и DF-тесты стабильности относятся к так называемым слабым критериям значимости, опирающимся на задание нулевой гипотезы  $H$ , которую на основе данных принимают или отвергают. Последнее реализуется с помощью критического уровня значимости  $\alpha^*$ , который сравнивается с заданным уровнем значимости  $\alpha$ . Таким образом, принятие решения о стабильности (ее наличие обозначим как  $\mathfrak{S}$ ) или ее отсутствии (соответственно  $\overline{\mathfrak{S}}$ ) осуществляется с помощью выборочных величин  $\alpha_{MP}^*$  и  $\alpha_{DF}^*$ . Особенность возникающей ситуации придает то, что базовые нулевые гипотезы  $H_{MP} : \mathfrak{S}$  и  $H_{DF} : \overline{\mathfrak{S}}$  для принятых критериев различны и дополняют друг друга. Своеобразие сразу же проявляется при сравнении рассматриваемых тестов (см. 1 и 2 на рис. 1), результаты которых лучше при предположениях соответствующих нулевых гипотез.

Фактически здесь получаем ситуацию с многокритериальным принятием решения для, казалось бы, простейшего случая всего лишь двух тестов. Но возникают специфические осложнения: ориентация критериев на использование слабых критериев значимости, различные нулевые гипотезы, многопараметрический характер решающих процедур. Логичным решением в этом случае становится объединяющий рандомизированный тест:

- предпочтение отдается тому решению, которое принимается МР- и DF-тестами одинаково (консенсус), а именно: констатируется  $\overline{\mathfrak{S}}$ , если  $\alpha_{MP}^* \leq \alpha$  и  $\alpha_{DF}^* > \alpha$ , и  $\mathfrak{S}$ , если  $\alpha_{MP}^* > \alpha$  и  $\alpha_{DF}^* \leq \alpha$ ;

- при отсутствии консенсуса случайным образом выбирается одно из двух равновероятных решений:  $\mathfrak{S}$  или  $\overline{\mathfrak{S}}$ .

Данный критерий пометим как ОТ (Omnibus Trivial) и подтверждение его преимуществ сразу же получим из графиков рис. 1: число безошибочных решений увеличивается.

Дальнейшему улучшению процедуры принятия решений о стабильности предположим следующие рассуждения. Если имеет место  $\mathfrak{S}$ , то  $\alpha_{MP}^*$  преимущественно принимает большие на  $[0, 1]$  значения, а  $\alpha_{DF}^*$  — меньшие. Для  $\overline{\mathfrak{S}}$  все наоборот. Приведенное обоснование позволяет детализировать области принятия решений и, исключив рандомизацию, принять  $\mathfrak{S}$ , если  $\alpha_{DF}^* < \alpha_{MP}^*$ , и принять  $\overline{\mathfrak{S}}$ , если  $\alpha_{DF}^* \geq \alpha_{MP}^*$ . Данный критерий пометим как ОС (Omnibus Complex) и, прибегнув снова к графикам рис. 1, увидим подтверждение роста эффективности принятых решений.

Выбор наиболее подходящего теста из сравниваемых зависит от условий их использования:

- особенности доступа к реализациям процесса функционирования СМО, допускающего одноразовый или многократный характер;
- приоритеты выбора априорных предположений относительно стабильности;
- допустимость корректного применения имеющихся теоретических результатов;
- возможности практической реализации статистических процедур.

Если ограничиться разведочным анализом данных, то сравнительный анализ критериев стабильности приводит к следующим выводам:

- с точки зрения правильности классификации критерии упорядочиваются по возрастанию как MP или DF, ОТ, ОС;
- с точки зрения «практичности» использования все критерии не свободны от недостатков (необходимость выбора вспомогательных параметров обработки, использование асимптотических свойств разной степени точности, высокая для целей статистических испытаний вычислительная сложность обработки данных);
- неустойчивое поведение критериев на «границе» значений параметров СМО, отделяющей стабильность от нестабильности.

Сформулированные выводы были получены методом статистических испытаний и для конкретного типа СМО, т. е. для определенной совокупности условий, одним из которых было предположение о простейшем пуассоновском входном потоке заявок. Как показывает практика (см.,

в частности, [5]), это далеко не так, и, что важнее, отклонения могут повлечь за собой нарушение стабильности.

### 3 Пакетный пуассоновский процесс

Специфика составной структуры потока заявок [1] естественно приводит к модели пакетного пуассоновского процесса, который формируется из последовательности поступлений на обработку пакетов, каждый из которых содержит случайное число  $S$  отдельных заявок, не меньше 1. Предполагается, что основной процесс порождения пакетов и их размеры независимы друг от друга. Можно оставить в силе допущение, что основной поток — пуассоновский с интенсивностью  $\lambda$ . На практике это не совсем так: достаточно явными оказываются периодические суточные изменения. В этом случае их можно нивелировать сглаживанием (заменить реальный суточный поток с изменениями на пуассоновский процесс со среднесуточной интенсивностью), что не должно принципиально изменить сути решаемой задачи о стабильности на протяжении существенно более длительных интервалов, чем сутки. Как и в [1], для  $S$  удобно принять геометрическое распределение в форме  $S \sim \text{Geom}(p)$ , если  $s = 1, 2, \dots$  с вероятностями  $(1-p)^{s-1}p$ ,  $E\{S\} = 1/p$  и  $D\{S\} = (1-p)/p^2$ .

Для оценивания  $p$  для последовательности времен поступления заявок  $A_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , выделим серии подряд идущих одинаковых значений  $A_i$ , число которых  $s_j$ ,  $j = \overline{1, M}$ ,  $\sum_{j=1}^M s_j = N$ . Непосредственно устанавливается, что оценка максимального правдоподобия  $p^*$  по последовательности наблюдаемых значений  $s_1, \dots, s_M$  принимает вид  $p^* = M/N$ .

Удивительно, но в случае данных Mustang [1] привлечение в первую очередь из-за удобства геометрического распределения дает к тому же и хорошие статистические результаты (см. табли-

Сравнение распределений размера пакета для стационарных фрагментов M1s, M2s и M3s данных Mustang, полученных в виде гистограммной оценки (Hist) и теоретическим путем на основе  $p^*$  (Geom); значения частот и оценок вероятности даны в %

s	M1s		M2s		M3s	
	Hist	Geom	Hist	Geom	Hist	Geom
1	96	96	81	83	86	85
2	3	4	19	14	12	13
3	1	0	0	2	2	2
4	0	0	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...

цу). Подобная адекватность физически объяснима в рамках теории восстановления (интерпретация геометрического распределения через число шагов в испытаниях Бернулли до первого успеха), но при образовании пакетов ее происхождение пока не ясно.

Теперь, комбинируя интенсивности входного потока  $\lambda_{in}$ , интенсивность основного процесса  $\lambda$  и среднего размера пакета  $E(S)$ , получаем:

$$\frac{1}{\lambda_{in}} = \frac{1}{\lambda E(S)} \text{ или } \lambda_{in} = \frac{\lambda}{p}.$$

Отсюда видно, что, варьируя  $\lambda$  (интенсивность поступления пакетов) и  $1/p$  (средний размер пакета), можно формировать входные потоки различной структуры с одной и той же интенсивностью  $\lambda_{in}$ , но с разными значениями  $\lambda$  и  $E\{S\} = 1/p$ .

В первую очередь была исследована связь размера пакета и характера функционирования СМО. Были оставлены прежние значения предустановленных параметров [2], а именно: характеристики СМО —  $p_1 = 0,5$ ,  $\mu = 1$ ,  $C_\lambda = 0,95$  (стабильная система для простейшего пуассоновского входного потока) и, соответственно,  $\lambda_{in} = 1,09$ ; характеристики моделирования —  $L_f = 100$ ,  $N_f = 50$ ,  $N_p = 10$ ,  $I_p = 9$ . Далее методом статистических испытаний (100 экспериментов) исследовалась зависимость оценки вероятности выявления нестабильности СМО с одним и тем же значением интенсивности входного потока, но различными средними размерами пакетов  $E\{S\}$ , при этом использовался DF-тест. Соответствующие результаты

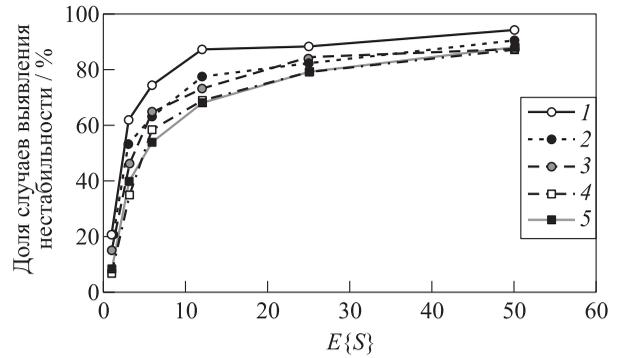


Рис. 2 Относительные частоты принятия гипотезы о нестабильности для различных размеров пакетов: 1 —  $T_f = 30$ ; 2 — 40; 3 — 50; 4 — 60; 5 —  $T_f = 70$

представлены на рис. 2. Они говорят о том, что с ростом размера пакета увеличивается число порождаемых системой реализаций, демонстрирующих с точки зрения DF-теста нестабильность. При этом наблюдается некоторый спад числа выявленных случаев нестабильности при росте общего объема анализируемых данных  $T_f$ .

Одна из реализаций процесса  $V_i$  для случая  $E\{S\} = 50$  изображена на рис. 3, где на оси абсцисс полужирными отрезками выделены области принятия гипотезы о нестабильности на основе DF-теста.

Рисунок 3 наглядно иллюстрирует выявленные в процессе исследований важные моменты статистического анализа стабильности:

- размер пакета может оказаться источником существенного роста времени пребывания заявок

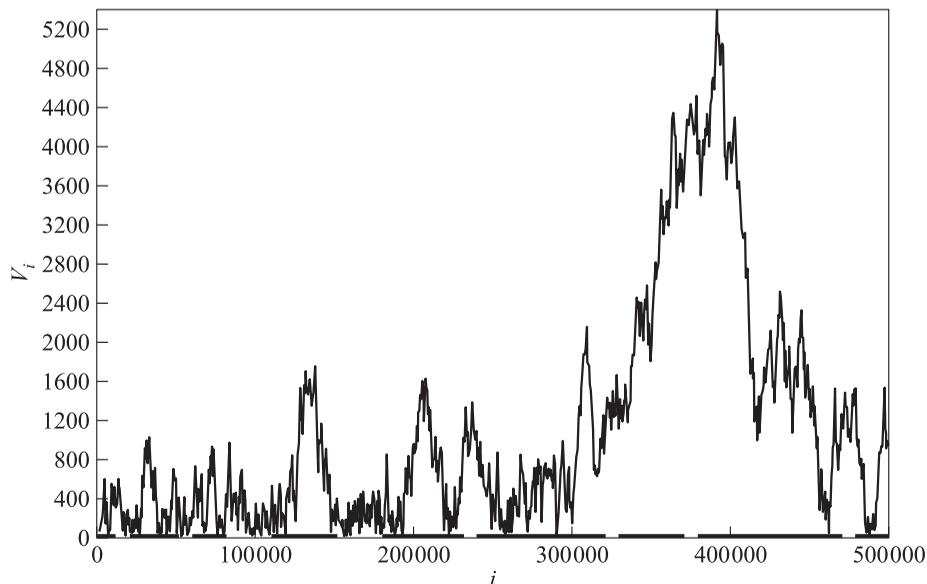


Рис. 3 Вариант реализации  $V_i$ ,  $i = \overline{1, 500\,000}$ , с выделением по оси абсцисс областей принятия гипотезы о нестабильности по последовательным фазам, состоящим из 5 000 заявок

в системе по сравнению с вариантом единичных пакетов (для варианта на рис. 3 имеет место увеличение среднего с 20 до 1 102, среднеквадратичного отклонения с 19 до 1 195, максимального значения со 137 до 5 446); статистические тесты DF с последующим подтверждением MP уверенно отвергают гипотезу о стабильном поведении СМО на анализируемом промежутке ее жизни;

- статистический вывод о нестабильности может вылиться в заключение о нестабильности СМО только после его распространения на промежуток  $[0, \infty)$  (в необходимости этого убеждаешься при рассмотрении фактически убывающих значений  $V_i$  при  $i > 390\,000$ ), что на практике не реализуемо, хотя бы из-за существенных вплоть до непреодолимых вычислительных ограничений (непосредственное применение регрессионного анализа в DF-тесте включает операции с  $N \times N$  матрицей);
- применение DF-тестов может привести к ошибочным выводам относительно нестабильности СМО (принятие нулевой гипотезы DF-тестом при  $i < 390\,000$  говорит о возможной перегрузке и нестабильной работе СМО, но одновременно при больших значениях  $i$  — о восстановлении работы системы, которое в итоге гипотетически может привести к позиционированию СМО как стабильной).

## 4 Заключение

Сравнительный анализ тестов стабильности позволил выявить особенности применения двух разнородных критериев, что позволило путем их комбинирования повысить эффективность получаемых результатов.

Внешняя простота процедур тестирования нейтрализуется проблемами выбора вспомогательных

взаимосвязанных параметров обработки, а также высокой для целей статистических испытаний вычислительной сложностью алгоритмов манипуляции с данными.

Выявленная дестабилизация протекающих в СМО процессов при пакетной организации входного потока заявок позволила обратить внимание на противоречивость принятого определения стабильности, основанного на предельном переходе, и результатов применения статистических тестов стабильности, базирующихся на выборке (конечном наборе). Это несоответствие усугубляется реальными ограничениями на возможность обработки реально больших объемов экспериментальных данных.

## Литература

1. *Кривенко М. П.* Моделирование входного потока рабочих нагрузок вычислительного кластера LANL Mustang // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 3. С. 109–122. doi: 10.14357/08696527240308. EDN: FRSPMK.
2. *Кривенко М. П.* Статистический критерий стабильности системы массового обслуживания, основанный на входном и выходном потоках // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 54–60. doi: 10.14357/19922264240108. EDN: JNJJMU.
3. *Кривенко М. П.* Статистический критерий стабильности системы массового обслуживания, основанный на последовательности времен пребывания // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 2. С. 55–65. doi: 10.14357/08696527240204. EDN: RVWWXQ.
4. *Fuller W. A.* Introduction to statistical time series. — 2nd ed. — Hoboken, NJ, USA: Wiley, 1996. 728 p. doi: 10.1002/9780470316917.
5. *Amyrosiadis G., Kuchnik V., Park J. W., Cranor C., Ganger G. R., Moore E., DeBardleben N.* The Atlas cluster trace repository // Login USENIX Mag., 2018. Vol. 43. No. 4. P. 29–35.

