

Информатика и её применения

Том 18 Выпуск 4 Год 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Методы условно-оптимальной фильтрации и экстраполяции в наблюдаемых неявных стохастических системах	
И. Н. Сеницын	2
Фильтрация состояний класса марковских скачкообразных процессов по разнородным наблюдениям с аддитивными шумами	
А. В. Борисов, Ю. Н. Куринов, Р. Л. Смелянский	10
Условно-оптимальная фильтрация и экстраполяция в неявных дифференциальных гауссовских стохастических системах при автокоррелированной помехе в наблюдениях	
И. Н. Сеницын	19
Статистические свойства оценки среднеквадратичного риска метода блочной пороговой обработки в задачах непараметрической регрессии со случайной сеткой	
О. В. Шестаков	26
Моделирование ценовой эластичности спроса на авиационные перевозки в условиях ограниченности статистических данных	
И. В. Урюпин, А. А. Сухарев	34
Оптимизация прохождения ограниченного по времени теста по квантильному критерию	
Я. Г. Мартюшова, А. В. Наумов, А. Е. Степанов	44
О диспетчеризации в одном классе двухфазных систем массового обслуживания	
М. Г. Коновалов, Р. В. Разумчик	52
Минимизация задержки в системах 5G/6G IoT с групповым поступлением в восходящем и нисходящем направлениях	
А. В. Дараселия, Э. С. Сопин, К. Е. Самуйлов, Е. А. Кучерявый	59
О задаче предсказания деградации в технических системах	
С. Л. Френкель, В. Н. Захаров	68
Нейросетевое квадродерево и его применение для сегментирования спутниковых изображений	
А. М. Достовалова	77
Об авторах	86
Авторский указатель за 2024 г.	88
2024 Author Index	91
Правила подготовки рукописей	94
Requirements for manuscripts	97

МЕТОДЫ УСЛОВНО-ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ В НАБЛЮДАЕМЫХ НЕЯВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

И. Н. Синицын¹

Аннотация: Статья посвящена развитию методов условно-оптимальной фильтрации (УОФ) и условно-оптимальной экстраполяции (УОЭ) по В. С. Пугачёву на случай неявных непрерывных и дискретных стохастических систем (СтС), приводимых к явным. Дан обзор работ по субоптимальной фильтрации (СОФ) и УОФ для непрерывных и дискретных СтС, не разрешенных относительно производных (разностей) (НРОП). Представлены математические модели неявных непрерывных и дискретных гауссовских и негауссовских СтС, приводимых к явным. Для приведенных неявных СтС в условиях, когда наблюдения не оказывают влияния на объект наблюдения и описываются явными уравнениями, разрешенными относительно производных (разностей), получены уравнения базовых методов УОФ и УОЭ. Обсуждены три примера, представлены выводы и направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: неявная стохастическая система; субоптимальная фильтрация (СОФ); условно-оптимальная фильтрация (УОФ); условно-оптимальная экстраполяция (УОЭ)

DOI: 10.14357/19922264240401

EDN: TFPJYK

1 Введение

В [1] дан обзор работ в области методов вероятностного моделирования (МВМ) и методов статистического моделирования (МСМ) стохастических процессов (СтП) в неявных СтС. Основное внимание уделяется МВМ и МСМ для неявных СтС, приведенных к дифференциальным и дискретным уравнениям. Для МСМ разработаны дискретные алгоритмы различного порядка точности в $h/h^{1/2}$ и $h^2/h^{3/2}$ неявных СтС с гладкими функциями. Результаты для негладких неявных функций получены в рамках корреляционной теории на основе регрессионной линеаризации, а также параметризации одно- и многомерных плотностей, в том числе с помощью канонических разложений с независимыми компонентами. Рассмотрены примеры с неявными гладкими и разрывными функциями.

В [2] для наблюдаемых гауссовских дифференциальных СтС НРОП со случайными параметрами в виде интегральных канонических представлений (ИКП), приводимых к дифференциальным СтС, разработано методическое обеспечение анализа точности СОФ. Дан обзор результатов в области вероятностного моделирования и субоптимальной фильтрации, экстраполяции и идентификации. Приводятся необходимые сведения из корреляционной теории скалярных и векторных многокомпонентных (МК) ИКП. Особое внимание уделено среднеквадратичной оптимальной регрессионной линеаризации, в том числе

на основе МК ИКП. Представлено методическое обеспечение СОФ гауссовской дифференциальной СтС НРОП, приведенной к дифференциальной, на основе метода нормальной аппроксимации (МНА) для условных и безусловных относительно переменных случайных параметров, заданных МК ИКП. Пример для одномерной системы, нелинейной относительно старшей производной и линейной относительно параметров и возмущений, иллюстрирует методику синтеза нормальной СОФ (НСОФ) на основе МК ИКП.

Вопросы СОФ рассмотрены в [3] для наблюдаемых гауссовских дифференциальных СтС НРОП со случайными параметрами в виде ИКП, приводимых к дифференциальным СтС, разработано методическое и алгоритмическое обеспечение. Дан обзор результатов в области СОФ и УОФ, приводятся необходимые сведения из корреляционной теории ИКП и МК ИКП. Особое внимание уделено регрессионной линеаризации посредством МК ИКП.

Специальный раздел посвящен СтС НРОП, приводимым к дифференциальным СтС. Представлено методическое обеспечение и базовые алгоритмы УОФ для приведенных дифференциальных СтС НРОП. Для оценки точности УОФ используются среднеквадратичные регрессионные уравнения для условных вероятностных характеристик при фиксированном векторе случайных параметров, а МК ИКП применяется для получения безусловных характеристик для случайных переменных па-

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, sinitsin@dol.ru

раметров на основе МКМ. В качестве примера рассмотрен УОФ для линейной СтС НРОП с параметрическим шумом.

В [4] разработано методическое обеспечение синтеза фильтров и регуляторов для управления типовыми гауссовскими СтС со случайными параметрами, описываемыми МК ИКП, не разрешенными относительно старших производных и допускающими приведение к дифференциальным. В основу синтеза положены методы теории условно-оптимального управления В. С. Пугачёва. Особое внимание уделено синтезу управления на основе локальных критериев для нелинейностей, описывающих зависимости от старших производных, обладающих зонами неоднозначности и нечувствительности, гистерезиса и насыщения. Приводятся иллюстративные примеры.

Основываясь на монографии [5] для явных непрерывных систем, рассмотрим обобщения методов [2–4] на случай неявных СтС, допускающих приведение к явным.

2 Приводимые неявные стохастические системы и их наблюдения

Следуя [1], рассмотрим сначала векторную неявную дифференциальную СтС с нелинейностями, описываемыми гладкими детерминированными функциями с размерностью $(n^\Phi \times 1)$:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(t, Z_t, \dot{Z}_t, \dots, Y_t^{(k)}, U_t) = 0, \\ Z(t_0) &= Z_0, \dot{Z}(t_0) = \dot{Z}_0, \dots, Y^{(k)}(t_0) = Z_0^{(k)}. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом уравнение нелинейного формирующего фильтра для стохастических возмущений U_t возьмем в виде, разрешенном относительно белых шумов:

$$\dot{U}_t = a^U(t, U_t) + b^U(t, U_t)V_t^U, \quad U(t_0) = U_0. \quad (2)$$

Здесь $a^U = a^U(t, U_t)$ и $b^U(t, U_t) - (n^Z \times 1)$ - и $(n^Z \times n^V)$ -мерные функции; $V_t^U -$ белый шум в строгом смысле, допускающий представление вида

$$V_t^U = \dot{W}_t^U, \quad W_t^U = W_0^U(t) + \int_{R_0^q} c^U(\rho)P^0(t, d\rho),$$

где $\nu(t) -$ его интенсивность:

$$\nu_t = \nu_t^W = \nu_t^{W_0} + \int_{R_0^q} c^U(\rho)[c^U(\rho)]^T \nu_P(t, \rho) d\rho;$$

$c^U = c^U(\rho) -$ известная векторная функция той же размерности, что и W_0^U ; интеграл при любом $t \geq t_0$ представляет собой стохастический интеграл по центрированной пуассоновской мере $P^0(t, \mathcal{A})$, независимой от W_0^U и имеющей независимые значения на попарно непересекающихся множествах; $\mathcal{A} -$ борелевское множество пространства R_0^q с выколотым началом; $\nu_t^W, \nu_t^{W_0}$ и $\nu_P -$ интенсивности СтП W_t^U, W_0^U и P^0 . Уравнение (2) понимается в смысле Ито и имеет единственное среднееквадратичное решение.

Для гладких функций в (1), допускающих стохастические производные Ито до h -го порядка, выполним следующие преобразования. Будем дифференцировать по t левые части уравнений (1) по обобщенной формуле Ито до тех пор, пока не появятся производные белого шума. В результате получим следующую систему неявных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\Phi = 0, \quad \dot{\Phi} = 0, \dots, \Phi^{(h)} = 0. \quad (3)$$

Далее введем составной вектор

$$X_t = \left[\bar{Z}_t^T \ Z_t'^T \right]^T, \quad \bar{Z}_t = \left[Z_t^T \ \dot{Z}_t^T \ \dots \ Z_t^{(k-1)T} \right]^T$$

и вспомогательный вектор Z_t' , определяемый уравнениями (3) в виде конечного уравнения

$$\Psi(X_t) = \Psi(\bar{Z}_t, Z_t') = 0.$$

Таким образом, для неявных гладких вектор-функций в (1) конечные неявные уравнения (1) допускают гладкую замену переменных и приведение исходных неявных дифференциальных уравнений к системе, состоящей из векторного стохастического дифференциального уравнения Ито и конечного неявного векторного уравнения:

$$\begin{aligned} d\bar{Z}_t &= a^\Pi(t, \bar{Z}_t) dt + b^\Pi(t, \bar{Z}_t) dW_0 + \\ &+ \int_{R_0^q} c^\Pi(t, \bar{Z}_t, \rho) P^0(t, d\rho), \quad \Psi(\bar{Z}_t, Z_t', t) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Приводимые неявные дискретные СтС описываются разностными уравнениями вида

$$\bar{Z}_{k+1} = a_k(\bar{Z}_k) + b_k(\bar{Z}_k)V_k, \quad \Psi_k(\bar{Z}_k, Z_k') = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Здесь функции $a_k(\bar{z}_k)$ и $b_k(\bar{z}_k)$ имеют размерности $(n_{\bar{z}} \times 1)$ и $(n_{\bar{z}} \times n_v)$ соответственно.

В задачах фильтрации и идентификации параметров обычно принимается, что объектовая неявная СтС допускает приведение к явной СтС, измерительная система вполне дискретно-наблюдаема,

наблюдения не влияют на объект, причем уравнение наблюдения разрешено относительно вектора наблюдения. Введем новые обозначения для составных векторов состояния объекта X_t , вспомогательного вектора Z_t и системы наблюдения Y_t . Тогда в качестве приведенных уравнений состояния объекта и наблюдений будем рассматривать соответственно следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_t &= \varphi^\Pi(X_t, Z'_t, t) + \psi^\Pi(X_t, Z'_t, t)V, \\ \Psi^\Pi(X_t, Z'_t, t) &= 0; \\ \dot{Y}_t &= \varphi_1(X_t, Y_t, Z'_t, t) + \psi_1(X_t, Y_t, Z'_t, t)V, \\ V &= \dot{W}. \end{aligned} \right\} (6)$$

Здесь $V = \dot{W}$ — винеровский СтП, где

$$W(t) = W_0(t) + \int_{R_0^q} c(\rho)P^0(t, d\rho);$$

$c(\rho)$ — векторная функция размерности $(n^W \times 1)$ q -мерного аргумента ρ ; интеграл при любом $t \geq t_0$ представляет собой стохастический интеграл по центрированной пуассоновской мере $P^0(t, \mathcal{B})$, независимой от СтП W_0 и имеющей независимые значения на непересекающихся множествах. Интенсивность $\nu = \nu(t)$ СтП $W(t)$ в этом случае определяется формулой:

$$\nu(t) = \nu_0(t) + \int_{R_0^q} c(\rho)c(\rho)^T \nu_P(t, \rho) d\rho,$$

где $\nu_0(t)$ и $\nu_P(t, \rho)$ — интенсивности СтП W_0 и P^0 .

Для дискретного (разностного) случая приведенные уравнения состояния и наблюдения будут следующими ($k = 1, 2, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} X_{k+1} &= \varphi_k^\Pi(X_k, Z'_k) + \psi_k^\Pi(X_k, Z'_k)V_k, \\ \Psi_k^\Pi(X_k, Z'_k) &= 0; \\ Y_k &= \varphi_{1k}(X_k, Y_k, Z_k) + \psi_{1k}(X_k, Y_k, Z_k)V_k, \end{aligned} \right\} (7)$$

где V_k — дискретные негауссовские белые шумы с известной одномерной характеристической функцией $h_k = h_k(\varepsilon; t)$.

Для задач экстраполяции соответствующие приведенные уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_t &= \varphi^\Pi(X_t, t) + \psi^\Pi(X_t, t)V_1, \quad \Psi^\Pi(X_t, t) = 0; \\ \dot{Y}_t &= \varphi_1(X_t, Y_t, t) + \psi_1(X_t, Y_t, t)V_2; \\ V_j &= W_j = W_{0j} + \int_{R_0^q} c_j(\rho)P^0(t, d\rho) \quad (j = 1, 2); \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{k+1} &= \varphi_k^\Pi(X_k) + \psi_k^\Pi(X_k)V_k, \quad \Psi_k^\Pi(X_k) = 0; \\ Y_k &= \varphi_{1k}(X_k, Y_k) + \psi_{1k}(X_k, Y_k)V_k. \end{aligned} \right\} (9)$$

Замечание 2.1. В некоторых случаях уравнения неявных СтС (исходных или приведенных) могут иметь неизвестные параметры Θ . Одним из возможных подходов к их идентификации служит следующий прием [5]: неизвестный векторный параметр Θ_t считают СтП удовлетворяющим уравнению $\dot{\Theta}_t = 0$ и включают его компоненты в состав вектора состояния наблюдаемой системы. От неизвестных параметров могут зависеть уравнения наблюдения. Эти параметры также можно включить в расширенный вектор состояния.

3 Условно-оптимальная фильтрация

Применим к приведенным явным уравнениям (6) и (7) теорию УОФ [5]. В случае (6), если функции φ^Π , φ_1 , ψ^Π и ψ_1 не зависят от Y_t , векторные уравнения УОФ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_t &= \alpha_t \xi(\hat{X}_t, t) + \beta_t \eta(\hat{X}_t, t) \dot{Y}_t + \gamma_t, \\ \Psi^\Pi(\hat{X}_t, \hat{Z}_t, t) &= 0, \end{aligned} (10)$$

где $\xi = \xi(\hat{X}_t, t)$ и $\eta = \eta(\hat{X}_t, t)$ — функции отмеченных переменных, называемые структурными функциями УОФ; α_t , β_t и γ_t — коэффициенты УОФ.

В случае дискретной приведенной системы (7) уравнения УОФ имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1} &= \alpha_k \xi_k(\hat{X}_k) + \beta_k \eta_k(\hat{X}_k) Y_k + \gamma_k, \\ \Psi_k^\Pi(\hat{X}_k, \hat{Z}_k) &= 0. \end{aligned} (11)$$

В результате приходим к следующим результатам.

Теорема 3.1. Пусть неявная дифференциальная негауссовская СтС (1) допускает приведение к явной дифференциальной СтС (4), а уравнения состояния и наблюдения имеют вид (6), причем функции φ^Π , φ_1 , ψ^Π и ψ_1 не зависят от Y_t . Предположим, что СтП $[X_t^T Y_t^T]^T$ обладает конечными одномерными вероятностными моментами, а матрица κ_{22} невырождена. Тогда УОФ описывается уравнениями (10), в которых коэффициенты α_t и γ_t определяются уравнениями

$$\alpha_t m_1 + \beta_t m_2 + \gamma_t = m_0,$$

где

$$m_0 = M\varphi^\Pi(X_t, t); \quad m_1 = M\xi(\hat{X}_t, t); \quad m_2 = M\eta(\hat{X}_t, t),$$

$$\alpha_t \kappa_{11} + M(\hat{X}_t - X_t)(\xi^T \alpha_t^T + \gamma_t^T) \frac{\partial \xi^T}{\partial \hat{X}_t} = \kappa'_{01} - \beta_t \kappa'_{21}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \mathbf{M}(\xi - m_1)\xi^T; \quad \kappa'_{21} = \mathbf{M}(\eta\varphi_1 - m_2)\xi^T; \\ \kappa'_{01} &= \kappa_{01} + \mathbf{M}(X_t - \hat{X}_t) \frac{\partial \xi^T}{\partial \hat{X}_t} + \\ &+ \mathbf{M} \left\{ (X_t - \hat{X}_t) \left[\varphi_1^T - \int_{R_0^g} c(\rho)^T \nu_P(t, \rho) d\rho \psi_1^T \right] + \right. \\ &+ \left. \psi^\Pi \nu_0 \psi_1^T - \beta_t \eta \psi_1 \nu_0 \psi_1^T \right\} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \xi^T + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{M}(X_t - \hat{X}_t) \left\{ \text{tr} \left[\psi_1 \nu_0 \psi_1^T \left(\frac{\partial}{\partial y} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + 2\eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \frac{\partial^T}{\partial y} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \text{tr} \left[\beta_t \eta \psi_1 \nu_0 \psi_1^T \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \frac{\partial^T}{\partial \hat{X}_t} \right] \right\} \xi^T + \\ &+ \int_{R_0^g} \mathbf{M} \left[X_t - \hat{X}_t + (\psi^\Pi - \beta_t \eta \psi_1) c(\rho) \right] \times \\ &\times \left[\xi(Y_t + \psi^\Pi c(\rho), \hat{X}_t + \beta_t \eta \psi_1 c(\rho), t)^T - \xi^T \right]^T \times \\ &\quad \times \nu_P(t, \rho) d\rho; \\ \kappa_{01} &= \mathbf{M}(\varphi^\Pi - m_0)\xi^T, \end{aligned}$$

а коэффициент β_t равен

$$\beta_t = \kappa_{02} \kappa'_{22},$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{02} &= \mathbf{M}(X_t - \hat{X}_t) \varphi_1^T \eta^T + \mathbf{M} \psi^\Pi \nu \psi_1^T \eta^T, \\ \kappa_{22} &= \mathbf{M} \eta \psi_1 \nu \psi_1^T \eta^T \quad (\det \kappa_{22} \neq 0). \end{aligned}$$

Одномерное совместное распределение составного вектора $[X_t^T \hat{X}_t^T]^T$ определяется уравнением Пугачёва для одномерной характеристической функции $g_1 = g_1(\lambda_1, \lambda_2; t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial t} &= \mathbf{M} \{ i\lambda_1^T \varphi^\Pi + i\lambda_2^T [\alpha_t \xi + \beta_t \eta \varphi_1 + \gamma_t] + \\ &+ \chi(\psi^{\Pi T} \lambda_1 + \psi_1^T \eta^T \beta_t^T \lambda_2; t) \} \times \\ &\quad \times \exp \{ i\lambda_1^T X_t + i\lambda_2^T \hat{X}_t \} \end{aligned}$$

при начальном условии

$$g_1(\lambda_1, \lambda_2; t_0) = g_0(\lambda_1, \lambda_2).$$

Здесь

$$\chi(\varepsilon; t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln h_1(\varepsilon; t), \quad (12)$$

где $h_1(\varepsilon; t)$ — одномерная характеристическая функция процесса с независимыми приращениями $W, V = \dot{W}$.

Теорема 3.2. Для приведенной авторегрессионной дискретной системы (5) при условии

$$\det \begin{bmatrix} \kappa_{11}^{(k)} & \kappa_{12}^{(k)} \\ \kappa_{21}^{(k)} & \kappa_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \neq 0$$

в основе УОФ лежат уравнения (11), если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_k \kappa_{11}^{(k)} + \beta_k \kappa_{21}^{(k)} &= \kappa_{01}^{(k)}; \\ \alpha_k \kappa_{12}^{(k)} + \beta_k \kappa_{22}^{(k)} &= \kappa_{02}^{(k)}; \\ \gamma_k &= \rho_0^{(k)} - \alpha_k \rho_1^{(k)} - \beta_k \rho_2^{(k)}, \\ \kappa_{01}^{(k)} &= \mathbf{M}(\varphi_k^\Pi - m_{k+1}) \xi_k^T; \\ \kappa_{02}^{(k)} &= \mathbf{M}(\varphi_k^\Pi - m_{k+1}) \varphi_{1k}^T \eta_k^T + \mathbf{M}(\psi_k^\Pi \nu_k \psi_{1k}^T \eta_k^T); \\ m_{k+1} &= \rho_0^{(k)}, \quad \rho_0^{(k)} = \mathbf{M} \varphi_k^\Pi; \\ \rho_1^{(k)} &= \mathbf{M} \xi_k; \quad \rho_2^{(k)} = \mathbf{M} \eta_k \varphi_{1k}; \\ \left. \begin{aligned} \kappa_{11}^{(k)} &= \mathbf{M} \left(\xi_k - \rho_1^{(k)} \right) \xi_k^T; \\ \kappa_{12}^{(k)} &= \kappa_{21}^{(k)} = \mathbf{M} \left(\xi_k - \rho_1^{(k)} \right) \varphi_{1k}^T \eta_k^T; \\ \kappa_{22}^{(k)} &= \mathbf{M} \left(\eta_k \varphi_{1k} - \rho_2^{(k)} \right) \varphi_{1k}^T \eta_k^T + \\ &\quad + \mathbf{M} \left(\eta_k \psi_{1k}^\Pi \nu_k \psi_{1k}^T \eta_k^T \right); \end{aligned} \right\} \quad (13) \\ \mathbf{M} V_k &= 0, \quad \mathbf{M} V_k V_k^T = \nu_k. \end{aligned}$$

При этом одномерная характеристическая функция вектора $[X_k^T \hat{X}_k^T]^T$ определяется формулой

$$\begin{aligned} g_{1,k+1}(\lambda_1, \lambda_2) &= \\ &= \mathbf{M} \{ [h_k(\psi_k^{\Pi T} \lambda_1)^T \lambda_1 + \psi_{1k}^T \eta_k \beta_k^T \lambda_2] \times \\ &\quad \times \exp [i\lambda_1^T \varphi_k^\Pi + i\lambda_2^T (\alpha_k \xi_k + \beta_k \eta_k \varphi_{1k}) + \gamma_k] \}. \end{aligned}$$

Для синтеза условно-оптимального идентификатора (10) используется теорема 3.1 для расширенного вектора состояния $\tilde{X}_t = [X_t^T \Theta_t^T]^T$, где Θ_t — вектор параметров, удовлетворяющий уравнению $\dot{\Theta}_t = 0$.

Замечание 3.1. В случае гауссовского (нормального) белого шума $V_0 = \dot{W}_0$ формула (12) имеет вид

$$\chi(\varepsilon; t) = -\frac{1}{2} \varepsilon^T \nu \varepsilon.$$

Замечание 3.2. Теория УОФ дает возможность фильтровать избранные компоненты вектора состояния.

Замечание 3.3. Теория УОФ не позволяет получить абсолютно оптимальные фильтры, а можно получить только условно-оптимальные по Пугачёву

фильтры. Особый практический интерес имеют нормальные условно-оптимальные фильтры, такие фильтры, в отличие от нормальных субоптимальных фильтров [5], для многомерных СтС могут иметь существенно меньший порядок.

4 Условно-оптимальная экстраполяция

Применяя результаты [5] к приведенным уравнениям (8) и (9), получим следующие утверждения.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 для системы (8). Тогда УОЭ определяется следующими уравнениями:

$$\dot{X}_{t+\Delta} = \varphi^\Pi(X_{t+\Delta}, t+\Delta) + \psi^\Pi(X_{t+\Delta}, t+\Delta)V_1(t+\Delta);$$

$$\alpha_t m_1 + \beta_t m_2 + \gamma_t = m_0, \quad m_1 = M\xi, \quad m_2 = M\eta\varphi_1, \\ \alpha_t = (\kappa_{01} - \beta_t \kappa_{21})\kappa_{11}^{-1}, \quad m_0 = M\varphi^\Pi(X_{t+\Delta}, t+\Delta);$$

$$\alpha_t \kappa_{11} + M(\hat{X}_{t+\Delta} - X_{t+\Delta})(\xi^T \alpha_t^T + \gamma_t^T) \frac{\partial \xi^T}{\partial \hat{X}_{t+\Delta}} = \\ = \kappa'_{01} - \beta_t \kappa'_{21}, \\ \kappa'_{01} = \kappa_{01} + M(X_{t+\Delta} - \hat{X}_{t+\Delta}) \frac{\partial \xi^T}{\partial t} + \\ + M \left\{ (X_{t+\Delta} - \hat{X}_{t+\Delta}) \left[\varphi_1^T - \int_{R_0^g} c_2(\rho)^T \nu_{2P}(t, \rho) d\rho \psi_1^T \right] - \right. \\ \left. - \beta_t \eta \psi_1 \nu_{20} \psi_1^T \right\} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_{t+\Delta}} \right) \xi^T + \\ + \frac{1}{2} M(X_{t+\Delta} - \hat{X}_{t+\Delta}) \left\{ \text{tr} \left[\psi_1 \nu_{20} \psi_1^T \left(\frac{\partial}{\partial y} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2\eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_{t+\Delta}} \right) \frac{\partial^T}{\partial y} \right] + \right. \\ \left. + \text{tr} \left[\beta_t \eta \psi_1 \nu_{20} \psi_1^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_{t+\Delta}} \frac{\partial^T}{\partial \hat{X}_{t+\Delta}} \right] \right\} \xi^T + \\ + \int_{R_0^g} M \left[X_{t+\Delta} - \hat{X}_{t+\Delta} - \beta^t \eta \psi_1 c_2(\rho) \right] \times \\ \times \left[\xi \left(Y_t + \psi_1 c_2(\rho), \hat{X}_{t+\Delta} + \beta_t \eta \psi_1 c_2(\rho), t \right)^T - \xi^T \right] \times \\ \times \nu_{2P}(t, \rho) d\rho, \\ \kappa_{01} = M(\varphi^\Pi - m_0)\xi^T, \quad \kappa'_{21} = M(\eta\varphi_1 - m_2)\xi^T.$$

Здесь двумерная характеристическая функция СтП $[X_t^T \hat{X}_t^T]^T$ при $g_2 = g_2(\lambda_1 \lambda_2, \mu_1, \mu_2; t, s)$ определяется уравнениями

$$\frac{\partial g_2(\lambda_1 \lambda_2, \mu_1, \mu_2; t, s)}{\partial s} = \\ = M \left\{ i\mu_1^T \varphi^\Pi(X_s) + i\mu_2^T \left[\varphi^\Pi(\hat{X}_s, s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta_s \eta(\hat{X}_s, s) \varphi_1^\Pi(X_s) + \gamma_s \right] + \right. \\ \left. + \chi(\psi^\Pi(X_s, s)\mu_1 + \psi_1^\Pi(X_s, s)^T) \eta(\hat{X}_s, s)^T \beta_s^T \mu_2; s \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i\lambda_1^T X_t + i\lambda_2^T \hat{X}_t + i\mu_1^T X_s + i\mu_2^T \hat{X}_s \right\}$$

при начальном условии

$$g_2(\lambda_1 \lambda_2, \mu_1, \mu_2; t, s) = g_1(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2; t, s).$$

Замечание 4.1. В случае гауссовского белого шума следует положить $c_2(\rho) = 0, \nu_{20} = \nu_2$.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.2 для системы (9). Тогда УОЭ определяется следующим образом:

$$\hat{X}_{k+\tau+1} = \alpha_k \xi_k(\hat{X}_k) + \beta_k \eta_k(\hat{X}_k) Y_k + \gamma_k;$$

$$\alpha_k \kappa_{11}^{(k)} + \beta_k \kappa_{21}^{(k)} = \kappa_{01}^{(k)};$$

$$\alpha_k \kappa_{12}^{(k)} + \beta_k \kappa_{22}^{(k)} = \kappa_{02}^{(k)};$$

$$\det \begin{vmatrix} \kappa_{11}^{(k)} & \kappa_{12}^{(k)} \\ \kappa_{21}^{(k)} & \kappa_{22}^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\gamma_k = \rho^{(k+\tau+1)} - \alpha_k \rho_1^{(k)} - \beta_k \rho_2^{(k)};$$

$$\rho_0^{(k+\tau+1)} = M\varphi_{k+\tau}^\Pi(X_{k+\tau});$$

$$\rho_1^{(k)} = M\xi_k(\hat{X}_k);$$

$$\rho_2^{(k)} = M\eta_k(\hat{X}_k) \varphi_{1k}^\Pi(X_k),$$

а также формулами (13). При этом двумерные характеристические функции удовлетворяют уравнениям:

$$g_{2,k,k}(\lambda_1, \lambda_2, \mu) = g_{1,k}(\lambda_1 + \lambda_2, \mu);$$

$$g_{2,k,k+\tau+1}(\lambda_1, \lambda_2, \mu) = \exp \left\{ i\lambda_1^T X_k + \right. \\ \left. + i\lambda_2^T (\varphi_{1,k+\tau} + \psi_{1,k+\tau} V_{k+\tau}) + i\mu^T \hat{X}_k \right\}.$$

5 Заключение

В предположении, что наблюдения не влияют на объект наблюдения для непрерывных и дискретных неявных СтС, приводимых к явным, разработаны методы нелинейной УОФ и УОЭ по Пугачёву. В качестве примеров для приведенных систем могут быть использованы [6–8].

Статья [6] посвящена теории аналитического синтеза непрерывных равномерно асимптотически устойчивых линейных условно-оптимальных (по среднеквадратичному критерию) фильтров (ЛУОФ)

и экстраполяторов (ЛУОЭ) для линейных дифференциальных СтС с линейными мультипликативными шумами. Предполагается, что наблюдение входит как в уравнение состояния, так и в уравнение наблюдения. Белые шумы в уравнениях наблюдения и состояния предполагаются заданными априори в виде производных по времени от произвольных процессов с независимыми приращениями. Доказаны теоремы, лежащие в основе теории непрерывных устойчивых ЛУОФ и ЛУОЭ. Достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости сформулированы в виде требований положительной определенности и равномерной стохастической ограниченности некоторых матриц, отражающих свойства наблюдаемости и управляемости.

В [8] рассматриваются вопросы аналитического синтеза нормальных условно-оптимальных фильтров Пугачёва (НФП) для обработки информации в дифференциальных негауссовских СтС, линейных относительно состояния (условия Липцера—Ширяева). Особое внимание уделено синтезу НФП для СтС при условиях Липцера—Ширяева на основе аппроксимации апостериорного распределения нормальным и квазилинейным НФП, основанным на статистической линеаризации нелинейных функций, зависящих от наблюдений. Для СтС высокой размерности путем выбора структурных функций, отражающих аналитическую природу наблюдаемой системы, можно синтезировать НФП простыми в компьютерной реализации и для работы в режиме реального времени. Изложенные алгоритмы положены в основу модуля инструментального программного обеспечения StS-Filter.

В [7] рассматривается теория аналитического синтеза непрерывных (дифференциальных) и дискретных (разностных) суб- и условно-оптимальных фильтров и экстраполяторов Пугачёва для обработки процессов в гауссовских и негауссовских СтС, линейных относительно вектора состояния. Первые работы по фильтрации и экстраполяции для таких гауссовских систем были выполнены Липцером и Ширяевым, а для негауссовских — Пугачёвым и Сеницыным. Приведены алгоритмы нормальных суб- и условно-оптимальных фильтров для непрерывных и дискретных систем. Представлены алгоритмы нормальных суб- и условно-оптимальных экстраполяторов. Разработанные алгоритмы положены в основу программного обеспечения (StS-Filter, 2016).

Методы допускают обобщение на случаи, когда наблюдения оказывают влияние на объект, автокоррелированных помех в наблюдениях, а также для условных байесовых критериев. Пред-

ставляет интерес обобщение результатов на задачи условно-оптимальной интерполяции, а также неявных эредитарных систем, в первую очередь неявных функционально-дифференциальных систем [9–14].

Литература

1. Сеницын И. Н. Методы вероятностного и статистического моделирования неявных стохастических систем // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. Вып. 3. С. 48–66. doi: 10.14357/08696527240305. EDN: RTNRUZ.
2. Сеницын И. Н. Аналитическое моделирование стохастических систем, не разрешенных относительно производных, со случайными параметрами // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 1. С. 4–22. doi: 10.14357/08696527240101. END: ZPTXJI.
3. Сеницын И. Н. Условно-оптимальная фильтрация в стохастических системах со случайными параметрами и не разрешенных относительно производных // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 21–29. doi: 10.14357/19922264240303. END: XCXLGD.
4. Сеницын И. Н. Условно-оптимальная фильтрация и управление стохастическими системами, не разрешенными относительно производных, со случайными параметрами // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 2. С. 3–20. doi: 10.14357/08696527240201. END: XLRCQE.
5. Сеницын И. Н. Фильтры Калмана и Пугачёва. — 2-е изд. — М.: Логос, 2007. 776 с.
6. Сеницын И. Н., Корепанов Э. Р. Устойчивые линейные условно оптимальные фильтры и экстраполяторы для стохастических систем с мультипликативными шумами, 2015. Т. 9. Вып. 1. С. 70–75. doi: 10.14357/19922264150106. EDN: TVXFFB.
7. Сеницын И. Н., Корепанов Э. Р. Нормальные условно-оптимальные фильтры и экстраполяторы Пугачёва для стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 2. С. 14–23. doi: 10.14357/19922264160202. EDN: WCBWUR.
8. Сеницын И. Н., Корепанов Э. Р. Нормальные условно-оптимальные фильтры Пугачёва для дифференциальных стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и её применения, 2016. Т. 9. Вып. 2. С. 30–38. doi: 10.14357/19922264150204. EDN: TZBVRV.
9. Толстоногов А. А., Финогенко И. А. О функционально-дифференциальных включениях в банаховом пространстве с невыпуклой правой частью // Докл. Акад. наук СССР, 1980. Т. 245. № 1. С. 45–49.
10. Финогенко И. А. К вопросу о решениях функционально-дифференциальных включений // Приклад-

- ная математика и пакеты прикладных программ. — Иркутск: СЭИСО АН СССР, 1980. С. 95–107.
11. *Финогенко И. А.* Свойства множества решений функционально-дифференциальных включений // Краевые задачи. — Пермь: ППИ, 1981. С. 145–149.
 12. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. — М.: Наука, 1981. 448 с.
 13. *Финогенко И. А.* О неявных функционально-дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве // Динамика нелинейных систем. — Новосибирск: Наука, 1983. С. 151–164.
 14. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. 280 с.

Поступила в редакцию 15.04.24

CONDITIONALLY OPTIMAL FILTERING AND EXTRAPOLATION METHODS FOR OBSERVABLE IMPLICIT STOCHASTIC SYSTEMS

I. N. Sinitsyn

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper is devoted to the development of Pugachev’s conditionally optimal filtering and extrapolation methods for implicit stochastic systems (StS) reducible to explicit continuous and discrete StS. A special review in the field of suboptimal and conditionally optimal filtering and extrapolation for continuous and discrete StS with unsolved derivatives (differences) is given. Mathematical models of implicit continuous and discrete Gaussian and non-Gaussian StS reducible to explicit StS are presented. It is supposed that observations do not influence implicit objects of observation and are described by explicit differential (difference) equations. Basic methods for conditionally optimal filtering and extrapolation in implicit StS reducible to explicit StS at Gaussian and non-Gaussian noises are developed. Three examples are discussed. Some generalizations are given.

Keywords: conditionally optimal extrapolation; conditionally optimal filtering; implicit stochastic systems; explicit stochastic systems

DOI: 10.14357/19922264240401

EDN: TFPJYK

References

1. Sinitsyn, I. N. 2024. Metody veroyatnostnogo i statisticheskogo modelirovaniya neyavnykh stokhasticheskikh sistem [Probabilistic and statistical modeling methods for implicit stochastic systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(3):48–66. doi: 10.14357/08696527240305. EDN: RTNRUZ.
2. Sinitsyn, I. N. 2024. Analiticheskoe modelirovanie stokhasticheskikh sistem, ne razreshennykh otноситel’no proizvodnykh, so sluchaynymi parametrami [Analytical modeling of stochastic systems with random parameters and unsolved derivatives]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(1):4–22. doi: 10.14357/08696527240101. EDN: ZPTXJI.
3. Sinitsyn, I. N. 2024. Uslovno-optimal’naya fil’tratsiya v stokhasticheskikh sistemakh so sluchaynymi parametrami i ne razreshennykh otноситel’no proizvodnykh [Conditionally optimal filtering in stochastic systems with random parameters and unsolved derivatives]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):21–29. doi: 10.14357/19922264240303. EDN: CXXLGD.
4. Sinitsyn, I. N. 2024. Uslovno-optimal’naya fil’tratsiya i upravlenie stokhasticheskimi sistemami, ne razreshennyimi otноситel’no proizvodnykh, so sluchaynymi parametrami [Conditionally-optimal filtration and control for stochastic systems with random parameters and unsolved derivatives]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(2):3–20. doi: 10.14357/08696527240201. EDN: XLRCQE.
5. Sinitsyn, I. N. 2007. *Fil’try Kalmana i Pugacheva* [Kalman and Pugachev filters]. 2nd ed. Moscow: Logos. 776 p.
6. Sinitsyn, I. N., and E. R. Korepanov. 2015. Ustoychivye lineynye uslovno-optimal’nye fil’try i ekstrapolyatory dlya stokhasticheskikh sistem s mul’tiplikativnymi shumami [Stable linear conditionally optimal filters and extrapolators for stochastic systems with multiplicative noises]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(1):70–75. doi: 10.14357/19922264150106. EDN: TVXFFB.
7. Sinitsyn, I. N., and E. R. Korepanov. 2016. Normal’nye uslovno-optimal’nye fil’try i ekstrapolyatory Pugacheva dlya stokhasticheskikh sistem, lineynnykh otноситel’no sostoyaniya [Normal Pugachev conditionally-optimal filters and extrapolators for state linear stochastic systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(2):14–23. doi: 10.14357/19922264160202. EDN: WCBWUR.
8. Sinitsyn, I. N., and E. R. Korepanov. 2015. Normal’nye uslovno-optimal’nye fil’try Pugacheva dlya differentsial’nykh stokhasticheskikh sistem, lineynnykh otноситel’no sostoyaniya [Normal Pugachev filters for state

- linear stochastic systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(2):30–38. doi: 10.14357/19922264150204. EDN: TZBVRV.
9. Tolstonogov, A. A., and I. A. Finogenko. 1980. On functional-differential inclusions in a Banach space with a nonconvex right-hand side. *Soviet Mathematics Doklady* 22:320–324.
 10. Finogenko, I. A. 1980. K voprosu o resheniyakh funktsional'no-differentsial'nykh vklyucheniye [On the issue of solutions of functional-differential inclusions]. *Prikladnaya matematika i pakety prikladnykh programm* [Applied mathematics and application software packages]. Irkutsk: SEISO AN SSSR. 95–107.
 11. Finogenko, I. A. 1981. Svoystva mnozhestva resheniy funktsional'no-differentsial'nykh vklyucheniye [Properties of the solution set of functional differential inclusions]. *Kraevye zadachi* [Boundary value problem]. Perm: PPI. 145–149.
 12. Kolmanovskiy, V. B., and V. R. Nosov. 1981. *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyykh sistem s posledstviem* [Stability and periodic modes of regulated systems with consequences]. Moscow: Nauka. 448 p.
 13. Finogenko, I. A. 1983. O neyavnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniyakh v banakhovom prostranstve [On implicit functional differential equations in a Banach space]. *Dinamika nelineynykh sistem* [Dynamics of nonlinear systems]. Novosibirsk: Nauka. 151–164.
 14. Azbelev, N. V., V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatulina. 1991. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of functional differential equations]. Moscow: Nauka. 277 p.

Received April 15, 2024

Contributor

Sinitsyn Igor N. (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

ФИЛЬТРАЦИЯ СОСТОЯНИЙ КЛАССА МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО РАЗНОРОДНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С АДДИТИВНЫМИ ШУМАМИ*

А. В. Борисов¹, Ю. Н. Куринов², Р. Л. Смелянский³

Аннотация: Для некоторого класса марковских скачкообразных процессов (МСП) исследована задача оптимальной фильтрации. Оцениваемое состояние представляет собой МСП с конечным числом состояний — вероятностных распределений. Доступная измерительная информация включает в себя непрерывные и считающие наблюдения. Непрерывные наблюдения представляют собой сумму некоторой функции состояния и независимых винеровских шумов. Интенсивность считающих наблюдений также зависит от оцениваемого состояния. Задача фильтрации заключается в построении условного математического ожидания (УМО) скалярной функции состояния по имеющимся наблюдениям. Искомая оценка представлена в виде решения некоторой системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). В статье приведена система стохастических интегро-дифференциальных уравнений типа Кушнера—Стратоновича, описывающая эволюцию условного распределения состояния. Качество представленных оценок проиллюстрировано практическим примером мониторинга состояния и параметров телекоммуникационного канала по зашумленным наблюдениям времени кругового обращения сегмента данных и потока потерь пакетов.

Ключевые слова: марковский скачкообразный процесс; стохастическая дифференциальная система наблюдения; наблюдения с аддитивными шумами; уравнение Кушнера—Стратоновича

DOI: 10.14357/19922264240402

EDN: FEMNQL

1 Введение

Решение задачи оптимальной фильтрации состояний стохастических систем наблюдения по совокупности разнородной измерительной информации остается востребованной областью системного анализа [1]. Одно из направлений исследований подразумевает поиск теоретического решения данной задачи оценивания в других классах систем наблюдения, например определенных уравнениями Ито—Вольтерра [2], динамическими системами с фрактальными случайными процессами [3], квазиэволюционными стохастическими системами [4] и пр. Иное направление предполагает выделение значимых с прикладной точки зрения классов систем наблюдений, в которых возможно получить явное решение задачи фильтрации с помощью математического аппарата теории мартингалов. Дело в том, что в [5] представлено решение общей задачи фильтрации субмартингала по наблюдениям субмартингала. Формула имеет абстрактный вид и нуждается в детализации для каждого конкретно-

го класса систем наблюдения. В качестве ожидаемого результата рассматриваются оценки, описываемые замкнутой конечномерной системой уравнений (конечномерные фильтры), либо системы интегро-дифференциальных уравнений Кушнера—Стратоновича или Закаи, описывающие условное распределение системы и допускающие эффективное численное решение.

В [6] представлен некоторый подкласс МСП, которые можно трактовать как процессы с конечным множеством «сложных» состояний — вероятностных распределений. Данная статья продолжает эти исследования. Ее цель — постановка и решение задачи оптимальной фильтрации состояний процессов этого вида по совокупности непрерывных и считающих наблюдений.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 содержит сведения о представленном в [6] классе МСП, необходимые для последующей корректной постановки задачи оптимальной фильтрации. Формальная постановка задачи изложена в разд. 3. В качестве доступных наблюдений выступает совокуп-

* Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ, проект № 23-Ш03-03. При анализе данных использовалась инфраструктура Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, aborisov@frccsc.ru

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, kurinovurij@gmail.com

³Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, smel@cs.msu.ru

ность непрерывных и считающих процессов. Непрерывные наблюдения представляют собой сумму некоторой функции оцениваемого состояния и независимых винеровских шумов. Интенсивность считающих наблюдений также зависит от состояния системы. Раздел 4 — ключевой в статье — содержит решение поставленной задачи оценивания. Он включает в себя систему уравнений, описывающую эволюцию УМО оцениваемого процесса, а также соответствующую систему интегро-дифференциальных уравнений — обобщений уравнения Кушнера–Стратоновича — для описания условной плотности распределения. В разд. 5 представлен численный пример, иллюстрирующий качество предложенной оценки. Он посвящен решению задачи мониторинга состояния и параметров коммуникационного соединения по зашумленным наблюдениям времени кругового обращения сегмента данных (round-trip time, RTT) и потока потерь пакетов. Раздел 6 содержит заключительные замечания.

2 Необходимые сведения

В дальнейшем изложении используются следующие обозначения:

- $\mathbf{I}_B(x)$ — индикаторная функция множества B ;
- $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \dots, e_N\}$ — множество единичных координатных векторов в \mathbb{R}^N ;
- $\lambda(t) \triangleq \text{row}(\Lambda_{11}(t), \dots, \Lambda_{NN}(t))$ — строка, составленная из диагональных элементов матрицы $\Lambda(t)$, $\bar{\Lambda}(t) \triangleq \Lambda(t) - \text{diag} \lambda(t)$;
- $\mathcal{P}(s, t) = \|\mathcal{P}_{ij}(s, t)\|_{i,j=1,\dots,N}$ — матрица переходных вероятностей процесса θ_t на отрезке $[s, t]$: $\mathcal{P}_{ij}(s, t) \triangleq \mathcal{P}\{\theta_t = e_j \mid \theta_s = e_i\}$;
- любая функция $f(e, y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ представима в виде $f(e, y) = \bar{f}(y)e$, где $\bar{f}(y) \triangleq \text{row}(f(e_1, y), \dots, f(e_N, y))$;
- $\pi_n(y)$ — плотность вероятности на \mathbb{R}^M , $\pi(y) \triangleq \text{col}(\pi_1(y), \dots, \pi_N(y))$;
- $E_f^n \triangleq \int_{\mathbb{R}^M} f(y, e_n) \pi_n(y) dy$, $E_f = \text{col}(E_f^1, \dots, E_f^N) = \int_{\mathbb{R}^M} \text{diag} \bar{f}(y) \pi(y) dy$.

В качестве оцениваемого выступает специальный МСП $Z_t \triangleq \text{col}(\theta_t, Y_t) \in \mathbb{R}^{N+M}$, класс которых представлен в [6]. Первая, N -мерная, компонента θ_t описывает качественное состояние и представляет собой МСП с конечным множеством состояний \mathbb{S}^N , матрицей интенсивностей переходов $\Lambda(t)$ и начальным распределением $p_0 \triangleq \text{col}(p_0^1, \dots, p_0^N)$. Вторая, M -мерная, компонента Y_t определяет текущие числовые параметры процесса и также меняется скачкообразно синхронно с θ_t . Если

$\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — последовательность скачков θ_t , то относительно $\{\theta_{\tau_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ последовательность $\{Y_{\tau_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ представляет собой независимые случайные векторы с известными условными плотностями $\pi(u) = \text{col}(\pi_1(u), \dots, \pi_N(u))$:

$$\mathcal{P}\{Y_{\tau_i} \in B \mid \theta_{\tau_i} = e_n\} = \int_B \pi_n(u) du.$$

Условное распределение Y_0 задается аналогично условными плотностями $\phi(u) \triangleq \text{col}(\phi_1(u), \dots, \phi_N(u))$.

Если произвольный скалярный процесс $f(\theta_t, Y_t)$ — функция от исследуемого МСП Z_t , то его можно выразить через $f_t \triangleq \text{col}(\theta_t, f(\theta_t, Y_t)\theta_t)$ — $2N$ -мерный векторный процесс, ассоциированный с $f(\theta_t, Y_t)$. Если $\max_{n=1,\dots,N} \int_{\mathbb{R}^M} |f(e_n, y)|(\pi_n(y) + \phi_n(y)) dy < \infty$, то f_t представляет собой единственное сильное решение системы линейных СДУ [6]

$$f_t = f_0 + \int_0^t D^f(s) f_s ds + \mu_t^f, \quad (1)$$

где μ_t^f — некоторый \mathcal{F}_t -согласованный мартингал; $D^f(s) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ -мерная матричнозначная функция

$$D^f(t) \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda^\top(t) & 0 \\ \text{diag} E_f \bar{\Lambda}^\top(t) & \text{diag} \lambda(t) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, любые функции от Z_t описываются системами линейных СДУ с мартингалами в правой части, чем можно воспользоваться при описании стохастической дифференциальной системы наблюдения и постановке задачи фильтрации.

3 Постановка задачи

На вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$ исследуется следующая стохастическая дифференциальная система наблюдения:

$$\left. \begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t D^Y(s) Y_s ds + \mu_t^Y; \\ q_t &= q_0 + \int_0^t D^q(s) q_s ds + \mu_t^q; \\ \xi_t &= \int_0^t g(s, \theta_s, Y_s) ds + w_t; \\ \eta_t &= \int_0^t h(s, \theta_s, Y_s) ds + \mu_t^\eta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $Y_t \in \mathbb{R}^{(M+1)N}$ — ненаблюдаемое состояние системы; $q_t \in \mathbb{R}^{2N}$ — сигнальный процесс, подлежащий оцениванию; $\xi_t \in \mathbb{R}^K$ — непрерывный процесс наблюдений; $\eta_t \in \mathbb{R}^L$ — процесс наблюдений со считающими компонентами.

Состояние системы $Y_t = \text{col}(\theta_t, Y_t^1 \theta_t, Y_t^2 \theta_t, \dots, Y_t^M \theta_t)$ и оцениваемый процесс $q_t \triangleq \text{col}(\theta_t, q(\theta_t, Y_t) \theta_t)$ ассоциированы с Z_t и $q(Z_t)$ соответственно. Обе системы в (2) аналогичны (1), при этом матрица $D^Y(t)$ имеет вид:

$$D^Y \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda^\top(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \text{diag } E_{Y^1} \bar{\Lambda}^\top(t) & \text{diag } \lambda(t) & 0 & \dots & 0 \\ \text{diag } E_{Y^2} \bar{\Lambda}^\top(t) & 0 & \text{diag } \lambda(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{diag } E_{Y^M} \bar{\Lambda}^\top(t) & 0 & 0 & \dots & \text{diag } \lambda(t) \end{bmatrix}.$$

В непрерывных наблюдениях ξ_t процесс $w_t \in \mathbb{R}^K$ — \mathcal{F}_t -согласованный стандартный винеровский.

Плотности распределений $\pi(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ и функции $q(e, y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t, e, y) : [0, T] \times \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^K$ и $h(t, e, y) : [0, T] \times \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^L$ таковы, что

$$\max_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^M} \sum_{n=1}^N (\|y\|^2 + \|f(e_n, y)\|^2 + \|g(t, e_n, y)\|^2 + \|h(t, e_n, y)\|^2) (\pi_n(u) + \phi_n(u)) du < \infty. \quad (3)$$

При выполнении (3) процессы $\mu_t^Y \in \mathbb{R}^{(M+1)N}$, $\mu_t^q \in \mathbb{R}^{2N}$ и $\mu_t^\eta \in \mathbb{R}^L$ представляют собой \mathcal{F}_t -согласованные квадратично интегрируемые мартингалы с известными квадратичными характеристиками (см. [6, теорема 3]).

Заметим, что интенсивность винеровских шумов в непрерывных наблюдениях ξ_t единичная. К процессам такого типа можно преобразовать все наблюдения, интенсивность шумов в которых определяется невырожденной детерминированной функцией времени. В этом случае непрерывные наблюдения суть сумма полезного сигнала — функции состояния — и независимого шума. Поэтому подобные процессы называются наблюдениями с аддитивными шумами.

Пусть $\mathcal{O}_t \triangleq \{\xi_s, \eta_s : 0 \leq s \leq t\}$ — естественный поток σ -подалгебр, порожденный наблюдениями, доступными на отрезке времени $[0; t]$. Сделанные предположения обеспечивают конечный второй момент у всех процессов Y_t , q_t , ξ_t и η_t , а значит, и корректность постановки задачи оптимальной фильтрации сигнального процесса q_t : она заключается в вычислении $\hat{q}_t \triangleq E\{q_t | \mathcal{O}_t\}$.

4 Решение задачи фильтрации состояний и параметров марковских скачкообразных процессов

Предположения предыдущего раздела гарантируют существование УМО \hat{q}_t оцениваемого сигнального процесса. Тем не менее для применения результатов [5] необходимо выполнение дополнительных условий.

1. Процессы Y_t и w_t независимы в совокупности.
2. Компоненты $\Lambda(t)$, $q(e, y)$, $g(t, e, y)$ и $h(t, e, y)$ кусочно-непрерывны по t и y .
3. Интенсивность скачков считающих наблюдений отделена от нуля, т. е. для некоторой константы \underline{h} выполнено неравенство

$$\min_{n=1, \dots, N, \ell=1, \dots, L, t \in [0, T]} h^\ell(t, e_n, y) \geq \underline{h} > 0.$$

4. Мартингал μ_t^η в считающих наблюдениях сильно ортогонален мартингалам μ_t^Y и μ_t^q , и сам имеет сильно ортогональные компоненты, т. е.

$$\langle \mu^\eta, \mu^Y \rangle_t \equiv 0; \quad \langle \mu^\eta, \mu^q \rangle_t \equiv 0;$$

$$\langle \mu^\eta, \mu^\eta \rangle_t = \int_0^t \text{diag } h(s, \theta_s, Y_s) ds.$$

5. Все компоненты вектора распределения $p(t) = E\{\theta_t\}$ строго положительны для любого $t \geq 0$.
6. Все компоненты плотностей $\pi(\cdot)$ и $\phi(\cdot)$ кусочно-дифференцируемы и отделены от нуля:

$$\min_{n=1, \dots, N, y \in \mathbb{R}^M} \min(\pi_n(y), \phi_n(y)) \geq \underline{\pi} > 0.$$

7. Для любых $t \in [0, T]$ выполнено тождество

$$E \left\{ \exp \left[- \int_0^t \bar{g}^\top(s, Y_s) dw_s - \int_0^t \sum_{\ell=1}^L \ln(h^\ell(s, \theta_{s-}, Y_{s-})) d\eta_s^\ell - \int_0^t \left(\frac{1}{2} \bar{g}^\top(s, Y_s) \bar{g}(s, Y_s) + \sum_{\ell=1}^L (1 - \ln h^\ell(s, \theta_s, Y_s)) \right) ds \right] \right\} \equiv 1.$$

Предположения 1–7 — стандартные в теории нелинейной фильтрации [5] и гарантируют представ-

ление \hat{q}_t в виде решения некоторой системы СДУ с обновляющимися процессами в правой части. Они также обеспечивают существование условной плотности распределения процесса Z_t относительно имеющихся наблюдений, т. е. такой вектор-функции $\hat{\psi}(t, y) \triangleq \text{col}(\hat{\psi}^1(t, y), \dots, \hat{\psi}^N(t, y))$, что для любых $1 \leq n \leq N$, $t \in [0, T]$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ равенство $\mathcal{P}\{\theta_t = e_n, Y_t \in B | \mathcal{O}_t\} = \int_B \hat{\psi}^n(t, y) dy$ верно \mathcal{P} -п. н.

Утверждение 1. При сделанных выше предположениях оценка \hat{q}_t сигнального процесса q_t представляет собой единственное сильное решение системы СДУ

$$\begin{aligned} \hat{q}_t = & \hat{q}_0 + \int_0^t D^q(s) \hat{q}_{s-} ds + \\ & + \int_0^t (\widehat{qg^\top}_{s-} - \hat{q}_{s-} \widehat{g^\top}_{s-}) (d\xi_s - \widehat{g}_s ds) + \\ & + \int_0^t (\widehat{qh^\top}_{s-} - \hat{q}_{s-} \widehat{h^\top}_{s-}) (\text{diag } \widehat{h}_{s-})^{-1} (d\eta_s - \widehat{h}_s ds), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{g}_s & \triangleq E\{g(s, \theta_s, Y_s) | \mathcal{O}_s\}; \\ \widehat{g^\top}_{s-} & \triangleq E\{g^\top(u, \theta_u, Y_u) | \mathcal{O}_u\} \Big|_{u=s-}; \\ \widehat{h}_s & \triangleq E\{h(s, \theta_s, Y_s) | \mathcal{O}_s\}; \\ \widehat{h^\top}_{s-} & \triangleq E\{h^\top(u, \theta_u, Y_u) | \mathcal{O}_u\} \Big|_{u=s-}; \\ \widehat{qg^\top}_{s-} & \triangleq E\{q_s g^\top(u, \theta_u, Y_u) | \mathcal{O}_u\} \Big|_{u=s-}; \\ \widehat{qh^\top}_{s-} & \triangleq E\{q_s h^\top(u, \theta_u, Y_u) | \mathcal{O}_u\} \Big|_{u=s-}. \end{aligned}$$

Условная плотность распределения $\hat{\psi}(t, y) = \text{col}(\hat{\psi}^1(t, y), \dots, \hat{\psi}^N(t, y))$ также существует и определяется системой стохастических уравнений

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_n(t, y) = & p_0^n \phi_n(y) + \int_0^t \left[\lambda_{nn}(s) \hat{\psi}_n(s-, y) + \right. \\ & \left. + \pi_n(y) e_n^\top \overline{\Lambda}^\top(s) \int_{\mathbb{R}^M} \hat{\psi}(s-, u) du \right] ds + \\ & + \int_0^t \hat{\psi}_n(s-, y) (g(s-, e_n, y) - \widehat{g}_{s-})^\top (d\xi_s - \widehat{g}_s ds) + \\ & + \int_0^t \hat{\psi}_n(s-, y) (h(s-, e_n, y) - \widehat{h}_{s-})^\top \times \\ & \times (\text{diag } \widehat{h}_{s-})^{-1} (d\eta_s - \widehat{h}_s ds), \quad n = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство истинности утверждения 1 проводится аналогично [7, теоремы 1, 2], вы-

полненным для специальных МСП с непере-секающимися носителями только по непрерывным наблюдениям. Доказательство возможности представления оценки \hat{q}_t как решения системы (4) основано на представлении УМО относительно наблюдаемой комбинации винеровского и пуассоновского процессов [8]. Существование условной плотности распределения основывается на абстрактном варианте формулы Байеса [9, теорема 7.23].

Система СДУ (4), определяющая оценку \hat{q}_t , в общем случае незамкнута. В отличие от нее, система (5), описывающая эволюцию условного распределения $\hat{\psi}(t, y)$, замкнута. Эта система интегро-дифференциальных уравнений — обобщение уравнения Кушнера—Стратоновича на класс исследуемых МСП — позволяет вычислить оценку любой функции состояния системы, в частности сигнального процесса:

$$\hat{q}_t = \text{col} \left(\int_{\mathbb{R}^M} \hat{\psi}(t, y) dy, \int_{\mathbb{R}^M} \text{diag } \overline{q}(y) \hat{\psi}(t, y) dy \right).$$

5 Численный пример

Для иллюстрации качества представленных оценок рассмотрим пример из области телекоммуникаций [10–12], частично описанный в [6]. Пусть состояние некоторого гетерогенного (проводного/беспроводного) коммуникационного канала описывается ненаблюдаемым МСП $Z_t \triangleq \text{col}(\theta_t, Y_t)$. Первая компонента, θ_t , характеризует качественное состояние соединения и представляет собой однородный МСП со значениями из \mathbb{S}^4 :

$$\theta_t = \begin{cases} e_1 & \text{— умеренная загрузка: буфер} \\ & \text{«бутылочного горла» свободен;} \\ e_2 & \text{— состояние, предшествующее} \\ & \text{перегрузке: буфер «бутылочного} \\ & \text{горла» непуст;} \\ e_3 & \text{— перегрузка канала: буфер} \\ & \text{«бутылочного горла» заполнен} \\ & \text{полностью;} \\ e_4 & \text{— потеря сигнала на беспроводном} \\ & \text{участке канала.} \end{cases}$$

Матрица интенсивностей переходов Λ и начальное распределение p_0 имеют следующие значения:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0,051 & 0,050 & 0,000 & 0,001 \\ 0,200 & -0,268 & 0,067 & 0,001 \\ 0,000 & 0,333 & -0,334 & 0,001 \\ 0,333 & 0,000 & 0,000 & -0,333 \end{bmatrix};$$

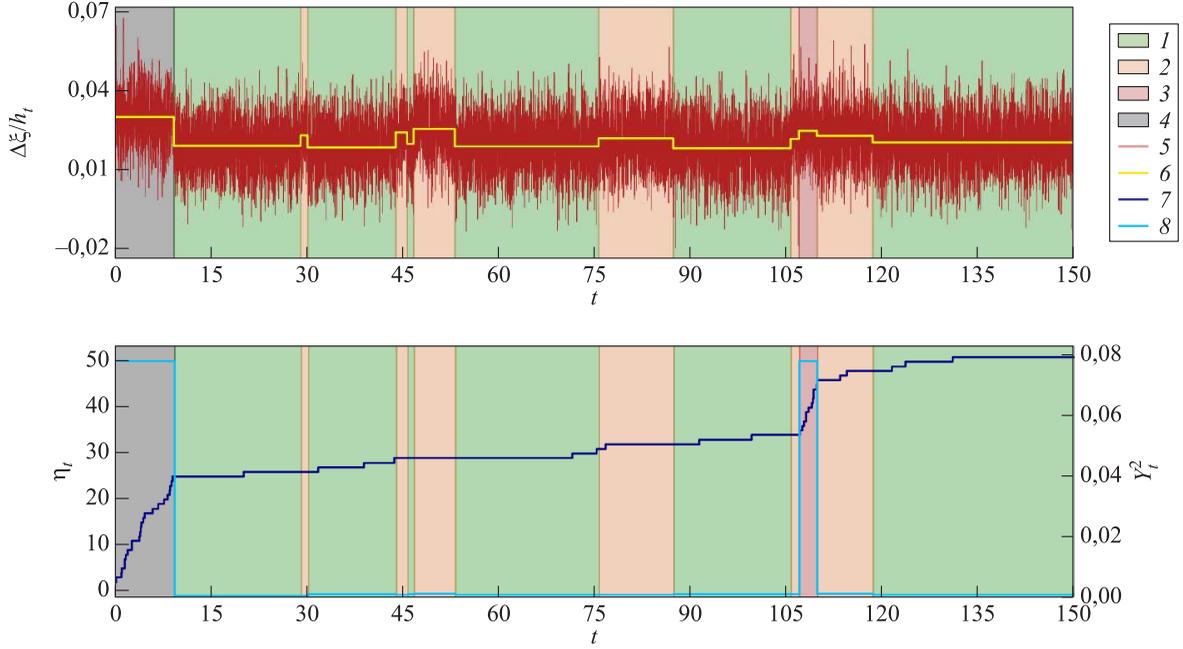


Рис. 1 Истинные значения Z_t и доступные наблюдения: 1 — $\theta_t = e_1$; 2 — e_2 ; 3 — e_3 ; 4 — $\theta_t = e_4$; 5 — $\Delta\xi_t/h_t$; 6 — Y_t^1 ; 7 — η_t ; 8 — Y_t^2

$$p_0 = \begin{bmatrix} 0,748 \\ 0,186 \\ 0,037 \\ 0,029 \end{bmatrix}.$$

Вторая компонента, $Y_t \in \mathbb{R}^2$, определяет текущие средние числовые параметры канала: Y_t^1 — значение RTT; Y_t^2 — долю потерянных пакетов. Относительно фиксированной траектории $\{\theta_t\}$ компоненты Y_t^1 и Y_t^2 независимы и имеют следующие частные условные плотности $\pi^1(y^1 | \theta_t)$ и $\pi^2(y^2 | \theta_t)$:

$$\begin{aligned} \pi^1(y^1 | \theta_t = e_1) &= 200 \times \mathbf{I}_{[0,015;0,020]}(y^1); \\ \pi^1(y^1 | \theta_t = e_2) &= 200 \times \mathbf{I}_{[0,018;0,023]}(y^1); \\ \pi^1(y^1 | \theta_t = e_3) &= 200 \times \mathbf{I}_{[0,022;0,027]}(y^1); \\ \pi^1(y^1 | \theta_t = e_4) &= 200 \times \mathbf{I}_{[0,024;0,029]}(y^1); \\ \pi^2(y^2 | \theta_t = e_1) &= 1000 \times \mathbf{I}_{[0,0005;0,0015]}(y^2); \\ \pi^2(y^2 | \theta_t = e_2) &= 1000 \times \mathbf{I}_{[0,0005;0,0015]}(y^2); \\ \pi^2(y^2 | \theta_t = e_3) &= 11,111 \times \mathbf{I}_{[0,01;0,1]}(y^2); \\ \pi^2(y^2 | \theta_t = e_4) &= 6,666 \times \mathbf{I}_{[0,05;0,2]}(y^2). \end{aligned}$$

Наблюдению доступен зашумленный процесс RTT, описываемый моделью

$$\xi_t = \int_0^t Y_s^1 ds + 0,0001 w_t,$$

и поток потерь пакетов

$$\eta_t = \int_0^t \frac{Y_s^2}{Y_s^1} ds + \mu_t^\eta.$$

Задача фильтрации заключается в оценивании в реальном масштабе времени всех компонентов вектора состояния $Z_t = \text{col}(\theta_t, Y_t)$.

Численное решение задачи фильтрации выполнялось с временным шагом $h_t = 0,001$. На рис. 1 дана информация о траектории Z_t и имеющихся наблюдениях:

- различным фоном показаны промежутки постоянства состояния θ_t : от e_1 до e_4 ;
- значение RTT Y_t^1 ;
- доля потерянных пакетов Y_t^2 (числовые значения отмечены на правой оси ординат);
- отношение $\Delta\xi_t/h_t$ в качестве наблюдений RTT Y_t^1 ,
- наблюдаемое число потерянных пакетов η_t .

Из представленных графиков можно заключить, что по имеющимся наблюдениям визуально невозможно надежно восстановить значения процесса Z_t .

Рисунок 2 содержит результаты оценивания состояния θ_t :

- истинное значение θ_t по каждой компоненте;
- оценку каждой компоненты $\hat{\theta}_t^c$, вычисленную только по непрерывным наблюдениям ξ_t ;
- оценку каждой компоненты $\hat{\theta}_t$, вычисленную по совокупности непрерывных и считающих наблюдений ξ_t и η_t .

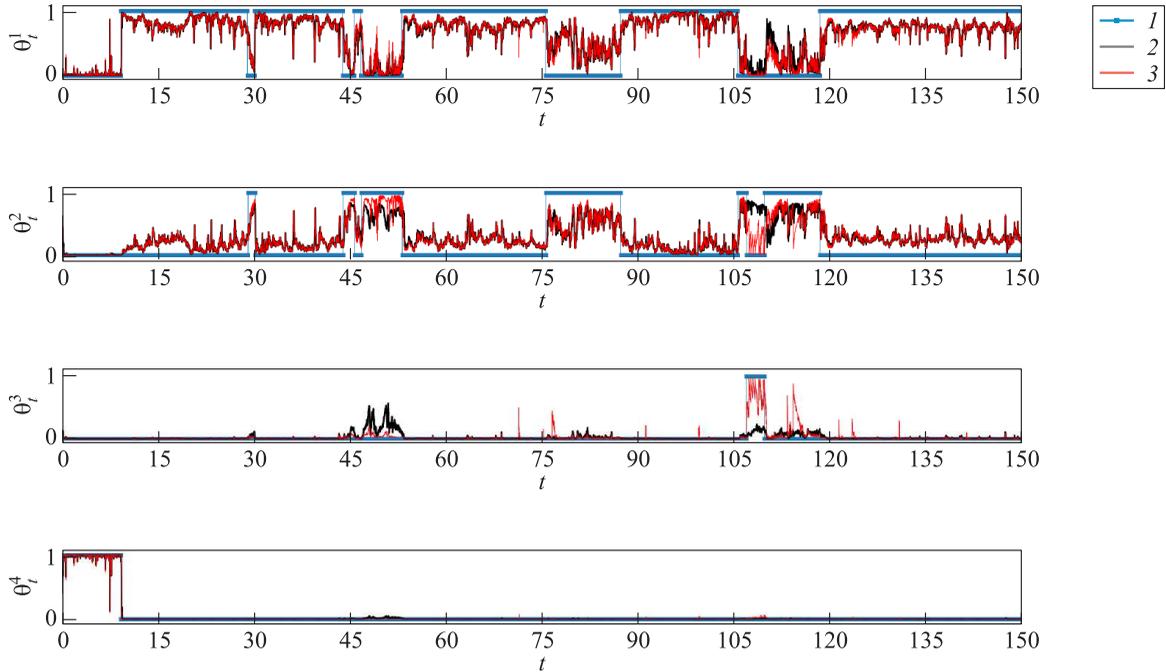


Рис. 2 Результаты оценивания компоненты θ_t : 1 — θ_t ; 2 — $\hat{\theta}_t^c$; 3 — $\hat{\theta}_t$

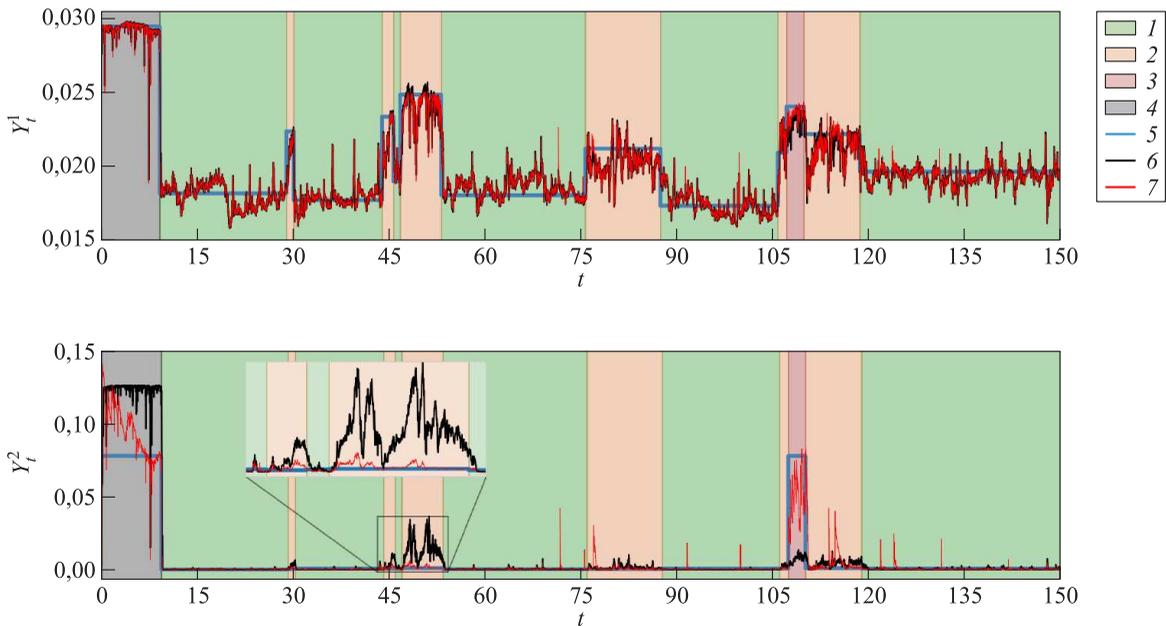


Рис. 3 Результаты оценивания компоненты Y_t : 1 — $\theta_t = e_1$; 2 — e_2 ; 3 — e_3 ; 4 — $\theta_t = e_4$; 5 — Y_t ; 6 — \hat{Y}_t^c ; 7 — \hat{Y}_t

Из рис. 2 можно сделать вывод, что в данном примере обе оценки $\hat{\theta}_t^c$ и $\hat{\theta}_t$ обладают приемлемым качеством и мало отличаются друг от друга. Некоторое преимущество $\hat{\theta}_t$ перед $\hat{\theta}_t^c$ можно отметить только при оценивании состояний e_2 и e_3 .

Рисунок 3 содержит результаты оценивания числовых параметров канала Y_t :

- истинное значение Y_t по каждой компоненте;
- оценку каждой компоненты \hat{Y}_t^c , вычисленную только по непрерывным наблюдениям ξ_t ;
- оценку каждой компоненты \hat{Y}_t , вычисленную по совокупности непрерывных и считающих наблюдений ξ_t и η_t .

Качество оценивания Y_t существенно различается в зависимости от состава используемых наблюдений. Качество оценки РТТ \hat{Y}_t^{1c} по ξ_t и \hat{Y}_t^1 по паре (ξ_t, η_t) близко. В отличие от этого, использование считающих наблюдений позволяет значительно повысить точность оценивания доли потерянных пакетов Y_t^2 .

6 Заключение

В работе представлено решение задачи оптимальной фильтрации класса МСП, предложенного в [6]. В качестве доступных наблюдений использовалась совокупность непрерывных и считающих процессов. Непрерывные наблюдения представляют собой сумму полезного сигнала — функции состояния системы — и независимых винеровских шумов. Интенсивность считающих наблюдений зависит от состояния. Задача фильтрации заключается в построении УМО сигнального процесса — функции состояния системы — по имеющимся наблюдениям.

Искомая оценка представима в виде решения некоторой системы СДУ, которая в общем случае может быть незамкнутой. Помимо этого, в работе предложена замкнутая система стохастических интегро-дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию условного распределения состояния МСП. Она позволяет построить оценку фильтрации любого интегрируемого сигнального процесса — функции состояния системы.

Практическая ценность полученных теоретических результатов проиллюстрирована решением прикладной задачи оценивания в реальном масштабе времени состояния и параметров гетерогенного телекоммуникационного канала по разнородным наблюдениям.

Представленный класс МСП и решение задачи фильтрации могут служить отправной точкой целого спектра дальнейших исследований.

Во-первых, актуальным представляется обобщение постановки и решение задачи фильтрации состояний МСП на класс непрерывных наблюдений с мультипликативными шумами, подобно [13].

Во-вторых, решение прикладных задач фильтрации связано с разработкой алгоритмов их численной реализации и анализа доставляемой точности [14]. В-третьих, предложенные МСП могут служить в качестве нового типа процессов смены режимов в СДУ, порождая системы с переменной структурой. Задачи анализа и оценивания состояний и параметров в системах подобного вида [15] представляют большой теоретический и практический интерес.