Поступила в редакцию 13.12.2024

Принята к публикации 15.01.2025

---



---

# COMPARATIVE ANALYSIS OF QUEUING SYSTEM STABILITY TESTS

M. P. Krivenko

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The article discusses two types of procedures for statistical control of the stability of the queuing system: comparison of the intensities of input and output flows and detection of nonstationarity of the sequence of sojourn times. In the first case, we are talking about methods for processing matched pairs and in the second case, we are talking about single-root tests for first-order autoregression models. The procedure for collecting and fixing initial data is specified, since in one case, it is tied to moments in time and in the second — to event numbers. The

two types of stability tests used refer to weak significance tests, for which the basic null hypotheses are different and complement each other. This is immediately evident when they are compared: the results are better when the assumptions of the corresponding null hypotheses are satisfied. To take into account such features, a composite criterion is built on the basis of consensus and randomization, which leads to an increase in the number of error-free solutions. Further improvement in the quality of decisions can be achieved in the procedure for comparing the critical levels of significance of individual criteria. The results were obtained by the Monte-Carlo method for a specific type of queuing system operating with a simple Poisson input flow. Violation of this assumption can become a destabilizing factor, for the description of which the model of the batch Poisson process was introduced. For it, by varying the intensity of batch arrival and the batch size mean, it is possible to form input streams of different structures with the same intensity. It was found that as the batch increases, the number of implementations generated by the queuing system that demonstrate instability increases; the size of the batch can be a source of a significant increase in the time spent in the system in comparison with the option of single batches; and the use of single root tests can lead to erroneous conclusions about instability.

**Keywords:** queuing system; sample-path stability; matched pairs tests; unit root tests; Dickey–Fuller tests; omnibus test of stability; batch Poisson process; size of batch as a destabilizing factor

**DOI:** 10.14357/19922264250108

**EDN:** XDTUNK

## References

1. Krivenko, M. P. 2024. Modelirovanie vkhodnogo potoka rabochnikh nagruzok vychislitel'nogo klastera LANL Mustang [Modeling of the input flow of LANL Mustang computing cluster workloads]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(3):109–122. doi 10.14357/08696527240308. EDN: FRSPMK.
2. Krivenko, M. P. 2024. Statisticheskiy kriteriy stabil'nosti sistemy massovogo obsluzhivaniya, osnovanny na vkhodnom i vykhodnom potokakh [Statistical criterion for queuing system stability based on input and output flows]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):54–60. doi 10.14357/19922264240108. EDN: JNJJMU.
3. Krivenko, M. P. 2024. Statisticheskiy kriteriy stabil'nosti sistemy massovogo obsluzhivaniya, osnovanny na posledovatel'nosti vremen prebyvaniya [Statistical criterion for queuing system stability based on sojourn times]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(2):55–65. doi 10.14357/08696527240204. EDN: RVWWXQ.
4. Fuller, W.A. 1996. *Introduction to statistical time series*. 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley. 728 p. doi: 10.1002/9780470316917.
5. Amvrosiadis, G., V. Kuchnik, J.W. Park, C. Cranor, G.R. Ganger, E. Moore, and N. DeBardeleben. 2018. The Atlas cluster trace repository. *Login USENIX Mag.* 43(4):29–35.

Received December 13, 2024

Accepted January 15, 2025

## Contributor

**Krivenko Michail P.** (b. 1946) — Doctor of Science in technology, professor, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; mkrivenko@ipiran.ru

# PERTURBATION AND TRUNCATION BOUNDS FOR ONE CLASS OF MARKOV PROCESSES OF BIRTH-AND-DEATH TYPE WITH CATASTROPHES

I. A. Usov<sup>1</sup>, Y. A. Satin<sup>1</sup>, A. I. Zeifman<sup>1,2</sup>, and V. Yu. Korolev<sup>2,3,4</sup>

**Abstract:** A class of inhomogeneous continuous-time Markov chains of birth-and-death type with a countable state space is considered. Two types of additional transitions are allowed in the chain, which bring it either to the boundary state or to the state adjacent to it. It is assumed that with an increase in the state number, the birth (death) intensities monotonically decrease (increase). Perturbation bounds are obtained using special weighted norms associated with the total variation. An estimate of the approximation error, when one replaces the original chain by a process with a finite number of states, is constructed. For the case when all the intensities are state-dependent, conditions are provided (using the logarithmic norm method), which guarantee (weak) ergodicity in the norm of total variation. Results are accompanied by illustrative examples.

**Keywords:** queuing system; birth-and-death process; catastrophes; truncation bounds; perturbation bounds

**DOI:** 10.14357/19922264250109

**EDN:** XQBLJM

## 1 Introduction

The role of the term “catastrophes” in many fields of science and technology is quite similar and well-known. Sometimes, it resets to zero the system occupancy or causes a temporary failure of the equipment, etc. In particular, queueing systems with catastrophes and corresponding Markov chains are the well-established subject of systematic research (see, for example, [1–10]). And the Markov chain considered further in this paper is particularly adopted (but not restricted to) queues.

In a number of previous studies, there were derived various estimates for limiting characteristics of (possibly inhomogeneous) continuous-time Markov chains with discrete state space, describing the total occupancy of (various variants of the)  $M/M/S$  queues with catastrophes. Subsequent research has focused on models incorporating additional conditions, such as server breakdowns/repairs (see, for example, [11–15]). Often, in order to obtain an estimate, solutions of the (possibly infinitely many) Kolmogorov forward equations are required. There exists quite a rich set of techniques (see, for example, [16–20]) which allows one to do this. Each time a technique is applied, it would be beneficial to know *a priori* about when the limiting regime is reached and how to properly deal with infinitely many

equations. One of the methods, which allows one to obtain estimates related to stability, rate of convergence to the limiting regime (i. e., when the chain “forgets” its initial state), and truncation bounds, is the logarithmic norm method. In a recent paper [21], it was adopted to obtain the ergodicity properties of inhomogeneous Markov chains with the two types of catastrophes that were analysed. Those allowed one, in particular, to provide easy-to-compute upper bounds for its moments. This paper complements the previous analysis by providing new perturbation and truncation bounds.

In what follows,  $\mathbf{1}^T$  is the vector of ones and  $\|\cdot\|$  (or  $\|\cdot\|_1$ ) denotes the usual  $l_1$ -norm, i. e.,  $\|\mathbf{x}(t)\| = \sum_i |x_i(t)|$  for any vector  $\mathbf{x}(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots)^T$  and  $\|B(t)\| = \sup_j \sum_i |b_{ij}(t)|$  for any matrix  $B(t) = (b_{ij}(t))$ . The differential equations will be considered not only in  $l_1$  but also in the embedded subspace  $\{\mathbf{x}(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots)^T : \|D\mathbf{x}(t)\|_1 < \infty\}$  (with a suitable linear operator  $D$ ), which is denoted by  $l_{1D}$  and the norm in it by  $\|\cdot\|_{1D}$ .

Recall that a Markov chain  $X(t)$  is called weakly ergodic, if  $\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$  for any initial conditions  $\mathbf{p}^*(0)$  and  $\mathbf{p}^{**}(0)$  where  $\mathbf{p}^*(t)$  and  $\mathbf{p}^{**}(t)$  are the corresponding solutions of forward Kolmogorov system.

<sup>1</sup>Department of Applied Mathematics, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation

<sup>2</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation

<sup>3</sup>Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

<sup>4</sup>Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation



$$\begin{aligned} & \| \mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t) \|_{1D} \\ & \leq \int_0^t \| \bar{V}^*(t, \tau) \|_{1D} (\| A^*(\tau) - \bar{A}^*(\tau) \|_{1D} \| \mathbf{p}(\tau) \|_{1D} \\ & \quad + \| \mathbf{f}(\tau) - \bar{\mathbf{f}}(\tau) \|_{1D}) d\tau \\ & \leq \int_0^t M e^{-(a-M\varepsilon_1)(t-\tau)} (\varepsilon_1 \| \mathbf{p}(\tau) \|_{1D} + \varepsilon_2) d\tau. \end{aligned}$$

By utilizing now the upper bound for  $\| \mathbf{p}(t) \|_{1D}$  for any  $\mathbf{p}(0) \in l_{1D}$ , one obtains

$$\begin{aligned} \| \mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t) \| & \leq \frac{1}{\inf_n d_n} \| \mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t) \|_{1D} \\ & \leq \frac{1}{\inf_n d_n} \left( \frac{M(M\varepsilon_1 \mathbf{f} + a\varepsilon_2)}{a(a-M\varepsilon_1)} + o(1) \right). \end{aligned}$$

These findings can be summarized in the following statement.

**Theorem 1.** *Given an 1D-exponentially ergodic Markov chain  $X(t)$  in a subspace  $l_{1D} \subset l_1$ , let the perturbed chain  $\bar{X}(t)$  be 1D-exponentially ergodic. Then*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \| \mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t) \| \leq \frac{4M(M\varepsilon_1 \mathbf{f} + a\varepsilon_2)}{a(a-M\varepsilon_1) \inf_n d_n}.$$

## 4 Truncation Bounds

Consider the copy of the process  $X(t)$  but with the finite state space  $\{0, 1, \dots, N\}$  (denote it by  $X_N(t)$ ). Denote its probability vector by  $\mathbf{p}_N(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_N(t), 0, 0, \dots)^T$  and transposed generator corresponding to it by  $A_N(t)$ . Denote the ingredients of the system analogous to (1) but which holds for  $\mathbf{p}_N(t)$  by  $A_N^*(t)$  and  $\mathbf{f}_N(t)$ . Noting that  $\mathbf{f}_N(t) = \mathbf{f}(t)$ , one can rewrite the Kolmogorov forward equations for the distribution of the  $X_N(t)$  in the form

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \mathbf{p}_N(t) \\ & = A^*(t) \mathbf{p}_N(t) + \mathbf{f}(t) + (A_N^*(t) - A^*(t)) \mathbf{p}_N(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Let  $\mathbf{p}_N(0) = \mathbf{p}(0)$ . Then, by utilizing the solutions of the systems (1) and (2), one gets the upper bound

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t) \| \\ & \leq \int_0^t \| V^*(t, \tau) \| \| (A_N^*(\tau) - A^*(\tau)) \mathbf{p}_N(\tau) \| d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Define such a sequence  $\{\tilde{d}_n, n \geq 0\}$  that  $d_n < \tilde{d}_n$  and that the Markov chain  $X(t)$  is both 1D- and  $1\tilde{D}$ -exponentially ergodic ( $\tilde{D} = \text{diag}(\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \dots)$ ), i. e., there exist positive constants  $M, \tilde{M}, a$ , and  $\tilde{a}$  such that

$$\left. \begin{aligned} \| V^*(t, s) \|_{1D} & \leq M e^{-a(t-s)}; \\ \| V^*(t, s) \|_{1\tilde{D}} & \leq \tilde{M} e^{-\tilde{a}(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

**Theorem 2.** *If (4) holds, then, for any initial condition  $\mathbf{p}_N(0) = \mathbf{p}(0)$  and any  $t > 0$ , the difference between the probability distributions of  $X(t)$  and  $X_N(t)$  is upper bounded by*

$$\begin{aligned} \| \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t) \| & \leq \frac{M(d_{N+1} - d_N) \sup_n \sup_t \lambda_n(t)}{a \tilde{d}_N \inf_n d_n} \\ & \times \left( \tilde{M} e^{-\tilde{a}t} \| \mathbf{p}_N(0) \|_{1\tilde{D}} + \frac{\tilde{M}}{\tilde{a}} (\alpha(t) + \tilde{d}_1 \beta(t)) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

**Proof.**

On the one hand, since  $\| V_N^*(t, s) \|_{1\tilde{D}} \leq \| V^*(t, s) \|_{1\tilde{D}}$ ,  $\mathbf{f}_N(t) = \mathbf{f}(t)$ , and

$$\begin{aligned} \| \mathbf{p}(t) \|_{1\tilde{D}} & = \| V^*(t, 0) \mathbf{p}(0) + \int_0^t V^*(t, \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau \|_{1\tilde{D}} \\ & \leq \| V^*(t, 0) \|_{1\tilde{D}} \| \mathbf{p}(0) \|_{1\tilde{D}} + \int_0^t \| V^*(t, \tau) \| \| \mathbf{f}(\tau) \|_{1\tilde{D}} d\tau \\ & \leq \tilde{M} e^{-\tilde{a}t} \| \mathbf{p}(0) \|_{1\tilde{D}} + \frac{\tilde{M}}{\tilde{a}} \| \mathbf{f}(t) \|_{1\tilde{D}}, \end{aligned}$$

it holds that

$$\| \mathbf{p}_N(t) \|_{1\tilde{D}} \leq \tilde{M} e^{-\tilde{a}t} \| \mathbf{p}_N(0) \|_{1\tilde{D}} + \frac{\tilde{M}}{\tilde{a}} \| \mathbf{f}(t) \|_{1\tilde{D}}. \quad (6)$$

On the other hand, since  $p_n(t) = \tilde{d}_n p_N(t) / \tilde{d}_n \leq \| \mathbf{p}_N(t) \|_{1\tilde{D}} / \tilde{d}_n$  for any  $0 \leq n \leq N$ , one has from (6) that

$$p_N(t) \leq \frac{\tilde{M}}{\tilde{d}_N} e^{-\tilde{a}t} \| \mathbf{p}_N(0) \|_{1\tilde{D}} + \frac{\tilde{M}}{\tilde{a} \tilde{d}_N} \| \mathbf{f}(t) \|_{1\tilde{D}}.$$

By considering the difference  $A^*(t) - A_N^*(t)$ , it is straightforward to see that

$$\begin{aligned} & (A^*(t) - A_N^*(t)) \mathbf{p}_N(t) \\ & = \left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N+1}, -\lambda_N(t) p_N(t), \lambda_N(t) p_N(t), 0, \dots \right)^T \end{aligned}$$

and, therefore,

$$\begin{aligned} & \| (A^*(t) - A_N^*(t)) \mathbf{p}_N(t) \|_{1D} \\ & \leq (d_{N+1} - d_N) p_N(t) \sup_n \sup_t \lambda_n(t). \end{aligned}$$

Plugging now the obtained estimates into (3) and noting that

$$\begin{aligned} \| \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t) \| & \leq \frac{1}{\inf_n d_n} \| \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t) \|_{1D} \\ & \leq \frac{1}{\inf_n d_n} \| \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t) \|_{1\tilde{D}}, \end{aligned}$$

one obtains (5).

## 5 Numerical Example

Let us conveniently fix all the transition intensities and look at how the obtained estimates look like. Assume that

$$\begin{aligned} \lambda_n(t) &= \frac{1}{n} \lambda(t) = \frac{1}{n} (9.5 + 2 \sin(2\pi t)), \quad \lambda_0(t) = \lambda(t); \\ \mu_n(t) &= \min(n, 90)(2.5 - \cos(2\pi t)); \\ \alpha(t) &= 0; \quad \beta(t) = 1.5 + \sin(2\pi t). \end{aligned}$$

Therefore, the Markov chain  $X(t)$  is 1-periodic, i. e., for any initial condition  $\mathbf{p}(0)$  for a probability  $p_n(t)$ , there exists a periodic function, say,  $\pi_n(t)$  (i. e.,  $\pi_n(t) = \pi_n(t + 1)$ ), such that  $\lim_{t \rightarrow \infty} (p_n(t) - \pi_n(t)) = 0$ .