Литература

1. Crisan D. The stochastic filtering problem: A brief historical account // J. Appl. Probab., 2014. Vol. 51A. P. 13–22. doi: 10.1239/jap/1417528463.
2. Колмановский В. В., Шаихет Л. Е. Об оценивании решений линейных стохастических интегральных уравнений // Прикладная математика и механика, 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 775–778.
3. Ahmed N., Charalambous C. Filtering for linear systems driven by fractional Brownian motion // SIAM J. Control Optim., 2002. Vol. 41. Iss. 1. P. 313–330. doi: 10.1137/S0363012900368715.
4. Розовский Б. Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов. — М.: Наука, 1983. 208 с.
5. Липцер Р., Ширяев А. Теория мартингалов. — М.: Физматлит, 1986. 512 с.
6. Борисов А., Куринов Ю., Смелянский Р. Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 30–37. doi: 10.14357/19922264240304. EDN: XPVTGJ.
7. Борисов А. Анализ и оценивание состояний специальных марковских скачкообразных процессов. II: Оптимальная фильтрация в присутствии винеровских шумов // Автоматика и телемеханика, 2004. Вып. 5. С. 61–76. doi: 10.1023/B:AURC.0000028322.97957.ca.
8. Wong E., Hajek B. Stochastic processes in engineering systems. — New York, NY, USA: Springer, 1985. 361 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5060-9.
9. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — Серия «Теория вероятностей и математическая статистика». — М.: Наука, 1974. 696 с.
10. Лукьяненко А., Морозов Е., Гуртов А. Анализ сетевого протокола с общей функцией расширения окна передачи сообщения при конфликтах // Информатика и её применения, 2010. Т. 4. Вып. 2. С. 46–52. EDN: MRMSXH.
11. Борисов А. Применение алгоритмов оптимальной фильтрации для решения задачи мониторинга доступности удаленного сервера // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 3. С. 53–69. doi: 10.14375/19922264140307. EDN: SMPBCV.
12. Борисов А., Босов А., Миллер Г. Моделирование и мониторинг состояния VoIP-соединения // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 2. С. 2–13. doi: 10.14357/19922264160201. EDN: WCBWUH.
13. Borisov A., Sokolov I. Optimal filtering of Markov jump processes given observations with state-dependent noises:

Exact solution and stable numerical schemes // *Mathematics*, 2020. Vol. 8. Iss. 4. Art. 506. 22 p. doi: 10.3390/math8040506.

14. Борисов А. \mathcal{L}_1 -оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов II: численный анализ конкретных схем // *Автоматика и телеме-*

ханика, 2020. Вып. 12. С. 24–49. doi: 10.31857/S0005231020120028. EDN: LWXETS.

15. Борисов А., Стефанович А. Оптимальная фильтрация состояний специальных управляемых систем случайной структуры // *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2007. Вып. 3. С. 16–26. EDN: IACUZT.

Поступила в редакцию 07.05.24

FILTERING OF A CLASS OF MARKOV JUMP PROCESSES BY HETEROGENEOUS OBSERVATIONS WITH ADDITIVE NOISES

A. V. Borisov^{1,2}, Yu. N. Kurinov², and R. L. Smeliansky²

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

²M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract: The paper is devoted to the optimal filtering problem of a class of Markov jump processes. The estimated system state is a Markov jump process with a finite set of possible states representing the probabilistic distributions. The available measurement information includes continuous and counting observations. The continuous observation is a function of the system state corrupted by an independent Wiener process. The counting observation intensity also depends on the state. The filtering problem is to find the conditional mathematical expectation of a scalar function of the state (a signal process) given the available observations. The required estimate represents the solution to a system of the stochastic differential system. The paper also introduces an analog of the Kushner–Stratonovich equation describing the temporal evolution of the state conditional distribution. A numerical example illustrates the performance of the proposed filtering estimate. It presents the monitoring of the quality state and numerical parameters of a communication channel given the oscillating observations of round-trip time and the flow of the packet losses.

Keywords: Markov jump process; stochastic differential observation system; observations with additive noises; Kushner–Stratonovich equation

DOI: 10.14357/19922264240402

EDN: FEMNQL

Acknowledgments

The work was done with the support of MSU Program of Development, Project No.23-SCH03-03. The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (СКР “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

References

1. Crisan, D. 2014. The stochastic filtering problem: A brief historical account. *J. Appl. Probab.* 51A:13–22. doi: 10.1239/jap/1417528463.
2. Kolmanovskii, V., and L. Shaikhet. 1987. Estimation of the solutions of linear stochastic integral equations. *J. Appl. Math. Mech.* — *USSR* 51(5):607–612. doi: 10.1016/0021-8928(87)90010-4.
3. Ahmed, N., and C. Charalambous. 2002. Filtering for linear systems driven by fractional Brownian motion. *SIAM J. Control Optim.* 41(1):313–330. doi: 10.1137/S0363012900368715.
4. Rozovskiy, B. 1983. *Evolutsionnye stokhasticheskie sistemy. Lineynaya teoriya i prilozheniya k statistike sluchaynykh protsessov* [Evolutionary stochastic systems. Linear theory and applications to statistics of random processes]. Moscow: Nauka. 208 p.
5. Liptser, R. Sh., and A. N. Shiriyayev. 1989. *Theory of martingales*. New York, NY: Springer. 812 p.
6. Borisov, A. V., Yu. N. Kurinov, and R. L. Smelyansky. 2024. Veroyatnostnyy analiz klassa markovskikh skachkoobraznykh protsessov [Probabilistic analysis of a class of Markov jump processes]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):30–37. doi: 10.14357/19922264240304. EDN: XPVTGJ.
7. Borisov, A. V. 2004. Analysis and estimation of the states of special jump Markov processes. II. Optimal filtration in wiener noise. *Automat. Rem. Contr.* 65(5):741–754. doi: 10.1023/B:AURC.0000028322.97957.ca. EDN: QRZEHI.

8. Wong, E., and B. Hajek. 1985. *Stochastic processes in engineering systems*. New York, NY: Springer. 361 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5060-9.
9. Liptser, R. S., and A. N. Shiryaev. 1974. *Statistika sluchaynykh protsessov (nelineynaya fil'tratsiya i smezhnye voprosy)* [Statistics of random processes. Nonlinear filtering and related problems]. Seriya "Teorya veroyatnostey i matematicheskaya statistika" [Probability theory and mathematical statistics ser.]. Moscow: Nauka. 696 p.
10. Lukyanenko, A., E. Morozov, and A. Gurtov. 2010. Analiz setevogo protokola s obshchey funktsiyey rasshireniya okna peredachi soobshcheniya pri konfliktakh [Analysis of a link protocol with a general contention window backoff function]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 4(2):46–52. EDN: MRMSXH.
11. Borisov, A. 2014. Primenenie algoritmov optimal'noy fil'tratsii dlya resheniya zadachi monitoringa dostupnosti udalennogo servera [Monitoring remote server accessibility: The optimal filtering approach]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 8(3):53–69. doi: 10.14375/19922264140307. EDN: SMPBCB.
12. Borisov, A., A. Bosov, and G. Miller. 2016. Modelirovanie i monitoring sostoyaniya VoIP-soedineniya [Modeling and monitoring of VoIP connection]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 10(2):2–13. doi: 10.14375/19922264160201. EDN: WCBWUH.
13. Borisov, A., and I. Sokolov. 2020. Optimal filtering of Markov jump processes given observations with state-dependent noises: Exact solution and stable numerical schemes. *Mathematics* 8(4):506. 22 p. doi: 10.3390/math8040506.
14. Borisov, A. 2020. \mathcal{L}_1 -optimal filtering of Markov jump processes. II. Numerical analysis of particular realizations schemes. *Automat. Rem. Contr.* 81(12):2160–2180. doi: 10.1134/S0005117920120024. EDN: OMSFCH.
15. Borisov, A. V., and A. I. Stefanovich. 2007. Optimal state filtering of controllable systems with random structure. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 46(3):348–358. doi: 10.1134/S1064230707030021. EDN: LKULAR.

Received May 7, 2024

Contributors

Borisov Andrey V. (b. 1965) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; aborisov@freesc.ru

Kurinov Yuri N. (b. 2002) — bachelor student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; kurinovurij@gmail.com

Smeliansky Ruslan L. (b. 1950) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, head of department, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; smel@cs.msu.ru

УСЛОВНО-ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ В НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ГАУССОВСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПРИ АВТОКОРРЕЛИРОВАННОЙ ПОМЕХЕ В НАБЛЮДЕНИЯХ

И. Н. Сеницын¹

Аннотация: Теория условно-оптимальной фильтрации (УОФ) и условно-оптимальной экстраполяции (УОЭ) по В. С. Пугачёву стохастических процессов (СтП), описываемых явными стохастическими дифференциальными уравнениями в условиях автокоррелированных помех в наблюдениях, нашла практическое применение при решении задач обработки информации в реальном масштабе времени. Для неявных дифференциальных стохастических систем (СтС), допускающих приведение к явным дифференциальным, развиты соответствующие методы УОФ и УОЭ. В статье разработаны математические модели наблюдаемых неявных дифференциальных СтС, приводимых к дифференциальным, для задач фильтрации и экстраполяции, получены базовые уравнения нелинейных условно-оптимальных фильтров и экстраполяторов для некоррелированных и автокоррелированных помех в наблюдениях. Обсуждены примеры синтеза и даны предложения по развитию УОФ и УОЭ для неявных дифференциальных и функционально-дифференциальных СтС.

Ключевые слова: автокоррелированная помеха; неявная стохастическая система (СтС); приводимая дифференциальная СтС; условно-оптимальная фильтрация (УОФ); условно-оптимальная экстраполяция (УОЭ)

DOI: 10.14357/19922264240403

EDN: CVUETK

1 Введение

В [1] дано развитие методов УОФ и УОЭ по В. С. Пугачёву на случай неявных непрерывных и дискретных СтС, приводимых к явным. Дан обзор работ по субоптимальной фильтрации (СОФ) и УОФ для непрерывных и дискретных СтС, не разрешенных относительно производных (разностей). Представлены математические модели неявных непрерывных и дискретных гауссовских и негауссовских СтС, приводимых к явным. Для приведенных неявных СтС в условиях, когда наблюдения не оказывают влияния на объект наблюдения и описываются явными уравнениями, разрешенными относительно производных (разностей), получены уравнения базовых методов УОФ и УОЭ для приведения гауссовских и негауссовских СтС. Обсуждены три примера синтеза нормальных условно-оптимальных фильтров и экстраполяторов Пугачёва для приведенных систем, линейных относительно состояния.

Основываясь на монографии [2] для явных дифференциальных систем, рассмотрим обобщения методов [1] на случай неявных СтС, допускающих приведение к явным при автокоррелированных гауссовских помехах в наблюдениях. В разд. 1 и 2 дан краткий обзор известных результатов, а так-

же представлены математические модели наблюдаемых неявных дифференциальных СтС в задачах фильтрации и экстраполяции. Базовые уравнения нелинейных условно-оптимальных фильтров и экстраполяторов для некоррелированных и автокоррелированных помех в наблюдениях получены в разд. 3 и 4. В заключении сформулированы основные выводы, обсуждены примеры синтеза условно-оптимальных фильтров и экстраполяторов и даны предложения по развитию методов синтеза УОФ и УОЭ для неявных дифференциальных и функционально-дифференциальных СтС.

2 Приводимые неявные дифференциальные стохастические системы и их наблюдения

Следуя [1], рассмотрим сначала векторную неявную дифференциальную СтС с нелинейностями, описываемыми гладкими детерминированными функциями размерности $(n^{\Phi} \times 1)$:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi \left(t, Z_t, \dot{Z}_t, \dots, Y_t^{(k)}, U_t \right) = 0, \\ Z(t_0) &= Z_0, \quad \dot{Z}(t_0) = \dot{Z}_0, \dots, Y^{(k)}(t_0) = Z_0^{(k)}. \end{aligned} \quad (1)$$

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, sinitsin@dol.ru

При этом уравнение нелинейного формирующего фильтра для гауссовых стохастических возмущений U_t возьмем в виде, разрешенном относительно гауссовских белых шумов:

$$\dot{U}_t = a^U(t, U_t) + b^U(t, U_t)V_t^U, \quad U(t_0) = U_0. \quad (2)$$

Здесь $a^U = a^U(t, U_t)$ и $b^U(t, U_t) - (n^Z \times 1)$ - и $(n^Z \times n^V)$ -мерные функции; V_t^U — гауссовский белый шум интенсивности ν_t . Уравнение (2) понимается в смысле Ито и имеет единственное среднеквадратичное решение [2].

Для гладких функций в (1), допускающих стохастические производные Ито до h -го порядка, выполним следующие преобразования. Будем дифференцировать по t левые части уравнений (1) по формуле Ито до тех пор, пока не появятся производные белого шума. В результате получим следующую систему неявных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\Phi = 0, \quad \dot{\Phi} = 0, \dots, \Phi^{(h)} = 0. \quad (3)$$

Далее введем составной вектор состояния

$$X_t = \left[\bar{Z}_t^T Z_t'^T \right]^T,$$

где

$$\bar{Z}_t = \left[Z_t^T \dot{Z}_t^T \dots Z_t^{(k-1)T} \right]^T,$$

и вспомогательный вектор Z_t' , определяемый уравнениями (3), в виде конечного уравнения:

$$\Psi(X_t) = \Psi(\bar{Z}_t, Z_t') = 0.$$

Таким образом, для неявных гладких вектор-функций в (1) конечные неявные дифференциальные уравнения (1) допускают гладкую замену переменных и приведение исходных неявных дифференциальных уравнений к системе, состоящей из векторного стохастического дифференциального уравнения Ито для гауссовского белого шума $V = V_t^U$ и конечного неявного векторного стохастического дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Z}}_t &= a^\Pi(\bar{Z}_t, t) + b^\Pi(\bar{Z}_t, t)V, \\ \Psi^\Pi(\bar{Z}_t, Z_t', t) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В задачах фильтрации обычно принимается, что объектовая неявная дифференциальная СтС допускает приведение к явной СтС, измерительная система вполне наблюдаема, наблюдения не влияют на объект, причем уравнение наблюдения разрешено относительно вектора наблюдения. Введем новые обозначения для составных векторов состояния объекта взамен \bar{Z}_t , вспомогательного вектора

$Z_t' = \tilde{X}_t$ и системы наблюдения Y_t . Тогда в качестве приведенных уравнений состояния объекта и наблюдений будем рассматривать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &= \varphi^\Pi(X_t, t) + \psi^\Pi(X_t, t)V, \\ \Psi^\Pi(X_t, \tilde{X}_t, t) &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{Y}_t = \varphi_1(X_t, Y_t, Z_t, t) + \psi_1(X_t, Y_t, Z_t, t). \quad (6)$$

Для задач экстраполяции соответствующие приведенные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &= \varphi^\Pi(X_t, t) + \psi^\Pi(X_t, t)V_1, \quad \Psi^\Pi(X_t, t) = 0; \\ \dot{Y}_t &= \varphi_1^\Pi(X_t, t) + \psi_1^\Pi(X_t, t)V_2. \end{aligned}$$

Замечание 2.1. В некоторых случаях уравнения неявных СтС (исходных или приведенных) могут иметь неизвестные параметры Θ . Одним из возможных подходов к их идентификации служит следующий прием [2]: неизвестный векторный параметр Θ_t считают СтП, удовлетворяющим уравнению $\dot{\Theta}_t = 0$, и включают его компоненты в состав вектора состояния наблюдаемой системы. От неизвестных параметров могут зависеть уравнения наблюдения. Эти параметры также можно включить в расширенный вектор состояния.

В случае автокоррелированной помехи N_t в наблюдениях приведенные уравнения для условно-оптимального фильтра имеют соответственно вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_t &= \varphi^\Pi(X_t, Y_t, N_t, t) + \psi^\Pi(X_t, Y_t, N_t, t)V; \\ \dot{Y}_t &= \varphi_1^\Pi(X_t, Y_t, N_t, t); \\ \dot{N}_t &= \varphi_0^\Pi(X_t, Y_t, N_t, t) + \psi_0^\Pi(X_t, Y_t, N_t, t)V. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Пусть уравнение наблюдения допускает s -кратное дифференцирование. Тогда, следуя [2], приведем второе уравнение (7) к виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y}_t^{(k)} &= Y_t^{(k+1)} \quad (k = \overline{0, s-1}); \\ Y_t^{(s)} &= \varphi_{s+1}^\Pi(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t) + \\ &\quad + \psi_1^\Pi(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t)V. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi_{s+1}^\Pi(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t) &= \varphi_{st}^\Pi(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t) + \\ &+ \varphi_{sy}^\Pi(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t) \varphi_{s+1}^\Pi(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t)^T + \\ &+ \varphi_1^\Pi(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t) + \\ &+ \varphi_{sx}^\Pi(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t) \varphi_{s+1}^\Pi(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t)^T + \\ &+ \varphi^\Pi(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \varphi_{sn}^{\Pi} \left(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t \right) \varphi_{s+1}^{\Pi} \left(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t \right)^{\top} + \\
 & + \varphi_0^{\Pi} \left(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(A_s : B\nu B^{\top} \right) \left(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t \right); \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_1^{\Pi} \left(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t \right) = \\
 = \varphi_{sx}^{\Pi} \left(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t \right) \psi^{\Pi} \left(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t \right) + \\
 + \varphi_{sn}^{\Pi} \left(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t \right) \varphi_{s+1}^{\Pi} \left(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t \right)^{\top} + \\
 + \psi_0^{\Pi} \left(X_t, Y_t^{(0)}, N_t, t \right). \quad (10)
 \end{aligned}$$

В формуле $A_s : B\nu B^{\top}$ — $(n_y \times 1)$ -матрица, элементами которой служат следы матриц вторых производных соответствующих компонент векторной функции φ_s по всем компонентам векторов X_t, Y_t и N_t и матрицы $B\nu B^{\top}$; $B = [0 \ \psi^{\Pi T} \ \psi_0^{\Pi T}]^{\top}$.

Таким образом, имеем следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть полезный сигнал в уравнении наблюдения более гладок, чем помеха, и допускает s -кратное дифференцирование, тогда уравнения (8) вместе со вторым и третьим уравнениями (7) представляют собой систему уравнений вида (4) с расширенным вектором состояния

$$X'_t = [X_t^{\top} N_t^{\top}]^{\top}$$

вместо X_t и расширенным наблюдаемым вектором

$$Y'_t = [Y_t^{(0)\top} Y_t^{(1)\top} \dots Y_t^{(s)\top}]^{\top}$$

вместо Y_t .

В задачах экстраполяции имеем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{X}_t &= \varphi^{\Pi}(X_t, t) + \psi^{\Pi}(X_t, t)V_1; \\
 \dot{Y}_t &= \varphi_1(X_t, Y_t, N_t, t); \\
 \dot{N}_t &= \varphi_0(N_t, t) + \psi_0(N_t, t)V_2.
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Так же как и в случае экстраполяции, имеем утверждение.

Теорема 2.2. Пусть полезный сигнал в уравнении наблюдения более гладок, чем помеха, и допускает дифференцирование порядка s , тогда второе уравнение (11) можно заменить уравнениями (8), причем функция ψ_1^{Π} в последнем уравнении (8) может быть представлена следующей формулой:

$$\psi_1^{\Pi}(X_t, Y_t, N_t, t) = \varphi_{sn}(X_t, Y_t, N_t, t)^{\top} \psi_0^{\Pi}(N_t, t), \quad (12)$$

а функции $\varphi_1^{\Pi}, \dots, \varphi_{s+1}^{\Pi}$ определяются формулами (9). Уравнения (8)–(10) образуют систему уравнений вида (7) с расширенным вектором наблюдения

$$Y'_t = [Y_t^{(0)\top} Y_t^{(1)\top} \dots Y_t^{(s)\top}]^{\top}$$

вместо Y_t и расширенным вектором состояния

$$X'_t = [X_t^{\top} N_t^{\top}]^{\top}$$

вместо X_t . Таким образом, после преобразования уравнений наблюдения путем s -кратного дифференцирования задача УОЭ решается совершенно так же, как и УОФ. Разница будет лишь в том, что \hat{X}_t представляет собой оценку будущего вектора состояния системы $X_{t+\Delta}$, $\Delta > 0$.

3 Условно-оптимальная фильтрация

Применим к приведенным явным уравнениям (5) и (6) теорию УОФ [2]. Если функции φ^{Π} , φ_1 , ψ^{Π} и ψ_1 не зависят от Y_t , то векторные уравнения УОФ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{X}}_t &= \alpha_t \xi(\hat{X}_t, t) + \beta_t \eta(\hat{X}_t, t) \dot{Y}_t + \gamma_t, \\
 \Psi^{\Pi}(\hat{X}_t, \hat{Z}_t, t) &= 0, \quad (13)
 \end{aligned}$$

где $\xi = \xi(\hat{X}_t, t)$ и $\eta = \eta(\hat{X}_t, t)$ — функции отмеченных переменных, называемые структурными функциями УОФ; α_t, β_t и γ_t — коэффициенты УОФ.

В результате приходим к следующим результатам соответственно для некоррелированных и авторрелированных помех в наблюдениях.

Теорема 3.1. Пусть неявная дифференциальная негауссовская СтС (1) допускает приведение к явной дифференциальной СтС (4), а уравнения состояния и наблюдения имеют вид (5), (6). Тогда нелинейный условно-оптимальный фильтр описывается уравнениями (13), в которых коэффициенты α_t и γ_t определяются уравнениями

$$\alpha_t m_1 + \beta_t m_2 + \gamma_t = m_0, \quad (14)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 m_0 &= M\varphi^{\Pi}(X_t, t); \\
 m_1 &= M\xi(\hat{X}_t, t); \\
 m_2 &= M\eta(\hat{X}_t, t);
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_t \kappa_{11} + M(\hat{X}_t - X_t)(\xi^{\top} \alpha_t^{\top} + \gamma_t^{\top}) \frac{\partial \xi^{\top}}{\partial \hat{X}_t} = \\
 = \kappa'_{01} - \beta_t \kappa'_{21}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \mathbf{M}(\xi - m_1)\xi^T; \quad \kappa'_{21} = \mathbf{M}(\eta\varphi_1 - m_2)\xi^T; \quad (17) \\ \kappa'_{01} &= \kappa_{01} + \mathbf{M}(X_t - \hat{X}_t) \frac{\partial \xi^T}{\partial \hat{X}_t} + \mathbf{M} \left\{ (X_t - \hat{X}_t) \varphi_1^T + \right. \\ &+ \psi^\Pi \nu \psi_1^T - \beta_t \eta \psi_1 \nu \psi_1^T \left. \right\} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \xi^T + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{M}(X_t - \hat{X}_t) \left\{ \text{tr} \left[\psi_1 \nu \psi_1^T \left(\frac{\partial}{\partial y} + 2\eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \frac{\partial^T}{\partial y} \right] + \right. \\ &\left. + \text{tr} \left[\beta_t \eta \psi_1 \nu \psi_1^T \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \frac{\partial^T}{\partial \hat{X}_t} \right] \right\} \xi^T; \\ \kappa_{01} &= \mathbf{M}(\varphi^\Pi - m_0)\xi^T, \quad (18) \end{aligned}$$

а коэффициент β_t равен

$$\beta_t = \kappa_{02} \kappa'_{22}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{02} &= \mathbf{M}(X_t - \hat{X}_t) \varphi_1^T \eta^T + \mathbf{M} \psi^\Pi \nu \psi_1^T \eta^T; \\ \kappa_{22} &= \mathbf{M} \eta \psi_1 \nu \psi_1^T \eta^T \quad (\det \kappa_{22} \neq 0). \quad (20) \end{aligned}$$

Одномерное совместное распределение составного вектора $[X_t^T \hat{X}_t^T]^T$ определяется уравнением Пугачёва для одномерной характеристической функции $g_1 = g_1(\lambda_1, \lambda_2; t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial t} &= \mathbf{M} \{ i\lambda_1^T \varphi^\Pi + i\lambda_2^T [\alpha_t \xi + \beta_t \eta \varphi_1 + \gamma_t] + \\ &+ \chi(\psi^{\Pi T} \lambda_1 + \psi_1^T \eta^T \beta_t^T \lambda_2; t) \} \exp \{ i\lambda_1^T X_t + i\lambda_2^T \hat{X}_t \} \end{aligned}$$

при начальном условии

$$g_1(\lambda_1, \lambda_2; t_0) = g_0(\lambda_1, \lambda_2),$$

где

$$\chi(\varepsilon; t) = -\frac{1}{2} \varepsilon \nu \varepsilon^T.$$

Теорема 3.2. Пусть векторный СтП $[X_t^T Y_t^T N_t^T]^T$ определяется уравнениями приведенной гауссовской дифференциальной системы согласно теореме 2.1. Тогда уравнения УОФ при автокоррелированной помехе в наблюдениях, допускающей s -кратное дифференцирование, определяются уравнениями (14)–(20) теоремы 3.1. При этом если φ_1 не зависит от $Y_t = Y_t^{(0)}$, функции φ^Π и ψ^Π не зависят от Y_t и N_t , а функции φ_0 и ψ_0 не зависят от Y_t и X_t , то одномерное совместное распределение векторов X_t , N_t и \hat{X}_t в каждый момент времени определяется следующим уравнением для характеристической функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)}{\partial t} &= \mathbf{M} \{ i\lambda_1^T \varphi^\Pi + i\lambda_2^T \varphi_0 + \\ &+ i\lambda_3^T (\alpha_t \xi + \beta_t \eta \varphi_{s+1} + \gamma_t) + \chi(\psi^{\Pi T} \lambda_1 + \psi_0^T \lambda_2 + \\ &+ \psi_1^T \eta^T \beta_t^T \lambda_3) \} \exp \{ i\lambda_1^T X_t + i\lambda_2^T N_t + i\lambda_3^T \hat{X}_t \} \end{aligned}$$

при начальных условиях

$$g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t_0) = g_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

4 Условно-оптимальная экстраполяция

Применяя результаты [2] к приведенным уравнениям (11) и (12), получим следующие утверждения для некоррелированных и автокоррелированных помех в наблюдениях.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 для системы (7). Тогда УОЭ определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{t+\Delta} &= \varphi^\Pi(X_{t+\Delta}, t+\Delta) + \psi^\Pi(X_{t+\Delta}, t+\Delta) V_1(t+\Delta); \\ \alpha_t m_1 + \beta_t m_2 + \gamma_t &= m_0, \quad m_0 = \mathbf{M} \varphi^\Pi(X_{t+\Delta}, t+\Delta), \\ m_1 &= \mathbf{M} \xi, \quad m_2 = \mathbf{M} \eta \varphi_1, \\ \alpha_t &= (\kappa_{01} - \beta_t \kappa_{21}) \kappa_{11}^{-1}, \\ \beta_t &= \kappa_{02} \kappa_{22}^{-1}, \\ \kappa_{01} &= \mathbf{M}(\varphi^\Pi - m_0)\xi^T, \\ \kappa_{02} &= \mathbf{M}(X_t - \hat{X}_t) \varphi_1^T \eta(Y_t, \hat{X}_t, t)^T + \\ &+ \mathbf{M} \psi(X_t, Y_t, t) \psi_1(X_t, Y_t, t)^T \eta(Y_t, \hat{X}_t, t)^T, \\ \kappa_{22} &= \mathbf{M} \eta(Y_t, \hat{X}_t, t) \psi_1(X_t, Y_t, t) \nu(t) \psi(X_t, Y_t, t)^T \times \\ &\times \eta(Y_t, \hat{X}_t, t)^T \quad (\det \kappa_{22} \neq 0); \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_t \kappa_{11} + \mathbf{M}(\hat{X}_{t+\Delta} - X_{t+\Delta})(\xi^T \alpha_t^T + \gamma_t^T) \frac{\partial \xi^T}{\partial \hat{X}_{t+\Delta}} &= \\ &= \kappa'_{01} - \beta_t \kappa'_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa'_{01} &= \kappa_{01} + \mathbf{M}(X_{t+\Delta} - \hat{X}_{t+\Delta}) \frac{\partial \xi^T}{\partial t} + \\ &+ \mathbf{M} \left\{ (X_{t+\Delta} - \hat{X}_{t+\Delta}) \varphi_1^T - \beta_t \eta \psi_1 \nu \psi_1^T \right\} \times \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial y} + \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_{t+\Delta}} \right) \xi^T + \frac{1}{2} \mathbf{M}(X_{t+\Delta} - \hat{X}_{t+\Delta}) \times \\ &\times \left\{ \text{tr} \left[\psi_1 \nu \psi_1^T \left(\frac{\partial}{\partial y} + 2\eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_{t+\Delta}} \right) \frac{\partial^T}{\partial y} \right] + \right. \\ &\left. + \text{tr} \left[\beta_t \eta \psi_1 \nu \psi_1^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_{t+\Delta}} \frac{\partial^T}{\partial \hat{X}_{t+\Delta}} \right] \right\} \xi^T, \\ \kappa'_{21} &= \mathbf{M}(\eta \varphi_1 - m_2)\xi^T. \quad (22) \end{aligned}$$

При этом, когда функции φ_1 и ψ_1 не зависят от Y_t , достаточно знать двумерное распределение $[X_t^T \hat{X}_t^T]^T$, определяемое следующим уравнением для характеристической функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2; t, s)}{\partial s} = & \mathbb{M} \left\{ i\mu_1^T \varphi^\Pi(X_s, s) + \right. \\ & \left. + i\mu_2^T \left[\varphi^\Pi(\hat{X}_s, s) + \beta_s \eta(\hat{X}_s, s) \varphi_1(X_s, s) + \gamma_3 \right] + \right. \\ & \left. + \chi(\psi^\Pi(X_s, s)^T \mu_1 + \psi_1(X_s, s)^T \eta(\hat{X}_s, s)^T \beta_s^T \mu_2; s) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ i\lambda_1^T X_t + i\lambda_2^T \hat{X}_t + i\mu_1^T X_s + i\mu_2^T \hat{X}_s \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$g_2(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2; t, s) = g_1(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2; t, s). \quad (24)$$

Теорема 4.2. Пусть векторный СтП $[X_t^T Y_t^T N_t^T]^T$ определяется уравнениями (11) и имеет конечные одно- и многомерные вероятностные моменты, а также выполнены условия теоремы 3.2. Тогда задачу УОЭ в случае автокоррелированной помехи в наблюдениях решают с помощью уравнений (21)–(24). В случае когда функции φ_1 , ξ и η , а следовательно, и φ_{s+1} и ψ_1 не зависят от $Y_t = Y_t^{(0)}$, двумерное распределение векторного СтП $[X_t^T N_t^T \hat{X}_t^T]^T$ определяется следующим уравнением для характеристической функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3; t_1, t_2)}{\partial t_2} = & \mathbb{M} \left\{ i\mu_1^T \varphi^\Pi(X_{t_2}, t_2) + \mu_2^T \varphi(N_{t_2}, t_2) + \right. \\ & \left. + i\mu_3^T \left[\alpha_{t_2} \xi(Y_{t_2}'', \hat{X}_{t_2}, t_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta_{t_2} \eta(Y_{t_2}'', \hat{X}_{t_2}, t_2) \varphi_{s+1}(X_{t_2}, N_{t_2}, t_2) + \gamma_{t_2} \right] \chi(\tilde{\mu}; t_2) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ i\lambda_1^T X_{t_1} + i\lambda_2^T N_{t_1} + i\lambda_3^T \hat{X}_{t_3} + i\mu_1^T X_{t_2} + \right. \\ & \left. + i\mu_2^T N_{t_2} + i\mu_3^T \hat{X}_{t_3} \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\mu}$ — матрица-столбец, состоящая из двух блоков:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1 &= \psi^\Pi(X_{t_2}, t_2)^T \mu_1; \\ \tilde{\mu}_2 &= \psi_0(N_{t_2}, t_2)^T \mu_2 + \\ & \quad + \psi_1(X_{t_2}, N_{t_2}, t_2)^T \eta(Y_{t_2}'', \hat{X}_{t_2}, t_2)^T \beta_{t_2}^T \mu_3, \end{aligned}$$

где

$$Y_t'' = [\varphi_1(X_t, N_t, t)^T \cdots \varphi_s(X_t, N_t, t)^T]^T.$$

5 Заключение

В предположении, что наблюдения не влияют на объект наблюдения для дифференциальных неявных гауссовских СтС, приводимых к явным при

автокоррелированной помехе в наблюдениях, разработаны методы нелинейной УОФ и УОЭ по Пугачёву.

В качестве примеров для приведенных неявных дифференциальных СтС, например методом регрессионной линеаризации исходных неявных уравнений объекта, могут быть использованы результаты [2, разд. 5.3–5.5], а также [3–5].

Методы допускают обобщение на случаи, когда наблюдения оказывают влияние на объект, уравнения объекта и системы наблюдения содержат случайные параметры, а также для байесовых критериев условной оптимальности.

Представляет интерес обобщение результатов на задачи условно-оптимального оценивания (фильтрации, экстраполяции и интерполяции) и управления для неявных эргодических дифференциальных систем, в первую очередь неявных функционально-дифференциальных систем [2, 6–14].

Литература

1. Сеницын И. Н. Методы условно-оптимальной фильтрации и экстраполяции в наблюдаемых неявных стохастических системах // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 4. С. 2–9.
2. Сеницын И. Н. Фильтры Калмана и Пугачёва. — 2-е изд. — М.: Логос, 2007. 776 с.
3. Сеницын И. Н., Корепанов Э. Р. Устойчивые линейные условно оптимальные фильтры и экстраполяторы для стохастических систем с мультипликативными шумами // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 1. С. 70–75. doi: 10.14357/19922264150106. EDN: TVXFFB.
4. Сеницын И. Н., Корепанов Э. Р. Нормальные условно-оптимальные фильтры и экстраполяторы Пугачёва для стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 2. С. 14–23. doi: 10.14357/19922264160202. EDN: WCBWUR.
5. Сеницын И. Н., Корепанов Э. Р. Нормальные условно-оптимальные фильтры Пугачёва для дифференциальных стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и её применения, 2016. Т. 9. Вып. 2. С. 30–38. doi: 10.14357/19922264150204. EDN: TZBVRV.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Пер. с англ. — М.: Наука, 1974. 832 с. (Korn G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. — New York — San Francisco — Toronto — London — Sydney: McGrawHill Book Co., 1968. 1147 p.)
7. Толстоногов А. А., Финогенко И. А. О функционально-дифференциальных включениях в банаховом про-

- странстве с невыпуклой правой частью // Докл. Акад. наук СССР, 1980. Т. 245. № 1. С. 45–49.
8. *Финогенко И. А.* К вопросу о решениях функционально-дифференциальных включений // Прикладная математика и пакеты прикладных программ. — Иркутск: СЭИСО АН СССР, 1980. С. 95–107.
 9. *Финогенко И. А.* Свойства множества решений функционально-дифференциальных включений // Краевые задачи. — Пермь: ППИ, 1981. С. 145–149.
 10. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. — М.: Наука, 1981. 448 с.
 11. *Финогенко И. А.* О неявных функционально-дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве // Динамика нелинейных систем. — Новосибирск: Наука, 1983. С. 151–164.
 12. *Пугачёв В. С., Силицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М.: Наука, 1990. 632 с.
 13. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. 280 с.
 14. *Пугачёв В. С., Силицын И. Н.* Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2000; 2004. 1000 с.

Поступила в редакцию 13.05.24

CONDITIONALLY OPTIMAL FILTERING AND EXTRAPOLATION FOR DIFFERENTIAL GAUSSIAN IMPLICIT STOCHASTIC SYSTEMS AT AUTOCORRELATED NOISE IN OBSERVATIONS

I. N. Sinitsyn

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The theory of Pugachev conditionally-optimal filtering and extrapolation of stochastic processes described by explicit stochastic differential equations at autocorrelated noise in observations is widely used in modern real-time information processing. The paper is devoted to implicit Gaussian stochastic systems (StS) reducible to explicit StS at observational autocorrelated noises. The main results are: (i) typical mathematical models of observable implicit StS reducible to differential explicit StS; (ii) basic equations for nonlinear conditionally-optimal filters (COF) and conditionally-optimal extrapolators (COE) at noncorrelated and autocorrelated noises; and (iii) illustrative examples for reducible StS. Main conclusions and perspective directions for COF and COE design in the case of implicit differential and functional differential StS are given.

Keywords: autocorrelated observation noise; conditionally-optimal extrapolation; conditionally-optimal filtering; explicit stochastic system; implicit stochastic system

DOI: 10.14357/19922264240403

EDN: CVUETK

References

1. Sinitsyn, I. N. 2024. Metody uslovno-optimal'noy fil'tratsii i ekstrapol'yatsii v nablyudaemykh neyavnykh stokhasticheskikh sistemakh [Conditionally optimal filtering and extrapolation methods for observable implicit stochastic systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(4):2–9.
2. Sinitsyn, I. N. 2007. *Fil'try Kalmana i Pugacheva* [Kalman and Pugachev filters]. 2nd ed. Moscow: Logos. 776 p.
3. Sinitsyn, I. N., and E. R. Korepanov. 2015. Ustoychivye lineynye uslovno-optimal'nye fil'try i ekstrapol'yatory dlya stokhasticheskikh sistem s mul'tiplikativnymi shumami [Stable linear conditionally optimal filters and extrapolators for stochastic systems with multiplicative noises]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(1):70–75. doi: 10.14357/19922264150106. EDN: TVXFFB.
4. Sinitsyn, I. N., and E. R. Korepanov. 2016. Normal'nye uslovno-optimal'nye fil'try i ekstrapol'yatory Pugacheva dlya stokhasticheskikh sistem, lineynykh otноситel'no sostoyaniya [Normal Pugachev conditionally-optimal filters and extrapolators for state linear stochastic systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(2):14–23. doi: 10.14357/19922264160202. EDN: WCBWUR.
5. Sinitsyn, I. N., and E. R. Korepanov. 2015. Normal'nye uslovno-optimal'nye fil'try Pugacheva dlya differentsial'nykh stokhasticheskikh sistem, lineynykh otноситel'no sostoyaniya [Normal Pugachev filters for state linear stochastic systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(2):30–38. doi: 10.14357/19922264150204. EDN: TZBVRV.
6. Korn, G., and T. Korn. 1968. *Mathematical handbook for scientists and engineers*. New York – San Francisco – Toronto – London – Sydney: McGraw Hill Book Co. 1147 p.
7. Tolstonogov, A. A., and I. A. Finogenko. 1980. On functional-differential inclusions in a Banach space with

- a nonconvex right-hand side. *Soviet Mathematics Doklady* 22:320–324.
8. Finogenko, I. A. 1980. K voprosu o resheniyakh funktsional'no-differentsial'nykh vklyucheniye [On the issue of solutions of functional-differential inclusions]. *Prikladnaya matematika i pakety prikladnykh programm* [Applied mathematics and application software packages]. Irkutsk: SEISO AN SSSR. 95–107.
 9. Finogenko, I. A. 1981. Svoystva mnozhestva resheniy funktsional'no-differentsial'nykh vklyucheniye [Properties of the solution set of functional differential inclusions]. *Krayevye zadachi* [Boundary value problem]. Perm: PPI. 145–149.
 10. Kolmanovskiy, V. B., and V. R. Nosov. 1981. *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyykh sistem s posledstviem* [Stability and periodic modes of regulated systems with consequences]. Moscow: Nauka. 448 p.
 11. Finogenko, I. A. 1983. O neyavnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniyakh v banakhovom prostranstve [On implicit functional differential equations in a Banach space]. *Dinamika nelineynykh sistem* [Dynamics of nonlinear systems]. Novosibirsk: Nauka. 151–164.
 12. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 1987. *Stochastic differential systems. Analysis and filtering*. Chichester, NY: J. Wiley & Sons. 549 p.
 13. Azbelev, N. V., V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatulina. 1991. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of functional differential equations]. Moscow: Nauka. 280 p.
 14. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 2001. *Stochastic systems. Theory and applications*. Singapore: World Scientific. 908 p.

Received May 13, 2024

Contributor

Sinitsyn Igor N. (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНКИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО РИСКА МЕТОДА БЛОЧНОЙ ПОРОГОВОЙ ОБРАБОТКИ В ЗАДАЧАХ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ СО СЛУЧАЙНОЙ СЕТКОЙ*

О. В. Шестаков¹

Аннотация: Методы вейвлет-анализа в сочетании с процедурами пороговой обработки широко используются в задачах непараметрической регрессии при оценивании функции сигнала по зашумленным данным. Их популярность объясняется адаптивностью к локальным особенностям исследуемых функций, высокой скоростью алгоритмов обработки и оптимальностью получаемых оценок. Анализ погрешностей данных методов представляет собой важную практическую задачу, поскольку позволяет оценить качество как самих методов, так и используемого оборудования. Иногда природа данных такова, что регистрация наблюдений производится в случайные моменты времени. Если точки отсчетов образуют вариационный ряд, построенный по выборке из равномерного распределения на отрезке регистрации данных, то использование стандартных процедур пороговой обработки оказывается адекватным. В данной работе рассматривается метод блочной пороговой обработки, в котором коэффициенты вейвлет-разложения обрабатываются группами, что позволяет учитывать информацию о соседних коэффициентах. Проведен анализ оценки среднеквадратичного риска этого метода и показано, что при определенных условиях данная оценка оказывается сильно состоятельной и асимптотически нормальной.

Ключевые слова: вейвлеты; блочная пороговая обработка; случайные отсчеты; несмещенная оценка риска

DOI: 10.14357/19922264240404

EDN: WHZQPX

1 Введение

Вейвлеты — очень удобный и эффективный инструмент для решения задач непараметрического оценивания функций. Их основные преимущества — низкая вычислительная сложность, локальная адаптивность и оптимальность получаемых оценок. Обычно методы вейвлет-анализа применяются в сочетании с процедурами покоординатной пороговой обработки. К наблюдаемых данным применяется дискретное вейвлет-преобразование, получаемые эмпирические вейвлет-коэффициенты сравниваются с заданным пороговым значением, и если абсолютная величина коэффициента оказывается меньше этого значения, то он обнуляется. Самыми популярными стали процедуры жесткой и мягкой пороговой обработки. Они позволяют строить оценки, которые с точностью до логарифмического множителя обеспечивают минимаксный порядок среднеквадратичного риска для функций из пространств Бесова [1–6].

В работе [7] предложен метод пороговой обработки, при котором вейвлет-коэффициенты обрабатываются не отдельно, а блоками, что позволя-

ет учитывать информацию о соседних коэффициентах. При надлежащем выборе размера блоков и порогового значения получаемые оценки имеют минимаксный порядок среднеквадратичного риска без логарифмического множителя [8].

Упомянутые методы разработаны для дискретных отсчетов исследуемой функции сигнала, заданных на равномерной сетке и содержащих белый гауссовский шум. В некоторых приложениях нет возможности регистрировать отсчеты сигнала через равные промежутки времени [9]. Иногда природа сигнала такова, что регистрация его отсчетов производится в случайные моменты времени.

В работах [10, 11] рассмотрен случай, когда отсчеты образуют вариационный ряд, построенный по выборке из равномерного распределения на заданном отрезке, и показано, что порядок среднеквадратичного риска остается таким же, как в случае равномерной неслучайной сетки.

Большое практическое значение также имеет оценка среднеквадратичного риска, которая зависит только от наблюдаемых данных и дает возможность оценивать качество получаемых оценок исследуемых сигналов. В работах [12–18] показано,

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 22–11–00212).

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, oshestakov@cs.msu.ru

что для равноотстоящих отсчетов эта оценка оказывается сильно состоятельной и асимптотически нормальной.

В данной работе рассматривается случайная сетка с равномерным распределением отсчетов. Равномерное распределение может возникнуть в ситуации, когда моменты регистрации наблюдений образуют пуассоновский процесс, поскольку условное распределение скачков пуассоновского процесса при их фиксированном числе совпадает с распределением вариационного ряда, построенного по выборке из равномерного распределения. Такие модели могут возникать, например, в астрономии при изучении интенсивности излучения космических объектов. В работе показывается, что и в этой ситуации оценка среднеквадратичного риска остается асимптотически нормальной и сильно состоятельной.

2 Метод обработки коэффициентов вейвлет-разложения

Пусть вейвлет-функция $\psi(t)$ имеет конечный носитель, r непрерывных производных и r нулевых моментов (например, $\psi(t)$ — соответствующая вейвлет-функция Добеши). Обозначим

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k).$$

Индекс j называется масштабом, а индекс k — сдвигом. Семейство $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$, и для функции сигнала $f \in L^2(\mathbb{R})$ разложение по вейвлет-базису имеет вид:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (1)$$

Преимущество разложения (1) заключается в «экономном» представлении функций, т. е. для довольно широкого класса функций лишь относительно небольшое число коэффициентов в (1) заметно отлится от нуля.

Если вейвлет-функция ψ имеет r непрерывных производных и r нулевых моментов, определим при $r > \gamma > 0$ и $1 \leq p, q \leq \infty$ полунорму последовательности вейвлет-коэффициентов выражением

$$|f|_{B_{p,q}^\gamma} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{sj} \left(\sum_k |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^p \right)^{1/p} \right)^q \right)^{1/q},$$

где $s = \gamma + 1/2 - 1/p$. Далее будем считать, что f задана на отрезке $[0, 1]$ и принадлежит пространству Бесова $B_{p,q}^\gamma(A)$ ($A > 0$), т. е. $|f|_{B_{p,q}^\gamma} \leq A$ (в частности,

пространство Гельдера $\Lambda^\gamma(A) = B_{\infty,\infty}^\gamma(A)$). При этом вейвлеты модифицированы соответствующим образом, чтобы семейство $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ образовывало ортонормированный базис в $L^2([0, 1])$ [11].

Предположим, что отсчеты $f(x)$ регистрируются в некоторые моменты времени и содержат аддитивный белый гауссовский шум, т. е. рассмотрим следующую модель данных:

$$Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, N},$$

где ε_i независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Чаще всего предполагается, что N задано и x_i образуют равномерную сетку, т. е. $x_i = i/(N+1)$, $i = \overline{1, N}$. Однако в некоторых прикладных задачах регистрация отсчетов сигнала происходит в случайные моменты времени. Рассмотрим важный для приложений случай, в котором случайные моменты регистрации независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Предполагается, что моменты регистрации не зависят от ε_i , $i = \overline{1, N}$.

Упорядочив моменты регистрации, запишем модель данных в следующем виде:

$$Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2)$$

где $0 \leq x_{(1)} < \dots < x_{(N)} \leq 1$ — вариационный ряд, построенный по выборке x_i , $i = \overline{1, N}$, из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$. Наблюдения состоят из пар $(x_{(1)}, Y_1), \dots, (x_{(N)}, Y_N)$, в которых расстояния между отсчетами в общем случае не равны. Наряду с (2) рассмотрим выборку с равными расстояниями между отсчетами:

$$\left(\frac{1}{N+1}, Z_1 \right), \dots, \left(\frac{N}{N+1}, Z_N \right), \quad (3)$$

где

$$Z_i = f\left(\frac{i}{N+1}\right) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Для того чтобы можно было пользоваться методами вейвлет-анализа, N должно равняться 2^J при некотором целом $J > 0$. Тогда к выборке (3) можно применить дискретное ортогональное вейвлет-преобразование и получить набор эмпирических вейвлет-коэффициентов

$$W_{j,k} = \mu_{j,k} + \xi_{j,k}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad k = \overline{0, 2^j-1},$$

где $\xi_{j,k}$ — независимы и имеют такое же распределение, как и ε_i ; $\mu_{j,k}$ — коэффициенты дискретного вейвлет-преобразования выборки $f(1/(N+1)), \dots, f(N/(N+1))$. Далее, не ограничивая общности, будем полагать, что $N = 2^J$.

Затем для подавления шума обычно применяются методы пороговой обработки. Самые распространенные из них – методы жесткой и мягкой пороговой обработки и их модификации [1–4, 19–24]. При использовании этих методов происходит сравнение абсолютной величины каждого коэффициента с некоторым порогом (например, универсальным порогом, равным $\sigma\sqrt{2\log N}$), и если это значение оказывается меньше порога, то коэффициент считается шумом и обнуляется. Такие методы обрабатывают каждый коэффициент отдельно, не используя информацию о других коэффициентах. Этот недостаток можно устранить, используя блочную пороговую обработку, при которой решение об обнулении принимается одновременно к группе соседних коэффициентов [7].

Пусть $B_{j,1}, \dots, B_{j,M_j}$ – разбиение множества индексов $\{0, \dots, 2^j - 1\}$ на блоки одинаковой длины L (для удобства предположим, что 2^j делится на L). Пусть $S_{j,m}^2 = \sum_{k \in B_{j,m}} W_{j,k}^2$. Оценки коэффициентов $\mu_{j,k}$ вычисляются по правилу

$$\widehat{W}_{j,k} = \left(1 - \frac{TL\sigma^2}{S_{j,m}^2}\right)_+ W_{j,k}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad k \in B_m,$$

т.е. если величина $\sum_{k \in B_{j,m}} W_{j,k}^2$ меньше порога $TL\sigma^2$, то все коэффициенты в рассматриваемом блоке обнуляются.

На качество оценок, получаемых с помощью блочной пороговой обработки, естественно влияют размер блока L и значение порога T . В работе [8] показано, что при $L = \log N$ достигается баланс между локальной и глобальной адаптивностью метода блочной пороговой обработки, и если при этом $T^* \approx 4,50524$ (T^* – корень уравнения $T - \log T - 3 = 0$), то среднеквадратичный риск оказывается в минимаксном смысле (почти) оптимальным. В данной работе рассматриваются именно такие значения L и T .

При применении дискретного вейвлет-преобразования к выборке (2) получится набор эмпирических вейвлет-коэффициентов

$$V_{j,k} = \nu_{j,k} + \xi_{j,k}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad k = \overline{0, 2^j - 1}.$$

Здесь $\nu_{j,k}$ – коэффициенты дискретного вейвлет-преобразования выборки $f(x_{(1)}), \dots, f(x_{(N)})$. В общем случае $V_{j,k}$ не равны $W_{j,k}$, а $\nu_{j,k}$ не равны $\mu_{j,k}$. Однако к $V_{j,k}$ можно применить ту же процедуру, что и к коэффициентам $W_{j,k}$, и получить оценки $\widehat{V}_{j,k}$.

3 Несмещенная оценка среднеквадратичного риска и ее свойства

Среднеквадратичный риск для выборки со случайными точками отсчета определим как

$$R_\nu = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E} \left(\widehat{V}_{j,k} - \mu_{j,k} \right)^2. \quad (4)$$

Определим также среднеквадратичный риск для выборки с равными расстояниями между отсчетами:

$$R_\mu = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbb{E} \left(\widehat{W}_{j,k} - \mu_{j,k} \right)^2.$$

В [11] показано, что при блочной пороговой обработке достигается минимаксный порядок среднеквадратичного риска (4).

Теорема 1. Пусть $f \in B_{p,q}^\gamma(A) \cap \Lambda^{2\gamma/(2\gamma+1)}(A)$ и задана на отрезке $[0, 1]$. Пусть вейвлет-функция ψ имеет r непрерывных производных и r нулевых моментов. Если $2 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $1/2 < \gamma < r$, то

$$R_\nu \leq C \cdot 2^{J/(2\gamma+1)},$$

где C – некоторая положительная константа.

Аналогичное утверждение справедливо и для R_μ [8]. Таким образом, замена равноотстоящих точек регистрации на случайные не ухудшает оценку порядка среднеквадратичного риска.

В выражении (4) присутствуют неизвестные величины «чистых» коэффициентов $\mu_{j,k}$, поэтому вычислить значение риска R_ν на практике нельзя. Однако его можно оценить непосредственно по наблюдаемым данным. По аналогии с [8] в качестве оценки риска будем использовать величину

$$\widehat{R}_\nu = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{m=1}^{M_j} F_{j,m}, \quad (5)$$

где

$$F_{j,m} = \left[L\sigma^2 + \frac{T^2 L^2 \sigma^4 - 2TL\sigma^4(L-2)}{\tilde{S}_{j,m}^2} \cdot \mathbf{1} \left(\tilde{S}_{j,m}^2 > TL\sigma^2 \right) + \left(\tilde{S}_{j,m}^2 - 2L\sigma^2 \right) \cdot \mathbf{1} \left(\tilde{S}_{j,m}^2 \leq TL\sigma^2 \right) \right],$$

а $\tilde{S}_{j,m}^2 = \sum_{k \in B_{j,m}} V_{j,k}^2$. В ситуации с неслучайной равномерной сеткой отсчетов такая оценка риска оказывается несмещенной.

Величина (5) дает возможность получить представление о погрешности, с которой оценивается функция сигнала при использовании только наблюдаемых данных. Докажем утверждение об асимптотической нормальности оценки (5), которое, в частности, позволяет строить асимптотические доверительные интервалы для R_ν .

Теорема 2. Пусть $f \in B_{p,q}^\gamma(A) \cap \Lambda^{2\gamma/(2\gamma+1)}(A)$ и задана на отрезке $[0, 1]$. Пусть вейвлет-функция ψ имеет r непрерывных производных и r нулевых моментов. Если $2 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $1/2 < \gamma < r$, тогда при $J \rightarrow \infty$

$$\mathbb{P} \left(\frac{\widehat{R}_\nu - R_\nu}{\sigma^2 \sqrt{2^{J+1}}} < x \right) \rightarrow \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Доказательство. Наряду с \widehat{R}_ν рассмотрим

$$\widehat{R}_\mu = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{m=1}^{M_j} G_{j,m},$$

где

$$G_{j,m} = \left[L\sigma^2 + \frac{T^2 L^2 \sigma^4 - 2TL\sigma^4(L-2)}{S_{j,m}^2} \cdot \mathbf{1}(S_{j,m}^2 > TL\sigma^2) + (S_{j,m}^2 - 2L\sigma^2) \cdot \mathbf{1}(S_{j,m}^2 \leq TL\sigma^2) \right],$$

и запишем разность $\widehat{R}_\nu - R_\nu$ в виде

$$\widehat{R}_\nu - R_\nu = \widehat{R}_\mu - R_\mu + \widetilde{R},$$

где

$$\widetilde{R} = \widehat{R}_\nu - \widehat{R}_\mu - (R_\nu - R_\mu).$$

В [16] показано, что

$$\mathbb{P} \left(\frac{\widehat{R}_\mu - R_\mu}{\sigma^2 \sqrt{2^{J+1}}} < x \right) \rightarrow \Phi(x) \text{ при } J \rightarrow \infty.$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\frac{\widetilde{R}}{\sqrt{2^J}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ при } J \rightarrow \infty.$$

Если $\gamma > 1/2$, то в силу теоремы 1 и аналогичного утверждения из работы [8]

$$\frac{R_\nu(f, T_\gamma) - R_\mu(f, T_\gamma)}{\sqrt{2^J}} \rightarrow 0 \text{ при } J \rightarrow \infty.$$

Пусть $j_0 \approx J/(2\gamma + 1)$. Представим $\widehat{R}_\nu - \widehat{R}_\mu$ в виде

$$\widehat{R}_\nu - \widehat{R}_\mu = S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \sum_{j=0}^{j_0-1} \sum_{m=1}^{M_j} (F_{j,m} - G_{j,m});$$

$$S_2 = \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{m=1}^{M_j} (F_{j,m} - G_{j,m}).$$

Поскольку для некоторой константы $C_F > 0$ [8]

$$|F_{j,m} - G_{j,m}| \leq C_F T^* L \text{ п. в.}, \quad (6)$$

то для $\gamma > 1/2$

$$\frac{S_1}{\sqrt{2^J}} \rightarrow 0 \text{ п. в. при } J \rightarrow \infty.$$

Далее,

$$S_2 = \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{m=1}^{M_j} (F_{j,m} - G_{j,m}) = \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (V_{j,k}^2 - W_{j,k}^2) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{m=1}^{M_j} (U(\tilde{S}_{j,m}^2) - U(S_{j,m}^2)), \quad (7)$$

где

$$U(S^2) = \left[\frac{T^2 L^2 \sigma^4 - 2TL\sigma^4(L-2)}{S^2} - S^2 + 2L\sigma^2 \right] \cdot \mathbf{1}(S^2 > TL\sigma^2).$$

Рассмотрим первую сумму:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (V_{j,k}^2 - W_{j,k}^2) = \\ & = \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (\nu_{j,k}^2 - \mu_{j,k}^2) + 2 \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \xi_{j,k} (\nu_{j,k} - \mu_{j,k}). \end{aligned}$$

Условное распределение этой суммы при фиксированных x_i нормально с математическим ожиданием $\sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (\nu_{j,k}^2 - \mu_{j,k}^2)$ и дисперсией $4\sigma^2 \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (\nu_{j,k} - \mu_{j,k})^2$.

Так как $f \in B_{p,q}^\gamma(A) \cap \Lambda^{2\gamma/(2\gamma+1)}(A)$, то, повторяя рассуждения работы [25] с учетом леммы 3 из [10] и леммы 4 из [11], можно показать, что

$$\frac{1}{2^{J/2}} \mathbb{E}_x \left| \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (\nu_{j,k}^2 - \mu_{j,k}^2) \right| \rightarrow 0;$$

$$\frac{1}{2^{J/2}} \mathbb{E}_x \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (\nu_{j,k} - \mu_{j,k})^2 \rightarrow 0. \quad (8)$$

Следовательно, применяя неравенство Маркова, получаем, что

$$\frac{1}{2^{J/2}} \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (\nu_{j,k}^2 - \mu_{j,k}^2) \xrightarrow{P} 0;$$

$$\frac{1}{2^{J/2}} \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (\nu_{j,k} - \mu_{j,k})^2 \xrightarrow{P} 0$$

при $J \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\frac{\sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (V_{j,k}^2 - W_{j,k}^2)}{2^{J/2}} \xrightarrow{P} 0 \text{ при } J \rightarrow \infty.$$

Во второй сумме в (7) содержатся индикаторы, в которых либо $\hat{S}_{j,m}^2 > TL\sigma^2$, либо $S_{j,m}^2 > TL\sigma^2$, причем $\sum_{k=0}^{2^j-1} \mu_{j,k}^2 \rightarrow 0$ при $J \rightarrow \infty$ для всех $j > j_0$ [16]. Повторяя рассуждения из работы [12] с использованием (8) и леммы 2 из работы [8], можно показать, что эти суммы при делении на $2^{J/2}$ также сойдутся к нулю по вероятности. Теорема доказана.

Помимо асимптотической нормальности оценка (5) также обладает свойством сильной состоятельности.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при любом $\lambda > 1/2$

$$\frac{\hat{R}_\nu - R_\nu}{2^{\lambda J}} \rightarrow 0 \text{ п. в. при } J \rightarrow \infty.$$

Поскольку выполнено (6) и при фиксированных x_i слагаемые в (5) условно независимы, доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующего утверждения из работы [15].

Теоремы 2 и 3 дают теоретическое обоснование использования значения \hat{R}_ν в качестве оценки неизвестной величины риска (погрешности) R_ν , а также дают возможность строить асимптотические доверительные интервалы для R_ν .

Литература

1. Donoho D., Johnstone I. M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage // *Biometrika*, 1994. Vol. 81. No. 3. P. 425–455. doi: 10.1093/biomet/81.3.425.
2. Donoho D., Johnstone I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // *J. Am. Stat. Assoc.*, 1995. Vol. 90. P. 1200–1224. doi: 10.1080/01621459.1995.10476626.
3. Donoho D., Johnstone I. M., Kerkycharian G., Picard D. Wavelet shrinkage: Asymptopia? // *J. Roy. Stat. Soc. B Met.*, 1995. Vol. 57. No. 2. P. 301–369.
4. Donoho D., Johnstone I. M. Minimax estimation via wavelet shrinkage // *Ann. Stat.*, 1998. Vol. 26. No. 3. P. 879–921. doi: 10.1214/aos/1024691081.
5. Marron J. S., Adak S., Johnstone I. M., Neumann M. H., Patil P. Exact risk analysis of wavelet regression // *J. Comput. Graph. Stat.*, 1998. Vol. 7. P. 278–309. doi: 10.1080/10618600.1998.10474777.
6. Воронцов М. О., Шестаков О. В. Среднеквадратичный риск FDR-процедуры в условиях слабой зависимости // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 34–40. doi: 10.14357/19922264230205. EDN: AVJZDX.
7. Hall P., Kerkycharian G., Picard D. On the minimax optimality of block thresholded wavelet estimators // *Stat. Sinica*, 1999. Vol. 9. P. 33–49.
8. Cai T. Adaptive wavelet estimation: A block thresholding and oracle inequality approach // *Ann. Stat.*, 1999. Vol. 28. No. 3. P. 898–924. doi: 10.1214/aos/1018031262.
9. Cai T., Brown L. Wavelet shrinkage for nonequispaced samples // *Ann. Stat.*, 1998. Vol. 26. No. 5. P. 1783–1799. doi: 10.1214/aos/1024691357.
10. Cai T., Brown L. Wavelet estimation for samples with random uniform design // *Stat. Probabil. Lett.*, 1999. Vol. 42. P. 313–321. doi: 10.1016/S0167-7152(98)00223-5.
11. Chicken E. Block thresholding and wavelet estimation for nonequispaced samples // *J. Stat. Plan. Infer.*, 2003. Vol. 116. No. 1. P. 113–129. doi: 10.1016/S0378-3758(02)00238-0.
12. Шестаков О. В. Аппроксимация распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов нормальным распределением при использовании выборочной дисперсии // *Информатика и её применения*, 2010. Т. 4. Вып. 4. С. 73–81. EDN: NULNZH.
13. Шестаков О. В. Асимптотическая нормальность оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов при выборе адаптивного порога // *Докл. Акад. наук*, 2012. Т. 445. № 5. С. 513–515.
14. Shestakov O. V. On the strong consistency of the adaptive risk estimator for wavelet thresholding // *J. Mathematical Sciences*, 2016. Vol. 214. No. 1. P. 115–118. doi: 10.1007/s10958-016-2761-x. EDN: WPVZZV.
15. Шестаков О. В. Статистические свойства метода подавления шума, основанного на стабилизированной жесткой пороговой обработке // *Информатика и её применения*, 2016. Т. 10. Вып. 2. С. 65–69. doi: 10.14357/19922264160207. EDN: WCBWWP.
16. Шестаков О. В. Анализ несмещенной оценки среднеквадратичного риска метода блочной пороговой обработки // *Информатика и её применения*, 2021. Т. 15. Вып. 2. С. 30–35. doi: 10.14357/19922264210205. EDN: DSQQUA.
17. Шестаков О. В. Несмещенная оценка риска пороговой обработки с двумя пороговыми значениями // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 4. С. 14–19. doi: 10.14357/19922264220403. EDN: DZBVLC.

18. *Воронцов М.О., Шестаков О.В.* Асимптотическая нормальность и сильная состоятельность оценки риска при использовании FDR-порога в условиях слабой зависимости // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 69–79. doi: 10.14357/19922264240309. EDN: ZOQVTO.
19. *Gao H.-Y.* Wavelet shrinkage denoising using the non-negative Garrote // J. Comput. Graph. Stat., 1998. Vol. 7. No. 4. P. 469–488. doi: 10.1080/10618600.1998.10474789.
20. *Poornachandra S., Kumaravel N., Saravanan T.K., Somaskandan R.* WaveShrink using modified hyper-shrinkage function // 27th Annual Conference (International) of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2005. P. 30–32. doi: 10.1109/IEMBS.2005.1616334.
21. *Lin Y., Cai J.* A new threshold function for signal denoising based on wavelet transform // Conference (International) on Measuring Technology and Mechatronics Automation Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010. P. 200–203. doi: 10.1109/ICMTMA.2010.347.
22. *Huang H.-C., Lee T.C.M.* Stabilized thresholding with generalized sure for image denoising // 17th Conference (International) on Image Processing Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010. P. 1881–1884. doi: 10.1109/ICIP.2010.5652353.
23. *He C., Xing J., Li J., Yang Q., Wang R.* A new wavelet thresholding function based on hyperbolic tangent function // Math. Probl. Eng., 2015. Vol. 2015. Art. 528656. 10 p. doi: 10.1155/2015/528656.
24. *Zhao R.-M., Cui H.-M.* Improved threshold denoising method based on wavelet transform // 7th Conference (International) on Modelling, Identification and Control Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015. Art. 7409352. 4 p. doi: 10.1109/ICMIC.2015.7409352.
25. *Шестаков О.В.* Свойства вейвлет-оценок сигналов, регистрируемых в случайные моменты времени // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 2. С. 16–21. doi: 10.14357/19922264190203. EDN: SEYEXW.

Поступила в редакцию 19.09.24

STATISTICAL PROPERTIES OF THE MEAN-SQUARE RISK ESTIMATE FOR THE BLOCK THRESHOLD PROCESSING METHOD IN NONPARAMETRIC REGRESSION PROBLEMS WITH A RANDOM GRID

O. V. Shestakov^{1,2,3}

¹Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

²Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

³Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract: Wavelet analysis methods in combination with thresholding procedures are widely used in nonparametric regression problems when estimating a signal function from noisy data. Their popularity is explained by their adaptability to local features of the functions under study, high speed of processing algorithms, and optimality of the estimates obtained. Error analysis of these methods is an important practical task, since it allows one to estimate the quality of both the methods themselves and the equipment used. Sometimes, the nature of the data is such that observations are recorded at random points in time. If the sample points form a variation series of a sample from a uniform distribution over the data recording interval, then the use of standard thresholding procedures is adequate. This paper considers the block thresholding method, in which the wavelet decomposition coefficients are processed in groups that allows one to take into account information about neighboring coefficients. An analysis of the mean square risk estimate of this method is carried out and it is shown that under certain conditions, this estimate turns out to be strongly consistent and asymptotically normal.

Keywords: wavelets; block thresholding; random samples; unbiased risk estimation

DOI: 10.14357/19922264240404

EDN: WHZQPX

Acknowledgments

This research was supported by the Russian Science Foundation, project No. 22-11-00212.

References

1. Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1994. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika* 81(3):425–455. doi: 10.1093/biomet/81.3.425.
2. Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1995. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *J. Am. Stat. Assoc.* 90(432): 1200–1224. doi: 10.1080/01621459.1995.10476626.
3. Donoho, D., I. M. Johnstone, G. Kerkycharian, and D. Picard. 1995. Wavelet shrinkage: Asymptopia? *J. Roy. Stat. Soc. B Met.* 57(2):301–369.
4. Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1998. Minimax estimation via wavelet shrinkage. *Ann. Stat.* 26(3):879–921. doi: 10.1214/aos/1024691081.
5. Marron, J. S., S. Adak, I. M. Johnstone, M. H. Neumann, and P. Patil. 1998. Exact risk analysis of wavelet regression. *J. Comput. Graph. Stat.* 7(3):278–309. doi: 10.1080/10618600.1998.10474777.
6. Vorontsov, M. O., and O. V. Shestakov. 2023. Srednekvadraticznyy risk FDR-protsedury v usloviyakh slaboy zavisimosti [Mean-square risk of the FDR procedure under weak dependence]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):34–40. doi: 10.14357/19922264230205. EDN: AVJZDX.
7. Hall, P., G. Kerkycharian, and D. Picard. 1999. On the minimax optimality of block thresholded wavelet estimators. *Stat. Sinica* 9:33–49.
8. Cai, T. 1999. Adaptive wavelet estimation: A block thresholding and oracle inequality approach. *Ann. Stat.* 28(3):898–924. doi: 10.1214/aos/1018031262.
9. Cai, T., and L. Brown. 1998. Wavelet shrinkage for nonequispaced samples. *Ann. Stat.* 26(5):1783–1799. doi: 10.1214/aos/1024691357.
10. Cai, T., and L. Brown. 1999. Wavelet estimation for samples with random uniform design. *Stat. Probabil. Lett.* 42:313–321. doi: 10.1016/S0167-7152(98)00223-5.
11. Chicken, E. 2003. Block thresholding and wavelet estimation for nonequispaced samples. *J. Stat. Plan. Infer.* 116(1):113–129. doi: 10.1016/S0378-3758(02)00238-0.
12. Shestakov, O. V. 2010. Approksimatsiya raspredeleniya otsenki riska porogovoy obrabotki veyvlet-koeffitsientov normal'nym raspredeleniem pri ispol'zovanii vyborochnoy dispersii [Normal approximation for distribution of risk estimate for wavelet coefficients thresholding when using sample variance]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 4(4):73–81. EDN: NULNZH.
13. Shestakov, O. V. 2012. Asymptotic normality of adaptive wavelet thresholding risk estimation. *Dokl. Math.* 86(1):556–558. doi: 10.1134/S1064562412040370. EDN: RGENMD.
14. Shestakov, O. V. 2016. On the strong consistency of the adaptive risk estimator for wavelet thresholding. *J. Mathematical Sciences* 214(1):115–118. doi: 10.1007/s10958-016-2761-x. EDN: WPVZZV.
15. Shestakov, O. V. 2016. Statisticheskie svoystva metoda podavleniya shuma, osnovannogo na stabilizirovannoy zhestkoy porogovoy obrabotke [Statistical properties of the denoising method based on the stabilized hard thresholding]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(2):65–69. doi: 10.14357/19922264160207. EDN: WCBWWP.
16. Shestakov, O. V. 2021. Analiz nesmeshchennoy otsenki srednekvadratichnogo riska metoda blochnoy porogovoy obrabotki [Analysis of the unbiased mean-square risk estimate of the block thresholding method]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(2):30–35. doi:10.14357/19922264210205. EDN: DSQQUA.
17. Shestakov, O. V. 2022. Nesmeshchennaya otsenka riska porogovoy obrabotki s dvumya porogovymi znacheniyami [Unbiased thresholding risk estimate with two threshold values]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(4):14–19. doi: 10.14357/19922264220403. EDN: DZBVLC.
18. Vorontsov, M. O., and O. V. Shestakov. 2024. Asimptoticheskaya normal'nost' i sil'naya sostoyatel'nost' otsenki riska pri ispol'zovanii FDR-poroga v usloviyakh slaboy zavisimosti [Asymptotic normality and strong consistency of risk estimate when using the FDR threshold under weak dependence condition]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(3):69–79. doi: 10.14357/19922264240309. EDN: ZOQVTO.
19. Gao, H.-Y. 1998. Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote. *J. Comput. Graph. Stat.* 7(4):469–488. doi: 10.1080/10618600.1998.10474789.
20. Poornachandra, S., N. Kumaravel, T. K. Saravanan, and R. Somaskandan. 2005. WaveShrink using modified hyper-shrinkage function. *27th Annual Conference (International) of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 30–32. doi: 10.1109/IEMBS.2005.1616334.
21. Lin, Y., and J. Cai. 2010. A new threshold function for signal denoising based on wavelet transform. *Conference (International) on Measuring Technology and Mechatronics Automation Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 200–203. doi: 10.1109/ICMTMA.2010.347.
22. Huang, H.-C., and T. C. M. Lee. 2010. Stabilized thresholding with generalized sure for image denoising. *17th Conference (International) on Image Processing Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 1881–1884. doi: 10.1109/ICIP.2010.5652353.
23. He, C., J. Xing, J. Li, Q. Yang, and R. Wang. 2015. A new wavelet thresholding function based on hyperbolic tangent function. *Math. Probl. Eng.* 2015:528656. 10 p. doi: 10.1155/2015/528656.
24. Zhao, R.-M., and H.-M. Cui. 2015. Improved threshold denoising method based on wavelet transform. *7th Conference (International) on Modelling, Identification and Control Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. Art. 7409352. 4 p. doi: 10.1109/ICMIC.2015.7409352.

25. Shestakov, O. V. 2019. Svoystva veyvlet-otsenok signalov, registriruemyykh v sluchaynye momenty vremeni [Properties of wavelet estimates of signals recorded at random time points]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(2):16–21. doi: 10.14357/19922264190203. EDN: SEYEXW.

Received September 19, 2024

Contributor

Shestakov Oleg V. (b. 1976) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; leading scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; oshestakov@cs.msu.su

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕНОВОЙ ЭЛАСТИЧНОСТИ СПРОСА НА АВИАЦИОННЫЕ ПЕРЕВОЗКИ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

И. В. Урюпин¹, А. А. Сухарев²

Аннотация: Рассматривается задача оценки потенциала изменения объемных показателей перевозок в авиатранспортной системе (АТС) РФ в зависимости от стоимости перевозки. Предложен подход и математическая модель для оценки ценовой эластичности спроса в условиях ограниченности открытых статистических ресурсов как для национального уровня, так и для отдельно взятого маршрута. Имеющаяся проблема неполноты данных по тарифам решена за счет построения дополнительной регрессионной модели зависимости средних значений тарифа от дальности перевозки. Полученный результат может быть использован для решения широкого класса актуальных задач в сфере авиационной деятельности, включая создание и эксплуатацию авиатехники. Применение модели демонстрируется на примере оценки потенциала изменения спроса на перевозки при замещении существующих типов самолетов перспективными образцами на конкретной авиалинии и в транспортной системе в целом.

Ключевые слова: авиатранспортная система; авиалинии; авиаперевозки; математическое моделирование; эластичность спроса

DOI: 10.14357/19922264240405

EDN: GBGYKA

1 Введение

Авиатранспортная система представляет собой динамическую систему, функционирование которой зависит от внешних условий развития страны, включая протекающие социально-экономические процессы [1]. Функции управления в АТС РФ выполняют органы государственной власти, осуществляющие ряд таких ключевых операций, как планирование, организация, анализ и контроль, мотивация и координация. В качестве примеров таких управляющих воздействий можно привести: субсидирование перевозок³ [2], позволяющее повысить потенциальный спрос; развитие наземной инфраструктуры⁴, повышающей доступность авиаперевозок; финансирование развития авиационных технологий [3], обеспечивающих снижение стоимости перевозки. Наряду с авиационными важное место занимает развитие информационных технологий, которые значительно упрощают процесс разработки новых перспективных воздушных судов (ВС). Например, на начальных стадиях проектирования для моделирования компоновочной схемы [4] или весового облика судна [5].