Computation of the perturbation bound starts with the computation of the logarithmic norm  $\gamma(DA^*D)$  of the operator  $DA^*D$  which is equal to  $\gamma(DA^*D) = -(1.5 + \sin(2\pi t))$ . Given that, the values of the other constants are as follows:  $a \geq 1.5$ ;  $M \leq 1.4$ ; and  $f \leq 3.51$ . Therefore, if  $\|\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)\|_{1D} \leq \varepsilon_2$  and  $\|B(t) - \bar{B}(t)\|_{1D} \leq \varepsilon_1$ , Theorem 1 yields

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}(t) - \bar{\mathbf{p}}(t)\| \leq \frac{5.6(3.51\varepsilon_1 + 1.5\varepsilon_2)}{1.5d(1.5 - 1.4\varepsilon_1)}.$$

Proceeding to the truncation bounds, in order to compute the constants  $M$ ,  $\tilde{M}$ ,  $a$ , and  $\tilde{a}$  required in Theorem 2, it is necessary to obtain the logarithmic norms  $\gamma(DA^*D^{-1})$  and  $\gamma(\tilde{D}A^*\tilde{D}^{-1})$  of the operators  $DA^*D^{-1}$  and  $\tilde{D}A^*\tilde{D}^{-1}$ , respectively. This can be performed using Theorems 1 and 2 from [21] that yield

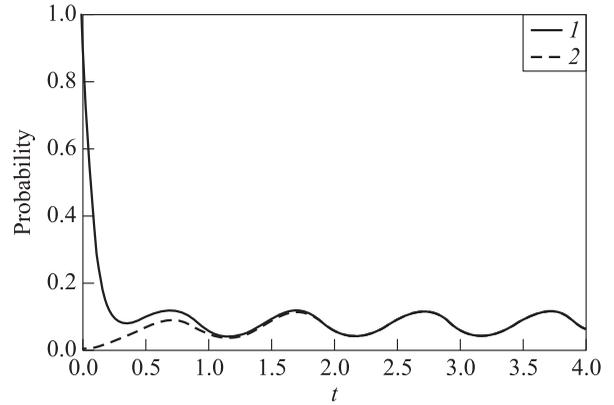
$$\begin{aligned} \gamma(DA^*D^{-1}) &= -(1.5 + \sin(2\pi t)) \\ &\quad - \varepsilon(9.5 + 2 \sin(2\pi t)), \quad M \leq 1.4, \quad a \geq 1.49; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\tilde{D}A^*\tilde{D}^{-1}) &= -(1.5 + \sin(2\pi t)) \\ &\quad - \tilde{\varepsilon}(9.5 + 2 \sin(2\pi t)), \quad \tilde{M} \leq 1.4, \quad \tilde{a} \geq 0.075. \end{aligned}$$

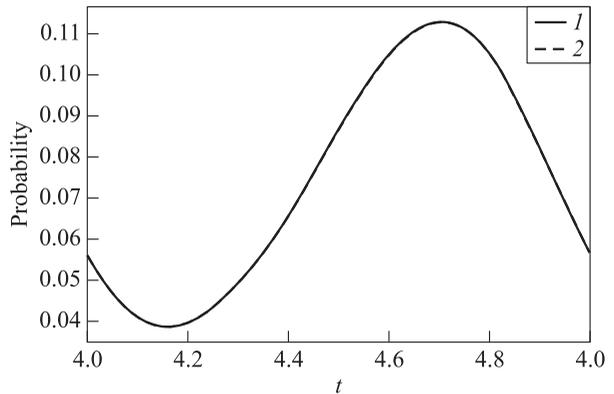
Let  $\varepsilon = 10^{-6}$  and  $\tilde{\varepsilon} = 0.15$ . Then, since  $\sup_n \sup_t \lambda_n(t) \leq 11.5$ , for the initial condition  $\mathbf{p}_N(0) = \mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots)^T$ , one has from (5) that

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_N(t)\| &\leq \frac{1.4 \cdot 11.5 \cdot 10^{-6}}{1.49 \cdot 1.15^{N-1}} \\ &\quad \times \left( 1.4e^{-0.075t} \|\mathbf{p}(0)\|_{1\tilde{D}} + \frac{1.4 \cdot 2.5 \cdot 1.15}{0.075} \right) \leq \\ &\leq 0.000579888 \cdot 1.15^{1-N}. \end{aligned}$$

Therefore, for example, for  $N = 90$ , the truncation error (in  $l_1$ -norm) is less than  $2.2974 \cdot 10^{-9}$ . The truncated system of Kolmogorov forward equations can be solved numerically with any known differential equation



**Figure 1** Convergence of the probability  $p_0(t)$  under two different initial conditions: 1 —  $X_{90}(0) = 0$ ; and 2 —  $X_{90}(0) = 90$



**Figure 2** Limiting version of the probability  $p_0(t)$  under two different initial conditions: 1 —  $X_{90}(0) = 0$ ; and 2 —  $X_{90}(0) = 90$

solver. For illustrative purposes, the graphs of the probability  $p_0(t)$  under two different initial conditions as  $t$  increases are given in Figs. 1 and 2.

## 6 Concluding Remarks

One of the possible ways to generalize the Markov chain  $X(t)$  is to allow for state-dependent catastrophes with intensities  $\{\alpha_n(t), n \geq 1\}$  and  $\{\beta_n(t), n \geq 2\}$ . Prior to the analysis of perturbation and truncation bounds, one needs to have some estimates of its convergence rate. Let  $\mathbf{p}^*(t)$  and  $\mathbf{p}^{**}(t)$  be two solutions of the Kolmogorov forward equations for such a chain, corresponding to two different initial conditions  $\mathbf{p}^*(0)$  and  $\mathbf{p}^{**}(0)$ . It is possible to show that the following statement holds.

**Theorem 3.** Assume that  $\beta_2(t) + \mu_2(t) \geq \lambda_0(t) + \beta_0(t)$  and  $\beta_n(t) \geq \beta_0(t) + \lambda_0(t)$  for  $n \geq 3$ . Denote  $\gamma(t) = \lambda_0(t) + \beta_0(t) + \inf_n \alpha_n(t)$ . Then, for any initial

conditions  $\mathbf{p}^*(0)$  and  $\mathbf{p}^{**}(0)$  and any  $t > 0$ , it holds that  $\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \leq 2e^{-\int_0^t \gamma(\tau) d\tau}$ .

The following example shows that the assumptions in Theorem 3 are feasible. Let

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \alpha(t) = 1 + 0.5 \sin(2\pi t) & \text{if } n = 1; \\ \min\left(\frac{n}{2}, 100\right) + \alpha(t) & \text{if } n \geq 2; \end{cases}$$

$$\beta_n(t) = \min(n + 1, 100) (1 + \alpha(t));$$

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \beta_0(t) + 3\alpha(t) & \text{if } n = 0; \\ \frac{1}{n} 3\alpha(t) & \text{if } n \geq 1; \end{cases}$$

$$\mu_n(t) = \min(n, 100) (3 - \cos(2\pi t)).$$

Then,  $\gamma(t) \leq 8 + 3 \sin(2\pi t)$  and, therefore,

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| = 4e^{-8t}.$$

It would be interesting to know whether the conditions of Theorem 3 can be weakened as well as whether the assumption of positivity of both  $\alpha_n(t)$  and  $\beta_n(t)$  can be relaxed.

## References

1. Brockwell, P. J. 1985. The extinction time of a birth, death and catastrophe process and of a related diffusion model. *Adv. Appl. Probab.* 17(1):42–52. doi: 10.2307/1427051.
2. Lavenberg, S. S. 1989. A perspective on queueing models of computer performance in queueing theory and its applications. *Perform. Evaluation* 10(1):53–76. doi: 10.1016/0166-5316(89)90005-9.
3. Krishna Kumar, B., and D. Arivudainambi. 2000. Transient solution of an  $M/M/1$  queue with catastrophes. *Comput. Math. Appl.* 40:1233–1240. doi: 10.1016/S0898-1221(00)00234-0.
4. Swift, R. J. 2001. Transient probabilities for a simple birth-death-immigration process under the influence of total catastrophes. *Int. J. Mathematics Mathematical Sciences* 25(10):689–692. doi: 10.1155/S0161171201005762.
5. Di Crescenzo, A., V. Giorno, A. G. Nobile, and L. M. Ricciardi. 2003. On the  $M/M/1$  queue with catastrophes and its continuous approximation. *Queueing Syst.* 43:329–347. doi: 10.1023/A:1023261830362.
6. Chao, X. and Y. Zheng. 2003. Transient analysis of immigration birth–death processes with total catastrophes. *Probab. Eng. Inform. Sc.* 17(1):83–106. doi: 10.1017/S0269964803171057.
7. Cairns, B., and P. K. Pollett. 2004. Extinction times for a general birth, death and catastrophe process. *J. Appl. Probab.* 41(4):1211–1218. doi: 10.1239/jap/1101840567.
8. Van Doorn, E. A., and A. Zeifman. 2005. Extinction probability in a birth–death process with killing. *J. Appl. Probab.* 42(1):185–198. doi: 10.1017/S0021900200000152.
9. Li, J. P., and L. N. Zhang. 2017.  $M^X/M/c$  queue with catastrophes and state-dependent control at idle time. *Front. Math. China* 12:1427–1439. doi: 10.1007/s11464-017-0674-8.
10. Zeifman, A., Y. Satin, I. Kovalev, and S. I. Ammar. 2021. Ergodicity and perturbation bounds for  $M_t/M_t/1$  queue with balking, catastrophes, server failures and repairs. *RAIRO — Oper. Res.* 55(4):2223–2240. doi: 10.1051/ro/2021101.
11. Sivazlian, B. D., and K. H. Wang. 1989. Economic analysis of the  $M/M/R$  machine repair problem with warm standbys. *Microelectron. Reliab.* 29(1):25–35. doi: 10.1016/0026-2714(89)90007-3.
12. Gupta, S. M. 1997. Machine interference problem with warm spares, server vacations and exhaustive service. *Perform. Evaluation* 29(3):195–211. doi: 10.1016/S0166-5316(96)00046-6.
13. Jain, M., and R. P. Ghimire. 1999. Machine repair queueing system with non-reliable server and heterogeneous service discipline. *Int. J. Engineering* 12(4):271–276.
14. Ke, J. C., and C. H. Wu. 2012. Multi-server machine repair model with standbys and synchronous multiple vacation. *Comput. Ind. Eng.* 62(1):296–305. doi: 10.1016/j.cie.2011.09.017.
15. Usov, I. A., Y. A. Satin, and A. I. Zeifman. 2023. O skorosti skhodimosti i predel'nykh kharakteristikakh dlya odnogo obobshchennogo protsessa rozhdeniya i gibeli [On the rate of convergence and limiting characteristics for one quasi-birth-death process]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):49–57. doi: 10.14357/19922264230307. EDN: RBKZJI.
16. Neuts, M. F. 1981. *Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach*. Baltimore, MA: The John Hopkins University Press. 332 p.
17. Kochetkova, I. A., A. S. Vlaskina, N. N. Vu, and V. S. Shorgin. 2021. Sistema massovogo obsluzhivaniya s upravlyaemym po signalam pereraspredeleniem priborov dlya analiza narezki resursov seti 5G [Queueing system with signals for dynamic resource allocation for analyzing network slicing in 5G networks]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(3):91–97. doi: 10.14357/19922264210312. EDN: JJENVV.
18. Kochetkova, I. A., A. I. Kushchazli, P. A. Kharin, and S. Ya. Shorgin. 2021. Model' skhemy prioritetnogo dostupa trafika URLLC i eMBB v seti pyatogo pokoleniya v vide resursnoy sistemy massovogo obsluzhivaniya [Model for analyzing priority admission control of URLLC and eMBB communications in 5G networks as a resource queueing system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(4):87–92. doi: 10.14357/19922264210412. EDN: IOMPGI.
19. Razumchik, R. V., A. S. Rumyantsev, and R. M. Gari-mella. 2023. Veroyatnostnaya model' dlya otsenki kharakteristik proizvoditel'nosti markovskoy modeli superkomp'yutera [A queueing system for performance

- evaluation of a Markovian supercomputer model]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):62–70. doi: 10.14357/19922264230209. EDN: KXYHPO.
20. Krivenko, M. P. 2024. Statisticheskiy kriteriy stabil'nosti sistemy massovogo obsluzhivaniya, osnovannyy na vkhodnom i vykhodnom potokakh [Statistical criterion for queuing system stability based on input and output flows]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):54–60. doi: 10.14357/19922264240108. EDN: JNJJMU.
21. Zeifman, A., I. Usov, A. Kryukova, and Y. Satin. 2024. Bounds on the rate of convergence for a class of birth–death process with two types of catastrophes. *8th Conference (International) on Information, Control, and Communication Technologies Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 1–6.
22. Li, J. 2024. Birth–death processes with two-type catastrophes. *Mathematics* 12(10):1468. 17 p. doi: 10.3390/math12101468.

Received December 4, 2024

Accepted January 15, 2025

## Contributors

**Usov Ilya A.** (b. 1997) — PhD student, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; iusov35@yandex.ru

**Satin Yacov A.** (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; yacovi@mail.ru

**Zeifman Alexander I.** (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, head of department, Department of Applied Mathematics, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; a\_zeifman@mail.ru

**Korolev Victor Yu.** (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, head of department, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; vkorolev@cs.msu.su

---

---

# НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ТИПА РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ С ДВУМЯ ТИПАМИ КАТАСТРОФ

И. А. Усов<sup>1</sup>, Я. А. Сатин<sup>1</sup>, А. И. Зейфман<sup>1,2</sup>, В. Ю. Королев<sup>2,3,4</sup>

<sup>1</sup>Вологодский государственный университет

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук

<sup>3</sup>Московский центр фундаментальной и прикладной математики

<sup>4</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

**Аннотация:** Рассматривается класс неоднородных марковских цепей с непрерывным временем со счетным множеством состояний типа рождения и гибели. В цепи возможны два типа дополнительных переходов, переводящих ее либо в граничное состояние, либо в соседнее с ним. Предполагается, что с ростом номера состояния интенсивности рождения (гибели) монотонно убывают (возрастают). Впервые получены оценки устойчивости с использованием специальных весовых норм, связанных с полной вариацией. В той же норме построена оценка погрешности аппроксимации исходной цепи процессом с конечным числом состояний. Наконец, для случая, когда все интенсивности зависят от состояния цепи, с помощью метода логарифмической нормы представлены некоторые условия, гарантирующие (слабую) эргодичность в норме полной вариации. Результаты сопровождаются иллюстративными примерами.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания; процесс рождения и гибели; катастрофы; аппроксимации; устойчивость

DOI: 10.14357/19922264250109

EDN: XQBLJM

## Литература

1. *Brockwell P. J.* The extinction time of a birth, death and catastrophe process and of a related diffusion model // *Adv. Appl. Probab.*, 1985. Vol. 17. P. 42–52.
2. *Lavenberg S. S.* A perspective on queueing models of computer performance // *Perform. Evaluation*, 1989. Vol. 10. No. 1. P. 53–76. doi: 10.1016/0166-5316(89)90005-9.
3. *Krishna Kumar B., Arivudainambi D.* Transient solution of an  $M/M/1$  queue with catastrophes // *Comput. Math. Appl.*, 2000. Vol. 40. P. 1233–1240. doi: 10.1016/S0898-1221(00)00234-0.
4. *Swift R. J.* Transient probabilities for a simple birth-death-immigration process under the influence of total catastrophes // *Int. J. Mathematics Mathematical Sciences*, 2001. Vol. 25. P. 689–692. doi: 10.1155/S0161171201005762.
5. *Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M.* On the  $M/M/1$  queue with catastrophes and its continuous approximation // *Queueing Syst.*, 2003. Vol. 43. P. 329–347. doi: 10.1023/A:1023261830362.
6. *Chao X., Zheng Y.* Transient analysis of immigration birth–death processes with total catastrophes // *Probab. Eng. Inform. Sc.*, 2003. Vol. 17. No. 1. P. 83–106. doi: 10.1017/S0269964803171057.
7. *Cairns B., Pollett P. K.* Extinction times for a general birth, death and catastrophe process // *J. Appl. Probab.*, 2004. Vol. 41. No. 4. P. 1211–1218. doi: 10.1239/jap/1101840567.
8. *Van Doorn E. A., Zeifman A.* Extinction probability in a birth–death process with killing // *J. Appl. Probab.*, 2005. Vol. 42. P. 185–198. doi: 10.1017/S0021900200000152.
9. *Li J. P., Zhang L. N.*  $M^X/M/c$  queue with catastrophes and state-dependent control at idle time // *Front. Math. China*, 2017. Vol. 12. P. 1427–1439. doi: 10.1007/s11464-017-0674-8.
10. *Zeifman A., Satin Y., Kovalev I., Ammar S. I.* Ergodicity and perturbation bounds for  $M_t/M_t/1$  queue with balking, catastrophes, server failures and repairs // *RAIRO — Oper. Res.*, 2021. Vol. 55. P. 2223–2240. doi: 10.1051/ro/2021101.
11. *Sivazlian B. D., Wang K. H.* Economic analysis of the  $M/M/R$  machine repair problem with warm standbys // *Microelectron. Reliab.*, 1989. Vol. 29. No. 1. P. 25–35. doi: 10.1016/0026-2714(89)90007-3.
12. *Gupta S. M.* Machine interference problem with warm spares, server vacations and exhaustive service // *Perform. Evaluation*, 1997. Vol. 29. No. 3. P. 195–211. doi: 10.1016/S0166-5316(96)00046-6.
13. *Jain M., Ghimire R. P.* Machine repair queueing system with non-reliable server and heterogeneous service discipline // *Int. J. Engineering*, 1999. Vol. 12. No. 4. P. 271–276.
14. *Ke J. C., Wu C. H.* Multi-server machine repair model with standbys and synchronous multiple vacation // *Comput. Ind. Eng.*, 2012. Vol. 62. P. 296–305. doi: 10.1016/j.cie.2011.09.017.
15. *Усов И. А., Сатин Я. А., Зейфман А. И.* О скорости сходимости и предельных характеристиках для одного обобщенного процесса рождения и гибели // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 49–57. doi: 10.14357/19922264230307. EDN: RBKZJI.
16. *Neuts M. F.* Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach. — Baltimore, MD, USA: Johns Hopkins University Press, 1981. 332 p.
17. *Кочеткова И. А., Власкина А. С., Ву Н. Н., Шоргин В. С.* Система массового обслуживания с управляемым по сигналам перераспределением приборов для анализа нарезки ресурсов сети 5G // *Информатика и её применения*, 2021. Т. 15. Вып. 3. С. 91–97. doi: 10.14357/19922264210312. EDN: JJENVV.
18. *Кочеткова И. А., Куцазли А. И., Харин П. А., Шоргин В. С.* Модель схемы приоритетного доступа трафика URLLC и eMBB в сети пятого поколения в виде ресурсной системы массового обслуживания // *Информатика и её применения*, 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 87–92. doi: 10.14357/19922264210412. EDN: IOMPGI.
19. *Разумчик Р. В., Румянцев А. С., Гаримелла Р. М.* Вероятностная модель для оценки характеристик производительности марковской модели суперкомпьютера // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 62–70. doi: 10.14357/19922264230209. EDN: KXYHPO.
20. *Кривенко М. П.* Статистический критерий стабильности системы массового обслуживания, основанный на входном и выходном потоках // *Информатика и её применения*, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 54–60. doi: 10.14357/19922264240108. EDN: JNJJMU.
21. *Zeifman A., Usov I., Kryukova A., Satin Y.* Bounds on the rate of convergence for a class of birth–death process with two types of catastrophes // 8th Conference (International) on Information, Control, and Communication Technologies Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2024. P. 1–6.
22. *Li J.* Birth–death processes with two-type catastrophes // *Mathematics*, 2024. Vol. 12. No. 10. Art. 1468. 17 p. doi: 10.3390/math12101468.

Поступила в редакцию 04.12.2024

Принята к публикации 15.01.2025

# РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ПОРОГОВОЙ ОБРАБОТКИ, ДОПУСКАЮЩИХ ПОСТРОЕНИЕ НЕСМЕЩЕННОЙ ОЦЕНКИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО РИСКА\*

О. В. Шестаков<sup>1</sup>

**Аннотация:** Методы вейвлет-анализа в сочетании с процедурами пороговой обработки широко используются в задачах оценивания функции сигнала по зашумленным данным. Их популярность объясняется адаптивностью к локальным особенностям исследуемых функций и высокой скоростью алгоритмов обработки. Плодотворным данный подход оказался также при обращении линейных однородных операторов, возникающих в некоторых задачах обработки сигналов и изображений. Наиболее распространенными видами пороговой обработки стали жесткая и мягкая пороговая обработка. Однако при использовании жесткой пороговой обработки получаются оценки с большой дисперсией, а мягкая пороговая обработка приводит к появлению дополнительного смещения. В попытке избавиться от этих недостатков в последние годы были предложены различные альтернативные виды пороговой обработки. В данной работе рассматривается класс пороговых функций, допускающих построение несмещенной оценки среднеквадратичного риска. Эта оценка позволяет анализировать погрешность методов подавления шума. Исследование свойств несмещенной оценки риска представляет собой важную практическую задачу, поскольку позволяет оценить качество как самих методов, так и используемого оборудования. В работе обсуждаются стратегии выбора пороговых значений и приводятся утверждения об асимптотической нормальности и сильной состоятельности оценки риска.

**Ключевые слова:** вейвлеты; пороговая обработка; линейный однородный оператор; несмещенная оценка риска

DOI: 10.14357/19922264250110

EDN: ZSIBDL

## 1 Введение

В медицинских, физических, астрономических и других научных исследованиях часто возникает задача получить представление об объекте, который описывается некоторой функцией  $f$ , имея возможность наблюдать только функцию  $Kf$ , где  $K$  — некоторый линейный оператор. При этом часто для получения приемлемой оценки функции  $f$  нельзя просто применить к наблюдаемым данным обратный оператор  $K^{-1}$ , поскольку эти данные, как правило, содержат шум и задача обращения оператора  $K$  оказывается некорректно поставленной. Традиционные подходы к регуляризации задачи обращения используют линейные методы, такие как оконное сингулярное разложение. Однако даже при оптимальном выборе параметров данные методы полностью определяются видом оператора  $K$  и не учитывают особенностей самой функции  $f$ .

В работах [1, 2] при дополнительном условии однородности операторов были разработаны методы

их обращения, основанные на вейвлет-разложении. Данные методы дают возможность учитывать локальные особенности восстанавливаемой функции, такие как резкие изменения и наличие особых точек. При этом подавление шума, как правило, осуществляется с помощью методов пороговой обработки вейвлет-коэффициентов.

Наиболее часто используется жесткая или мягкая пороговая обработка, однако каждая из них имеет свои недостатки. Жесткая пороговая обработка использует разрывную пороговую функцию, что приводит к появлению артефактов и невозможности построения несмещенной оценки риска, а при мягкой пороговой обработке в функции сигнала появляется дополнительное смещение.

В ряде работ предложены некоторые альтернативные функции пороговой обработки, справляющиеся с указанными недостатками [3–11]. При этом одним из самых популярных методов вычисления значения порога стала минимизация оценки

\* Работа выполнена при поддержке проекта № 075-15-2024-544 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, oshestakov@cs.msu.ru

среднеквадратичного риска, построенной по методу Стейна [12].

В данной работе рассматривается задача обращения линейного однородного оператора при помощи вейвлет-разложения и пороговой обработки, в которой пороговая функция имеет достаточно общий вид. Обсуждается метод вычисления адаптивного порога, минимизирующего оценку риска, а также асимптотические свойства этой оценки, такие как сильная состоятельность и асимптотическая нормальность. Аналогичные результаты для других моделей и методов пороговой обработки получены в работах [13–17].

## 2 Обращение линейных однородных операторов с помощью вейглет-вейвлет-разложения

Линейный оператор  $K$  называется однородным, если

$$K[f(a(x - x_0))] = a^{-\beta}(Kf)[a(x - x_0)]$$

для любого  $x_0$  и любого  $a > 0$ . Параметр  $\beta$  называется показателем однородности. Примерами линейных однородных операторов служат оператор интегрирования, преобразование Гильберта и преобразование Абея. В дальнейшем будем полагать, что  $\beta > 0$ . В этом случае задача обращения оператора  $K$  некорректно поставлена.

Для обращения линейных однородных операторов оказались весьма эффективными методы, основанные на вейвлет-разложениях [1, 2]. Эти методы дают возможность адаптироваться не только к виду оператора, как традиционные линейные методы обращения, но и к особенностям восстанавливаемых функций.

Вейвлет-разложение функции  $f \in L^2(\mathbb{R})$  имеет вид:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (1)$$

где  $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ , а  $\psi(t)$  — некоторая материнская вейвлет-функция. Семейство  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  образует ортонормированный базис в  $L^2(\mathbb{R})$ . Индекс  $j$  в (1) называется масштабом, а индекс  $k$  — сдвигом.

Поскольку оператор  $K$  линеен и однороден, существуют такие функции  $\xi_{j,k}$ , что  $\langle Kf, \xi_{j,k} \rangle = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$  [1]. Функции  $\xi_{j,k}$  называются «вейглетами». По своим свойствам они похожи на вейвлеты и также представляют собой сдвиги и растяжения

некоторой материнской функции  $\xi$ . Пусть  $\xi_{j,k} = \lambda_{j,k} u_{j,k}$ , где  $\lambda_{j,k} = \|(K^*)^{-1} \psi_{j,k}\|$ . Можно показать, что  $\lambda_{j,k} = 2^{\beta j} \lambda_{0,0}$ . При этом функция  $f$  представляется в виде ряда

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \lambda_{j,k} \langle Kf, u_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (2)$$

Как видно, в (2) коэффициенты разложения выражаются через  $Kf$ , а не через  $f$ . Эта формула лежит в основе метода обращения  $K$ , который называется вейвлет-вейглет-разложением. Последовательность  $\{u_{j,k}\}$  в (2) не образует ортонормированную систему, однако если выполнены некоторые условия гладкости, то она образует устойчивый базис [18].

Аналогично по базису вейвлет-функций можно разложить  $Kf$ :

$$Kf = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Функции  $\psi_{j,k}$  не обязаны совпадать с функциями в разложении (1), но для удобства будем обозначать их так же. Пусть  $\lambda_{j,k} = \|K^{-1} \psi_{j,k}\|$ , тогда  $\lambda_{j,k} = 2^{\beta j} \lambda_{0,0}$ , а функция  $f$  представляется в виде ряда [2]

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \lambda_{j,k} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle u_{j,k}, \quad (3)$$

где  $u_{j,k} = K^{-1} \psi_{j,k} / \lambda_{j,k}$ . Функции  $u_{j,k}$  не совпадают с функциями в разложении (2), однако по аналогии также называются «вейглетами».

Формула (3) лежит в основе еще одного метода обращения, который называется вейглет-вейвлет-разложением. В данном методе по ортонормальному базису раскладывается наблюдаемая функция  $Kf$ , а не  $f$ , как в методе вейвлет-вейглет-разложения. По этой причине далее будем рассматривать именно метод вейглет-вейвлет-разложения (3).

В дальнейшем будем предполагать выполнение некоторых условий гладкости. Будем считать, что функция  $Kf$  задана на конечном отрезке  $[a, b]$  и равномерно регулярна по Липшицу с некоторым показателем  $\gamma > 0$ . Также предположим, что вейвлет-функция  $M$  раз непрерывно дифференцируема ( $M \geq \gamma$ ), имеет  $M$  нулевых моментов и достаточно быстро убывает на бесконечности, т. е. существует такая константа  $C_A > 0$ , что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|^\gamma) |\psi(t)| dt \leq C_A.$$

Тогда для коэффициентов разложения в (3) справедливо

$$|\langle Kf, \psi_{j,k} \rangle| \leq \frac{C_f}{2^{j(\gamma+1/2)}},$$

где  $C_f$  — некоторая положительная константа. Причем, как правило, в рассматриваемых задачах линейный оператор  $K$  обладает тем свойством, что функция  $Kf$  оказывается более гладкой, чем функция  $f$ . Таким образом, ограничения на гладкость  $f$  могут быть менее жесткими.

### 3 Подавление шума с помощью пороговой обработки

На практике в наблюдениях, как правило, присутствует шум. В большинстве случаев можно считать, что это аддитивный белый гауссовский шум, т. е. наблюдения описываются следующей моделью:

$$X_i = (Kf)_i + z_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (N = 2^J),$$

где  $(Kf)_i$  — «чистые» значения наблюдаемой функции  $Kf$ ;  $z_i$  — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Дискретное вейвлет-разложение представляет собой умножение вектора значений функции  $Kf$  на ортогональную матрицу  $W$ , определяемую вейвлет-функцией  $\psi$ . При этом получается набор дискретных вейвлет-коэффициентов  $\mu_{j,k}$ , для которых справедливо  $\mu_{j,k} \approx \sqrt{N} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle$  [19]. Поскольку матрица  $W$  ортогональна, дискретные вейвлет-коэффициенты имеют вид:

$$Y_{j,k} = \mu_{j,k} + \epsilon_{j,k}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad k = \overline{0, 2^j-1},$$

где  $\epsilon_{j,k}$  также независимы и нормально распределены с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ .

Для подавления шума к вейвлет-коэффициентам применяется функция пороговой обработки, смысл которой заключается в обнулении достаточно маленьких коэффициентов, которые считаются шумом. Наиболее распространены функция жесткой пороговой обработки

$$\rho_H(y, T_j) = \begin{cases} y & \text{при } |y| > T_j; \\ 0 & \text{при } |y| \leq T_j \end{cases}$$

и функция мягкой пороговой обработки

$$\rho_S(y, T_j) = \begin{cases} y - T_j & \text{при } y > T_j; \\ y + T_j & \text{при } y < -T_j; \\ 0 & \text{при } |y| \leq T_j \end{cases}$$

с некоторым порогом  $T_j$ , который может зависеть от масштаба  $j$ . Каждая из этих функций имеет свои недостатки. Функция  $\rho_H$  разрывна, что приводит к отсутствию устойчивости и появлению дополнительных артефактов, а использование функции  $\rho_S$

приводит к появлению дополнительного смещения в оценке функции сигнала. В ряде работ предложены некоторые альтернативные функции пороговой обработки  $\rho(y, T_j)$ , которые, по сути, служат компромиссом между жесткой и мягкой пороговой обработкой [3–11]. Эти функции непрерывны, как и функция  $\rho_S(y, T_j)$ , но при этом  $\rho(y, T_j) \rightarrow y$  при  $|y| \rightarrow \infty$ , т. е. для больших абсолютных значений коэффициентов они похожи на функцию жесткой пороговой обработки. Некоторые из этих функций зависят от дополнительных параметров.

В связи с появлением разнообразных видов функций пороговой обработки имеет смысл рассмотреть некоторый общий класс таких функций. Пусть  $h(y, T_j)$  обладает следующими свойствами:

- (1)  $h(-y, T_j) = -h(y, T_j)$  (нечетность);
- (2)  $0 \leq h(y, T_j) \leq T_j$  при  $y \geq 0$  (ограниченность);
- (3)  $h(T_j, T_j) = T_j$  (непрерывность пороговой функции).