Разумеется, управление предполагает наличие информативной обратной связи, включая различные прогнозные инструменты [6, 7], на основе которых осуществляется корректировка управля-

ющих воздействий. Ключевым показателем качества управления АТС служит оценка спроса на авиаперевозки, выраженная в приращении пассажиропотока.

В настоящее время модели оценки чувствительности спроса на авиаперевозки используют для решения широкого спектра задач. В частности, они применяются авиакомпаниями для выстраивания стратегий продаж [8], прогнозирования спроса на перевозки, балансировки спроса и предложения при оптимизации доходности [9]. Органами государственной власти ценовая эластичность принимается во внимание при определении политики нормативного регулирования [10] и развития авиатранспортной отрасли [11]. Кроме того, чувствительность спроса важно учитывать при оптимизации облика перспективной авиационной техники, поскольку, как показано в [12], оптимальные параметры летательного аппарата существенно зависят от ценовой эластичности спроса.

В литературе описан ряд математико-экономических моделей, предназначенных для решения перечисленных выше задач. К наиболее простым видам таких моделей относятся линейные зависимости спроса от различных параметров, в которых, например, может применяться двухшаговый метод наименьших квадратов (МНК) [13] или авторегрес-

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, uryupin93@yandex.ru

²Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», alx.sukharev@gmail.com

³Постановление Правительства РФ от 02.03.2018 № 215.

⁴Постановление Правительства РФ от 20.12.2017 № 1596.

сия с распределенным лагом [14]. Более распространенной моделью в исследованиях спроса на перевозки считается логлинейная зависимость [15, 16]. Существенный плюс таких моделей — простота использования в них фиктивных переменных, характеризующих структурную разницу между маршрутами и мультипликативным характером взаимодействия факторов. При этом чаще всего для оценки параметров модели применяется двухшаговый МНК с использованием инструментальных переменных, что обусловлено наличием среди объясняющих факторов слабо экзогенной переменной, отвечающей за тариф на перевозку (предложение) и косвенно зависящей от спроса. В то же время из-за учета большого числа факторов в логлинейных моделях их применение требует большого объема разной статистической информации, которая зачастую ограничена, что существенно сказывается на возможности их верификации.

Наряду с оценкой чувствительности спроса можно найти множество современных примеров успешного использования классических регрессионных моделей, приобретающих актуальность за счет эффективного использования информационных технологий. Так, в работе [17] регрессия в сочетании с техникой баз данных и геоинформационных систем позволили создать классическую экспертную систему для нетипичной области применения. Между тем, несмотря на большую историю и множество результатов, регрессии и связанные с ними вопросы остаются актуальными и для теоретических изысканий, как, например, в работах [18–20].

Обзор работ по оценке спроса на авиаперевозки за последние 10–15 лет, приведенный в [21], и анализ работ [13–16, 22–24] показали, что современные исследования в области эластичности спроса на авиаперевозки за рубежом направлены преимущественно на оценку спроса на национальном уровне. Это касается стран как с развитыми рынками авиаперевозок, так и с развивающимися. Среди ключевых факторов, оказывающих влияние на спрос, выделяются:

- (1) валовой внутренний продукт или доход населения;
- (2) объемные показатели рынка;
- (3) стоимость перевозок.

Меньшее число работ посвящено анализу чувствительности спроса на маршрутах между конкретно взятыми городами, что, предположительно, обусловлено ограниченным доступом к необходимым статистическим данным. В таких исследованиях применяется дополнительно сегментация

рынка авиаперевозок по следующим ключевым критериям:

- протяженность маршрута — короткий (включающий альтернативный транспорт) или дальний (безальтернативный);
- цель поездки — туристическая или деловая;
- тип рейса — международный или внутренний;
- вид рейса — прямой или с пересадками.

На фоне значительного корпуса зарубежных исследований обращает на себя внимание крайне малое число работ, посвященных оценке чувствительности спроса на авиаперевозки в российской АТС. Из отечественных работ рассматриваемая тематика представлена в [25] в рамках создания автоматизированной системы прогнозирования пассажирооборота с учетом эластичности спроса в интересах компаний группы «Аэрофлот». Однако доступность и применимость результатов указанного исследования ограничена по двум причинам. Во-первых, предлагаемая в работе модель запатентована [26]. Во-вторых, в качестве исходных данных система использует конфиденциальную статистическую информацию, сбор и агрегация которой доступны только при внутрикорпоративном применении данной разработки в крупной авиакомпании.

В статье предложена математическая модель приращения пассажиропотока/пассажирооборота с учетом ценовой эластичности спроса в условиях ограниченности открытых статистических данных, доступных в РФ. Построение модели реализовано в три этапа.

На первом этапе путем метаанализа релевантных работ [13–16, 21–26], проведенных на материале разных стран и регионов мира по тематике моделирования ценовой эластичности, выявлены ключевые факторы, оказывающие влияние на чувствительность спроса к изменению цены для моделей для двух разных уровней агрегации: национального и маршрутов. Выявленные факторы проанализированы на предмет доступности в РФ необходимой для их оценки статистической базы, т. е. целесообразности их включения в модель для АТС РФ. Кроме того, на основе [13–16, 21–26] проанализированы взаимосвязи оценок эластичности на национальном уровне и на уровне отдельных маршрутов.

На втором этапе с использованием найденных факторов и доступной статистической информации построена регрессионная модель эластичности спроса для национального уровня РФ. Расширение модели до уровня маршрутов проведено путем применения к оценке коэффициента эластичности для

национального уровня РФ выявленных взаимосвязей между национальными уровнями и уровнями маршрутов.

На третьем этапе проведена апробация предложенной модели на примере задачи оценки потенциала изменения пассажиропотока от внедрения нового типа техники в АТС РФ.

2 Условия применения и требования к модели

С учетом [13–16, 21–26], а также доступной статистической информации в РФ для построения модели оценки ценовой эластичности спроса для АТС в работе были использованы следующие доступные данные:

- годовые значения пассажиропотока российских авиакомпаний за 2000–2022 гг. и расписание полетов за 2022 г.¹;
- численность населения и уровень номинальных доходов с учетом эскалации²;
- средний тариф на авиаперевозку.

Для определения текущего среднего тарифа на авиаперевозку по линиям могут быть использованы данные кеша поисковых запросов на сайте авиабилетов Aviasales³, работающего с данными пяти систем бронирования: Amadeus, Travelport (включающая «Галилео» и Worldspan), «Сирена», Sabre, — а также 45 агентств и 728 авиакомпаний.

Доступ к запросам систем бронирования позволяет получить такую информацию об авиационных пассажирских перевозках, как маршрут (аэропорт вылета и прилета), дата вылета и дата, когда билет был найден, стоимость и дальности перевозки.

На рис. 1 проиллюстрирована зависимость тарифа от дальности, полученная по данным Aviasales. Помимо того, что непосредственно наблюдается разброс цен, первичный анализ позволил выделить наиболее значимые факторы, влияющие на тариф перевозки. Среди них можно выделить три: конкуренцию на линии, дальность перелета, разницу между датой вылета и датой бронирования билета. Из них наибольшее влияние на стоимость перевозки оказывает ее дальность, которой себестоимость авиаперевозки фактически пропорциональна. Влияние оставшихся двух факторов объясняют около 0,1 вариации.

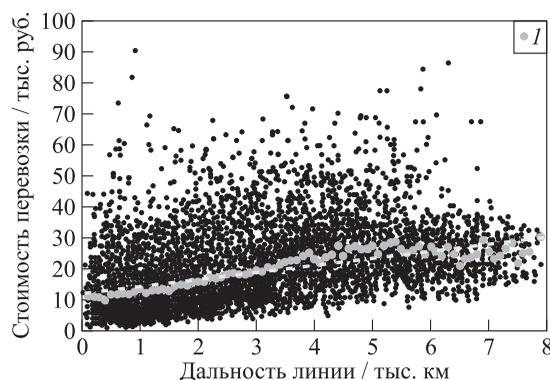


Рис. 1 Зависимость стоимости перевозки от дальности: *I* — агрегированные средние значения с шагом 100 км ($y = 2,25x + 12\,151,49$, $R^2 = 0,80$)

Поскольку уровень рентабельности АТС РФ принимает околонулевые и отрицательные значения⁴, говорить о наличии ускоренного роста тарифа по сравнению с себестоимостью не приходится. Можно ожидать, что уровень рентабельности продолжит находиться около нуля. В этом случае изменение тарифа будет происходить синхронно с изменением полной себестоимости перевозки. Такой характер изменения величин объясняется высокой конкурентной напряженностью рынка авиаперевозок⁵. Это подтверждается и практикой тарифной политики авиакомпаний, значительное число которых вынуждены сохранять тарифы даже при низкой или отрицательной рентабельности перевозок [27].

Таким образом, на основе рассмотренных доступных данных может быть построена математическая модель оценки влияния изменения тарифа на объемные показатели перевозок в АТС РФ, в частности применимая для решения задачи оценки эффекта замещения существующих самолетов перспективными типами ВС.

3 Модель оценки ценовой эластичности спроса на авиаперевозки

3.1 Базовая модель эластичности спроса

Для моделирования эластичности спроса в АТС РФ наиболее полной с точки зрения учета факторов считается логлинейная модель, представленная в [16]. Однако ввиду ограниченного и неконфиденциального набора статистической информации

¹ По данным <https://www.tch.ru/ru-ru/Stc-and-statistics/Pages/stc-and-statistics.aspx>.

² По данным <https://fedstat.ru>.

³ <https://www.aviasales.ru>.

⁴ По данным <https://www.tch.ru/ru-ru/Stc-and-statistics/Pages/stc-and-statistics.aspx> за 2022 г.

⁵ <https://www.iata.org/en/iata-repository/pressroom/fact-sheets/industry-statistics>.

в РФ модель нереализуема для решения прикладных задач. Поэтому предлагается альтернативная модель, представляющая собой линейную регрессию, которая отражает зависимость годового пассажиропотока от численности населения, а также средних взвешенных значений душевого дохода и тарифа на авиаперевозки, скорректированных на индекс потребительских цен.

Так как существует корреляция между предыдущими значениями уровня доходов и текущими значениями пассажиропотока, предлагаемая модель может быть представлена тремя вариантами:

Модель 1 с зависимостью от текущих значений ($R^2 = 0,9873$):

$$Paх = C Population^{k_1} Income_t^{k_2} Fare^{k_4}; \quad (1)$$

Модель 2 с распределенным лагом по уровню доходов (учитываются значения уровня дохода в текущем и предшествующем годах) ($R^2 = 0,9956$):

$$Paх = C Population^{k_1} Income_t^{k_2} Income_{t-1}^{k_3} Fare^{k_4}; \quad (2)$$

Модель 3 с лагом по уровню дохода (учитывается значение уровня дохода в предшествующем году) ($R^2 = 0,9947$):

$$Paх = C Population^{k_1} Income_{t-1}^{k_3} Fare^{k_4}, \quad (3)$$

где $Paх$ — пассажиропоток, млн пасс.; C , k_1 , k_2 , k_3 и k_4 — коэффициенты модели; $Population$ — численность населения, млн чел.; $Fare$ — средний уровень тарифа в постоянных ценах; $Income_t$ — уровень номинальных доходов в том же году в постоянных ценах; $Income_{t-1}$ — уровень номинальных доходов в предшествующем году в постоянных ценах.

Построенные модели обладают хорошей аппроксимирующей способностью (рис. 2), при этом коэффициенты в моделях без распределенного лага (1) и (3) отражают прямую зависимость пассажиропотока от численности населения и уровня дохода и обратную — от уровня тарифа, что соответствует здравому смыслу.

В случае модели (3) с распределенным лагом положительная связь с объясняемой переменной имеется у численности населения и уровня дохода в предыдущий год, а отрицательная — у уровня тарифов и уровня дохода в текущем году, что может свидетельствовать об избыточности данных. При этом доверительный интервал коэффициента при уровне дохода в текущем году, в отличие от остальных коэффициентов, включает 0, а значит, может менять знак.

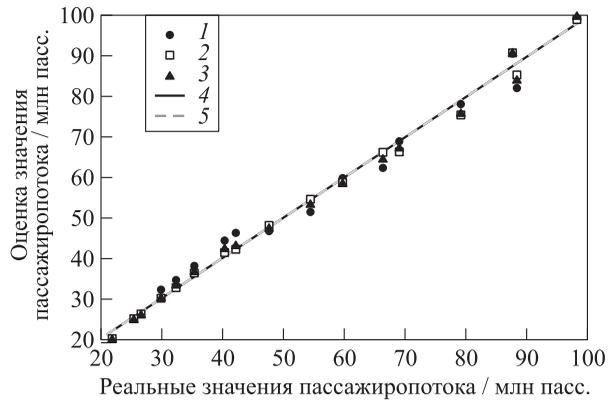


Рис. 2 Реальные и предсказанные по модели значения пассажиропотока: 1 — модель 1; 2 — модель 2; 3 — модель 3; 4 — линейная (модель 1 — $y = 0,9993x + 0,1648$, $R^2 = 0,993$); 5 — линейная (модель 3 — $y = 0,9907x + 0,5674$, $R^2 = 0,9863$)

Поскольку коэффициенты детерминации R^2 моделей (2) и (3) близки по значениям, но при этом в (3) содержится на одну переменную меньше и все найденные коэффициенты значимы, то эта модель принята как основная. Возможным объяснением того, что уровень доходов в текущем году оказался менее значимой переменной, чем уровень доходов в предыдущем году, служит тот факт, что существует лаг в несколько месяцев между изменением уровня доходов и ростом перевозок. При этом основной объем выплат приходится на вторую половину года, а основной объем перевозок выполняется во втором и третьем кварталах года. Таким образом, увеличение доходов в предыдущем году влияет на текущий пассажиропоток в большей степени, чем увеличение доходов в текущем году.

Построенные модели позволяют оценить эластичность спроса по цене для национального уровня. Для выбранной в качестве основной модели (3) она составляет $E = -0,6929$.

3.2 Эластичность при значительном отклонении от статистического тарифа

В рассмотренных работах [13–16, 21–26] спрос оценивается как линейная функция от изменения тарифа. Это вполне обосновано при небольших изменениях тарифа, когда коэффициент эластичности можно принять постоянным. Моделирование ценовой эластичности спроса для широкого диапазона относительного изменения тарифа показало, что при больших относительных изменениях тарифа эластичность существенно изменяется и ведет себя нелинейно (рис. 3).

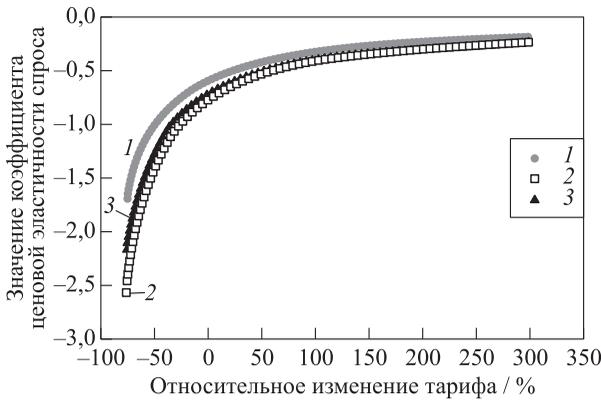


Рис. 3 Зависимость эластичности спроса от относительного изменения тарифа: 1–3 — модели 1–3

Для учета влияния этого явления в оценку эластичности предлагается ввести поправку, зависящую от относительного изменения тарифа. В этом случае выражение для эластичности примет вид:

$$E(L, \Delta \text{Fare}) = (1 + a_1 \Delta \text{Fare} + a_2 \Delta \text{Fare}^2 + a_3 \Delta \text{Fare}^3)^{-1} E_0(L). \quad (4)$$

Здесь

$$E_0(L) = \begin{cases} E_1 & \text{при } L < L_1; \\ E_1 + \frac{E_2 - E_1}{L_2 - L_1} (L - L_1) & \text{при } L \in [L_1, L_2]; \\ E_2 & \text{при } L > L_2, \end{cases} \quad (5)$$

где L — протяженность маршрута; ΔFare — относительное изменение тарифа; E_1 — эластичность для ближнемагистральных маршрутов; L_1 — дальность, до которой маршруты относятся к ближнемагистральным; E_2 — эластичность для дальнемагистральных маршрутов; L_2 — дальность, после которой маршруты относятся к дальнемагистральным.

На основе работ [13–16, 21–26] границы L_1 и L_2 с учетом продуктовых стратегий перевозок альтернативными авиационному видам транспорта (автомобильным и железнодорожным) для РФ можно принять равными 1000 км для L_1 и 2000 км для L_2 . При определенной эластичности спроса для национального уровня ($E = -0,6929$) АТС РФ по характеристикам спроса на авиaperезовки находится между АТС Азии и Африки, что позволяет оценить коэффициент эластичности для ближнемагистральных маршрутов в среднем на уровне $E_1 = -1,2$, а для дальних — на уровне $E_2 = -1,09$. Значения коэффициентов для поправок вида (4)–(5) составят: $a_1 = 0,8671$; $a_2 = -0,0749$; $a_3 = 0,0092$.

3.3 Оценка эффекта от внедрения авиатехники

Мерой эффекта от внедрения новой авиатехники выбран прирост пассажиропотока на линиях, возникающий на конкурентных рынках из-за снижения цены билета. Задача оценки эффекта сводится к поиску максимального прироста объема перевозок пассажиров среди применяемых на линии типов ВС. Предполагалось, что эксплуатируемые типы ВС будут полностью замещены новыми. Прирост пассажиропотока на линии между аэропортами A и B для i -го ВС определен по формуле:

$$\Delta \text{PAX}_{AB_i} = \left(a \left(\frac{Z - Z_i}{Z_i} \right)^3 + b \left(\frac{Z - Z_i}{Z_i} \right)^2 + c \left(\frac{Z - Z_i}{Z_i} + 1 \right)^{-1} \frac{E(Z - Z_i) D_{AB} S_i \text{LF} N_i}{P_i} \right),$$

где E — коэффициент эластичности спроса; Z — себестоимость в новом типе ВС (руб./кресло-километр); Z_i — себестоимость i -го ВС на линии AB (руб./кресло-километр); D_{AB} — кратчайшее расстояние между координатами двух аэропортов A и B (ортодромия); S_i — число кресел в i -м ВС на линии AB ; LF — коэффициент загрузки; P_i — тариф i -го ВС на линии AB ; первый множитель в правой части формулы — поправка к эластичности, зависящая от изменения тарифа, a , b и c — поправочные коэффициенты; N_i — число рейсов, совершенных i -м ВС на линии AB . Максимальное значение прироста пассажиропотока на линии AB определяется формулой:

$$\Delta \text{PAX}_{AB}^* = \max_i \Delta \text{PAX}_{AB_i}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Прирост пассажиро-километров от внедрения типа может быть рассчитан умножением прироста пассажиропотока на ортодромию соответствующей линии:

$$\Delta \text{RPK}_{AB} = \Delta \text{PAX}_{AB}^* D_{AB}.$$

Поиск максимума в (6) осуществляется перебором всех ВС, применимых на линии и удовлетворяющих ограничению на число кресел.

При поиске прироста для всего массива линий максимум ищется для каждой отдельно взятой линии. В этом случае кроме ограничения на пассажироместность дополнительным критерием выборки линий служит диапазон дальностей, на которых новый тип ВС планируется использовать. Линии с ортодромией, не попавшей в диапазон, не рассматриваются.

4 Результаты эксперимента

Работоспособность предлагаемой модели ценовой эластичности спроса демонстрируется на примере решения прикладной задачи оценки потенциального влияния на спрос замены эксплуатируемого типа самолета альтернативным перспективным самолетом, обеспечивающим возможность осуществления перевозок по более выгодному тарифу за счет обеспечиваемого им более низкого уровня затрат на кресло-километр (себестоимости). Оценка проведена для гипотетической замены разного масштаба: в первом случае — для одной авиалинии; во втором — на всей российской системе внутренних авиаперевозок. Сбор необходимых данных по тарифам осуществлен с помощью обращения к функциям API-доступа системы бронирования Aviasales [28]. Пример запроса к данным имеет следующий вид: http://api.travelpayouts.com/v2/prices/latest?currency=rub&origin=MOW&destination=LED&period_type=year&page=1&limit=2&show_to_affiliates=false&one_way=false&token=Токен.¹

Реализация сбора и хранения данных осуществлена в автоматизированном режиме в период с августа 2022 г. по июль 2023 г. В указанный период собраны около 7,5 млн записей о 12 757 прямых рейсах и их тарифах.

Для **первого случая** рассмотрен модельный пример внедрения нового перспективного самолета на линии Москва (SVO) – Екатеринбург (SVX). Оценивается влияние на спрос замены эксплуатируемых самолетов пассажироместимостью 150–200 кресел на новый тип самолета, обеспечивающий себестоимость перевозок 3,45 руб. за кресло-километр. Результат внедрения нового ВС с такими характеристиками для выбранной линии представлен в табл. 1.

Расчет показал, что при заданных параметрах наибольший эффект будет достигнут при замещении новым типом самолетов Боинг 737-800 (в модификации с винглета). Потенциальный прирост пассажиропотока составит 9,1 тыс. пасс. что обеспечит приращение транспортной работы на 13,1 млн пассажиро-километров (пкм) в год.

Для **второго случая** рассмотрен пример замены существующих самолетов на всей АТС РФ на перспективный самолет со следующими характеристиками: себестоимость перевозки 3,6 руб. за кресло-километр; предполагаемая пассажироместимость — 150–250 кресел; дальность эксплуатации с типовой полной загрузкой — 1500–2500 км. Результат расчета внедрения нового ВС с заданными параметрами в АТС РФ представлен в табл. 2.

Расчет показал, что заданный диапазон дальностей соответствует 329 линиям, что составляет

Таблица 1 Внедрение нового типа ВС на линии Москва (SVO) – Екатеринбург (SVX)

Тип ВС	Число рейсов в год	Δ себестоимости	Прирост, пасс.	Прирост, %	Прирост, пкм
A320нео	339	-0,06	372	0,90	534 814
A321нео	8	0,08	-14	-1,16	-20 036
A320	164	-0,11	311	1,56	446 597
A320 (шарклетс)	976	-0,06	1072	0,90	1 539 760
A321	118	0,08	-206	-1,16	-295 526
A321 (шарклетс)	344	0,31	-2336	-4,53	-3 357 166
V737-800 (винглета)	1603	-0,29	9151	4,26	13 150 379
V737-800	99	-0,20	397	2,99	569 790

Таблица 2 Моделирование внедрения нового типа ВС в АТС РФ

Тип ВС	Δ себестоимости	Прирост, пасс.	Прирост, пкм	Число линий	Доля от общего числа линий, %
A320нео	0,09	-2720	-5 827 617	19	3,67
A321нео	0,23	-2152	-4 242 938	4	
A320	0,04	-1315	-2 555 389	41	
A320 (шарклетс)	0,09	-783	-1 273 564	20	
A321	0,23	-100	-194 930	10	
V737	-0,94	98 979	194 641 193	27	9,08
V737-800 (винглета)	-0,14	254 449	474 076 658	139	
V737-800	-0,05	5131	8 857 026	67	
V737-900 (винглета)	-0,14	346	646 528	2	

¹Токен, полученный в личном кабинете после регистрации.

12,75% всех линий в 2022 г., причем для 9,08% линий внедрение нового типа ВС приведет к приросту пассажиропотока (суммарно 359 тыс. чел), а для 3,67% будет наблюдаться отрицательный эффект (суммарно 7 тыс. чел). Наибольший эффект для АТС РФ будет достигнут при замещении новым типом ВС самолетов Боинг 737-800 (в модификации с винглетс). При замещении данного типа новым потенциальный прирост может составить 254,4 тыс. пассажиров или 474 млн пкм в год.

5 Заключение

В работе представлена модель оценки влияния изменения тарифа на объемные показатели перевозок в авиатранспортной системе РФ в условиях ограниченности статистических данных. Использована регрессионная модель оценки пассажиропотока на авиационном транспорте в АТС России по двум независимым переменным: численности населения и среднему уровню тарифа с распределенным лагом 1 год, коэффициент детерминации которой составляет $R^2 = 0,993$. На базе этой модели коэффициент эластичности спроса по цене на национальном уровне составляет $E = -0,6929$.

На основе анализа статистических данных для условий РФ выявлены значения, характеризующие нелинейный характер изменения эластичности по цене при больших отклонениях тарифа от среднего уровня. Предложена поправка, позволяющая оценивать коэффициенты эластичности в зависимости от протяженности линии. Определено, что полученные значения эластичности спроса по цене авиаперевозки на уровне маршрутов в среднем составляют $-1,2$ и $-1,9$ для ближнемагистральных и дальних маршрутов соответственно.

Полученные результаты могут быть использованы коммерческими авиакомпаниями, разработчиками авиатехники, органами государственной власти. С учетом отечественной специфики модели ценовой эластичности авиаперевозок целесообразно применять также при оценке эффектов от субсидирования или изменения фискальной политики, оценке влияния на АТС ввода новой продукции гражданского авиастроения, оценке воздействия санкций на рынок авиаперевозок и решении других задач.

Литература

1. *Albayati R. S., Zehawi R. N.* System dynamic model for simulating aviation demand: Baghdad international airport as a case study // *Mathematical Modelling Engineering Problems*, 2022. Vol. 9. No. 5. P. 1289–1297. doi: 10.18280/mmep.090517.

2. *Рублев В. В.* Анализ эффективности мер государственной поддержки региональных пассажирских авиаперевозок в Российской Федерации // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2020. Т. 7. С. 161–177. doi: 10.17308/meps.2020.7/2404. EDN: GCGHRR.
3. *Дутов А. В., Клочков В. В.* Методы оценки влияния технологий на характеристики перспективной продукции и достижение целей научно-технологического развития (на примере гражданского авиастроения) // *Экономика науки*, 2020. Т. 6. Вып. 1-2. С. 35–45. doi: 10.22394/2410-132X-2020-6-1-2-35-45. EDN: VHHKUN.
4. *Вышинский Л. Л., Флеров Ю. А.* Модели синтеза компоновочной схемы в задаче формирования облика самолета // *Информатика и её применения*, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 61–70. doi: 10.14357/19922264240109. EDN: DSPGKV.
5. *Вышинский Л. Л., Флеров Ю. А.* Теоретические основы формирования весового облика самолета // *Информатика и её применения*, 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 93–102. doi: 10.14357/19922264210413. EDN: UGQQLU.
6. *Richmond S. B.* Forecasting air passenger traffic by multiple regression analysis // *J. Air Law Commerce*, 1955. Vol. 22. P. 434–444.
7. *Washington S., Karlaftis M. G., Mannering F., Anastasopoulos P.* Statistical and econometric methods for transportation data analysis. — 3rd ed. — London, U.K.: Chapman and Hall/CRC, 2020. 496 p.
8. *Granados N., Gupta A., Kauffman R. J.* Online and offline demand and price elasticities: Evidence from the air travel industry // *Inform. Syst. Res.*, 2012. Vol. 23. No. 1. P. 164–181. doi: 10.1287/isre.1100.0312.
9. *Mumbower S., Garrow L. A., Higgins M. J.* Estimating flight-level price elasticities using online airline data: A first step toward integrating pricing, demand, and revenue optimization // *Transport. Res. A — Pol.*, 2014. Vol. 66. P. 196–212. doi: 10.1016/J.TRA.2014.05.003.
10. *Molloy J., Melo P. C., Graham D. J., Majumdar A., Ochieng W. Y.* Role of air travel demand elasticities in reducing aviation's carbon dioxide emissions // *Transport. Res. Rec.*, 2012. Vol. 2300. No. 1. P. 31–41. doi: 10.3141/2300-04.
11. *Klophaus R., Grosche T.* Consumer surplus analysis of selected long-haul air transport routes connecting Germany with California and China // *Res. Transp. Econ.*, 2020. Vol. 80. Art. 100793. 9 p. doi: 10.1016/j.retrec.2019.100793.
12. *Morrison S. A.* An economic analysis of aircraft design // *J. Transp. Econ. Policy*, 1984. Vol. 18. No. 2. P. 123–143.
13. Bureau of Transport and Communications Economics. Demand elasticities for air travel to and from Australia: BTCE. — Canberra, Australia: Department of Transport and Communications, 1995. Working Paper 20. 112 p. https://www.bitre.gov.au/sites/default/files/wp_020.pdf.
14. *Oum T. H., Gillen D. W., Noble S. E.* Demands for fare classes and pricing in airline markets // *Logist. Transport. Rev.*, 1986. Vol. 22. No. 3. P. 195–222.

15. *Gillen D. W., Morrison W. G., Stewart C.* Air travel demand elasticities: Concepts, issues and measurement. — Ottawa, Canada: Department of Finance, Government of Canada, 2003. Final Report. Vol. 2. P. 365–410.
16. *Kincaid I., Trethaway M.* Estimating air travel demand elasticities. — InterVISTAS Consulting Inc., 2007. Final Report. 58 p. <https://www.iata.org/en/iata-repository/publications/economic-reports/estimating-air-travel-demand-elasticities---by-intervistas>.
17. *Босов А. В., Жуков Д. В.* Экспертная система для мониторинга и прогнозирования процессов распределения ресурсов // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 3. С. 29–40. doi: 10.14357/19922264210305. EDN: UGKIQA.
18. *Спивак С. И., Кантор О. Г., Юнусова Д. С., Кузнецов С. И., Колесов С. В.* Оценка погрешности и значимости измерений для линейных моделей // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 1. С. 87–97. doi: 10.14357/19922264150108. EDN: TVXFFV.
19. *Базилевский М. П.* Многофакторные модели полностью линейной регрессии без ограничений на соотношения дисперсий ошибок переменных // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 2. С. 92–97. doi: 10.14357/19922264200213. EDN: KЮМАF.
20. *Базилевский М. П.* Метод выпрямления искаженных из-за мультиколлинеарности коэффициентов в регрессионных моделях // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 2. С. 60–65. doi: 10.14357/19922264210209. EDN: GCWTOB.
21. *Wang S., Gao Y.* A literature review and citation analyses of air travel demand studies published between 2010 and 2020 // J. Air Transp. Manag., 2021. Vol. 97. Art. 102135. 15 p. doi: 10.1016/j.jairtraman.2021.102135.
22. *Oum T. H., Waters W. G., Jong S. Y.* A survey of recent estimates of price elasticities of demand for transport. — Washington, D.C.: World Bank Group, 1990. Policy, Planning and Research Department Working Paper No. WPS 359. Available at: <http://documents.worldbank.org/curated/en/573201468766481035/A-survey-of-recent-estimates-of-price-elasticities-of-demand-for-transport>.
23. *Hsiao C. Y., Hansen M.* A passenger demand model for air transportation in a hub-and-spoke network // Transport. Res. E — Log., 2011. Vol. 47. No. 6. P. 1112–1125. doi: 10.1016/j.tre.2011.05.012.
24. *Gallet C. A., Doucouliagos H.* The income elasticity of air travel: A meta-analysis // Ann. Tourism Res., 2014. Vol. 49. P. 141–155. doi: 10.1016/j.annals.2014.09.006.
25. *Дубинина В. Г.* Повышение эффективности функционирования авиакомпании на основе информационно-аналитической поддержки бизнес-процессов: Дис. . . . д-ра техн. наук. — М.: МГТУ Станкин, 2005. 236 с.
26. *Окулов В. М., Полубояринов М. И., Курочкин Е. П., Акимова Н. Ф., Дубинина В. Г., Якимец М. В.* Автоматизированная система прогнозирования пассажирооборота с учетом эластичности спроса. Патент на полезную модель № 77470 U1 Российская Федерация, 2008. EDN: ZWZNGP.
27. *Tellis G. J.* The price elasticity of selective demand: A meta-analysis of econometric models of sales // J. Marketing Res., 1988. Vol. 25. No. 4. P. 331–341. doi: 10.2307/3172944.
28. *Lantseva A., Mukhina K., Nikishova A., et al.* Data-driven modeling of airlines pricing // Procedia Comput. Sci., 2015. Vol. 66. P. 267–276. doi: 10.1016/j.procs.2015.11.032.

Поступила в редакцию 10.04.24

MODELING THE PRICE ELASTICITY OF DEMAND ON PASSENGER AIR TRANSPORTATION IN RUSSIA WITH LIMITED STATISTICAL DATA

I. V. Uryupin¹ and A. A. Sukharev²

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

²National Research University Higher School of Economics, 20 Myasnitskaya Str., Moscow 101000, Russian Federation

Abstract: The paper is aimed to suggest a model describing the influence of air fares on air transportation demand in the Russian air transportation system. The authors suggest an approach and a mathematical model for the price elasticity of air travel demand estimation in the Russian Federation both at the national level and for a single route. In the context of limited statistical information, the problem of incomplete data on tariffs was solved by an additional regression model of the dependence of tariffs on the distance of transportation. The results of the study contribute to airline practitioners and stakeholders by providing a Russian-context-specific allied instrument for estimating the influence of the air fare change on air transportation demand to solve a range of tasks related to aircraft design and operation. The article demonstrates the use of the obtained model to assess the potential for

changes in demand for transportation when replacing existing types of aircraft with advanced models on a specific route and in the whole Russian air transportation system.

Keywords: air transportation system; mathematical modeling; price elasticity; airlines; air transportation

DOI: 10.14357/19922264240405

EDN: GBGYKA

References

- Albayati, R. S., and R. N. Zehawi. 2022. System dynamic model for simulating aviation demand: Baghdad international airport as a case study. *Mathematical Modelling Engineering Problems* 9(5):1289–1297. doi: 10.18280/mmep.090517.
- Rublev, V. V. 2020. Analiz effektivnosti mer gosudarstvennoy podderzhki regional'nykh passazhirskikh aviaperevozok v Rossiyskoy Federatsii [Analysis of the effectiveness of state support measures for regional passenger air transport in the Russian Federation]. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya* [Modern Economics Problems Solutions] 7:161–177. doi: 10.17308/meps.2020.7/2404. EDN: GCGHRR.
- Dutov, A. V., and V. V. Klochkov. 2020. Metody otsenki vliyaniya tekhnologiy na kharakteristiki perspektivnoy produktsii i dostizhenie tseley nauchno-tekhnologicheskogo razvitiya (na primere grazhdanskogo aviastroeniya) [Methods for assessing the impact of technologies on the characteristics of promising products and achieving the goals of scientific and technological development]. *Ekonomika nauki* [Economics of Science] 6(1-2):35–45. doi: 10.22394/2410-132X-2020-6-1-2-35-45. EDN: VHHKUN.
- Vyshinskiy, L. L., and Yu. A. Flerov. 2024. Modeli sinteza komponovochnoy skhemy v zadache formirovaniya oblika samoleta [Synthesis models of layout scheme in the task of forming an aircraft image]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):61–70. doi: 10.14357/19922264240109. EDN: DSPGKV.
- Vyshinskiy, L. L., and Yu. A. Flerov. 2021. Teoreticheskie osnovy formirovaniya vesovogo oblika samoleta [Theoretical foundation of formation of aircraft weight appearance]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(4):93–102. doi: 10.14357/19922264210413. EDN: UGQQLU.
- Richmond, S. B. 1955. Forecasting air passenger traffic by multiple regression analysis. *J. Air Law Commerce* 22(4):434–444.
- Washington, S., M. G. Karlaftis, F. Mannering, and P. Anastasopoulos. 2020. *Statistical and econometric methods for transportation data analysis*. 3rd ed. London, U.K.: Chapman and Hall/CRC. 496 p.
- Granados, N., A. Gupta, and R. J. Kauffman. 2012. Online and offline demand and price elasticities: Evidence from the air travel industry. *Inform. Syst. Res.* 23(1):164–181. doi: 10.1287/isre.1100.0312.
- Mumbower, S., L. A. Garrow, and M. J. Higgins. 2014. Estimating flight-level price elasticities using online airline data: A first step toward integrating pricing, demand, and revenue optimization. *Transport. Res. A — Pol.* 66:196–212. doi: 10.1016/J.TRA.2014.05.003.
- Molloy, J., P. C. Melo, D. J. Graham, A. Majumdar, and W. Y. Ochieng. 2012. Role of air travel demand elasticities in reducing aviation's carbon dioxide emissions. *Transport. Res. Rec.* 2300(1):31–41. doi: 10.3141/2300-04.
- Klophaus, R., and T. Grosche. 2020. Consumer surplus analysis of selected long-haul air transport routes connecting Germany with California and China. *Res. Transp. Econ.* 80:100793. 9 p. doi: 10.1016/j.retrec.2019.100793.
- Morrison, S. A. 1984. An economic analysis of aircraft design. *J. Transp. Econ. Policy* 18(2):123–143.
- Bureau of transport and communications economics. 1995. *Demand elasticities for air travel to and from Australia*. Canberra, Australia: Department of Transport and Communications. Working paper 20. 112 p. Available at: https://www.bitre.gov.au/sites/default/files/wp_020.pdf (accessed July 3, 2024).
- Oum, T. H., D. W. Gillen, and S. E. Noble. 1986. Demands for fare classes and pricing in airline markets. *Logist. Transport. Rev.* 22(3):195–222.
- Gillen, D. W., W. G. Morrison, and C. Stewart. 2003. *Air travel demand elasticities: Concepts, issues and measurement*. Ottawa, Canada: Department of Finance, Government of Canada. Final Report. 2:365–410.
- Kincaid, I., and M. Trethaway. 2007. Estimating air travel demand elasticities. InterVISTAS Consulting Inc. Final Report. 58 p. Available at: <https://www.iata.org/en/iata-repository/publications/economic-reports/estimating-air-travel-demand-elasticities---by-intervistas> (accessed July 3, 2024).
- Bosov, A. V., and D. V. Zhukov. 2021. Ekspertnaya sistema dlya monitoringa i prognozirovaniya protsessov raspredeleniya resursov [Expert system for monitoring and forecasting of resource allocation processes]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(3):29–40. doi: 10.14357/19922264210305. EDN: UGKIQA.
- Spivak, S. I., O. G. Kantor, D. S. Yunusova, S. I. Kuznetsov, and S. V. Kolesov. 2015. Otsenka pogreshnosti i znachimosti izmereniy dlya lineynykh modeley [Evaluation of measurement accuracy and significance for linear models]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(1):87–97. doi: 10.14357/19922264150108. EDN: TVXFFV.
- Bazilevskiy, M. P. 2020. Mnogofaktornye modeli polnosvyaznoy lineynoy regressii bez ogranicheniy na sootnosheniya dispersiy oshibok peremennykh [Multifactor fully connected linear regression models without constraints to the ratios of variables errors variances]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(2):92–97. doi: 10.14357/19922264200213. EDN: KIOMAF.
- Bazilevskiy, M. P. 2021. Metod vypryamleniya iskazheniykh iz-za mul'tikollinearnosti koeffitsientov v regresionnykh modelyakh [Method of straightening distorted due to multicollinearity coefficients in regression models]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(2):60–65. doi: 10.14357/19922264210209. EDN: GCWTOB.