Определим функцию пороговой обработки

$$\rho_h(y, T_j) = \begin{cases} y - h(y, T_j) & \text{при } |y| > T_j; \\ 0 & \text{при } |y| \leq T_j. \end{cases}$$

Такой вид имеют, например, функция мягкой пороговой обработки, функция гибридной пороговой обработки [4, 10], функция пороговой обработки на основе гиперболического тангенса [9], сигмоидная функция [11] и некоторые другие.

### 4 Значение порога и статистические свойства оценки риска

Среднеквадратичный риск метода пороговой обработки определяется по формуле

$$R_J(T) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{j,k}^2 \mathbb{E} (\rho_h(Y_{j,k}, T_j) - \mu_{j,k})^2, \quad (4)$$

где  $T = (T_0, \dots, T_{J-1})$ . Методы выбора пороговых значений  $T_j$ , как правило, ориентированы на минимизацию риска (4). Заметим, что в выражении (4) присутствуют неизвестные величины  $\mu_{j,k}$ , и вычислить значение  $R_J(T)$  нельзя. Поэтому при вычислении  $T_j$  используется минимаксный подход в предположении о принадлежности функции сигнала какому-либо классу [20–22]. Отметим также, что популярен так называемый универсальный порог  $T_j^U = \sigma \sqrt{2 \ln 2^j}$ . Этот порог в определенном смысле максимален (в работах [23, 24] показано, что можно не рассматривать  $T_j > T_j^U$ ).

Другой подход к вычислению порогового значения основан на минимизации статистической оценки риска (4), построенной по методу Стейна [12]. Если  $h(y, T_j)$  дифференцируема по переменной  $y$ , то справедливо соотношение

$$E(\rho_h(Y_{j,k}, T_j) - \mu_{j,k})^2 = \sigma^2 + E g^2(Y_{j,k}) - 2\sigma^2 E g'(Y_{j,k}),$$

где  $g(Y_{j,k}) = Y_{j,k} - \rho_h(Y_{j,k}, T_j)$ . Таким образом, в качестве несмещенной оценки риска можно использовать следующую величину:

$$\widehat{R}_J(T_j) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \lambda_{j,k}^2 F(Y_{j,k}, T_j), \quad (5)$$

где

$$F(y, T_j) = \begin{cases} y^2 - \sigma^2 & \text{при } |y| \leq T_j; \\ h^2(y, T_j) + \sigma^2 - 2\sigma^2 h'_y(y, T_j) & \text{при } |y| > T_j. \end{cases}$$

Пороги  $T_j^S$  выбираются для каждого  $j$  так, чтобы вектор значений  $T^S = (T_0^S, \dots, T_{J-1}^S)$  минимизировал оценку (5):

$$\widehat{R}_J(T^S) = \min_{T: T_j \in [0, T_j^U], j=0, \dots, J-1} \widehat{R}_J(T).$$

Этот вектор значений имитирует вектор теоретических «идеальных» пороговых значений  $T_{\text{Min}}$ , минимизирующих теоретический риск (4):

$$R_J(T_{\text{Min}}) = \min_{T: T_j \in [0, T_j^U], j=0, \dots, J-1} R_J(T).$$

Если дополнительно предположить, что при любом фиксированном  $y$  функция  $h(y, T_j)$  возрастает по  $T_j$ , а  $h'_y(y, T_j)$  убывает по  $T_j$  (этим условиям удовлетворяют, например, функция гибридной пороговой обработки и функция пороговой обработки на основе гиперболического тангенса), то алгоритм вычисления значения  $T_j^S$  в общем случае станет аналогичен алгоритму вычисления этого порога для мягкой пороговой обработки [19].

При каждом фиксированном  $j \in \{0, \dots, J-1\}$  упорядочим  $Y_{j,k}$  по убыванию их абсолютных значений и обозначим через  $Y_{j,(i)}$   $i$ -ю координату полученного упорядоченного вектора. Пусть  $l$  — такой индекс, что

$$|Y_{j,(l)}| \leq T_j < |Y_{j,(l-1)}|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^j-1} F(Y_{j,(i)}, T_j) &= \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} F(Y_{j,(i)}, T_j) + \sum_{i=l}^{2^j-1} F(Y_{j,(i)}, T) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{l-1} (h^2(Y_{j,(i)}, T) + \sigma^2 - 2\sigma^2 h'_y(Y_{j,(i)}, T)) + \\ &\quad + \sum_{i=l}^{2^j-1} (Y_{j,(i)}^2 - \sigma^2) = \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} (h^2(Y_{j,(i)}, T) - 2\sigma^2 h'_y(Y_{j,(i)}, T)) + \\ &\quad + \sum_{i=l}^{2^j-1} Y_{j,(i)}^2 + (2l - 2^j)\sigma^2. \quad (6) \end{aligned}$$

При введенных ограничениях на функцию  $h(y, T)$  выражение (6) при фиксированном  $l$  возрастает по  $T_j$ . Следовательно, минимум достигается при  $T = |Y_{j,(l)}|$ . Пороговые значения  $T_j^S$ ,  $j = 0, \dots, J-1$ , минимизирующие  $\widehat{R}_J(T)$ , ищутся при каждом  $j$  сравнением  $2^j$  значений выражения (6) в точках  $T_m = |Y_{j,(m)}|$ ,  $0 \leq m \leq 2^j - 1$ . То значение  $|Y_{j,(m)}|$ , на котором достигается минимум, принимается за  $T_j^S$ .

Для регулярных по Липшицу функций сигнала  $f$  можно установить асимптотические свойства оценки риска. Если дополнительно предположить, что существует положительная константа  $c$  такая, что  $|h'_y(y, T)| \leq cT^2$ ,  $|h''_y(y, T)| \leq cT^2$  и  $|h''_{yT}(y, T)| \leq cT^2$  при всех  $y$  (что, как правило, выполнено), то справедливы следующие утверждения, доказательство которых полностью аналогично доказательству соответствующих утверждений в работах [25–27].

**Теорема 1.** Пусть  $Kf$  задана на некотором отрезке  $[a, b]$  и равномерно регулярна по Липшицу с показателем  $\gamma > (\delta\beta + 2)^{-1}$ . Тогда

$$P\left(\frac{\widehat{R}_J(T^S) - R_J(T_{\text{Min}})}{D_J} < x\right) \rightarrow \Phi(x) \text{ при } J \rightarrow \infty,$$

где

$$D_J = \sqrt{2\sigma^4 \lambda_{0,0}^4 (2^{4\beta+1} - 1)^{-1} 2^{(2\beta+1/2)J}};$$

$\Phi(x)$  — функция распределения стандартного нормального закона.

**Теорема 2.** Пусть  $Kf \in L^2(\mathbb{R})$  задана на некотором отрезке  $[a, b]$ . Тогда при любом  $\theta > 1/2 + 2\beta$

$$\frac{\widehat{R}_J(T^S) - R_J(T_{\text{Min}})}{2^{\theta J}} \rightarrow 0 \text{ п. в. при } J \rightarrow \infty.$$

Данные теоремы обосновывают использование величины  $\widehat{R}_J(T^S)$  для оценивания погрешности и позволяют строить асимптотические доверительные интервалы для теоретического риска  $R_J(T_{\text{Min}})$ .

## 5 Заключение

В работе анализируется метод обращения линейных однородных операторов, основанный на пороговой обработке вейвлет-коэффициентов. Рассматривается класс пороговых функций, которые позволяют построить несмещенную оценку среднеквадратичного риска. Эта оценка дает возможность проанализировать погрешность методов подавления шума на основе только наблюдаемых данных. В статье исследуются стратегии выбора пороговых значений и приводятся утверждения об асимптотической нормальности и сильной состоятельности оценки риска.

## Литература

1. *Donoho D.* Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition // *Appl. Comput. Harmon. A.*, 1995. Vol. 2. P. 101–126. doi: 10.1006/acha.1995.1008.
2. *Abramovich F., Silverman B. W.* Wavelet decomposition approaches to statistical inverse problems // *Biometrika*, 1998. Vol. 85. No. 1. P. 115–129. doi: 10.1093/biomet/85.1.115.
3. *Gao H.-Y.* Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote // *J. Comput. Graph. Stat.*, 1998. Vol. 7. No. 4. P. 469–488. doi: 10.1080/10618600.1998.10474789.
4. *Chmelka L., Kozumplik J.* Wavelet-based wiener filter for electrocardiogram signal denoising // *Comput. Cardiol.*, 2005. Vol. 32. P. 771–774. doi: 10.1109/CIC.2005.1588218.
5. *Poornachandra S., Kumaravel N., Saravanan T. K., Somaskandan R.* WaveShrink using modified hyper-shrinkage function // 27th Annual Conference (International) of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2005. P. 30–32. doi: 10.1109/IEMBS.2005.1616334.
6. *Lin Y., Cai J.* A new threshold function for signal denoising based on wavelet transform // Conference (International) on Measuring Technology and Mechatronics Automation Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010. P. 200–203. doi: 10.1109/ICMTMA.2010.347.
7. *Huang H.-C., Lee T. C. M.* Stabilized thresholding with generalized sure for image denoising // 17th Conference (International) on Image Processing Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010. P. 1881–1884. doi: 10.1109/ICIP.2010.5652353.
8. *Zhao R.-M., Cui H.-M.* Improved threshold denoising method based on wavelet transform // 7th Conference (International) on Modelling, Identification and Control Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015. Art. 7409352. 4 p. doi: 10.1109/ICMIC.2015.7409352.
9. *He C., Xing J., Li J., Yang Q., Wang R.* A new wavelet thresholding function based on hyperbolic tangent function // *Math. Probl. Eng.*, 2015. Vol. 2015. Art. 528656. 10 p. doi: 10.1155/2015/528656.
10. *Priya K. D., Rao G. S., Rao P. S.* Comparative analysis of wavelet thresholding techniques with wavelet-wiener filter on ECG signal // *Procedia Comput. Sci.*, 2016. Vol. 87. P. 178–183. doi: 10.1016/j.procs.2016.05.145.
11. *He H., Tan Y.* A novel adaptive wavelet thresholding with identical correlation shrinkage function for ECG noise removal // *Chinese J. Electron.*, 2018. Vol. 27. No. 3. P. 507–513. doi: 10.1049/cje.2018.02.006.
12. *Stein C.* Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // *Ann. Stat.*, 1981. Vol. 9. No. 6. P. 1135–1151. doi: 10.1214/aos/1176345632.
13. *Шестаков О. В.* Асимптотическая регулярность вейвлет-методов обращения линейных однородных операторов по наблюдениям, регистрируемым в случайные моменты времени // *Информатика и её применения*, 2020. Т. 14. Вып. 1. С. 3–9. doi: 10.14357/19922264200101. EDN: GJHMK.
14. *Палионная С. И., Шестаков О. В.* Использование FDR-метода множественной проверки гипотез при обращении линейных однородных операторов // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 44–51. doi: 10.14357/19922264220206. EDN: NBVVTW.
15. *Шестаков О. В.* Несмещенная оценка риска пороговой обработки с двумя пороговыми значениями // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 4. С. 14–19. doi: 10.14357/19922264220403. EDN: DZBVLC.
16. *Шестаков О. В., Степанов Е. П.* Нелинейная регуляризация обращения линейных однородных операторов с помощью метода блочной пороговой обработки // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 2–8. doi: 10.14357/19922264230401. EDN: PGKQYE.
17. *Воронцов М. О., Шестаков О. В.* Асимптотическая нормальность и сильная состоятельность оценки риска при использовании FDR-порога в условиях слабой зависимости // *Информатика и её применения*, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 69–79. doi: 10.14357/19922264240309. EDN: ZOQVTO.
18. *Lee N.* Wavelet-vaguelette decompositions and homogeneous equations: PhD Thesis. — West Lafayette, IN, USA: Purdue University, 1997. 93 p.
19. *Mallat S.* A wavelet tour of signal processing. — New York, NY, USA: Academic Press, 1999. 857 p.
20. *Donoho D., Johnstone I. M.* Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage // *Biometrika*, 1994. Vol. 81. No. 3. P. 425–455. doi: 10.1093/biomet/81.3.425.
21. *Donoho D., Johnstone I. M.* Minimax estimation via wavelet shrinkage // *Ann. Stat.*, 1998. Vol. 26. No. 3. P. 879–921. doi: 10.1214/aos/1024691081.
22. *Jansen M.* Noise reduction by wavelet thresholding. — Lecture notes in statistics ser. — New York, NY, USA: Springer, 2001. Vol. 161. 196 p.
23. *Donoho D., Johnstone I. M.* Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // *J. Am. Stat. Assoc.*, 1995. Vol. 90. P. 1200–1224. doi: 10.1080/01621459.1995.10476626.

24. Marron J. S., Adak S., Johnstone I. M., Neumann M. H., Patil P. Exact risk analysis of wavelet regression // *J. Comput. Graph. Stat.*, 1998. Vol. 7. P. 278–309. doi: 10.1080/10618600.1998.10474777.
25. Шестаков О. В. Асимптотическая нормальность оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов при выборе адаптивного порога // Докл. Акад. наук, 2012. Т. 445. № 5. С. 513–515.
26. Шестаков О. В. О свойствах оценки среднеквадратичного риска при регуляризации обращения линейного однородного оператора с помощью адаптивной пороговой обработки коэффициентов вейвлет-вейвлет разложения // Вестник Тверского государственного университета. Сер. Прикладная математика, 2012. № 1(24). С. 117–130. EDN: PEZOJH.
27. Шестаков О. В. Сильная состоятельность оценки среднеквадратичной погрешности при решении обратных статистических задач // Информатика и её применения, 2017. Т. 1. Вып. 2. С. 117–121. doi: 10.14357/19922264170213. EDN: YTYGBP.

Поступила в редакцию 15.12.2024

Принята к публикации 15.01.2025

## SOLVING INVERSE STATISTICAL PROBLEMS USING THRESHOLD PROCESSING METHODS THAT ALLOW THE CONSTRUCTION OF AN UNBIASED ESTIMATE OF THE MEAN-SQUARE RISK

O. V. Shestakov<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

<sup>2</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>3</sup>Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

**Abstract:** The methods of wavelet analysis in combination with threshold processing procedures are widely used in the tasks of estimating the signal function from noisy data. Their popularity is explained by their adaptability to the local features of the studied functions and the high speed of processing algorithms. This approach has also proved fruitful for the inversion of linear homogeneous operators that arise in some signal and image processing tasks. The most common types of threshold processing are hard and soft threshold processing. However, when using hard threshold processing, estimates with large variance are obtained and soft threshold processing leads to an additional bias. In an attempt to get rid of these disadvantages, various alternative types of threshold processing have been proposed in recent years. In this paper, the author considers a class of threshold functions that allow the construction of an unbiased estimate of the mean-square risk. This estimate makes it possible to analyze the error of noise reduction methods. The study of the properties of unbiased risk estimate is an important practical task, since it allows one to assess the quality of both the methods themselves and the equipment used. The paper discusses strategies for choosing threshold values and provides statements about the asymptotic normality and strong consistency of the risk estimate.

**Keywords:** wavelets; threshold processing; linear homogeneous operator; unbiased risk estimate

DOI: 10.14357/19922264250110

EDN: ZSIBDL

### Acknowledgments

The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. 075-15-2024-544.