21. Wang, S., and Y. Gao. 2021. A literature review and citation analyses of air travel demand studies published between 2010 and 2020. *J. Air Transp. Manag.* 97:102135. 15 p. doi: 10.1016/j.jairtraman.2021.102135.
22. Oum, T.H., W.G. Waters, and J.S. Yong. 1990. *A survey of recent estimates of price elasticities of demand for transport*. Washington, D.C.: World Bank Group. Policy, Planning and Research Department Working Paper No. WPS 359. Available at: <http://documents.worldbank.org/curated/en/573201468766481035/A-survey-of-recent-estimates-of-price-elasticities-of-demand-for-transport> (accessed December 8, 2024).
23. Hsiao, C.Y., and M. Hansen. 2011. A passenger demand model for air transportation in a hub-and-spoke network. *Transport. Res. E – Log.* 47(6):1112–1125. doi: 10.1016/j.tre.2011.05.012.
24. Gallet, C.A., and H. Doucouliagos. 2014. The income elasticity of air travel: A meta-analysis. *Ann. Tourism Res.* 49:141–155. doi: 10.1016/j.annals.2014.09.006.
25. Dubinina, V.G. 2005. Povyshenie effektivnosti funktsionirovaniya aviakompanii na osnove informatsionno-analiticheskoy podderzhki biznes-protsessov [Improving the operating efficiency of the airline based on information and analytical support for business processes]. Moscow: MGTU Stankin. D.Sc. Diss. 236 p.
26. Okulov, V.M., M.I. Poluboyarinov, E.P. Kurochkin, N.F. Akimova, V.G. Dubinina, and M.V. Yakimets. 2008. Avtomatizirovannaya sistema prognozirovaniya passazhiroborota s uchetom elastichnosti sprosa [Automated system for forecasting passenger turnover taking into account elasticity of demand]. Patent RF for a utility model No. 77470. EDN: ZWZNGP.
27. Tellis, G.J. 1988. The price elasticity of selective demand: A meta-analysis of econometric models of sales. *J. Marketing Res.* 25(4):331–341. doi: 10.2307/3172944.
28. Lantseva, A., K. Mukhina, A. Nikishova, *et al.* 2015. Data-driven modeling of airlines pricing. *Procedia Comput. Sci.* 66:267–276. doi: 10.1016/j.procs.2015.11.032.

Received April 10, 2024

Contributors

Uryupin Ilya V. (b. 1993) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, junior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; uryupin93@yandex.ru

Sukharev Aleksey A. (b. 1985) — research intern, National Research University Higher School of Economics, 20 Myasnitskaya Str., Moscow 101000, Russian Federation; alx.sukharev@gmail.com

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО ПО ВРЕМЕНИ ТЕСТА ПО КВАНТИЛЬНОМУ КРИТЕРИЮ*

Я. Г. Мартюшова¹, А. В. Наумов², А. Е. Степанов³

Аннотация: Сформулирована задача построения оптимальной стратегии прохождения ограниченного по времени теста в виде задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями. В качестве стратегии выступает набор заданий теста, максимизирующий число набранных за тест баллов, превышение которого при одновременном выполнении ограничения на время выполнения теста гарантируется с выбранным заранее уровнем доверительной вероятности, выступающим параметром задачи. Случайными параметрами задачи служат время ответа пользователя на каждое задание теста и правильность ответа пользователя на задание, моделируемая случайной величиной с распределением Бернулли. Полученная задача стохастического программирования с вероятностными ограничениями сводится к детерминированной целочисленной задаче математического программирования. Предлагается алгоритм поиска оптимального решения.

Ключевые слова: ограниченный по времени тест; задача с вероятностными ограничениями; целочисленное математическое программирование

DOI: 10.14357/19922264240406

EDN: WVKTIF

1 Введение

Разработке адаптивных технологий в теории тестирования посвящено достаточно много работ [1–9]. В большинстве случаев в рассматриваемых моделях ставится задача адаптации имеющихся тестов под уровень знаний тестируемого с целью формирования его будущей индивидуальной траектории обучения или тестирования. Как правило, это касается формирования промежуточных тестов в системах дистанционного обучения (СДО), подобных СДО МАИ CLASS.NET [10, 11], где хранится информация о работе пользователей, обработка которой, в том числе методами машинного обучения, позволяет достигнуть цели адаптации [6, 7, 12]. При этом используются математические модели различных случайных величин, описывающих поведение пользователя, например времени решения тестируемым заданий теста [2, 13, 14].

В большинстве случаев структура теста известна заранее с точностью до типов используемых заданий. Это касается не только процесса тестирования в СДО, но и других областей образовательного процесса, например подготовки к сдаче абитуриентами единого государственного экзамена (ЕГЭ). Предшествующий процесс обучения и подготовки тестируемого к прохождению теста позволяет обоснованно использовать частоту правильного решения

тестируемым типовых заданий в качестве параметра случайной величины с распределением Бернулли, описывающей правильность решения соответствующего задания теста. Хороший обзор современных подходов к формированию адаптивных тестов в рамках САТ-теории (computerized adaptive testing) предложен в первой части работы [15]. Все рассмотренные в этой работе подходы направлены на формирование организаторами тестирования наилучших по определённому критерию тестов с целью наиболее объективного оценивания уровня знаний тестируемых.

Однако на процесс тестирования можно взглянуть с противоположной стороны, со стороны тестируемого. Он преследует свои цели — наилучшим образом пройти тест по определённому критерию, например по критерию максимизации числа набранных за тест баллов или максимизации вероятности сдачи теста. Все это делает актуальным не только задачу построения адаптивного теста в рамках формирования индивидуальной траектории пользователя СДО, но и задачу выбора самим тестируемым оптимальной стратегии прохождения теста.

Такая модель была рассмотрена авторами статьи [16], где сформулирована задача выбора оптимальной последовательности решения тестируемым заданий теста по критерию максимизации вероятности набора за тест не меньше определен-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 23-21-00293).

¹ Московский авиационный институт, ma1554@mail.ru

² Московский авиационный институт, naumovav@mail.ru

³ Московский авиационный институт, Rus.fta@yandex.ru

ного числа баллов в условиях ограниченности теста по времени и фиксированного числа баллов, начисляемых тестируемому за верное решение каждого задания.

В данной работе рассматривается не менее актуальная задача максимизации тестируемым числа набранных за тест баллов в условиях наличия дополнительного вероятностного ограничения на время выполнения теста. Данная задача, по сути, эквивалентна квантильной постановке, для которой в случае дискретного распределения вектора случайных параметров, рассмотренного в работе, на основе доверительного метода [17] предложена эквивалентная детерминированная задача смешанного целочисленного программирования [18]. Постановки задачи, подобные рассмотренным в данной работе и в работе [16] с вероятностными критериями качества, ранее в литературе не рассматривались. Эквивалентные им задачи математического программирования имеют большую размерность, не позволяющую эффективно использовать известные алгоритмы решения подобных задач.

Авторы предлагают эффективный численный алгоритм решения исходной задачи, использующий ее структуру. Исходные данные взяты из [16]. В работе проводится сравнительный анализ эффективности предложенного алгоритма и алгоритма решения эквивалентной задачи математического программирования.

Таким образом, основным результатом работы стал алгоритмический аппарат, способный формировать стратегию прохождения пользователями информационных образовательных технологий промежуточных и финальных тестов по вероятностным критериям качества в различных системах дистанционного обучения и тестирования, в которых доступна статистика работы пользователя, позволяющая определить частоту правильных ответов тестируемого на задания различного типа и построить модель времени, затрачиваемого им на рассмотрение задания. Требования к использованию предлагаемого алгоритмического аппарата заключаются в умении пользоваться современными решателями задач математического программирования или реализовывать предложенный алгоритм средствами различных языков программирования, например Python.

2 Постановка задачи

В рассматриваемой постановке задачи учитывается влияние вектора случайных параметров $Z = (\text{col } X^T, T^T)$, состоящего из двух подвекторов X и T . Координата вектора X моделирует правиль-

ность решения соответствующего задания теста, состоящего из n заданий. Реализация X_i , равная единице, соответствует правильно решенному i -му заданию теста, а реализация X_i , равная нулю, моделирует неверное решение этого задания. Параметр распределения Бернулли может быть оценен частотой правильного решения тестируемым заданий i -го типа в подготовительный период. Независимость случайных величин X_i представляется достаточно естественным предположением в рассматриваемой модели. Координаты вектора T моделируют время ответа пользователя на соответствующее задание теста. Случайные величины T_i , $i = \overline{1, n}$, также предполагаются независимыми. Хорошо известны непрерывные распределения времени ответа пользователя на задание, такие как логнормальное [2] или гамма-распределение [13]. Однако их использование не позволяет найти точное решение рассматриваемой задачи, ориентируясь на поиск гарантирующих или асимптотически точных решений с помощью сложных оптимизационных процедур. Естественнее предположить, что случайные величины X и T зависимы. В данной работе для описания условных распределений случайной величины T_i при условии, что X_i принимает значение 0 или 1, используется простая дискретная модель времени ответа с тремя значениями, моделирующими ситуации быстрого решения, стандартного решения и решения с затруднениями. Таким образом, случайный вектор Z имеет дискретное распределение с числом реализаций $D = 2^n \cdot 3^n$. Вероятности каждой реализации могут быть найдены с помощью формулы умножения вероятностей, если использовать условное распределение времени ответа тестируемого на задания теста при условиях правильного или неправильного его решения.

В качестве стратегии тестируемого выступает набор заданий (первая группа заданий), которые он предполагает решать в первую очередь в условиях наличия вероятностного ограничения на время выполнения теста. Стратегия может быть описана вектором булевых переменных $u \in \{0, 1\}^n$, где

$$u_i \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-е задание теста} \\ & \text{попадает в первую группу;} \\ 0, & \text{если } i\text{-е задание теста} \\ & \text{не попадает в первую группу.} \end{cases}$$

За каждое i -е задание теста начисляется b_i баллов, величины b_i представляют собой координаты вектора $b \in R^n$. Время выполнения теста ограничено величиной \bar{T} . Цель тестируемого — максимизация числа набранных за тест баллов.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$\varphi \rightarrow \max_{u \in \{0,1\}^n, \varphi} \quad (1)$$

при ограничениях

$$P \left\{ \sum_{i=1, \overline{n}} u_i X_i b_i \geq \varphi, \sum_{i=1, \overline{n}} u_i T_i \leq \overline{T} \right\} \geq \alpha. \quad (2)$$

В ней величина доверительной вероятности $\alpha \in (0, 1)$ играет роль параметра. Для существования решения этой задачи потребуется выполнение неравенства

$$\max_{u \in \{0,1\}^n} P \left\{ \sum_{i=1, \overline{n}} u_i T_i \leq \overline{T} \right\} > \alpha.$$

Задача (1), (2) относится к задачам стохастического программирования с булевыми переменными и вероятностным ограничением. Первое неравенство в этом ограничении обеспечивает превышение набранным за тест суммарным баллом некоторого порогового уровня, который стремится максимизировать тестируемый. Второе ограничение обеспечивает непревышение тестируемым фиксированного времени \overline{T} , выделяемого на тест.

Как уже было сказано выше, число всех возможных реализаций вектора случайных параметров $\text{col}(X^T, T^T)$ равно $D = 2^n \cdot 3^n$. Рассмотрим вектор $\delta \in \{0, 1\}^D$, каждая координата которого соответствует одной из реализаций $\text{col}(x^{v^T}, t^{v^T})$ вектора $\text{col}(X^T, T^T)$ и может принимать значение 0 или 1. Пусть $\Upsilon \triangleq e^T b$, где $e = (1, \dots, 1)^T \in R^n$, т.е. $\Upsilon = \sum_{i=1, \overline{n}} b_i$ — максимальное число баллов, которое можно набрать за тест. Пусть $p_v = P(\text{col}(X^T, T^T) = \text{col}(x^{v^T}, t^{v^T}))$, $v = \overline{1, D}$. Тогда на основании доверительного метода [17] с использованием методики, предложенной в [18], задача стохастического программирования (1), (2) может быть сведена к детерминированной задаче смешанного линейного программирования:

$$\varphi \rightarrow \max_{u \in \{0,1\}^n, \delta \in \{0,1\}^D, \varphi} \quad (3)$$

при ограничениях

$$\varphi \leq (1 - \delta_v) \Upsilon + \sum_{i=1, \overline{n}} u_i x_i^v b_i, \quad v = \overline{1, D}; \quad (4)$$

$$u^T t^v \leq \delta_v \overline{T} + (1 - \delta_v) T^{\text{MAX}}, \quad v = \overline{1, D}; \quad (5)$$

$$\sum_{v=1, \overline{D}} p_v \delta_v \geq \alpha, \quad (6)$$

где T^{MAX} — сумма максимальных реализаций случайных величин T_i , $i = \overline{1, n}$.

На основе утверждения, доказанного в [18], можно показать, что задачи (1), (2) и (3)–(6) эквивалентны в следующем смысле:

(1) для любой стратегии $(u_\alpha, \varphi_\alpha)$, оптимальной в задаче (1), (2), найдется δ_α такая, что стратегия $(u_\alpha, \varphi_\alpha, \delta_\alpha)$ будет оптимальной в задаче (3)–(6);

(2) для любой стратегии $(u^*, \varphi^*, \delta^*)$, оптимальной в задаче (3)–(6), стратегия (u^*, φ^*) будет оптимальной в задаче (1), (2).

Задача (3)–(6), как уже было сказано выше, имеет значительную размерность, что осложняет ее решение стандартными оптимизационными процедурами решения задач смешанного линейного программирования. С другой стороны, даже поверхностный анализ свойств исходной задачи (1), (2) позволяет сделать следующие выводы.

Утверждение 1.

Для задачи (1), (2) справедливо:

- (а) оптимальное значение критерия φ_α этой задачи является целой величиной;
- (б) функция

$$P(\varphi) = \max_{u \in \{0,1\}^n} P \left\{ \sum_{i=1, \overline{n}} u_i X_i b_i \geq \varphi, \sum_{i=1, \overline{n}} u_i T_i \leq \overline{T} \right\}$$

монотонно не возрастает по φ ;

- (в) величина φ_α представляет собой максимальное из целых значений φ , при которых $P(\varphi) \geq \alpha$.

Доказательство данного утверждения достаточно очевидно и в силу экономии места не приводится. Данное утверждение позволяет предложить следующий алгоритм решения исходной задачи (1), (2).

3 Алгоритм решения сформулированной задачи с вероятностным ограничением

Если размерность задачи (3)–(6) допускает ее решение стандартными процедурами из известных библиотек оптимизационных программ, то решение исходной задачи может быть найдено с их помощью. Однако эта задача содержит дополнительный вектор переменных оптимизации $\delta \in \{0, 1\}^D$ большой размерности, что с учетом большого числа ограничений делает ее трудноразрешимой и требует разработки специальных алгоритмов решения, учитывающих структуру задачи.

В качестве альтернативы предлагается следующая модификация алгоритма решения задачи

максимизации вероятности успешного прохождения ограниченного по времени теста, предложенная в [16].

Шаг 0.

Положим $\varphi^* := 0$, а $u^* \in \{0, 1\}^n$ равным нулевому вектору.

На этом шаге иницируется внешний цикл перебора возможных значений переменной φ .

Шаг 1.

Из всех 2^n стратегий $u \in \{0, 1\}^n$ выбираем N , образующих множество \underline{U} , для элементов которого выполнены условия

$$\sum_{i=1}^n u_i b_i \geq \varphi^*; \quad \sum_{i=1}^n u_i T_i^{\min} \leq \bar{T},$$

где T_i^{\min} — минимальная из всех возможных реализаций случайной величины T_i , $i = \overline{1, n}$. Смысл в том, что отсеиваются стратегии, заведомо не подходящие по суммарному времени или числу баллов даже в самом оптимистичном случае, когда все выбранные для решения задачи решены верно и за минимально возможное время.

Перенумеруем все элементы множества \underline{U} . Таким образом, число от 1 до N однозначно определяет элемент множества. Под u^m будем понимать m -й элемент множества \underline{U} . Положим $m := 1$, $P^* := 0$, а $u^{**} \in \{0, 1\}^n$ равным нулевому вектору.

На этом шаге иницируется внешний цикл перебора всех N выбранных стратегий оптимизации.

Шаг 2.

Если $m > N$, то переходим к шагу 6. В противном случае полагаем $P_m := 0$, где P_m — вспомогательный параметр для расчета вероятности выполнения ограничений.

Шаг 3.

Предположим, что вектор u^m содержит ровно K единиц. Предположим, что ненулевыми компонентами вектора u^m стали компоненты с номерами i_1, i_2, \dots, i_K . Рассмотрим подвектор $\text{col}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_K})$ случайного вектора X . Положим $J := 2^K$, а $j := 1$.

На этом шаге иницируется цикл перебора всех возможных реализаций $\text{col}(x_{i_1}^j, x_{i_2}^j, \dots, x_{i_K}^j)$, $j = \overline{1, 2^K}$.

Шаг 4.

Если $j > J$ и $P_m > P^*$, то полагаем $P^* := P_m$, $u^{**} := u^m$, $m := m + 1$ и переходим к шагу 2.

Если $j > J$ и $P_m \leq P^*$, то полагаем $m := m + 1$ и переходим к шагу 2.

Если $j \leq J$ и выполняется условие

$$\sum_{i \in \{i_1, i_2, \dots, i_K\}} u_i^m x_i^j b_i \geq \varphi^*$$

для реализации $\text{col}(x_{i_1}^j, x_{i_2}^j, \dots, x_{i_K}^j)$, то полагаем $L := 3^K$, $l := 1$ и переходим к шагу 5.

В противном случае полагаем $j := j + 1$ и переходим к началу шага 4.

На этом шаге инициализируется цикл перебора всех возможных реализаций $\text{col}(t_{i_1}^l, t_{i_2}^l, \dots, t_{i_K}^l)$, $l = \overline{1, L}$, подвектора $\text{col}(T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_K})$ случайного вектора T .

Шаг 5.

Если $l > L$, то полагаем $j := j + 1$ и переходим к шагу 4. В противном случае, если выполняется условие

$$\sum_{i \in \{i_1, i_2, \dots, i_K\}} u_i^m t_i^l \leq \bar{T}$$

для реализации $\text{col}(t_{i_1}^l, t_{i_2}^l, \dots, t_{i_K}^l)$, полагаем

$$P_m := P_m + \prod_{i \in \{i_1, i_2, \dots, i_K\}} P(T_i = t_i^l | X_i x_i^j) P(X_i = x_i^j).$$

Полагаем $l := l + 1$ и переходим к началу шага 5.

Шаг 6.

Если величина $P^* \geq \alpha$, то полагаем $\varphi^* := \varphi^* + 1$, $u^{**} := u^{**}$ и переходим к шагу 1. В противном случае полагаем оптимальное значение критерия равным φ^* , а оптимальное значение стратегии равным u^* . Равенство φ^* нулю соответствует отсутствию допустимого решения рассматриваемой задачи.

Пункт (б) утверждения 1 позволяет ускорить поиск оптимального значения критерия задачи, реализовав в предложенном алгоритме метод дихотомии по переменной φ . Заметим, что во всех вложенных циклах, рассмотренных в алгоритме, происходит существенное сокращение объема требуемого перебора возможных значений переменных оптимизации. Объем полного перебора может сократиться на порядок в зависимости от выбранных значений параметров задачи α и \bar{T} .

4 Результаты численного эксперимента

В целях сравнения и верификации результатов численного эксперимента исходные данные взяты из [16], где они получены на основе анализа функционирования СДО МАИ CLASS.NET [9]. Будем предполагать число заданий в тесте $n = 10$.

Согласно данным, приведенным в [16], $T^{\max} = 3830$ с. Зависимости оптимальных решений от значений параметров задачи α и \bar{T} , полученные в результате работы предложенного алгоритма, представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1 Зависимость оптимального решения задачи от параметра α при $\bar{T} = 0,8T^{\max}$

α	Оптимальная стратегия u^*	Оптимальное значение критерия φ^*	Время расчета, с
0,4	[1. 1. 1. 0. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]	13	533
0,5	[1. 1. 1. 0. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]	12	529
0,6	[1. 1. 1. 0. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]	11	522
0,7	[1. 1. 1. 0. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]	11	522
0,8	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 1.]	9	497
0,9	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 1.]	8	476

Таблица 2 Зависимость оптимального решения задачи от параметра \bar{T} при $\alpha = 0,8$

\bar{T}	Оптимальная стратегия u^*	Оптимальное значение критерия φ^*	Время расчета, с
$0,4T^{\max}$	[0. 0. 1. 1. 1. 1. 0. 1. 0. 0.]	5	155
$0,5T^{\max}$	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 1. 0. 0.]	6	414
$0,6T^{\max}$	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 1. 0. 1.]	7	451
$0,7T^{\max}$	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 1.]	9	497
$0,8T^{\max}$	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 1.]	9	502
$0,9T^{\max}$	[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]	10	523

Таблица 3 Сравнительный анализ времени (в секундах) работы различных алгоритмов решения исходной задачи при разных n

n	Алгоритм полного перебора	Решение эквивалентной задачи линейного программирования	Авторский алгоритм
1	0,132	0,104	0,143
2	0,292	0,195	0,198
3	0,590	0,325	0,409
4	0,476	2,049	0,426
5	1,54	13,125	0,524
6	2,21	399,955	1,72
7	4,88	661,013	2,52
8	32,239	—	10,3
9	408,02	—	61,2
10	8304,4	—	432

Для решения задачи были использованы средства вычислительной системы IBM CPLEX. Расчеты проводились на компьютере ASUS X550LC (Intel Core i5 2,3 GHz, 8Gb RAM) (табл. 3). Прочерки в табл. 3 означают, что решение не было найдено указанным способом за предельное время, выделяемое на решение задачи.

Как видно из табл. 1–3, значения параметров задачи существенно влияют на скорость работы алгоритма. С увеличением выделяемого на тестирование времени и снижением уровня доверительной вероятности существенно возрастает объем перебора допустимых значений оптимизационных переменных задачи, что приводит к росту времени

счета. Сравнительный анализ полученных в рамках численного эксперимента результатов с результатами, полученными в [16], показывает их согласованность. Алгоритм, предложенный в работе, оказывается надстроечным по отношению к алгоритму, описанному в [16], поэтому сравнительный анализ времени работы различных алгоритмов, предложенный в табл. 3, еще больше, чем в [16], подчеркивает эффективность предложенного авторского алгоритма решения рассматриваемой задачи.

5 Заключение

Рассмотренная задача стохастического программирования с вероятностным ограничением, предназначенная для поиска оптимальной стратегии прохождения ограниченного по времени теста по критерию максимизации набранного за тест числа баллов, сводится к детерминированной задаче большой размерности, решение которой сопряжено со значительными вычислительными трудностями при большом числе заданий в тесте. Вместе с тем проведенные исследования позволили предложить эффективный алгоритм решения исходной задачи, существенно сокращая перебор возможных значений ее дискретных переменных оптимизации.

В работе использованы исходные данные, приведенные ранее в статье [16], где аналогичная задача решалась по критерию максимизации вероятности преодоления набранным за тест числом баллов некоторого фиксированного уровня. Полученные в работе результаты полностью согласуются с результатами, полученными на основе анализа модели, рассмотренной в [16].

Проведенный сравнительный анализ решений рассматриваемой задачи различными алгоритмами по ряду параметров показал эффективность предложенного авторами алгоритма решения.

Литература

1. *Rasch G.* Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. — Chicago, IL, USA: University of Chicago Press, 1980. 199 p.
2. *Van der Linden W.J., Scrams D.J., Schnipke D.L.* Using response-time constraints to control for differential speededness in computerized adaptive testing // *Appl. Psych. Meas.*, 1999. Vol. 23. No. 3. P. 195–210. doi: 10.1177/01466219922031329.
3. *Куравский Л. С., Мармалюк П. А., Алхимов В. И., Юрьев Г. А.* Новый подход к построению интеллектуальных и компетентностных тестов // *Моделирование и анализ данных*, 2013. № 1. С. 4–28. EDN: PYOMRR.

4. Kuravsky L. S., Margolis A. A., Marmalyuk P. A., Panfilova A. S., Yuryev G. A., Dumin P. N. A probabilistic model of adaptive training // *Applied Mathematical Sciences*, 2016. Vol. 10. No. 48. P. 2369–2380. doi: 10.12988/ams.2016.65168.
5. Наумов А. В., Мартюшова Я. Г. Адаптация системы дистанционного обучения на основе статистической обработки результатов работы пользователей // *Труды МАИ*, 2019. № 109. Ст. 21. 13 с. doi: 10.34759/trd-2019-109-21. EDN: DTEXUO.
6. Босов А. В., Мартюшова Я. Г., Наумов А. В., Сапунова А. П. Байесовский подход к построению индивидуальной траектории пользователя в системе дистанционного обучения // *Информатика и её применения*, 2020. Т. 14. Вып. 3. С. 86–93. doi: 10.14357/19922264200313. EDN: WAKFJR.
7. Босов А. В. Применение самоорганизующихся нейронных сетей к процессу формирования индивидуальной траектории обучения // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 3. С. 7–15. doi: 10.14357/19922264220302. EDN: HJQANN.
8. Босов А. В., Иванов А. В. Технология классификации типов контента электронного учебника // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 4. С. 63–72. doi: 10.14357/19922264220410. EDN: YERCNH.
9. Босов А. В., Иванов А. В. Технология многофакторной классификации математического контента электронной системы обучения // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 32–41. doi: 10.14357/19922264230405. EDN: LISHHZ.
10. Наумов А. В., Джумурат А. С., Иноземцев А. О. Система дистанционного обучения математическим дисциплинам CLASS.NET // *Вестник компьютерных и информационных технологий*, 2014. № 10. С. 36–44. doi: 10.14489/vkit.2014.010.pp.036-044. EDN: SQIRWX.
11. СДО МАИ CLASS.NET. <https://distance.kaf804.ru>.
12. Мартюшова Я. Г., Минеева Т. А., Наумов А. В. Методы классификации пользователей СДО в модели построения их индивидуальной траектории // *Системы и средства информатики*, 2023. Т. 33. № 1. С. 68–77. doi: 10.14357/08696527230107. EDN: FHLWMC.
13. Босов А. В., Мхитарян Г. А., Наумов А. В., Сапунова А. П. Использование модели гамма-распределения в задаче формирования ограниченного по времени теста в системе дистанционного обучения // *Информатика и её применения*, 2019. Т. 13. Вып. 4. С. 11–17. doi: 10.14357/19922264190402. EDN: XUBLZX.
14. Наумов А. В., Мхитарян Г. А., Черыгова Е. Е. Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения // *Вестник компьютерных и информационных технологий*, 2019. № 2(176). С. 37–46. doi: 10.14489/vkit.2019.02.pp.037-046. EDN: TGXYNG.
15. Xiao J., Bulut O. Item selection with collaborative filtering in On-the-fly multistage adaptive testing // *Appl. Psych. Meas.*, 2022. Vol. 46. No. 8. P. 690–704. doi: 10.1177/0146621622112408.
16. Наумов А. В., Степанов А. Е., Устинов А. Э. О задаче максимизации вероятности успешного прохождения ограниченного по времени теста // *Автоматика и телемеханика*, 2024. № 1. С. 83–94. doi: 10.31857/S0005231024010056. EDN: QGPKTR.
17. Кан Ю. С., Кибзун А. И. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. — М.: Физматлит, 2009. 372 с.
18. Кибзун А. И., Наумов А. В., Норкин В. И. О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования // *Автоматика и телемеханика*, 2013. № 6. С. 66–86.

Поступила в редакцию 08.04.24

OPTIMIZATION OF THE STRATEGY OF PASSING THE TIME-LIMITED TEST ACCORDING TO THE QUANTILE CRITERION

Ya. G. Martyushova, A. V. Naumov, and A. E. Stepanov

Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation

Abstract: The problem of constructing an optimal strategy for passing a time-limited test in the form of a stochastic programming problem with probabilistic constraints is considered. The strategy is a set of test tasks that maximizes the number of points scored for the test, the excess of which, while simultaneously fulfilling the limit on the time of the test, is guaranteed with a preselected confidence level, acting as a task parameter. The random parameters of the task are the user's response time to each test task and the correctness of the user's response to the task modeled by a random variable with a Bernoulli distribution. The resulting stochastic programming problem with probabilistic

constraints is reduced to a deterministic integer mathematical programming problem. An algorithm to solve the initial problem is presented.

Keywords: time-limited test; problem with probabilistic constraints; integer mathematical programming

DOI: 10.14357/19922264240406

EDN: WVKTIF

Acknowledgments

The reported study was partially funded by RSF, project No. 23-21-00293.

References

- Rasch, G. 1980. *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Chicago, IL: University of Chicago Press. 199 p.
- Van der Linden, W.J., D.J. Scrams, and D.L. Schnipke. 1999. Using response-time constraints to control for differential speededness in computerized adaptive testing. *Appl. Psych. Meas.* 23(3):195–210. doi: 10.1177/01466219922031329.
- Kuravsky, L.S., P.A. Marmalyuk, V.I. Alkhimov, and G.A. Yuryev. 2013. Novyy podkhod k postroeniyu intellektual'nykh i kompetentnostnykh testov [A new approach to constructing intellectual and competence-based tests]. *Modelirovanie i analiz dannykh* [Modelling and Data Analysis] 1:4–28. EDN: PYOMRR.
- Kuravsky, L.S., A.A. Margolis, P.A. Marmalyuk, A.S. Panfilova, G.A. Yuryev, and P.N. Dumin. 2016. A probabilistic model of adaptive training. *Applied Mathematical Sciences* 10(48):2369–2380. doi: 10.12988/ams.2016.65168.
- Naumov, A.V., and Ya. G. Martyushova. 2019. Adaptatsiya sistemy distantsionnogo obucheniya na osnove statisticheskoy obrabotki rezul'tatov raboty pol'zovateley [Distance learning system adaptation based on statistical processing of the results of users activities]. *Trudy MAI* [Proceedings of MAI] 109(21). 13 p. doi: 10.34759/trd-2019-109-21. EDN: DTEXUO.
- Bosov, A.V., Ya.G. Martyushova, A.V. Naumov, and A.P. Sapunova. 2020. Bayesovskiy podkhod k postroeniyu individual'noy traektorii pol'zovatelya v sisteme distantsionnogo obucheniya [Bayesian approach to the construction of an individual user trajectory in the system of distance learning]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(3):86–93. doi: 10.14357/19922264200313. EDN: WAKFJR.
- Bosov, A.V. 2022. Primenenie samoorganizuyushchikhsya neyronnykh setey k protsessu formirovaniya individual'noy traektorii obucheniya [Application of self-organizing neural networks to the process of forming an individual learning path]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(3):7–15. doi: 10.14357/19922264220302. EDN: HJQANN.
- Bosov, A.V., and A.V. Ivanov. 2022. Tekhnologiya klassifikatsii tipov kontenta elektronnoogo uchebnika [Technology for classification of content types of e-textbooks]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(4):63–72. doi: 10.14357/19922264220410. EDN: YERCNH.
- Bosov, A.V., and A.V. Ivanov. 2023. Tekhnologiya mnogo-faktornoy klassifikatsii matematicheskogo kontenta elektronnoy sistemy obucheniya [Multifactor classification technology of mathematical content of e-learning system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):32–41. doi: 10.14357/19922264230405. EDN: LISHHZ.
- Naumov, A.V., A.S. Dzhumurat, and A.O. Inozemtsev. 2014. Sistema distantsionnogo obucheniya matematicheskimi distsiplinami CLASS.NET [Distance learning system for mathematical disciplines CLASS.NET]. *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy* [Herald of Computer and Information Technologies] 10:36–44. doi: 10.14489/vkit.2014.010.pp.036-044. EDN: SQIRWX.
- SDO MAI CLASS.NET [Distance learning system MAI CLASS.NET]. Available at: <https://distance.kaf804.ru> (accessed November 5, 2024).
- Martyushova, Ya.G., T.A. Mineyeva, and A.V. Naumov. 2023. Metody klassifikatsii pol'zovateley SDO v modeli postroeniya ikh individual'noy traektorii [Methods of classifying the distance learning system users in the model of constructing their personalized learning strategies]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 33(1):68–77. doi: 10.14357/08696527230107. EDN: FHLWMC.
- Bosov, A.V., G.A. Mkhitarian, A.V. Naumov, and A.P. Sapunova. 2019. Ispol'zovanie modeli gamma-raspredeleniya v zadache formirovaniya ogranichennogo po vremeni testa v sisteme distantsionnogo obucheniya [Using the model of gamma distribution in the problem of forming a time-limited test in a distance learning system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(4):11–17. doi: 10.14357/19922264190402. EDN: XUBLZX.
- Naumov, A.V., G.A. Mkhitarian, and E.E. Cherygova. 2019. Stokhasticheskaya postanovka zadachi formirovaniya testa zadannogo urovnya slozhnosti s minimizatsiyey kvantili vremeni vypolneniya [Stochastic statement of the problem of generating tests with defined complexity with the minimization of quantile of test passing time]. *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy* [Herald of Computer and Information Technologies] 2(176):37–46. doi: 10.14489/vkit.2019.02.pp.037-046. EDN: TGXYNG.
- Xiao, J., and O. Bulut. 2022. Item selection with collaborative filtering in On-the-fly multistage adaptive test-

- ing. *Appl. Psych. Meas.* 46(8):690–704. doi: 10.1177/0146621622112408.
16. Naumov, A. V., A. E. Stepanov, and A. E. Ustinov. 2024. On the problem of maximizing the probability of successful passing of a time-limited test. *Automat. Rem. Contr.* 85(1):64–72. EDN: APEDND.
17. Kan, Yu. S., and A. I. Kibzun. 2009. *Zadachi stokhasticheskogo programirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami* [Stochastic programming problems with probabilistic criteria]. Moscow: Fizmatlit. 372 p.
18. Kibzun, A. I., A. V. Naumov, and V. I. Norkin. 2013. On reducing a quantile optimization problem with discrete distribution to a mixed integer programming problem. *Automat. Rem. Contr.* 74(6):951–967. doi: 10.1134/S0005117913060064. EDN: RFIDPL.

Received April 8, 2024

Contributors

Martyushova Yanina G. (b. 1970) — Candidate of Science (PhD) in pedagogy, senior lecturer, Department of Probability Theory and Computer Simulations, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; ma1554@mail.ru

Naumov Andrey V. (b. 1966) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Probability Theory and Computer Simulations, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; naumovav@mail.ru

Stepanov Alexey E. (b. 1998) — PhD student, Department of Probability Theory and Computer Simulations, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; Rus.fta@yandex.ru

О ДИСПЕТЧЕРИЗАЦИИ В ОДНОМ КЛАССЕ ДВУХФАЗНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ*

М. Г. Коновалов¹, Р. В. Разумчик²

Аннотация: Рассматривается модель частично наблюдаемой системы с одним диспетчером без очереди для хранения поступающих заданий и параллельным обслуживанием (без потерь) на одном из конечного числа узлов. Ограничение в наблюдаемости предполагает, что принятое диспетчером решение относительно вновь поступившего задания исполняется со случайной задержкой. Модель представляет собой двухфазную систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов на первой фазе и конечным числом однолинейных СМО на второй фазе. Предложен метод порождения новых диспетчеризаций, в основе которого лежит идея о комбинировании классических статических и динамических алгоритмов по некоторому (эвристическому) правилу. Численные эксперименты на марковских моделях показывают, что при большом размере второй фазы новые диспетчеризации дают устойчивый выигрыш по классическим целевым функционалам.

Ключевые слова: системы с параллельным обслуживанием; диспетчеризация; управление нагрузкой; случайная задержка

DOI: 10.14357/19922264240407

EDN: KGCBFL

1 Постановка задачи

Рассматривается двухфазная СМО с неограниченным числом приборов на первой фазе и $N \geq 2$ однолинейными СМО с очередями неограниченной емкости (пронумерованных числами от 1 до N без повторений) на второй фазе³. На вход системы поступает $K \geq 1$ независимых случайных потоков, каждая заявка которых сначала должна пройти обслуживание на одном приборе первой фазы, а затем в одной (и только одной) из СМО второй фазы. Времена обслуживания заявки i -го потока на первой фазе и в СМО с номером j независимы (а между потоками — независимы в совокупности), не зависят от входящего потока и имеют произвольные⁴ распределения D_i и B_{ij} соответственно. Дисциплины обслуживания заявок в СМО второй фазы предполагаются одинаковыми⁵. Решение y_n о том, на какой из СМО второй фазы должна быть обслужена заявка, поступившая в момент t_n , принимается (диспетчером) мгновенно в момент ее поступления

ния. Пусть F_i — распределение времен между поступлениями заявок i -го потока, $\Delta \geq 0$ — наперед заданная постоянная. Положим $\vec{F} = (F_1, \dots, F_K)$, $\vec{D} = (D_1, \dots, D_K)$, $\vec{B}_i = (B_{i1}, \dots, B_{in})$. Для принятия решения относительно заявки, поступившей в момент t_n , диспетчер может руководствоваться:

- распределениями \vec{F} , \vec{D} , $\vec{B}_1, \dots, \vec{B}_K$;
- моментами поступления предыдущих заявок $0 \leq t_1 < \dots < t_{n-1}$, их размерами⁶ и принятыми в эти моменты решениями y_1, \dots, y_{n-1} ;
- временем обслуживания поступившей заявки, текущим числом заявок на первой фазе и полной информацией⁷ о состоянии каждой из СМО второй фазы в момент $t_n - \Delta$.

Обозначим через V_n время, проведенное в системе заявкой, поступившей в момент t_n . Ставится задача отыскания такой стратегии $y = \{y_n, n = 1, 2, \dots\}$, которая минимизирует стационарное среднее время пребывания заявки в системе, определяемое как⁸

* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

¹ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, mkonovalov@ipiran.ru

² Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, rgazumchik@ipiran.ru

³ Предполагается, что производительности всех приборов в системе одинаковы и равны единице, а время, затрачиваемое заявкой на переход с фазы на фазу, пренебрежимо мало.

⁴ Распределения D_i предполагаются невырожденными. В вырожденном случае рассматриваемая система эквивалентна классической однофазной системе с соответствующим образом видоизмененными входящими потоками (см., например, [1, разд. 5]).

⁵ Для определенности — FIFO (first in, first out), которая остается дисциплиной по умолчанию во многих коммерческих продуктах (Google Borg Scheduler и др.).

⁶ Отсутствие подобной информации о поступающих заявках до некоторой степени позволяют скомпенсировать специальные процедуры [2].

⁷ Например, информацией о числе заявок каждого потока, об остаточном времени обслуживания заявки на приборе и т. д.

⁸ Для рассматриваемого типа систем решение вопроса о существовании конечного предела следует из условия, что нагрузка на систему не превышает единицы.

$$V(y; \vec{F}, \vec{D}, \vec{B}_1, \dots, \vec{B}_K, \Delta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m E_y V_n, \quad (1)$$

где E_y — интегрирование по мере, порождаемой последовательностью y .

2 Обзор литературы

Сформулированная задача относится к продолжающемуся циклу работ [3, 4] по проблеме оптимальной диспетчеризации в моделях систем распределенных вычислений с частичной наблюдаемостью. В рамках этого цикла частичная наблюдаемость понимается как отсутствие у диспетчера в моменты принятия решений точной динамической информации о состоянии системы. Строго говоря, это условие предполагает $\Delta > 0$ в (1). Однако нетрудно видеть, что и случай $\Delta = 0$ эквивалентен частичной наблюдаемости: в момент поступления заявки диспетчеру недоступна информация о состояниях СМО второй фазы на момент окончания обслуживания поступившей заявки на первой фазе.

Сложность структуры математической модели, которую нетрудно формализовать, исходя из данного в разд. 1 описания, чрезвычайно затрудняет продвижение в ее аналитическом рассмотрении. Необходимо, однако, отметить, что, поскольку любые результаты в этом направлении способствуют более глубокому пониманию поведения тех или иных показателей производительности, исследования активно развиваются. Анализ литературы показывает, что (абстрагируясь от встречающихся всевозможных дополнительных особенностей функционирования) основные усилия продолжают сосредотачиваться на случае¹ $N = 1$ (отсутствие диспетчера); из сравнительно недавних работ здесь стоит отметить [5–9]. Судя по открытым источникам, случай

$N \geq 2$ рассматривался в литературе только при вырожденных распределениях \vec{D} . Классические задачи диспетчеризации (или распределения ресурсов, размещения заданий, маршрутизации), по которым накоплен огромный объем литературы, предполагают $\Delta = 0$ в (1). И те же постановки при $\Delta > 0$, хотя и известны давно, изучены сравнительно мало: разработка содержательных правил принятия диспетчером решений по «устаревшей» информации требует выработки новых подходов. Здесь продвигаться аналитически удается в основном только при тех или иных предельных режимах функционирования моделей (например, при $M \gg N \rightarrow \infty$), а практические успехи заметны в эвристических, инженерных подходах [10, 11]. Некоторый обзор известных к настоящему времени результатов достигнут в [12–15].

Возвращаясь к исходной постановке, даже если ограничиться случаем наличия у диспетчера точной информации о состоянии системы в моменты поступления заявок (т. е. $\Delta = 0$), к настоящему времени оптимальные диспетчеризации не известны и плодотворных подходов к нахождению оптимума не предложено. По-видимому, безальтернативным, но без сомнений простым и действенным выходом из положения (в особенности при больших значениях N) остается применение (отобранных путем перебора) известных статических и динамических стратегий, среди которых в числе первых стоит отметить² RND (случайный выбор³), RR (циклический выбор⁴), JSQ и JSQ(d) (наикратчайшая очередь⁵), LWL (наименьшая остаточная работа⁶) и SITA-E⁷.

С одной стороны, обращение к подобным правилам (пусть зачастую эффективным, но неадаптивным) в постановке, для которой они не предназначены изначально, дает основание заранее расценивать получаемые таким путем результаты

¹И основным препятствием для полезных обобщений видится отсутствие понимания циркулирующих между фазами потоков.

²Более полный список стратегий можно найти, например, в обзоре [16].

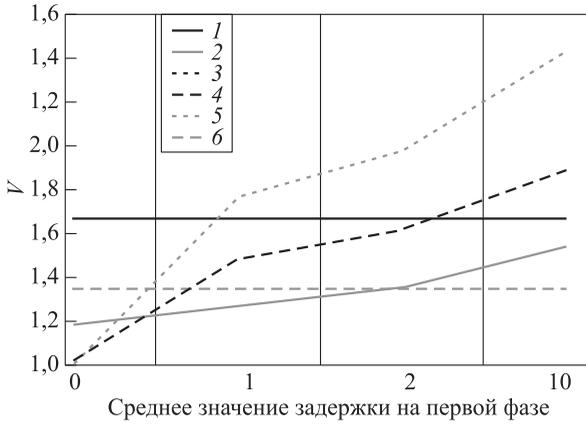
³Для одного потока стратегия RND (также известная как Probabilistic Allocation Policy, Bernoulli Splitting) параметризуется дискретным вероятностным распределением (p_1, \dots, p_N) , в соответствии с которым выбирается номер СМО второй фазы для каждой поступающей заявки. В случае нескольких потоков каждому предписывается собственное распределение (стратегия MCRP, MultiClass Probabilistic Allocation Policy).

⁴Стратегия RR (Round Robin) предписывает направлять k -ю по счету заявку в СМО второй фазы с номером $k \bmod N$ и может быть эффективна (и оптимальна) только в однородных системах. Для неоднородных необходимы более общие правила (например, GR, GG, GRR, CGRR и mBS [17, 18]).

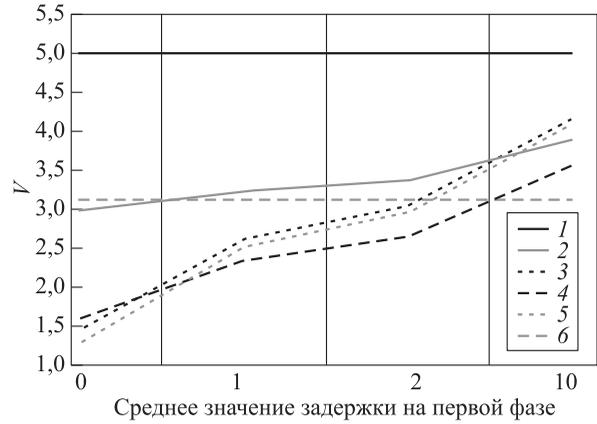
⁵Согласно стратегии JSQ (Join the Shortest Queue) заявка направляется в СМО второй фазы с минимальной очередью; при стратегии JSQ(d) решение принимается аналогичным образом, но не на всем множестве СМО второй фазы, а в группе из d случайно выбранных. Некоторым обобщением последней стратегии служит нечасто упоминаемая HJSQ(d) [16], а другими близкими по замыслу — SED (Shortest Expected Delay), JIQ (Join the Idle Queue), PILD (Persistent Idle Load Distribution) и DLWR (Dynamic Least Work Remaining). В данной статье под JSQ(d) подразумевается несколько иная стратегия, согласно которой сначала определяются номера первых d СМО второй фазы с наименьшим числом заявок, затем из них осуществляется равновероятный выбор.

⁶По стратегии LWL (Least Work Left) заявка направляется в СМО второй фазы с наименьшим объемом невыполненной нагрузки, т. е. с минимальной остаточной работой, включая заявки в очереди.

⁷Стратегия SITA (Size Interval Task Assignment with Equal Load) устроена так, что каждая СМО второй фазы обслуживает заявки, размер которых попадает в назначенный для данной СМО диапазон. Выбор диапазонов осуществляется простым и неоптимальным образом: так, чтобы средняя нагрузка была одинакова [19].



(а)



(б)

Ранжирование стратегий в марковской системе с одним входным потоком и 8 одинаковыми СМО на второй фазе при загрузке системы 0,4 (а) и 0,8 (б): 1 — RND; 2 — RR; 3 — JSQ; 4 — JSQ(2); 5 — LWL; 6 — SITA-E

как далекие от оптимальных (см. рисунок). С другой стороны, относительная простота их реализации¹ и масштабирования не позволяет без оглядки отказаться от их применения, что открывает простор для поиска эвристик на их основе.

3 Составные диспетчеризации на примере SITA-E/JSQ

Обратимся к способам улучшения показателя (1) и при этом (для простоты описания) будем отталкиваться от перечисленных выше классических алгоритмов.

Первая идея трансформации заключается в следующем. Алгоритмы типа LWL и JSQ используют динамическую информацию соответственно об объемах нагрузки и о длинах очередей в СМО второй фазы. Целесообразно² заменить эти параметры на аналогичные, но относящиеся ко всей системе. Иными словами, например, в алгоритме LWL вместо объема нагрузки непосредственно в каждой СМО второй фазы теперь будет фигурировать суммарная по обеим фазам нагрузка, приходящаяся на каждую СМО.

Вторая идея заключается в образовании «смеси» двух стратегий путем специального чередования их правил³, которое нагляднее всего можно

пояснить на примере алгоритмов SITA-E и JSQ (далее — SITA-E/JSQ). Пусть в систему поступает единственный поток заявок. Стратегия SITA-E [18] заключается в применении одного и того же правила $y_{SITA-E} : R \rightarrow \{1, \dots, N\}$, которое устроено следующим образом. Пусть $0 < a_1 < \dots < a_{N-1}$ — разбиение интервала $(0, \infty)$ на N непересекающихся промежутков: $A_1 = [0, a_1), A_2 = [a_1, a_2), \dots, A_N = [a_{N-1}, \infty)$. Длина промежутков выбрана так, чтобы среднее значение нагрузки для заявок размером из промежутка A_i было одинаковым для всех $i = \overline{1, N}$. Пусть v — размер некоторой поступившей заявки и пусть $v \in A_m$. Тогда $y_{SITA-E}(v) = m$; это означает, что данная заявка будет направлена в СМО второй фазы с номером m . Стратегия JSQ также заключается в применении одного и того же правила $y_{JSQ} : \{l_1, \dots, l_N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$, где $\{l_1, \dots, l_N\}$ — «полные» длины очередей к приборам СМО второй фазы в момент поступления заявки. Таким образом, если в момент поступления заявки $l_n = \min\{l_1, \dots, l_N\}$, то $y_{JSQ} = n$, т. е. заявка будет отправлена в СМО с номером n .

Правило $y_{SITA-E/JSQ}$ диспетчеризации SITA-E/JSQ состоит в следующем. Пусть в момент поступления заявки правила стратегий SITA-E и JSQ приняли значения соответственно $y_{SITA-E} = m$ и $y_{JSQ} = n$. Тогда

$$y_{SITA-E/JSQ} = mI_{\{m < k\}} + nI_{\{m \geq k\}},$$

¹Практически во всех балансировщиках нагрузки (nginx, HAProxy, Alibaba’s Cloud Server Load Balancer, Amazon’s Elastic Load Balancing, Microsoft’s Azure Load Balancer, Google Cloud Load Balancer, IBM Cloud Load Balancer и др.) и симуляторах (CloudSim, iFogSim, EPSim, GridSim и др.).

²Отметим, что учет такого рода дополнительной информации не может привести к ухудшению значений целевых функционалов типа (1).

³Идея «смешения», или чередования, стратегий в принципе не нова. Однако необходимость выбора конкретного правила из бесконечного множества вариантов, которое было бы эффективным, придает ей неконструктивный характер. Таким образом, для того чтобы ей воспользоваться, требуется оттолкнуться от какого-то факта или наблюдения, подсказанного практикой. Например, отталкиваясь от того факта, что при SITA-подобных алгоритмах некоторые приборы вынуждены простаивать, в [20] предложена смешанная стратегия SITA-JSQ для систем с вырожденным распределением \bar{D} и $\Delta = 0$.

где k — параметр алгоритма, $k \in \{1, \dots, N\}$; I — индикаторная функция.

4 Некоторые численные результаты

В качестве примера рассмотрим систему с одним входящим пуассоновским потоком интенсивности λ , экспоненциальным временем обслуживания на первой фазе и восемью СМО на второй фазе с экспоненциальным временем обслуживания и средним, равным единице. В табл. 1 и 2 приведены значения целевого функционала (1) в зависимости от загрузки системы (равной $\lambda/8$) при двух разных значениях средней задержки на первой фазе и различных диспетчеризациях.

В отсутствие заметной задержки на первой фазе динамические алгоритмы оказываются вне конкуренции¹ — известный результат, еще раз подтверждающийся расчетными данными в табл. 1. Как и стоило ожидать, статические стратегии нечувствительны к величине средней задержки на первой

Таблица 1 Зависимость значения функционала (1) от загрузки системы для различных стратегий при средней задержке на первой фазе, равной 1

Стратегия	Загрузка системы			
	0,2	0,4	0,6	0,8
RND	1,251	1,668	2,502	4,999
RR	1,047	1,274	1,766	3,213
JSQ	1,006	1,114	1,373	1,945
JSQ(2)	1,012	1,139	1,408	2,007
LWL	1,195	1,305	1,467	1,921
SITA-E	1,133	1,354	1,797	3,130
SITA-E/JSQ(2), $k = 1$	1,028	1,142	1,384	1,982

Таблица 2 Зависимость значения функционала (1) от загрузки системы для различных стратегий при средней задержке на первой фазе, равной 10

Стратегия	Загрузка системы			
	0,2	0,4	0,6	0,8
RND	1,250	1,666	2,500	5,014
RR	1,187	1,538	2,187	3,881
JSQ	1,144	1,443	1,956	3,050
JSQ(2)	1,148	1,448	1,962	3,062
LWL	1,645	2,006	2,438	3,455
SITA-E	1,133	1,354	1,796	3,126
SITA-E/JSQ, $k = 1$	1,092	1,278	1,622	2,483

¹Для этого, однако, диспетчеру требуется точная информация о состоянии системы (т.е. $\Delta = 0$ в (1)), что и предполагается. В отсутствие такой «свежей» информации предпочтение следует отдавать статической стратегии (или видоизменить динамическое правило). Подробнее см., например, [11].

²Очевидным образом в рассмотренную постановку может быть добавлен и сетевой аспект — задержка передачи заявки с первой на вторую фазу (например, с помощью расстояний L_{ij} , функционально связанных с временем обслуживания заявок, между заявкой потока i и СМО с номером j) — и поставлен дополнительный вопрос об эффективности использования сети.

Таблица 3 Выигрыш в среднем времени пребывания от применения новой диспетчеризации (в сравнении с наилучшей из RND, RR, JSQ, JSQ(d), LWL и SITA-E) в марковской системе с одним входным потоком и 100 одинаковыми СМО на второй фазе; средняя задержка на первой фазе равна 10

Стратегия	Загрузка системы			
	0,2	0,4	0,6	0,8
SITA-E/JSQ(5), $k = 15$	> 4%	> 6%	> 11%	> 20%

Таблица 4 Вероятность превышения заявкой времени τ пребывания в системе из табл. 2

Загрузка системы	τ	SITA-E	JSQ	SITA-E/JSQ	
0,8	9	0,052	0,072	$k = 1$	0,043
				$k = 2$	0,026
				$k = 3$	0,030
0,6	5	0,070	0,069	$k = 1$	0,065
				$k = 2$	0,051
				$k = 3$	0,051
0,4	3,5	0,082	0,076	$k = 1$	0,078
				$k = 2$	0,067
				$k = 3$	0,066
0,2	3	0,072	0,071	$k = 1$	0,069
				$k = 2$	0,063
				$k = 3$	0,062

фазе, и с ростом последней именно таким стратегиям целесообразно было бы отдавать предпочтение на практике для минимизации (1) (см. рисунок и табл. 2). Однако новые диспетчеризации позволяют добиться заметно большего, чем каждая из стандартных стратегий в отдельности, не требуя при этом каких-либо дополнительных вычислительных затрат. Как видно из табл. 2, выигрыш имеет место при любом значении загрузки, и он может достигать рекордных значений (в данном случае более 20% при высокой загрузке). Это соотношение между стратегиями сохраняется с увеличением размера системы (табл. 3).

Предложенные составные диспетчеризации позволяют извлекать выигрыш и при обращении к функционалам, отличным от (1). В табл. 4 можно видеть поведение показателя², связанного с «хвостом» стационарного распределения времени пребывания заявки в системе — вероятности превышения заявкой некоторого заданного времени τ пребывания в системе.

Наконец, сравнивая табл. 2 и табл. 4, можно убедиться, что новые диспетчеризации путем варьирования значения единственного параметра дают возможность оптимизировать системы по нескольким (конфликтующим) критериям одновременно.

5 Заключение

Как показывают численные эксперименты на марковских моделях, проблема минимизации (1) путем, описанным в конце разд. 2, заключается, по крайней мере при больших значениях¹ N , в следующем обстоятельстве: в зависимости от степени случайности распределений \bar{D} эффективной диспетчеризацией оказывается либо статическая, либо динамическая. В свете этого обстоятельства эффективность предложенных составных диспетчеризаций, которые предполагают переключение между двумя различными типами стратегий, могла быть ожидаемой². Если из практики известно, что задержка на первой фазе в среднем существенная³, то применение новых правил (при не очень малых значениях N) повысит производительность системы. Анализ численных примеров показывает, что выигрыш ведет себя немонотонно. Более глубокое изучение его поведения в зависимости от «степени случайности» задержки на первой фазе и характеристик обслуживания на второй фазе, равно как и поиск новых эвристик для неоднородных систем, представляется плодотворным направлением дальнейших исследований.

Литература

1. Litvak N., Yechiali U. Routing in queues with delayed information // Queueing Syst., 2003. Vol. 43. No. 1/2. P. 147–165. doi: 10.1023/A:1021812816979.
2. Anselmi J., Doncel J. Load balancing with job-size testing: Performance improvement or degradation? // ACM Transactions Modeling Performance Evaluation Computing Systems, 2024. Vol. 9. No. 2. Art. 8. P. 1–27. doi: 10.1145/3651154.
3. Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. Диспетчеризация в частично наблюдаемых стохастических системах

конечной емкости с параллельным обслуживанием // Системы и средства информатики, 2023. Т. 33. № 3. С. 29–47. doi: 10.14357/08696527230303. EDN: XUVVNH.

4. Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. Алгоритм глобальной оптимизации некоторых стационарных временных характеристик заданий в частично наблюдаемых стохастических системах с параллельным обслуживанием // Системы и средства информатики, 2023. Т. 33. № 4. С. 50–59. doi: 10.14357/08696527230405. EDN: PQAIRH.
5. Moiseev A., Nazarov A. Tandem of infinite-server queues with Markovian arrival process // Comm. Com. Inf. Sc., 2016. Vol. 601. P. 323–333. doi: 10.1007/978-3-319-30843-2_34.
6. Dudin A., Nazarov A. On a tandem queue with retrials and losses and state dependent arrival, service and retrial rates // Int. J. Operational Research, 2017. Vol. 29. No. 2. P. 170–182. doi: 10.1504/IJOR.2017.10004611.
7. Pankratova E., Moiseeva S., Farkhadov M. Infinite-server resource queueing systems with different types of Markov-modulated Poisson process and renewal arrivals // Mathematics, 2022. Vol. 10. Art. 2962. 16 p. doi: 10.3390/math10162962.
8. Fedorova E., Lapatin I., Lizyura O., Moiseev A., Nazarov A., Paul S. Queueing system with two phases of service and service rate degradation // Axioms, 2023. Vol. 12. No. 2. Art. 104. 19 p. doi: 10.3390/axioms12020104.
9. Moiseev A. N., Shklennik M., Polin E. Infinite-server queueing tandem with Markovian arrival process and service depending on its state // Ann. Oper. Res., 2023. Vol. 326. No. 1. P. 261–279. doi: 10.1007/s10479-023-05318-1.
10. Lipshutz D. Open problem-load balancing using delayed information // Stochastic Systems, 2019. Vol. 9. Iss. 3. P. 305–306. doi: 10.1287/stsy.2019.0045.
11. Hyttia E., Richter R. Dynamic routing problems with delayed information // Performance evaluation methodologies and tools / Eds. Q. Zhao, L. Xia. — Lecture notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering ser. — Cham: Springer, 2021. Vol. 404. P. 171–184. doi: 10.1007/978-3-030-92511-6_11.
12. Kitsio V., Yechiali U. Multi-server queues with intermediate buffer and delayed information on service completions // Stoch. Models, 2008. Vol. 24. No. 2. P. 212–245. doi: 10.1080/15326340802007364.

¹Для небольших систем, в частности для систем с двумя СМО на второй фазе, рекордные результаты показывают адаптивные стратегии (например, Static Deep [21]).

²Но на данный момент остается труднообъяснимой. Здесь уместно провести параллель с известным парадоксом Паррондо, согласно которому можно выиграть, играя поочередно в две заведомо проигрышные игры: указанное в разд. 3 правило переключения между двумя стратегиями SPTA-E и JSQ обеспечивает больший выигрыш, чем при любой из них в отдельности (и вне зависимости от того, какая из них лучше при данных значениях параметров модели). Отметим, что идея парадокса Паррондо использовалась авторами недавно вышедшей статьи [22] для демонстрации того, что случайное переключение между локально оптимальным и алгоритмом наикратчайшего пути в сетях связи дает большие преимущества (которые становятся все заметнее с ростом сети), чем каждый из алгоритмов по отдельности.

³Осцилляции размеров очередей при этом не наблюдаются.

13. *Randić M., Blasković B., Dembitz Š.* Analysis of sojourn times in QBD model of a thread pool // *Automatika*, 2013. Vol. 54. No. 4. P. 495–506. doi: 10.7305/automatika.54-4.465.
14. *Sun Y., Cyr B.* Information aging through queues: A mutual information perspective // 19th Workshop (International) on Signal Processing Advances in Wireless Communications Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2018. Art. 8445873. 5 p. doi: 10.1109/SPAWC.2018.8445873.
15. *Tahir A., Cui K., Koepl H.* Learning mean-field control for delayed information load balancing in large queuing systems // 51st Conference (International) on Parallel Processing Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 2023. Art. 42. 11 p. doi: 10.1145/3545008.3545025.
16. *Коновалов М. Г., Разумчик Р. В.* Обзор моделей и алгоритмов размещения заданий в системах с параллельным обслуживанием // *Информатика и её применения*, 2015. Т. 9. Вып. 4. С. 56–67. doi: 10.14357/19922264150406. EDN: VEABIF.
17. *Itai A., Rosberg Z.* A golden ratio control policy for a multiple-access channel // *IEEE T. Automat. Contr.*, 1984. Vol. 29. P. 712–718. doi: 10.1109/TAC.1984.1103619.
18. *Arian Y., Levy Y.* Algorithms for generalized round Robin routing // *Oper. Res. Lett.*, 1992. Vol. 12. P. 313–319. doi: 10.1016/0167-6377(92)90091-G.
19. *Doncel J.* Performance balancing size-interval routing policies // *INFOR*, 2020. Vol. 58. No. 4. P. 635–651. doi: 10.1080/03155986.2020.1743039.
20. *Wang Y., Down D.* On resource pooling in SITA-like parallel server systems // 26th Teletraffic Congress (International) Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2014. Art. 6932947. 9 p. doi: 10.1109/ITC.2014.6932947.
21. *Hyttiä E.* Lookahead actions in dispatching to parallel queues // *Perform. Evaluation*, 2013. Vol. 70. No. 10. P. 859–872. doi: 10.1016/j.peva.2013.08.018.
22. *Mishra A., Wen T., Cheong K. H.* Parrondo's paradox in network communication: A routing strategy // *Physical Review Research*, 2024. No. 6. Art. L012037. doi: 10.1103/PhysRevResearch.6.L012037.

Поступила в редакцию 13.05.24

ON ONE PROBLEM OF LOAD BALANCING IN TWO-PHASE TANDEM QUEUES

M. G. Konovalov and R. V. Razumchik

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Consideration is given to the dispatching system with a single dispatcher without a queue for storing incoming jobs. There is a finite number of infinite capacity queues running in parallel, each having a single server for serving jobs one-by-one in FIFO (first in, first out) manner. It is assumed that the dispatcher has perfect information about the system upon making a routing decision about the arrived job. Once the decision is made, it is irrevocable but is executed by the job with a random delay. The system is modeled by a two-phase tandem queue, with an infinite-server queue at the first phase and a fixed number of single-server queues at the second phase. The method to construct simple dispatching policies by mixing is proposed, which can result in robust rules, having better performance than conventional static and dynamic policies. Simulations show significant reductions in mean response times (as well as its percentiles) in large-scale systems.

Keywords: parallel service systems; dispatching; load balancing; random delay

DOI: 10.14357/19922264240407

EDN: KGCBFL

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (CKP “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

References

1. Litvak, N., and U. Yechiali. 2003. Routing in queues with delayed information. *Queueing Syst.* 43(1/2):147–165. doi: 10.1023/A:1021812816979.
2. Anselmi, J., and J. Doncel. 2024. Load balancing with job-size testing: Performance improvement or degradation? *ACM Transactions Modeling Performance Evaluation Computing Systems* 9(2):8. 27 p. doi: 10.1145/3651154.
3. Konovalov, M., and R. Razumchik. 2023. Dispetche-rizatsiya v chastichno nablyudaemykh stokhasticheskikh sistemakh konechnoy emkosti s parallel'nym obsluzhivaniem [Dispatching in nonobservable parallel queues

- with finite capacities]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 33(3):29–47. doi: 10.14357/08696527230303. EDN: XUVVNH.
4. Kononov, M. G., and R. V. Razumchik. 2023. Algorithm global'noy optimizatsii nekotorykh stacionarnykh vremennykh kharakteristik zadaniy v chastichno nablyudaemykh stokhasticheskikh sistemakh s parallel'nym obsluzhivaniem [Algorithm for global optimization of time-related stationary characteristics of jobs in nonobservable parallel queues]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 33(4):50–59. doi: 10.14357/08696527230405. EDN: PQAIRH.
 5. Moiseev, A., and A. Nazarov. 2016. Tandem of infinite-server queues with Markovian arrival process. *Comm. Com. Inf. Sc.* 601:323–333. doi: 10.1007/978-3-319-30843-2_34.
 6. Dudin, A., and A. Nazarov. 2017. On a tandem queue with retrials and losses and state dependent arrival, service and retrial rates. *Int. J. Operational Research* 29(2):170–182. doi: 10.1504/IJOR.2017.10004611.
 7. Pankratova, E., S. Moiseeva, and M. Farkhadov. 2022. Infinite-server resource queueing systems with different types of Markov-modulated Poisson process and renewal arrivals. *Mathematics* 10(2962). 16 p. doi: 10.3390/math10162962.
 8. Fedorova, E., I. Lapatin, O. Lizyura, A. Moiseev, A. Nazarov, and S. Paul. 2023. Queueing system with two phases of service and service rate degradation. *Axioms* 12(2):104. 19 p. doi: 10.3390/axioms12020104.
 9. Moiseev, A. N., M. Shklennik, and E. Polin. 2023. Infinite-server queueing tandem with Markovian arrival process and service depending on its state. *Ann. Oper. Res.* 326(1):261–279. doi: 10.1007/s10479-023-05318-1.
 10. Lipshutz, D. 2019. Open problem-load balancing using delayed information. *Stochastic Systems* 9(3):305–306. doi: 10.1287/stsy.2019.0045.
 11. Hyytiä, E., and R. Righter. 2021. Dynamic routing problems with delayed information. *Performance evaluation methodologies and tools*. Eds. Q. Zhao, and L. Xia. Lecture notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering ser. Cham: Springer. 404:171–184. doi: 10.1007/978-3-030-92511-6_11.
 12. Kitsio, V., and U. Yechiali. 2008. Multi-server queues with intermediate buffer and delayed information on service completions. *Stoch. Models* 24(2):212–245. doi: 10.1080/15326340802007364.
 13. Randić, M., B. Blašković, and Š. Dembitz. 2013. Analysis of sojourn times in QBD model of a thread pool. *Automatika* 54(4):495–506. doi: 10.7305/automatika.54-4.465.
 14. Sun, Y., and B. Cyr. 2018. Information aging through queues: A mutual information perspective. *19th Workshop (International) on Signal Processing Advances in Wireless Communications Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. Art. 8445873. 5 p. doi: 10.1109/SPAWC.2018.8445873.
 15. Tahir, A., K. Cui, and H. Koepl. 2023. Learning mean-field control for delayed information load balancing in large queueing systems. *51st Conference (International) on Parallel Processing Proceedings*. New York, NY: ACM. Art. 42. 11 p. doi: 10.1145/3545008.3545025.
 16. Kononov, M. G., and R. V. Razumchik. 2015. Obzor modeley i algoritmov razmeshcheniya zadaniy v sistemakh s parallel'nym obsluzhivaniem [Methods and algorithms for job scheduling in systems with parallel service: A survey]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(4):56–67. doi: 10.14357/1992264150406. EDN: VEABIF.
 17. Itai, A., and Z. Rosberg. 1984. A golden ratio control policy for a multiple-access channel. *IEEE T. Automat. Contr.* 29(8):712–718. doi: 10.1109/TAC.1984.1103619.
 18. Arian, Y., and Y. Levy. 1992. Algorithms for generalized round Robin routing. *Oper. Res. Lett.* 12(5):313–319. doi: 10.1016/0167-6377(92)90091-G.
 19. Doncel, J. 2020. Performance balancing size-interval routing policies. *INFOR* 58(4):635–651. doi: 10.1080/03155986.2020.1743039.
 20. Wang, Y., and D. Down. 2014. On resource pooling in SITA-like parallel server systems. *26th Teletraffic Congress (International) Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. Art. 6932947. 9 p. doi: 10.1109/ITC.2014.6932947.
 21. Hyytiä, E. 2013. Lookahead actions in dispatching to parallel queues. *Perform. Evaluation* 70(10):859–872. doi: 10.1016/j.peva.2013.08.018.
 22. Mishra, A., T. Wen, and K. H. Cheong. 2024. Parrondo's paradox in network communication: A routing strategy. *Physical Review Research* 6:L012037. doi: 10.1103/PhysRevResearch.6.L012037.

Received May 13, 2024

Contributors

Kononov Mikhail G. (b. 1950) — Doctor of Science in technology, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; mkononov@ipiran.ru

Razumchik Rostislav V. (b. 1984) — Doctor of Science in physics and mathematics, deputy director, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; rrazumchik@ipiran.ru

МИНИМИЗАЦИЯ ЗАДЕРЖКИ В СИСТЕМАХ 5G/6G IoT С ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ В ВОСХОДЯЩЕМ И НИСХОДЯЩЕМ НАПРАВЛЕНИЯХ*

А. В. Дараселия¹, Э. С. Сопин², К. Е. Самуйлов³, Е. А. Кучерявый⁴

Аннотация: Будущие технологии сотового Интернета вещей (CIoT, Cellular Internet of Things) 5G/6G должны быть способны обслуживать несколько типов трафика, имеющих разные статистические свойства, требования к ресурсам и направления передачи. С этой целью этапы произвольного доступа и передачи данных в таких технологиях должны быть соответствующим образом оптимизированы. В статье предлагается математическая модель процедуры обслуживания, учитывающая последовательные этапы произвольного доступа и передачи данных, а также различающийся тип трафика в восходящем и нисходящем направлениях. Результаты показывают, что современные системы CIoT, такие как NB-IoT (Narrow Band Internet of Things), не оптимизированы для широкого диапазона условий нагрузки. Численные результаты показывают, что оптимальное распределение ресурсов между фазами случайного доступа и передачи данных может существенно различаться в зависимости от нагрузки в восходящем и нисходящем направлениях. Предложенная модель позволяет оптимально настраивать фазы случайного доступа и передачи данных в будущих системах CIoT.

Ключевые слова: 5G; 6G; mMTC; CIoT; случайный доступ; задержка; критерий стабильности; выделение ресурсов

DOI: 10.14357/19922264240408

EDN: EBGJBZ

1 Введение

По сравнению с обычными услугами, предлагаемыми системами передачи трафика межмашинного взаимодействия 5G mMTC (massive Machine-Type Communications), такими как технологии NB-IoT и LTE-M (Long Term Evolution for Machines), системы 6G должны поддерживать разные типы услуг в восходящем и нисходящем направлениях. Это подразумевает не только асинхронную передачу от оконечных устройств (ОУ), но и обновление программного обеспечения по нисходящему каналу связи для интеллектуальных ОУ. Чтобы обеспечить такую универсальность, системы 6G mMTC должны использовать гибкую структуру кадра с возможностью динамического назначения ресурсов в восходящих и нисходящих каналах передачи данных.

Чтобы обеспечить длительный срок службы ОУ, современные технологии mMTC, такие как NB-IoT и LTE-M, используют двухэтапную процедуру обслуживания в восходящем канале связи, вклю-

чающую в себя процедуру случайного множественного доступа и передачи данных [1]. На фазе передачи данных используется мультиплексирование восходящего и нисходящего трафика по схеме множественного доступа с ортогональным частотным разделением (OFDMA — Orthogonal Frequency Division Multiple Access). В зависимости от типа и направления передачи ОУ необходимо обслуживать на обоих этапах или только на этапе передачи данных.