### References

1. Donoho, D. 1995. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition. *Appl. Comput. Harmon. A.* 2(2):101–126. doi: 10.1006/acha.1995.1008.
2. Abramovich, F., and B. W. Silverman. 1998. Wavelet decomposition approaches to statistical inverse problems. *Biometrika* 85(1):115–129. doi: 10.1093/biomet/85.1.115.
3. Gao, H.-Y. 1998. Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote. *J. Comput. Graph. Stat.* 7(4):469–488. doi: 10.1080/10618600.1998.10474789.

4. Chmelka, L., and J. Kozumplik. 2005. Wavelet-based Wiener filter for electrocardiogram signal denoising. *Comput. Cardiol.* 32:771–774. doi: 10.1109/CIC.2005.1588218.
5. Poornachandra, S., N. Kumaravel, T.K. Saravanan, and R. Somaskandan. 2005. WaveShrink using modified hyper-shrinkage function. *27th Annual Conference (International) of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 30–32. doi: 10.1109/IEMBS.2005.1616334.
6. Lin, Y., and J. Cai. 2010. A new threshold function for signal denoising based on wavelet transform. *Conference (International) on Measuring Technology and Mechatronics Automation Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 200–203. doi: 10.1109/ICMTMA.2010.347.
7. Huang, H.-C. and T.C.M. Lee. 2010. Stabilized thresholding with generalized sure for image denoising. *17th Conference (International) on Image Processing Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 1881–1884. doi: 10.1109/ICIP.2010.5652353.
8. Zhao, R.-M., and H.-M. Cui. 2015. Improved threshold denoising method based on wavelet transform. *7th Conference (International) on Modelling, Identification and Control Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 7409352. 4 p. doi: 10.1109/ICMIC.2015.7409352.
9. He, C., J. Xing, J. Li, Q. Yang, and R. Wang. 2015. A new wavelet thresholding function based on hyperbolic tangent function. *Math. Probl. Eng.* 2015:528656. 10 p. doi: 10.1155/2015/528656.
10. Priya, K. D., G.S. Rao, and P.S. Rao. 2016. Comparative analysis of wavelet thresholding techniques with wavelet-wiener filter on ECG signal. *Procedia Comput. Sci.* 87:178–183. doi: 10.1016/j.procs.2016.05.145.
11. He, H., and Y. Tan. 2018. A novel adaptive wavelet thresholding with identical correlation shrinkage function for ECG noise removal. *Chinese J. Electron.* 27(3):507–513. doi: 10.1049/cje.2018.02.006.
12. Stein, C. 1981. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *Ann. Stat.* 9(6):1135–1151. doi: 10.1214/aos/1176345632.
13. Shestakov, O.V. 2020. Asimptoticheskaya regulyarnost' veyvlet-metodov obrashcheniya lineynykh odnorodnykh operatorov po nablyudeniyam, registriuemym v sluchaynye momenty vremeni [Asymptotic regularity of the wavelet methods of inverting linear homogeneous operators from observations recorded at random times]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(1):3–9. doi: 10.14357/19922264200101. EDN: GJHMNK.
14. Palionnaya, S. I., and O. V. Shestakov. 2022. Ispol'zovanie FDR-metoda mnozhestvennoy proverki gipotez pri obrashchenii lineynykh odnorodnykh operatorov [The use of the FDR method of multiple hypothesis testing when inverting linear homogeneous operators]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):44–51. doi: 10.14357/19922264220206. EDN: NBVVTW.
15. Shestakov, O.V. 2022. Nesmeshchennaya otsenka riska porogovoy obrabotki s dvumya porogovymi znacheniyami [Unbiased thresholding risk estimate with two threshold values]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(4):14–19. doi: 10.14357/19922264220403. EDN: DZBVLC.
16. Shestakov, O. V., and E. P. Stepanov. 2023. Nelineynaya regulyazitsiya obrashcheniya lineynykh odnorodnykh operatorov s pomoshch'yu metoda blochnoy porogovoy obrabotki [Nonlinear regularization of the inversion of linear homogeneous operators using the block thresholding method]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):2–8. doi: 10.14357/19922264230401. EDN: PGKKYE.
17. Vorontsov, M. O., and O. V. Shestakov. 2024. Asimptoticheskaya normal'nost' i sil'naya sostoyatel'nost' otsenki riska pri ispol'zovanii FDR-poroga v usloviyakh slaboy zavisimosti [Asymptotic normality and strong consistency of risk estimate when using the FDR threshold under weak dependence condition]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):69–79. doi: 10.14357/19922264240309. EDN: ZOQVTO.
18. Lee, N. 1997. Wavelet-vaguelette decompositions and homogeneous equations. West Lafayette, IN: Purdue University. PhD Thesis. 93 p.
19. Mallat, S. 1999. *A wavelet tour of signal processing*. New York, NY: Academic Press. 857 p.
20. Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1994. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika* 81(3):425–455. doi: 10.1093/biomet/81.3.425.
21. Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1998. Minimax estimation via wavelet shrinkage. *Ann. Stat.* 26(3):879–921. doi: 10.1214/aos/1024691081.
22. Jansen, M. 2001. *Noise reduction by wavelet thresholding*. Lecture notes in statistics ser. New York, NY: Springer. Vol. 161. 196 p.
23. Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1995. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *J. Am. Stat. Assoc.* 90(432):1200–1224. doi: 10.1080/01621459.1995.10476626.
24. Marron, J. S., S. Adak, I. M. Johnstone, M. H. Neumann, and P. Patil. 1998. Exact risk analysis of wavelet regression. *J. Comput. Graph. Stat.* 7(3):278–309. doi: 10.1080/10618600.1998.10474777.
25. Shestakov, O.V. 2012. Asymptotic normality of adaptive wavelet thresholding risk estimation. *Dokl. Math.* 86(1):556–558. doi: 10.1134/S1064562412040370. EDN: RGEMMD.
26. Shestakov, O. V. 2012. O svoystvakh otsenki srednekvadrachnogo riska pri regulyazitsii obrashcheniya lineynogo odnorodnogo operatora s pomoshch'yu adaptivnoy porogovoy obrabotki koefitsientov veyvlet-veyvlet razlozheniya [The properties of mean square error estimate when regularizing the inversion of the homogeneous linear operator using adaptive thresholding of wavelet-vaguelette decomposition coefficients]. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Ser. Applied mathematics] 1(24):117–130. EDN: PEZOJH.

27. Shestakov, O. V. 2017. Sil'naya sostoyatel'nost' otsenki srednekvadrachnoy pogreshnosti pri reshenii obratnykh statisticheskikh zadach [Strong consistency of the mean square risk estimate in the inverse statistical problems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(2):117–121. doi: 10.14357/19922264170213. EDN: YTYGBP.

*Received December 15, 2024*

*Accepted January 15, 2025*

## Contributor

**Shestakov Oleg V.** (b. 1976) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M.V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; leading scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; oshestakov@cs.msu.su

# МЕТРИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В КОНТЕКСТЕ ТЕОРИИ РЕШЕТОК.

## ЧАСТЬ 1. О НОРМАЛЬНОСТИ ПРОСТРАНСТВ

И. Ю. Торшин<sup>1</sup>

**Аннотация:** Фундаментальной проблемой в машинном обучении и в других современных методах анализа данных стало решение вопроса о порождении метрических функций расстояний (метрик), которые были бы адекватны исследуемым прикладным задачам. В работе представлены результаты систематического анализа возможностей метризации дискретных топологических пространств с использованием понятий теории решеток. Доказана теорема о регулярности и нормальности топологических пространств, возникающих в задачах распознавания, классификации и числового прогнозирования. Регулярность (по Ю. И. Журавлёву) множества прецедентов гарантирует нормальность топологического пространства (аксиома отделимости  $T_4$ ) и, следовательно, метризуемость этого пространства. Планируется подготовить отдельную статью с практическими приложениями следствий теоремы о регулярности и нормальности, которые позволяют систематизировать поиск проблемно-ориентированных метрик, наиболее приемлемых для той или иной прикладной задачи.

**Ключевые слова:** топологический анализ данных; теория решеток; алгебраический подход Ю. И. Журавлёва и К. В. Рудакова; аксиомы отделимости

DOI: 10.14357/19922264250111

EDN: SAWKMO

## 1 Введение

Топологическая теория распознавания [1–3] — перспективное направление к постановке, анализу и решению задач машинного обучения. Применение методов топологии, теории решеток и других разделов дискретной математики в рамках алгебраического подхода Ю. И. Журавлёва и К. В. Рудакова позволяет осуществлять систематический поиск синтетических признаков описаний объектов с максимальной возможной «информативностью» по отношению к исследуемой задаче. В рамках данного подхода были получены, в частности, критерии ранговой оптимизации для решения задач прогнозирования числовых целевых переменных [2], методы формирования множеств прецедентов над существенно разнородными признаковыми описаниями [1], практические приложения теории хемографов к задачам хемоинформатики [4, 5], биоинформатики [6], материаловедения [7], фармакоинформатики [1, 2, 5].

Порождение высокоинформативных синтетических признаков осуществляется посредством метода опорных функций [1, 2] или же на основе известных из литературы метрических функций расстояния (метрик). Последние вводятся как линейные комбинации оценок на булевых решетках или посредством замены оценок на некоторые функции и/или векторы [3]. Сравнительное ис-

следование предлагаемых подходов на комплексе задач фармакоинформатики показало перспективность и метода опорных функций, и синтетических признаков на основе метрик [5].

Напомним, что формализм топологической теории анализа данных [3] оперирует объектами  $x$  из множества исходных описаний  $N_0$  объектов  $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_{N_0}\}$ ,  $\mathbf{X} \subseteq S$ , признаки которых вычисляются посредством функций  $\Gamma_k : S \rightarrow I_k$ , порождающих предбазу топологии  $T(\mathbf{X})$  множествами  $\{\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x))\}$ ,  $k = \overline{1, n+l}$ , где  $n$  — число признаков;  $l$  — число целевых переменных ( $\Gamma_t(x)$ ),  $t = \overline{n+1, n+l}$ . Определено множество прецедентов  $\mathbf{Q} = \varphi(\mathbf{X}) = \{D(x_i) | x_i \in \mathbf{X}\}$ ,  $D(x_i) = (\Gamma_1(x_i) \times \dots \times \Gamma_k(x_i) \times \dots \times \Gamma_{n+l}(x_i))_{\Delta}$ .

Как и в работах [1–5], принимается, что для множеств  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Q}$  выполнено условие *регулярности по Ю. И. Журавлёву*, формулируемое как  $\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{X})) = \mathbf{X}$ , т.е. уникальность признакового описания каждого объекта в  $\mathbf{X}$ . При выполнении условия регулярности множеству элементов топологии  $T(\mathbf{X})$  сопоставлено изоморфное множество элементов булевой *решетки*  $L(T(\mathbf{X}))$ . Тогда прецедентному соотношению между значениями признаков  $\Gamma_k(x)$  и  $t$ -й целевой переменной, заданному множеством  $\mathbf{Q}$ , соответствует множество пар  $\{(\{\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x_i)), k = \overline{1, n}\}, \Gamma_t^{-1}(\Gamma_t(x_i))), i = \overline{1, N_0}\}$ , отображаемое в *метрическое пространство значений*

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, tiy135@yahoo.com

признаков  $M_L(L(T(\mathbf{X})), \rho_L)$  посредством метрики  $\rho_L : L^2 \rightarrow R^+$ . В общем случае имеется  $m_0$   $\rho_L$ -метрик ( $\rho_m, m = \overline{1, m_0}$ ) и синтетические признаки порождаются как функционалы над  $\rho_m$  [5].

Фундаментальной исследовательской проблемой при таком рассмотрении прецедентных отношений и порождении информативных синтетических признаков становится вопрос о том, все ли возможные подходы к введению  $\rho_L$ -метрик опробованы. Очевидно, что использование даже всех известных метрик не может исчерпывать множество всех возможных метрик (уже не говоря о различных подходах к порождению  $\rho_m$ ). Целью настоящей работы ставится более детальное изучение данного вопроса на основе аксиом отделимости, теорем П. С. Урысона и метризации через гильбертово пространство, как это принято в научной школе А. Н. Колмогорова [8].

## 2 Аксиомы отделимости топологических пространств

Важным вопросом при анализе свойств топологий  $T(\mathbf{X})$ , изоморфных им множеств элементов решеток  $L(T(\mathbf{X}))$  и порождении метрических пространств  $M_L(L(T(\mathbf{X})), \rho_L)$  становится аксиоматика «отделимости» элементов топологии/решетки посредством определенных «окрестностей» произвольной точки  $x$  множества  $\mathbf{X}$ . Последовательно усложняющиеся аксиомы отделимости  $T_0$ – $T_4$  описывают отделимость отдельных точек  $x \in \mathbf{X}$  и элементов  $T(\mathbf{X})$  посредством окрестностей элементов  $T(\mathbf{X})$ .

Окрестность  $u$  точки  $x \in \mathbf{X}$  в топологии  $T(\mathbf{X})$  определяется как произвольное множество  $u \in T(\mathbf{X}), x \in u$ . Говорится, что окрестность  $u \in T(\mathbf{X})$  отделяет точки  $x$  и  $y$ , если  $(x \in u) \neq (y \in u)$ . Некоторое подмножество  $s \subset T(\mathbf{X})$  называют *центрированной системой окрестностей*, если пересечение элементов этого подмножества не пусто, т. е.  $\bigcap s \neq \emptyset$  (центрированная система *всех* окрестностей  $x \in \mathbf{X}$  определена как  $\dot{s}(x) = \{a \in T(\mathbf{X}), x \in a\}$ ). При анализе метрических пространств используются следующие аксиомы отделимости [9]:

–  $T_0$  (аксиома А. Н. Колмогорова):

$$\forall_{\mathbf{X}} x, y \exists_{T(\mathbf{X})} u : (x \in u) \neq (y \in u);$$

–  $T_1$ :

$$\forall_{\mathbf{X}} x, y \exists_{T(\mathbf{X})} u, v : (x \in u) \wedge (y \in v) \wedge \neg(x \in v) \wedge \neg(y \in u);$$

–  $T_2$  (аксиома Ф. Хаусдорфа):

$$\forall_{\mathbf{X}} x, y \exists_{T(\mathbf{X})} u, v : (x \in u) \wedge (y \in v) \wedge (u \cap v = \emptyset);$$

–  $T_3$  (аксиома А. Н. Тихонова):

$$\forall_{\mathbf{X}} x \forall_{T(\mathbf{X})} v | x \in v \exists_{T(\mathbf{X})} u : (x \in u) \wedge (u \subset v);$$

–  $T_4$  (аксиома нормальности):

$$\forall_{T(\mathbf{X})} u, v : u \cap v = \emptyset \Rightarrow \exists_{T(\mathbf{X})} u_1, v_1 : (u \subset u_1, v \subset v_1) \wedge (u_1 \cap v_1 = \emptyset).$$

Аксиомы  $T_0$ – $T_4$  служат необходимыми условиями существования метрических пространств. В частности, при выполнении аксиомы  $T_1$  (что гарантируется регулярностью  $\mathbf{X}$ ) решетка дистрибутивна (более того, булева), поэтому введение так называемых *изотонных оценок*  $v[\ ]$  позволяет строить  $\rho_L$ -метрики типа  $\rho(x, y) = v[x \vee y] - v[x \wedge y], x, y \in T(\mathbf{X})$  с образованием метрического пространства  $M_L(L(T(\mathbf{X})), \rho)$  [9, 10].

## 3 О необходимых и достаточных условиях метризации топологических пространств

Любое метрическое пространство нормально [8], т. е. аксиома  $T_4$  необходима для того, чтобы произвольное топологическое пространство было метризуемо. В случае непрерывных пространств под метризуемостью подразумевается гомеоморфность исследуемого пространства некоторому метрическому пространству. В случае дискретных пространств метризуемость означает существование хотя бы единственной метрики. Ответ на вопрос о достаточности выполнения условия  $T_4$  для метризуемости топологического пространства дает

**Теорема 1 (первая метризациянная теорема Урысона).** *Для того чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормально.*

Доказательство данного утверждения представлено в [8] и проводится через теорему П. С. Урысона о погружении: «Всякое нормальное пространство со счетной базой гомеоморфно некоторому множеству, лежащему в основном параллелепипеде гильбертова пространства».

Обратим внимание, что формулировка теоремы 1 в [8] накладывает всего лишь два ограничения на рассматриваемые топологические пространства: (1) наличие счетной базы и (2) выполнимость аксиомы  $T_4$ . Поскольку топология  $T(\mathbf{X})$  пространства  $(\mathbf{X}, T(\mathbf{X}))$  имеет конечную предбазу  $\{\Gamma_k^{-1}(\Gamma_k(x))\}$ ,  $k = \overline{1, n+l}$ , то база пространства счетна. Соответственно, выполнимость  $T_4$  достаточна для существования метрики над элементами  $T(\mathbf{X})$  и  $L(T(\mathbf{X}))$ . Естественно, что в случае дискретных пространств под возможностью метризации подразумевается не достаточно жесткое условие *гомеоморфизма* (непрерывный изоморфизм), а *вложимость* (инъекция) дискретного пространства  $(\mathbf{X}, T(\mathbf{X}))$  в некоторое метрическое пространство.

Рассмотрим аксиому  $T_4$ , постулирующую существование непересекающихся окрестностей произвольных элементов  $T(\mathbf{X})$ , с точки зрения теории решеток: ведь, по построению, множество элементов  $T(\mathbf{X})$  для регулярного  $\mathbf{X}$  изоморфно решетке  $L(T(\mathbf{X}))$ . Операция взятия окрестности  $u_1(u)$  (или  $v_1(v)$ ) произвольного  $u \in T(\mathbf{X})$  (или  $v \in T(\mathbf{X})$ ) соответствует «движению» вдоль некоторого пучка цепей *вверх* (т. е. от  $\{\emptyset\}$  — нулевого элемента  $L(T(\mathbf{X}))$ ). Отсутствие перекрывания  $u$  и  $v$  означает движение вдоль двух различных пучков цепей решетки  $L(T(\mathbf{X}))$ , не имеющих ни одного общего решеточного атома (т. е. элемента из  $\mathbf{X}$ ). Тогда отсутствие перекрывания окрестностей  $u_1(u)$  и  $v_1(v)$  в аксиоме  $T_4$  соответствует существованию в пучках цепей  $\langle\{\emptyset\}, u_1(u)\rangle$  и  $\langle\{\emptyset\}, v_1(v)\rangle$  хотя бы двух цепей без общих атомов. Для этого достаточно, чтобы окрестность  $u_1(u)$  отличалась от  $u$  всего на один атом  $u_1(u) \setminus u$ ,  $v_1(v)$  от  $v$  — также на один атом  $v_1(v) \setminus v$  и эти два атома не были бы идентичны.

Таким образом, выполнимость аксиомы нормальности в случае исследуемого топологического пространства  $(\mathbf{X}, T(\mathbf{X}))$  сводится к установлению наличия в решетке  $L(T(\mathbf{X}))$  тех или иных цепей, что указывает на необходимость совместного анализа нормальности топологического пространства  $T(\mathbf{X})$  и регулярности  $\mathbf{X}$  по Ю. И. Журавлёву.

## 4 Нормальность и регулярность по Ю. И. Журавлёву

Следует подчеркнуть, что аксиомы  $T_0$ – $T_4$  используются для произвольных топологических пространств, формируемых и над дискретными, и над непрерывными пространствами  $\mathbf{X}$ . Единственное отличие между дискретными и непрерывными то-

пологическими пространствами, важное по отношению к выполнимости аксиом отделимости, — различие между «открытыми» и «закрытыми» множествами. В случае непрерывных пространств это различие принципиально и порождает необходимость рассмотрения выполнимости каждой их аксиом  $T_0$ – $T_4$ , причем для нормальности ( $T_4$ ) достаточно выполнение аксиом  $T_1$  и  $T_3$  (из чего следует и выполнимость аксиомы  $T_2$ ). В случае же дискретных топологических пространств свойство открытости не имеет принципиального значения: по Дж. Манкресу, все множества таких пространств «открыто-закрытые» (англ. clopen) [11]. В дискретном случае соотношение между аксиомами  $T_0$ – $T_4$  существенно упрощается.

**Теорема 2 (о регулярности и нормальности).** *Условие регулярности  $\mathbf{X}$  по Журавлёву выполнено тогда и только тогда, когда для дискретного топологического пространства  $(\mathbf{X}, T(\mathbf{X}))$  выполнены аксиомы  $T_0$ – $T_4$ , за исключением ряда краевых случаев, обусловленных конечностью  $\mathbf{X}$ .*

**Доказательство.** В работе [10] доказано, что аксиома  $T_1$  выполнена для  $T(\mathbf{X})$ , когда выполнено условие регулярности множества  $\mathbf{X}$  по Ю. И. Журавлёву. В этом случае  $T(\mathbf{X})$  — дискретное топологическое пространство (т. е. изоморфно булеану  $2^{\mathbf{X}}$ , множеству всех подмножеств  $\mathbf{X}$ ), для которого выполнено и  $T_0$ .

Обратим внимание, что формулировки аксиом  $T_0$ – $T_3$  включают и точки (элементы множества исходных описаний объектов  $\mathbf{X}$ ), и элементы топологии  $T(\mathbf{X})$ , а формулировка  $T_4$  — только элементы топологии. Точки и их окрестности, фигурирующие в аксиомах  $T_0$ – $T_4$ , являются элементами цепей решетки  $L(T(\mathbf{X}))$ , множество элементов которой изоморфно топологии  $T(\mathbf{X})$  по построению. Поскольку при условии регулярности выполнено  $T_1$ , то в дискретном пространстве  $(\mathbf{X}, T(\mathbf{X}))$  минимальное отличие между любыми двумя элементами произвольной цепи равно одной точке — т. е. элементу  $\mathbf{X}$ , которому однозначно соответствует один атом решетки  $L(T(\mathbf{X}))$ .

Если элемент  $L(T(\mathbf{X}))$  и его окрестность отличаются более чем на 1 атом решетки, то в булевой  $L(T(\mathbf{X}))$  в любую цепь между элементом и окрестностью входят все «промежуточные» множества, причем любые два ближайших элемента в этой цепи отличаются в точности на 1 атом решетки. Иначе говоря, в булевой решетке  $L(T(\mathbf{X}))$ , как и в дискретном  $(\mathbf{X}, T(\mathbf{X}))$ , представлены все комбинаторно возможные цепи множеств булеана  $2^{\mathbf{X}}$ . Следовательно, для любых двух атомов из  $L(T(\mathbf{X}))$  (т. е. точек  $T(\mathbf{X})$ ) можно найти окрестности, которые не будут пересекаться, из чего следует  $T_2$ .

Определение  $T_4$  подразумевает, что для любых двух непересекающихся множеств в  $T(\mathbf{X})$  представлены их непересекающиеся окрестности. Поскольку множество  $\mathbf{X}$  конечно по определению, то окрестность  $u_1(u(x))$  окрестности  $u(x)$  произвольного элемента  $x \in L(T(\mathbf{X}))$  не может отличаться от  $x$  по мощности менее чем на два атома. Соответственно, для всех  $y \in L(T(\mathbf{X}))$ ,  $y \neq x$  в булевой  $L(T(\mathbf{X}))$ , окрестность  $v_1(v(y))$  окрестности  $v(y)$  не пересекается с  $u_1(u(x))$  только тогда, когда  $|u_1(u(x))| + |v_1(v(y))| \leq |\mathbf{X}|$ . При выполнении данного условия, отделяющего крайевые случаи, для любых двух  $x, y \in L(T(\mathbf{X}))$ ,  $x \cap y = \emptyset$ ,  $T_4$  выполнено вследствие регулярности  $\mathbf{X}$ . Из выполнимости  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_4$  следует  $T_3$ , т. е. все аксиомы отделимости выполнены для всех элементов решетки, что доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Предположим, что аксиома  $T_4$  выполнена, а решетка  $L(T(\mathbf{X}))$  над топологией  $T(\mathbf{X})$  не булева, т. е. в ней не представлены все комбинаторно возможные цепи, включающие все множества, отличающиеся ровно на 1 атом. Тогда существуют такие элементы решетки, для которых наименьшими ближайшими окрестностями окажутся элементы решетки, отличающиеся более чем на 1 атом. Пусть для такого элемента  $x \in L(T(\mathbf{X}))$  ближайшая окрестность  $u(x)$  такова, что  $|u(x)| - |x| > 1$ . Возьмем любое множество  $y \in L(T(\mathbf{X}))$ , содержащее хотя бы один из атомов из  $u(x) \setminus x$  и не пересекающееся с  $x$ . Тогда даже при выполнении условия  $u_1(u(x)) \cup v_1(v(y)) \subseteq \mathbf{X}$  в небулевой решетке  $L(T(\mathbf{X}))$  для  $y$  не существует окрестности, не пересекающейся с окрестностью  $u(x)$ , т. е. аксиома  $T_4$  не выполнена. Значит, для выполнимости  $T_4$  с учетом крайевых случаев решетка должна быть булевой, а топологическое пространство — дискретным, что подразумевает выполнимость регулярности по Ю. И. Журавлёву. Выполнимость  $T_4$  гарантирует выполнимость  $T_0$ – $T_3$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Нормальность  $(\mathbf{X}, T(\mathbf{X}))$  (булевость  $L(T(\mathbf{X}))$ ) подразумевает существование в  $L(T(\mathbf{X}))$  множеств цепей минимального (по числу атомов) размера, соединяющих любые два элемента  $a, b \in L(T(\mathbf{X}))$ .

Будем «двигаться» по решетке от множества  $a$  к множеству  $b$  последовательным поэлементным удалением (или добавлением) индивидуальных атомов решетки. Для прохождения такого пути необходимо как минимум удалить все элементы  $a$ , не входящие в  $b$  ( $a \setminus b$ ), и добавить все элементы  $b$ , не входящие в  $a$  ( $b \setminus a$ ). Очевидно, что удаление  $|a \setminus b|$  точек из  $a$  соответствует движению по цепи от элемента решетки  $a$  к элементу  $a \setminus b$ , а добавле-

ние  $|b \setminus a|$  точек — движению от  $a \setminus b$  к  $b$ . Булевость  $L(T(\mathbf{X}))$  гарантирует, что для каждого из  $|a \setminus b| + |b \setminus a|$  шагов от  $a$  через  $a \setminus b$  к  $b$  в решетке представлен соответствующий элемент (центрированная система окрестностей множества  $a \setminus b$ ), причем эти любые две ближайшие окрестности отличаются ровно на один элемент (теорема М. Стоуна [10]), что и гарантирует минимальность пути.

**Следствие 2.** Расстояние между любыми  $a, b \in L(T(\mathbf{X}))$  вычислимо как длина минимального (по числу атомов) пути, соединяющего  $a$  и  $b$ .

Длина пути в атомах может быть вычислена, например, по функционалу  $|a \setminus b| + |b \setminus a|$  из следствия 1. Заметим, что этот функционал соответствует метрике симметричной разности (Фреше–Никодима) и является частным случаем параметрических метрик на основе решеточных оценок [1–3, 5, 10].

**Следствие 3.** Пусть каждый атом вносит одинаковый вклад в числовую оценку длины произвольного пути между  $a$  и  $b$ . Тогда любые функционалы, определяющие расстояние в  $L(T(\mathbf{X}))$  на основе минимального пути, представимы в виде линейных или квазилинейных комбинаций функций от элементов  $a, b, a \setminus b$ .

По следствию 1 минимальный (по числу атомов) путь от  $a$  к  $b$  в  $L(T(\mathbf{X}))$  проходит по двум пучкам цепей:  $\langle a \setminus b, a \rangle$  и  $\langle a \setminus b, b \rangle$ , т. е. от  $a$  через  $a \setminus b$  к  $b$ . Поскольку вклады всех атомов в числовую оценку длины пути одинаковы, то для вычисления оценки длины пути необходимо сложить числовую оценку длины любой цепи в пучке  $\langle a \setminus b, a \rangle$  (которая есть функция от  $a \setminus b$  и  $a$ ) с числовой оценкой длины любой цепи  $\langle a \setminus b, b \rangle$  (функция от  $a \setminus b$  и  $b$ ) и домножить сумму на вклад атома. Процесс вычисления оценок длины пути может использоваться параметрические (настраиваемые) функции от  $a, b, a \setminus b$ .

**Следствие 4.** Пусть вклад каждого атома в числовую оценку длины пути индивидуален, но порядок удаления/добавления атомов в множествах  $a \setminus b$  и  $b \setminus a$  не имеет значения. Тогда функционалы, вычисляющие расстояние в  $L(T(\mathbf{X}))$  как длину минимального (по числу атомов) пути, представимы в виде суммы функций от атомов, формирующих множество  $a \Delta b$ .

Любые две ближайшие друг к другу окрестности множества  $a \setminus b$  отличаются ровно на 1 атом. Длина одноатомного отрезка пути — функция от этого атома. Соответственно, длина общего пути представима суммой длин одноатомных отрезков, входящих в множество  $a \Delta b$ .

**Следствие 5.** Пусть определен порядок удаления/добавления атомов в множествах  $a \setminus b$  и  $b \setminus a$  (т. е.

выбраны определенные цепи из пучков  $\langle a/\setminus b, a \rangle$  и  $\langle a/\setminus b, b \rangle$ . Тогда все функционалы, вычисляющие расстояние в  $L(T(\mathbf{X}))$  как длину минимального по числу атомов пути, представимы в виде комбинации функций от последовательностей атомов из множества  $a\Delta b$  (т. е. цепей решетки).

Каждая из цепей пучка  $\langle a/\setminus b, a \rangle$  в булевой  $L(T(\mathbf{X}))$  характеризуется одинаковой по числу атомов длиной, равной  $|a/\setminus b|$ . Заметим, что в булевой решетке число таких цепей чрезвычайно велико ( $|a/\setminus b|!$ ), а число вариантов путей между  $a$  и  $b$  еще больше ( $|a/\setminus b|! \cdot |b/\setminus a|!$ ). Все атомы, формирующие пути от  $a$  до  $b$ , представлены в множестве  $a\Delta b$ . При постулировании различимости порядка удаления/добавления атомов при «движении» от  $a$  к  $b$  в  $L(T(\mathbf{X}))$  числовая оценка длины пути будет зависеть от подпоследовательностей атомов из  $a\Delta b$ . Данный случай важен для анализа алгоритмов из несимметричных по Рудакову категорий отображений [12] (т. е. тех, в которых имеет значение порядок предъявляемых алгоритму объектов).

**Следствие 6.** Все граничные (краевые) случаи, в которых  $T_4$  не выполнено (несмотря на выполнимость условия регулярности), описываются как  $x, y \in T(\mathbf{X}) : |x| + |y| > |\mathbf{X}| - 2$ .

Очевидно вследствие необходимости существования окрестностей для конечных, неперекрывающихся  $x, y$ .

**Следствие 7.** При условии регулярности  $\mathbf{X}$  выполнено  $T_1 \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$ .

Данное утверждение, очевидным образом не выполнимое в случае непрерывных топологических пространств, вполне естественно для дискретных топологических пространств.

**Следствие 8.** Регулярность  $\mathbf{X}$  необходима и достаточна для того, чтобы топологическое пространство  $(\mathbf{X}, T(\mathbf{X}))$  было метризуемо.

Следует из теоремы 1 (П. С. Урысона).

## 5 Заключение

В практике анализа данных широко используются различные метрики как с целью оценки результатов, так и при порождении различного рода признаков описаний, таких как метрики Фреше–Никодима, Сокала–Сниса, Тверского, Колмогорова, фон Мизеса, неметрическая функция Кульбака–Лейблера, инженерное расстояние и др. (более 60 метрик). Применение этих метрик к конкретным задачам носит, как правило, чисто эмпирический характер. Важнейшим результатом настоящей работы представляется теорема о нормальности и регулярности, следствия которой поз-

воляют систематически формулировать различные способы определения метрик для конкретной прикладной задачи. Детальный практический анализ каждого из следствий теоремы, формулировка соответствующих способов определения метрик и результаты соответствующих вычислительных экспериментов — предмет отдельной публикации.

## Литература

1. Торшин И. Ю. О формировании множеств прецедентов на основе таблиц разнородных признаков описаний методами топологической теории анализа данных // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 2–7. doi: 10.14357/19922264230301. EDN: AQEUYO.
2. Торшин И. Ю. О задачах оптимизации, возникающих при применении топологического анализа данных к поиску алгоритмов прогнозирования с фиксированными корректорами // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 2–10. doi: 10.14357/19922264230201. EDN: IGSPEW.
3. Торшин И. Ю. О порождении синтетических признаков на основе опорных цепей и произвольных метрик в рамках топологического подхода к анализу данных. Часть 1. Включение в формализм эмпирических функций расстояния // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 71–77. doi: 10.14357/19922264240110. EDN: RIVOXR.
4. Торшин И. Ю. О применении топологического подхода к анализу плохо формализуемых задач для построения алгоритмов виртуального скрининга квантово-механических свойств органических молекул I: Основы проблемно ориентированной теории // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 1. С. 39–45. doi: 10.14357/19922264220106. EDN: CEODNE.
5. Торшин И. Ю. О порождении синтетических признаков на основе опорных цепей и произвольных метрик в рамках топологического подхода к анализу данных. Часть 2. Экспериментальная апробация на задачах фармакоинформатики // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 2. С. 47–53. doi: 10.14357/19922264240207. EDN: OTXCUD.
6. Рудаков К. В., Торшин И. Ю. Вопросы разрешимости задачи распознавания вторичной структуры белка // Информатика и её применения, 2010. Т. 4. Вып. 2. С. 25–35. EDN: MRMSWN.
7. Torshin I. Y., Rudakov K. V. Topological data analysis in materials science: The case of high-temperature cuprate superconductors // Pattern Recognition Image Analysis, 2020. Vol. 30. No.2. P. 264–276. doi: 10.1134/S10546661820020157.
8. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в общую теорию множеств и функций. — М.: ГИТТЛ, 1948. 411 с.

9. Биркгоф Г. Теория решеток / Пер. с англ. В. Н. Са-лий. — М.: Наука, 1984. 566 с. (*Birkhoff G. Lattice theory.* — 3rd ed. — Providence, RI, USA: American Mathematical Society, Col Pub, 1967. 418 p.)
10. Torshin I. Y., Rudakov K. V. On the theoretical basis of metric analysis of poorly formalized problems of recognition and classification // *Pattern Recognition Im-*
- age Analysis, 2015. Vol. 25. No.4. P. 577–587. doi: 10.1134/S1054661815040252.
11. Munkres J. R. *Topology.* — 2nd ed. — Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, Inc., 2000. 537 p.
12. Рудаков К. В. О симметрических и функциональных ограничениях для алгоритмов классификации // Докл. Акад. наук СССР, 1987. Т. 297. Вып. 1. С. 43–46.

Поступила в редакцию 08.12.2024

Принята к публикации 15.01.2025

## METRIZATION OF DISCRETE TOPOLOGICAL SPACES IN THE CONTEXT OF LATTICE THEORY. PART 1. ON THE NORMALITY OF SPACES

I. Yu. Torshin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** A fundamental problem in machine learning and other modern methods of data analysis is the solution to the issue of generating metric distance functions (metrics) that would be adequate to the applied problems under study. The paper presents the results of a systematic analysis of the possibilities of metrization of discrete topological spaces using the concepts of lattice theory. A theorem on the regularity and normality of topological spaces arising in problems of recognition, classification, and numerical forecasting is proved. The regularity (according to Zhuravlev) of a set of precedents guarantees the normality of a topological space (separability axiom T4) and, consequently, the metrizable of this space. The author plans to put practical applications of the consequences of the theorem on regularity and normality presented in a separate paper that will make it possible to systematize the search for problem-oriented metrics which are most suitable for a particular applied problem.

**Keywords:** topological data analysis; lattice theory; algebraic approach of Yu. I. Zhuravlev and K. V. Rudakov; separation axioms

DOI: 10.14357/19922264250111

EDN: CAWKMO

### References

- Torshin, I. Yu. 2023. O formirovani množestv pretsedentov na osnove tablits raznorodnykh priznakovykh opisaniy metodami topologicheskoy teorii analiza dannykh [On the formation of sets of precedents based on tables of heterogeneous feature descriptions by methods of topological theory of data analysis]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):2–7. doi: 10.14357/19922264230301. EDN: AQEUYO.
- Torshin, I. Yu. 2023. O zadachakh optimizatsii, voznikayushchikh pri primeneni topologicheskogo analiza dannykh k poisku algoritmov prognozirovaniya s fiksirovannymi korrektorami [On optimization problems arising from the application of topological data analysis to the search for forecasting algorithms with fixed correctors]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):2–10. doi: 10.14357/19922264230201. EDN: IGSPPEW.
- Torshin, I. Yu. 2024. O porozhdenii sinteticheskikh priznakov na osnove opornykh tsepey i proizvol'nykh metrik v ramkakh topologicheskogo podkhoda k analizu dannykh. Chast' 1. Vklyuchenie v formalizm empiricheskikh funktsiy rasstoyaniya [On the generation of synthetic features based on support chains and arbitrary metrics within a topological approach to data analysis. Part 1. Inclusion of empirical distance functions into the formalism]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):71–77. doi: 10.14357/19922264240110. EDN: RIVOXR.
- Torshin, I. Yu. 2022. O primeneni topologicheskogo podkhoda k analizu plokh formalizuemyykh zadach dlya postroeniya algoritmov virtual'nogo skrininga kvantovomekhanicheskikh svoystv organicheskikh molekul I: Osnovy problemno orientirovannoy teorii [On the application of a topological approach to analysis of poorly formalized problems for constructing algorithms for virtual screening of quantum-mechanical properties of organic molecules I: The basics of the problem-oriented theory]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(1):39–45. doi: 10.14357/19922264220106. EDN: CEODNE.
- Torshin, I. Yu. 2024. O porozhdenii sinteticheskikh priznakov na osnove opornykh tsepey i proizvol'nykh metrik v ramkakh topologicheskogo podkhoda k analizu

- dannykh. Chast' 2. Eksperimental'naya aprobatsiya na zadachakh farmakoinformatiki [On the generation of synthetic features based on support chains and arbitrary metrics within the framework of a topological approach to data analysis. Part 2. Experimental testing on pharmacoinformatics problems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(2):47–53. doi: 10.14357/19922264240207. EDN: OTXCUD.
6. Rudakov, K. V., and I. Y. Torshin. 2010. Voprosy razreshimosti zadachi raspoznavaniya vtorichnoy struktury belka [Solvability problems in the protein secondary structure recognition]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 4(2):25–35. EDN: MRMSWN.
  7. Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2020. Topological data analysis in materials science: The case of high-temperature cuprate superconductors. *Pattern Recognition Image Analysis* 30(2):264–276. doi: 10.1134/S1054661820020157.
  8. Aleksandrov, P. S., and A. N. Kolmogorov. 1948. *Vvedenie v obshchuyu teoriyu mnozhestv i funktsiy* [Introduction to the general theory of sets and functions]. Moscow: GITTL. 411 p.
  9. Birkhoff, G. 1967. *Lattice theory*. 3rd ed. Providence, RI: American Mathematical Society, Col Pub. 418 p.
  10. Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2015. On the theoretical basis of metric analysis of poorly formalized problems of recognition and classification. *Pattern Recognition Image Analysis* 25(4):577–587. doi: 10.1134/S1054661815040252.
  11. Munkres, J. R. 2000. *Topology*. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc. 537 p.
  12. Rudakov, K. V. 1988. Symmetric and functional constraints for classification algorithms. *Soviet Mathematics Doklady* 36(3):428–431.

Received December 8, 2024

Accepted January 15, 2025

## Contributor

**Torshin Ivan Y.** (b. 1972) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, Candidate of Science (PhD) in chemistry, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str, Moscow 119333, Russian Federation; [tiy135@yahoo.com](mailto:tiy135@yahoo.com)

**Берговин Алексей Константинович** (р. 1995) — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

**Борисов Андрей Владимирович** (р. 1965) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Босов Алексей Вячеславович** (р. 1969) — доктор технических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Васильев Николай Семенович** (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана

**Зейфман Александр Израилевич** (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Вологодского государственного университета; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Ковалёв Сергей Протасович** (р. 1972) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук

**Королев Виктор Юрьевич** (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Кривенко Михаил Петрович** (р. 1946) — доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Малашенко Юрий Евгеньевич** (р. 1946) — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра

«Информатика и управление» Российской академии наук

**Назарова Ирина Александровна** (р. 1966) — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Рязанов Александр Михайлович** (р. 1996) — программист кафедры автоматизации систем вычислительных комплексов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

**Сатин Яков Александрович** (р. 1978) — кандидат физико-математических наук, доцент Вологодского государственного университета

**Синицын Игорь Николаевич** (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Торшин Иван Юрьевич** (р. 1972) — кандидат физико-математических наук, кандидат химических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Усов Илья Андреевич** (р. 1997) — аспирант Вологодского государственного университета

**Ушаков Владимир Георгиевич** (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Шестаков Олег Владимирович** (р. 1976) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; ведущий научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

---

## Правила подготовки рукописей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

---

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Если при подготовке статьи авторы использовали инструменты на основе искусственного интеллекта, они обязаны включить эту информацию в текст статьи.

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации предоставленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.

3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам.

Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.

5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.

6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи необязательно.

7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 10 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны оформления представлены в интернете:

[http://www.ipiran.ru/journal/template\\_iiep\\_ssi\\_2024.zip](http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip)

8. Статья должна содержать следующую информацию на *русском и английском языках*:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием почтового адреса организации и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:  
[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp) и  
[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01\\_eng/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp);
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами;
- источники финансирования работы (ссылки на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.).

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний. Если источник имеет DOI и/или EDN, то их необходимо указывать.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала;
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://www.translit.net/ru/bgn/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Ниже приведены примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”.

**Описание статьи из журнала:**

Zagurenko, A. G., V. A. Korotovskikh, A. A. Kolesnikov, A. V. Timonov, and D. V. Kardymon. 2008. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizayna gidrorazryva plasta [Technical and economic optimization of the design of hydraulic fracturing]. *Neftyanoe hozyaystvo [Oil Industry]* 11:54–57.

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

**Описание статьи из электронного журнала:**

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

**Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):**

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.

**Описание материалов конференций:**

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

**Описание книги (монографии, сборники):**

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publ. 352 p.

Latyshev, V. N. 2009. *Tribologiya rezaniya. Kn. 1: Friksionnye protsessy pri rezanii metallov* [Tribology of cutting. Vol. 1: Frictional processes in metal cutting]. Ivanovo: Ivanovskii State Univ. 108 p.

**Описание переводной книги** (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (*Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. Vibration problems in engineering.* — 4th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 1974. 521 p.)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering.* 4th ed. New York: Wiley. 521 p.

**Описание неопубликованного документа:**

Laturov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004 (unpubl.). *Geologiya i dobycha (NGT GiD)* [Geology and production (NGT GiD)]. Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198.

**Описание интернет-ресурса:**

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

**Описание диссертации или автореферата диссертации:**

Semenov, V. I. 2003. *Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyy tor* [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. Moscow. D.Sc. Diss. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. *Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa* [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

**Описание ГОСТа:**

GOST 8.586.5-2005. 2007. *Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv* [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publ. 10 p.

**Описание патента:**

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. *Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya* [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- указывать в тексте письма название статьи, авторов и журнал, в который направляется статья;
- использовать attach (присоединение);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

12. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

**Адрес редакции журнала «Информатика и её применения»:**  
Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН  
Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05  
e-mail: [iiep@frccsc.ru](mailto:iiep@frccsc.ru) (Стригина Светлана Николаевна)  
<http://www.ipiran.ru/journal/issues/>

---

## Requirements for manuscripts submitted to Journal “Informatics and Applications”

---

Journal “Informatics and Applications” (Inform. Appl.) publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of informatics and its applications.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

The topics covered include the following areas:

- theoretical fundamentals of informatics;
- mathematical methods for studying complex systems and processes;
- information systems and networks;
- information technologies; and
- architecture and software of computational complexes and networks.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

***Agreement on the transfer of rights to publish:***

*“We, the undersigned authors of the manuscript “. . .”, pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Informatics and Applications” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations. Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).*

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

If authors used artificial intelligence (AI)-based tools in preparing their manuscript, they must include this information in the text of the article.

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If the authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved for publication. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.
7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 10 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site:

[http://www.ipiran.ru/journal/template\\_iiep\\_ssi\\_2024.zip](http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip).

8. The articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author’s name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format (see site):

[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp) and

[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01\\_eng/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp);

- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae;
  - indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.  
Important! Keywords must not be sentences; and
  - Acknowledgments.
9. References. Russian references have to be presented both in English translation and Latin transliteration (refer <http://www.translit.net/ru/bgn/>).
- Please take into account the following examples of Russian references appearance:
- Article in journal:**  
Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.
- Journal article in electronic format:**  
Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).
- Article from the continuing publication (collection of works, proceedings):**  
Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy "stal'-kompozit" [Experimental study of the strength of joints "steel-composite"]. *Trudy MGTU "Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem"* [Bauman MSTU "Mathematical Modeling of Complex Technical Systems" Proceedings]. 593:125–130.
- Conference proceedings:**  
Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.
- Books and other monographs:**  
Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.
- Dissertation and Thesis:**  
Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.
- State standards and patents:**  
GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publs. 10 p.  
Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.
- References in Latin transcription are presented in the original language.  
References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets. All items from the reference list should be cited.
10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.
11. Submissions of files by e-mail must include:
- the journal title and author's name in the "Subject" field;
  - the article title, authors' names, and the journal title, whereto the paper is being submitted, in the text of the email;
  - an article and additional materials have to be attached using the "attach" function; and
  - an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.
12. "Informatics and Applications" journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

**Editorial Board address:**

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia  
Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05  
e-mail: [iiep@frccsc.ru](mailto:iiep@frccsc.ru) (to Svetlana Strigina)  
<http://www.ipiran.ru/english/journal.asp>