В отличие от моделей других типов трафика, таких как трафик широкополосной передачи eMBB (enhanced Mobile BroadBand) или трафик сверхнадежной связи с ультрамалыми задержками URLLC (UltraReliable Low Latency Communications) [2, 3], в моделях передачи трафика межмашинного взаимодействия ключевую роль играют механизмы случайного доступа. Кроме того, необходимо учитывать, что в моделях технологий mMTC снижается влияние плотности развертывания базовых станций [4] и особенностей пользовательского поведения [5] на показатели производительности. По-

* Публикация подготовлена при поддержке РФФ, проект № 24-19-00299 «Модели и методы обслуживания трафика приложений систем критической инфраструктуры в сотовых технологиях Интернета вещей 5G/6G» (<https://rscf.ru/ru/project/24-19-00299/>).

¹ Российский университет дружбы народов, daraselija-av@rudn.ru

² Российский университет дружбы народов; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, sopin-es@rudn.ru

³ Российский университет дружбы народов; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, samuylov-ke@rudn.ru

⁴ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ukoucheryavy@hse.ru

этому в большинстве исследований, посвященных анализу систем CIoT, особое внимание уделяется этапу случайного доступа. Авторы [6] показали, что для многоканального случайного доступа типа ALOHA при пуассоновском потоке пакетов оптимальная вероятность передачи обратно пропорциональна $\min(l/N_t, 1)$, где l — число преамбул; N_t — число активных ОУ. В работе [7] предлагается способ приблизительного определения значения N_t . Производительность фазы NB-IoT RA (Random Access) при групповом поступлении пакетов была рассмотрена в статье [8]. Авторы продемонстрировали, что при таких типах поступлений пропускная способность систем NB-IoT снижается на несколько порядков. Сочетание случайных и групповых поступлений рассмотрено в [9], где авторы определили среднюю задержку для обоих типов трафика.

Исследования, учитывающие как фазу случайного доступа, так и фазу передачи данных, появились совсем недавно. В частности, такие системы были рассмотрены в [10] для систем стандарта IEEE 802.16 и совсем недавно в [11] в контексте общих систем произвольного доступа. Авторы статьи [11] расширили модель, первоначально предложенную в [10], и разработали метод определения оптимального соотношения ресурсов на этапах обслуживания, обеспечивающего максимальную пропускную способность системы.

В данной работе предлагается математическая модель процесса обслуживания в системах 5G/6G mMTC, учитывающая особенности процесса обслуживания трафика с разными статистическими свойствами в восходящем и нисходящем направлениях. Модель сформулирована в виде тандемной

системы массового обслуживания (СМО) с пуассоновским входящим потоком в восходящем направлении и многоканальным случайным доступом на первом этапе и групповым поступлением в нисходящем направлении на этапе передачи данных. Для предложенной модели определены необходимые условия стабильности и получены выражения для средней задержки и пропускной способности системы.

2 Модель системы

В данном разделе представлена модель системы, включая схемы поступления трафика, этапы случайного доступа и передачи данных, а также интересные характеристики.

Рассматривается сота CIoT с доступным частотным ресурсом B . Во временной области передача выполняется в кадрах, каждый из которых имеет длительность Δ с (рис. 1). Кадр делится на фазы случайного доступа и передачи данных. Предполагается, что на этапе передачи данных используется OFDMA (Orthogonal Frequency-Division Multiple Access). Общий набор частотно-временных ресурсов, доступных в системе, $B\Delta$ измеряется в единицах ресурсов (РЕ). Одна единица ресурсов соответствует времени передачи одного пакета.

На этапе случайного доступа организовано n_1 каналов, каждый из которых содержит l преамбул. Каждое устройство случайным образом выбирает одну из $L = ln_1$ преамбул, и если два или более ОУ выбрали одну и ту же преамбулу, то они вынуждены повторить процедуру случайного доступа в следующем кадре. Если больше никакое ОУ не выбрало эту же преамбулу, то процедура случай-

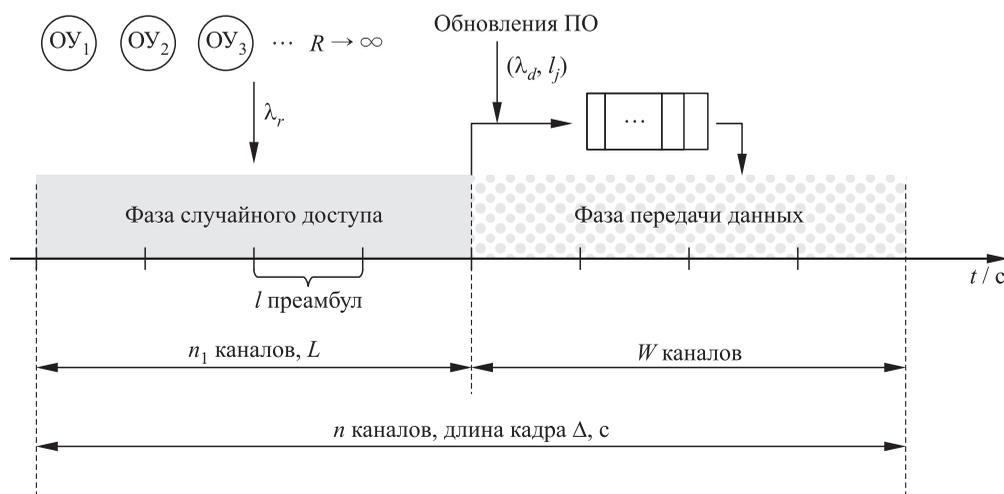


Рис. 1 Структура кадра рассматриваемой системы CIoT

ного доступа считается пройденной, а пакеты ОУ планируются к отправке на этапе передачи данных в следующем кадре. На этом этапе к ним присоединяется трафик, проходящий в нисходящем направлении. Таким образом, как нисходящий, так и восходящий трафик мультиплексируются на этапе передачи данных. Трафик, находящийся в очереди на этапе передачи данных, обслуживается в порядке поступления (FCFS, First Come First Served). Количество РЕ на этапе передачи данных равно W .

Рассматриваются два типа трафика. Все ОУ в системе генерируют пакеты для передачи в восходящем канале. Предполагается, что ОУ работают асинхронно и запрашивают один РЕ на этапе передачи данных. Учитывая эти предположения, поступающий поток сообщений в восходящем канале можно считать пуассоновским с интенсивностью λ_r .

Второй тип трафика генерируется центром управления в нисходящем направлении и представляет собой смесь обновлений программного обеспечения (ПО) и управляющей информации. Для передачи такого типа трафика требуются только ресурсы на фазе передачи данных. В модели этот трафик отражается с помощью группового пуассоновского потока с интенсивностью λ_d . Тогда число групп пакетов, поступающих в один слот, равно k с вероятностью

$$\gamma_k = \frac{(\lambda_d \Delta)^k}{k!} e^{-\lambda_d \Delta},$$

а число пакетов в группе определяется рядом распределения $\{l_k\}$, $k > 0$. Обозначим средний размер группы пакетов как $\bar{l} < \infty$.

Искомыми будут параметры оптимального распределения ресурсов между фазами случайного доступа и передачи данных таким образом, чтобы средняя задержка оказалась минимальной. Для достижения этой цели начнем с определения условий стабильности системы, а затем рассчитаем среднюю задержку пакета в восходящем и нисходящем направлениях.

3 Математическая модель

3.1 Описание модели

Модель, сформулированная в предыдущем разделе, может быть описана двумерной цепью Маркова $X_n = (R_n, D_n)$, где R_n — число активных ОУ на фазе случайного доступа; D_n — число пакетов, поставленных в очередь на фазе передачи данных в n -м кадре. Определим переходные вероятности этого процесса.

Поскольку новые активные ОУ поступают в соответствии с пуассоновским процессом с интенсив-

ностью λ_r , число активных ОУ в фазе случайного доступа в каждом кадре соответствует распределению Пуассона с параметром $\lambda_r \Delta$, где Δ — длительность кадра. Обозначим через α_k , $k = 0, 1, \dots$, вероятность того, что k новых ОУ поступит в течение одного кадра.

Число ОУ, успешно прошедших этап случайного доступа, зависит от количества активных ОУ. Пусть система находится в состоянии (r, d) . Вероятность $\beta_k(r)$ того, что k из r ОУ успешно пройдут фазу случайного доступа, представлена в [12] в виде:

$$\beta_k(r) = \frac{1}{L^r} \binom{L}{k} \sum_{i=0}^{\min(L-k, r-k)} (-1)^i \binom{L-k}{i} \times \\ \times \frac{r!}{(r-k-i)!} (L-k-i)^{r-k-i}, \\ 0 \leq k \leq \min(L, r). \quad (1)$$

Согласно [12], среднее число ОУ $B(L, r)$, которые успешно завершают фазу случайного доступа в одном кадре с r активными ОУ и L преамбулами, вычисляется по формуле:

$$B(L, r) = r \left(\frac{L-1}{L} \right)^{r-1}.$$

Пространство состояний системы для реалистичных значений числа преамбул L и числа активных ОУ, как ожидается, будет большим. В связи с этим предлагается аппроксимировать вероятность $\beta_k(r)$ биномиальным распределением с параметрами $m = \min(L, r)$ и $p = B(L, r)/m$. Это приближение дает хорошую точность даже при малых значениях L и улучшается по мере увеличения L .

Принимая во внимание поступление пакетов в нисходящем направлении на фазе передачи данных и число ОУ, успешно прошедших этап передачи данных, можно рассчитать вероятность перехода из состояния (r, d) в состояние (s, g) в наиболее общих случаях следующим образом:

$$P(r, d), (s, g) = \\ = \sum_{i=0}^{\min(L, r)} \beta_i(r) \alpha_{s-r+i} \sum_{j=0}^{g-d-i-W} \gamma_j l_{g-d-i-W}^{(j)},$$

где $\{l_j^{(k)}\}$ представляет собой k -кратную свертку распределения $\{l_j\}$.

3.2 Условия стабильности и пропускная способность

Получив переходные вероятности, можно перейти к определению условий стабильности для исследуемого марковского процесса. Для системы

с фазами случайного доступа и передачи данных условие стабильности соответствует максимальной пропускной способности.

Заметим, что (1) позволяет получить необходимое условие эргодичности цепи Маркова X_n . Согласно [12],

$$\frac{B(L, r + 1)}{B(L, r)} \begin{cases} > 1, & r < L - 1; \\ = 1, & r = L - 1; \\ < 1, & r > L - 1, \end{cases} \quad (2)$$

среднее число ОУ, успешно прошедших фазу случайного доступа, достигает максимума при $r = L - 1$ и $r = L$.

Согласно (2), если среднее число поступающих новых ОУ на фазу случайного доступа превышает максимальное число ОУ, успешно покидающих ее, то цепь Маркова становится нестабильной. Таким образом, первое необходимое условие стабильности имеет вид:

$$\lambda_r \Delta < L \left(\frac{L - 1}{L} \right)^{L - 1}. \quad (3)$$

Аналогично среднее число поступающих на фазу передачи данных за кадр пакетов должно быть меньше максимального числа передаваемых пакетов W , т. е.

$$(\lambda_r + \lambda_d \bar{l}) \Delta < W. \quad (4)$$

Обратим внимание, что для больших L условие (3) может быть приблизительно записано в виде $\lambda_r \Delta < L e^{-1}$.

3.3 Декомпозиция модели

Обратим внимание, что (3) и (4) — это необходимые условия для стабильности системы, но не достаточные. Кроме того, при больших значениях интенсивностей поступления в восходящем и нисходящем направлениях использование двумерной модели требует больших вычислительных затрат.

Для упрощения анализа используются следующие допущения:

- (а) ограничивается максимальное состояние системы на фазах случайного доступа и передачи данных некоторыми большими значениями R и D , чтобы потери были пренебрежимо малы на обеих фазах;
- (б) модель разбивается на две части — фазы случайного доступа и передачи данных.

Последнее возможно благодаря следующим наблюдениям. Прежде всего, поведение первого компонента цепи Маркова $X_n = (R_n, D_n)$ не зависит от числа D_n пакетов, находящихся в очереди на фазе

передачи данных. Хотя в противном случае это неверно и D_n явно зависит от R_n , для таких систем может быть применен метод декомпозиции. В дальнейшем исходный марковский процесс X_n будет разделен на две независимые одномерные марковские цепи R_n и D_n . Здесь ОУ, успешно прошедшие фазу случайного доступа, формируют дополнительный поток, поступающий на фазу передачи данных.

Сначала рассмотрим цепь Маркова R_n для числа активных ОУ на фазе случайного доступа. Переходные вероятности $p_{i,j}^{(R)} = P\{R_{n+1} = j | R_n = i\}$ имеют следующий вид:

$$p_{i,j}^{(R)} = \sum_{k=\max(0,i-j)}^i \beta_k(i) \alpha_{j-i+k}, \quad 0 \leq i \leq R, \quad 0 \leq j < R;$$

$$p_{i,R}^{(R)} = \sum_{k=0}^i \beta_k(i) \left(1 - \sum_{s=0}^{R-i+k-1} \alpha_s \right), \quad 0 \leq i \leq R.$$

Зная переходные вероятности, можно найти стационарные вероятности $\{q_r\}, r = 0, \overline{1, R}$, из системы уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} q_r^{(R)} &= \sum_{i=0}^R q_i^{(R)} \sum_{k=\max(0,i-r)}^i \beta_k(i) \alpha_{r-i+k}, \quad r < R; \\ q_R^{(R)} &= \sum_{i=0}^R q_i^{(R)} \sum_{k=0}^i \beta_k(i) \left(1 - \sum_{s=0}^{R-i+k} \alpha_s \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Система (5) решается численно для получения стационарных вероятностей R_n , которые, в свою очередь, позволяют получить вероятность θ_k того, что k ОУ успешно пройдут фазу случайного доступа за один кадр следующим образом:

$$\theta_k = \sum_{j=k}^R q_j^{(R)} \beta_k(j), \quad 0 \leq k \leq L.$$

Среднее число ОУ, прошедших фазу случайного доступа, равно

$$\bar{\theta} = \sum_{k=0}^L k \theta_k.$$

Рассмотрим теперь цепь Маркова D_n . В каждом кадре имеются k пакетов, поступающих из фазы случайного доступа с вероятностью θ_k , и i групп пакетов, поступающих непосредственно на фазу передачи данных с вероятностью γ_i , где число пакетов в пачке распределяется в соответствии с распределением $\{l_j\}$. В то же время в каждом кадре может быть передано не более W пакетов. Следовательно, переходные вероятности $p_{i,j}^{(D)} = P\{D_{n+1} = j | D_n = i\}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
 p_{i,j}^{(D)} &= \sum_{k=0}^j \theta_k \sum_{s=0}^{j-k} \gamma_s l_{j-k}^{(s)}, \quad 0 \leq i < W, 0 \leq j < D; \\
 p_{i,D}^{(D)} &= \sum_{k=0}^L \theta_k \left(1 - \sum_{s=0}^{D-k-1} \gamma_s \sum_{r=0}^{D-k-1} l_r^{(s)} \right), \quad 0 \leq i < W; \\
 p_{i,j}^{(D)} &= \sum_{k=0}^{j-i+W} \theta_k \sum_{s=0}^{j-i+W-k} \gamma_s l_{j-i+W-k}^{(s)}, \\
 &\quad W \leq i \leq D, i - W \leq j < D; \\
 p_{i,D}^{(D)} &= \sum_{k=0}^L \theta_k \left(1 - \sum_{s=0}^{D-i-k+W-1} \gamma_s \sum_{r=0}^{D-i-k+W-1} l_r^{(s)} \right), \\
 &\quad W \leq i \leq D.
 \end{aligned}$$

Используя переходные вероятности, можно записать уравнения равновесия в виде

$$q_k^{(D)} = \sum_{j=0}^{k+W} q_j^{(D)} p_{j,k}^{(D)}, \quad 0 \leq k \leq D,$$

которые можно решить численно совместно с условием нормировки.

3.4 Параметры производительности системы

Для получения среднего времени задержки используем закон Литтла. Среднее число ОУ на фазе случайного доступа определяется по формуле:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^R k q_k^{(R)},$$

а среднее число пакетов на фазе передачи данных равно

$$\bar{D} = \sum_{k=1}^D k q_k^{(D)}.$$

Поскольку вероятность потери данных пренебрежимо мала, средняя задержка для пакета восходящей линии связи составляет

$$w_r = \frac{\bar{R}}{\lambda_r} + \frac{\bar{D}}{\theta + \lambda_d \bar{l} \Delta} \Delta,$$

а для нисходящих пакетов

$$w_d = \frac{\bar{D}}{\theta + \lambda_d \bar{l} \Delta} \Delta.$$

Верхняя граница максимальной пропускной способности C_R на фазе случайного доступа может быть вычислена из (3) в следующем виде:

$$C_R = \frac{L}{\Delta e},$$

а максимальная пропускная способность C_D фазы передачи данных:

$$C_D = \frac{W}{\Delta} - \lambda_r.$$

Наконец, получаем коэффициент использования U фазы передачи данных в следующем виде:

$$U = \frac{1}{W} \sum_{k=1}^{W-1} k q_k^{(D)} + \sum_{k=W}^D q_k^{(D)}.$$

4 Численные результаты

В данном разделе рассмотрим численный пример. Сначала разработанная модель будет применена для оценки показателей производительности в случае, когда ресурсы на фазах случайного доступа и передачи данных фиксированы, например как это делается в современных технологиях 5G/6G IoT, таких как LTE-M и NB-IoT. Затем будет показано, что можно повысить производительность системы, используя гибкое распределение ресурсов между фазами случайного доступа и передачи данных.

Параметры системы по умолчанию

Обозначение	Параметр	Значение
B	Ширина полосы пропускания	180 кГц
Δ	Длина кадра	0,01 с
l	Число преамбул	12
P	Количество РЕ (размер пакета) в восходящем направлении	128 байт
W	Количество РЕ на фазе передачи данных	278 РЕ
n_1	Количество РЕ на фазе случайного доступа	14 РЕ
n	Общее число РЕ в кадре	292 РЕ
λ_r	Интенсивность поступления пакетов по восходящей линии связи	2000–5500 пак./с
λ_d	Интенсивность поступления обновлений ПО	1–10 обновл./с
$\{\gamma_k\}$	Распределение числа обновлений в слоте	$\sim \text{Poisson}(\lambda_d \Delta)$
$\{l_j\}$	Распределение числа пакетов обновлений ПО	$\sim \text{Binom}(750; 2/3)$
\bar{l}	Средний объем обновлений ПО	100/500 РЕ

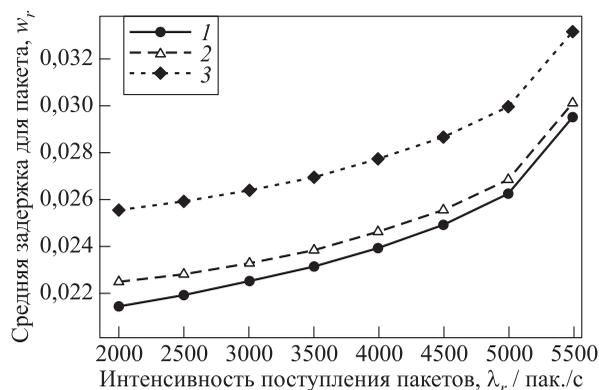


Рис. 2 Средняя задержка для пакета по восходящей линии связи: 1 — $\lambda_d = 0$; 2 — 1; 3 — $\lambda_d = 10$

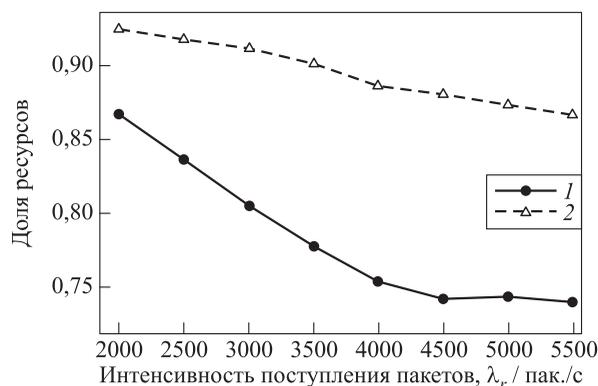


Рис. 3 Доля ресурсов, выделенных на фазу передачи данных: 1 — $\lambda_d = 1$; 2 — $\lambda_d = 10$

Системные параметры по умолчанию приведены в таблице. Для вычисления этих показателей использована нумерология NB-IoT с одним ресурсным блоком LTE шириной 180 кГц.

Начнем с оценки производительности системы, в которой фиксируется число ресурсов, выделенных для фаз случайного доступа и передачи данных.

Рассмотрим среднюю задержку пакетов в восходящем канале, показанную на рис. 2, где значения интенсивности обновления ПО λ_d выбраны таким образом, чтобы предлагаемая нагрузка составляла 0% ($\lambda_d = 0$ обновл./с), $\approx 3\%$ ($\lambda_d = 1$ обновл./с) и $\approx 30\%$ ($\lambda_d = 10$ обновл./с) от общих ресурсов, доступных на этой фазе. Анализируя результаты, можно увидеть, что наличие нисходящего трафика на фазе передачи данных не оказывает существенного влияния на задержку трафика в восходящем канале. Фактически разница между $\lambda_d = 0$ и 1 обновл./с составляет менее 1 мс и увеличивается на 3–4 мс при $\lambda_d = 10$ обновл./с. Кроме того, разрыв между кривыми, соответствующими разным значениям λ_d , становится меньше по мере увеличения интенсивности восходящего трафика. Это означает, что фаза передачи данных в современных технологиях CIoT остается недогруженной в отсутствие трафика в нисходящем канале. Для эффективного масштабирования технологий CoIT для различных условий нагрузки объем ресурсов, выделяемых на фазы случайного доступа и передачи данных, необходимо динамически корректировать.

Перейдем к оценке оптимального распределения между фазами случайного доступа и передачи данных. На рис. 3 показана оптимальная доля ресурсов (с точки зрения минимальной средней задержки на восходящей линии связи), которые необходимо выделить на фазу передачи данных, в зависимости от λ_r и двух интенсивно-

стей обновления ПО — $\lambda_d = 1$ и 10 обновл./с. Как можно заметить, оптимальное распределение ресурсов сильно варьируется в зависимости от интенсивности поступления пакетов в восходящем и нисходящем направлении. Текущее распределение, используемое в системах CIoT 4G/5G, ближе к случаю, когда фаза передачи данных сильно загружена трафиком обновлений ПО ($\lambda_d = 10$ обновл./с, $\approx 30\%$ от использования фазы передачи данных). Для более реалистичной загрузки в нисходящем направлении пропускная способность фазы передачи данных должна быть уменьшена для передачи большего числа пакетов в восходящем направлении.

5 Заключение

Разработана математическая модель, которая отражает поведение фаз произвольного доступа и передачи данных, используемых в современных технологиях CIoT, а также пользовательского трафика в обоих направлениях одновременно. Предложенная модель позволяет определять оптимальное количество ресурсов, которые необходимо назначить для фаз случайного доступа и передачи данных так, чтобы минимизировать среднюю задержку. Численные результаты также показывают, что современные системы CIoT, такие как NB-IoT и LTE-M, могут не справляться с поступающей нагрузкой из-за фиксированного разделения ресурсов между этими фазами.

Литература

1. Маркова Е. В., Гольская А. А., Дзантиев И. Л., Гудкова И. А., Шоргин С. Я. Сравнительный анализ показателей эффективности модели беспроводной сети

- межмашинного взаимодействия, работающей в рамках двух политик разделения радиоресурсов // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 1. С. 108–116. doi: 10.14357/19922264190115. EDN: SRXVZT.
2. Кочеткова И. А., Куцазли А. И., Харин П. А., Шоргин С. Я. Модель схемы приоритетного доступа трафика URLLC и eMBB в сети пятого поколения в виде ресурсной системы массового обслуживания // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 87–92. doi: 10.14357/19922264210412. EDN: IOMPGI.
 3. Иванова Д. В., Маркова Е. В., Шоргин С. Я., Гайдамака Ю. В. Модели совместного обслуживания трафика eMBB и URLLC на основе приоритетов в промышленных развертываниях 5G NR // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 64–70. doi: 10.14357/19922264230409. EDN: JXCGXQ.
 4. Бесчастный В. А., Острикова Д. Ю., Шоргин С. Я., Молчанов Д. А., Гайдамака Ю. В. Анализ плотности базовых станций 5G NR для предоставления услуг виртуальной и дополненной реальности // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 102–108. doi: 10.14357/19922264220213. EDN: VPIRYN.
 5. Сопин Э. С., Маслов А. Р., Шоргин В. С., Бегишев В. О. Моделирование настойчивого поведения пользователей в сетях 5G NR с адаптацией скорости и блокировками // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 25–32. doi: 10.14357/19922264230304. EDN: ENSHKV.
 6. Galinina O., Turlikov A., Andreev S., Koucheryavy Y. Stabilizing multi-channel slotted aloha for machine-type communications // Symposium (International) on Information Theory Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2013. P. 2119–2123. doi: 10.1109/ISIT.2013.6620600.
 7. Михайлов В. А. Геометрический анализ устойчивости цепей маркова в R_+^n и его приложение к вычислению пропускной способности адаптивного алгоритма случайного множественного доступа // Проблемы передачи информации, 1988. Т. 24. № 1. С. 61–73. EDN: ZAGAAE.
 8. Stusek M., Stepanov N., Moltchanov D., Masek P., Mozny R., Turlikov A., Hosek J. Optimizing NB-IoT communication patterns for permanently connected mMTC devices // Wireless Communications and Networking Conference Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2022. P. 1413–1418. doi: 10.1109/WCNC51071.2022.9771847.
 9. Masek P., Moltchanov D., Stusek M., Mozny R., Mokrov E., Hosek J. Quantifying NB-IoT performance in 5G-IoT use-cases with mixture of regular and stochastic traffic // IEEE Internet Things, 2023. Vol. 1. Iss. 1. P. 1–6.
 10. Vinel A., Ni Q., Staehle D., Turlikov A. Capacity analysis of reservation-based random access for broadband wireless access networks // IEEE J. Sel. Area. Comm., 2009. Vol. 27. Iss. 2. P. 172–181. doi: 10.1109/JSAC.2009.090208.
 11. Stepanov N., Turlikov A., Begishev V. Balancing the data transmission and random access phases in 6G mMTC radio technologies // IEEE Commun. Lett., 2023. Vol. 27. Iss. 12. P. 3419–3423. doi: 10.1109/LCOMM.2023.3322598.
 12. Lin G. Y., Chang S. R., Wei H. Y. Estimation and Adaptation for Bursty LTE Random Access // IEEE T. Veh. Technol., 2016. Vol. 65. Iss. 4. P. 2560–2577. doi: 10.1109/TVT.2015.2418811.

Поступила в редакцию 12.09.24

MINIMIZING LATENCY IN 5G/6G IoT SYSTEMS WITH GROUP ADMISSION IN ASCENDING AND DESCENDING DIRECTIONS

A. V. Daraseliya¹, E. S. Sopin^{1,2}, K. E. Samuylov^{1,2}, and E. A. Koucheryavy³

¹Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

²Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

³National Research University Higher School of Economics, 20 Myasnitskaya Str., Moscow 101000, Russian Federation

Abstract: Future Cellular Internet of Things (CIoT) 5G/6G technologies are expected to be able to handle various types of traffic with different statistical characteristics, resource requirements, and transmission directions. In order to achieve this, the random access and data transmission phases in these technologies need to be optimized. This study proposes a mathematical model of the service procedure, which takes into account the sequential phases of random access and data transition, and different types of traffic in the uplink and downlink directions. The results show that modern CIoT systems such as NB-IoT (Narrow Band Internet of Things) are not optimized for a wide range of load conditions. Numerical results show that the optimal allocation of resources between the random access and data transmission phases can vary significantly depending on the load in the uplink and downlink

directions. The proposed model allows for optimal configuration of the random access and data transition phases in future CIOt systems.

Keywords: 5G; 6G; mMTC; CIOt; random access; latency; stability criterion; resource allocation

DOI: 10.14357/19922264240408

EDN: EBGJBZ

Acknowledgments

The research was funded by the Russian Science Foundation, project No. 24-19-00299 (<https://rscf.ru/en/project/24-19-00299/>).

References

1. Markova, E. V., A. A. Golskaia, I. L. Dzantiev, I. A. Gudkova, and S. Ya. Shorgin. 2019. Sravnitel'nyy analiz pokazateley effektivnosti modeli besprovodnoy seti mezh-mashinnogo vzaimodeystviya, rabotayushchey v ramkakh dvukh politik razdeleniya radioresursov [Comparative analysis of performance measures for a wireless machine-to-machine network model operating within two radio resource management policies]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(1):108–116. doi: 10.14357/19922264190115. EDN: SRXVZT.
2. Kochetkova, I. A., A. I. Kushchazli, P. A. Kharin, and S. Ya. Shorgin. 2021. Model' skhemy prioritetnogo dostupa trafika URLLC i eMBB v seti pyatogo pokoleniya v vide resursnoy sistemy massovogo obsluzhivaniya [Model for analyzing priority admission control of URLLC and eMBB communications in 5G networks as a resource queuing system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(4):87–92. doi: 10.14357/19922264210412. EDN: IOMPGI.
3. Ivanova, D. V., E. V. Markova, S. Ya. Shorgin, and Yu. V. Gaidamaka. 2023. Modeli sovместnogo obsluzhivaniya trafika eMBB i URLLC na osnove prioritetov v promyshlennykh razvertyvaniyakh 5G NR [Priority-based eMBB and URLLC traffic coexistence models in 5G NR industrial deployments]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):64–70. doi: 10.14357/19922264230409. EDN: JXCGXQ.
4. Beschastnyi, V. A., D. Yu. Ostrikova, S. Ya. Shorgin, D. A. Moltchanov, and Yu. V. Gaidamaka. 2022. Analiz plotnosti bazovykh stantsiy 5G NR dlya predostavleniya uslug virtual'noy i dopolnennoy real'nosti [Density analysis of mmWave NR deployments for delivering scalable AR/VR video services]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):102–108. doi: 10.14357/19922264220213. EDN: VPIRYN.
5. Sopin, E. S., A. R. Maslov, V. S. Shorgin, and V. O. Begishev. 2023. Modelirovanie nastoychivogo povedeniya pol'zovateley v setyakh 5G NR s adaptatsiey skorosti i blokirovkami [Modeling insistent user behavior in 5G New Radio networks with rate adaptation and blockage]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):25–32. doi: 10.14357/19922264230304. EDN: ENSHKV.
6. Galinina, O., A. Turlikov, S. Andreev, and Y. Koucheryavy. 2013. Stabilizing multi-channel slotted ALOHA for machine-type communications. *Symposium (International) on Information Theory Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 2119–2123. doi: 10.1109/ISIT.2013.6620600.
7. Mihajlov, V. 1988. Geometrical analysis of the stability of Markov chains in R_+^n and its application to throughput evaluation of the adaptive random multiple access algorithm. *Probl. Inf. Transm.* 24(1):47–56. EDN: HHHHDT.
8. Stusek, M., N. Stepanov, D. Moltchanov, P. Masek, R. Mozny, A. Turlikov, and J. Hosek. 2022. Optimizing NB-IoT communication patterns for permanently connected mMTC devices. *Wireless Communications and Networking Conference Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 1413–1418. doi: 10.1109/WCNC51071.2022.9771847.
9. Masek, P., D. Moltchanov, M. Stusek, R. Mozny, E. Mokrov, and J. Hosek. 2023. Quantifying NB-IoT performance in 5G-IoT use-cases with mixture of regular and stochastic traffic. *IEEE Internet Things* 1(1):1–6.
10. Vinel, A., Q. Ni, D. Staehle, and A. Turlikov. 2009. Capacity analysis of reservation-based random access for broadband wireless access networks. *IEEE J. Sel. Area. Comm.* 27(2):172–181. doi: 10.1109/JSAC.2009.090208.
11. Stepanov, N., A. Turlikov, and V. Begishev. 2023. Balancing the data transmission and random access phases in 6G mMTC radio technologies. *IEEE Commun. Lett.* 27(12):3419–3423. doi: 10.1109/LCOMM.2023.3322598.
12. Lin, G. Y., S.-R. Chang, and H.-Y. Wei. 2016. Estimation and adaptation for bursty LTE random access. *IEEE T. Veh. Technol.* 65(4):2560–2577. doi: 10.1109/TVT.2015.2418811.

Received September 12, 2024

Contributors

Daraseliya Anastasia V. (b. 1994) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior lecturer, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; daraselia-av@rudn.ru

Sopin Eduard S. (b. 1987) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; sopin-es@rudn.ru

Samouylov Konstantin E. (b. 1955) — Doctor of Science in technology, professor, head of department, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; samuylov-ke@rudn.ru

Koucheryavy Evgeni A. (b. 1974) — Doctor of Science in technology, professor, National Research University Higher School of Economics, 20 Myasnitskaya Str., Moscow 101000, Russian Federation; ykoucheryavy@hse.ru

О ЗАДАЧЕ ПРЕДСКАЗАНИЯ ДЕГРАДАЦИИ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

С. Л. Френкель¹, В. Н. Захаров²

Аннотация: Задача прогнозирования скорости деградации характеристик технических систем (времени жизни, *англ.* lifetime, LT) обычно решается в рамках парадигмы ускоренных испытаний (accelerating testing, AT) при стрессовых воздействиях. Однако для AT могут быть неэффективными статистические методы оценки результатов при зависимости производительности системы от очень большого числа факторов. Свою специфику AT имеет также на ранних стадиях опытно-конструкторских работ (ОКР), когда, имея лишь небольшое число экземпляров устройства, необходимо оценить их потенциальный срок службы для оценки целесообразности продолжения разработки. В статье анализируются, насколько современные математические и статистические модели, так или иначе формирующие методологию AT, а именно: анализ выживаемости, теория экстремальных значений (extreme value theory, EVT), позволяют получать прогнозы срока службы проектируемых устройств в условиях реальной эксплуатации на ранних стадиях разработки/проектирования. Указываются проблемы решения задачи прогнозирования LT известными средствами машинного обучения (machine learning, ML), предлагается и рассматривается эвристический метод решения задачи прогнозирования LT в реальных условиях. В качестве примера рассматривается прогнозирование деградации производительности для новых конструкций солнечных электрических элементов, производительность которых имеет тенденцию к деградации. Эта эвристика относится к извлечению тренда Хондрика–Прескота из нестационарного временного ряда, который представляет собой деградацию характеристики качества. Обсуждается и обосновывается применимость предлагаемой эвристики для предсказания деградации в других технических приложениях, в частности сетевых.

Ключевые слова: ускоренное тестирование; машинное обучение

DOI: 10.14357/19922264240409

EDN: ZEMQWD

1 Введение

Среди задач тестирования технических устройств выделяется задача тестирования времени жизни), т. е. времени деградации некоторой значимой характеристики устройства (в основном определяемой термином «производительность» — подробнее см. разд. 4) до некоторого критического уровня. Если сроки службы устройства существенно превышают разумные сроки испытаний, стараются использовать AT [1]. Основной парадигмой AT в настоящее время стало так называемое *стрессовое* тестирование, когда предсказание поведения в далеком будущем пытаются получить посредством наблюдения функционирования при более сильных нагрузках, предполагая, что это ускоряет время деградации качества устройства в той же степени, что и будет иметь место при длительной эксплуатации с более умеренными нагрузками.

Что касается используемых математических моделей, задача оценки LT относится к моделям «выживаемости» (survival analysis, SA) [2], разрабатываемым и применяемым уже многие десятилетия, в том числе и для технических систем. Однако их не-

посредственное использование для высоконадежных устройств со значительным временем жизни естественным образом затруднено крайне редкой частотой отказов, что, очевидно, не позволяет собрать и использовать достаточную статистику [3]. Помимо этой принципиальной проблемы, которую так или иначе преодолевают [3], получение статистических данных для моделей SA в рамках AT затруднено при зависимости рассматриваемой характеристики от большого числа факторов, особенно при нелинейном характере их воздействия на производительность. В этом случае оценка в лабораторных условиях (indoor) влияния различных внешних факторов на скорость деградации может быть затруднена и могут потребоваться измерения в условиях реальной эксплуатации (outdoor), что делает невозможной оценку независимого влияния отдельных факторов, на чем обычно основаны методы отработки систем [1, 4].

AT-тестирование LT имеет свою специфику для прототипов устройств, производимых на ранних этапах ОКР, когда, имея лишь небольшое число экземпляров устройства, требуется оценить их потенциальное время службы, если эта характери-

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, fsergei51@gmail.com

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, VZakharov@ipiran.ru

стика считается определяющей для технико-экономического обоснования продолжения разработки. Но получение статистически значимого числа прототипов систем, базирующихся на сложных инновационных цифровых или физико-химических технологиях и зависящих от большого числа параметров и внешних факторов, может занимать много месяцев, тогда как предварительные выводы о целесообразности продолжения разработки надо делать «здесь и сейчас». При этом на ранних этапах ОКР часто отсутствует однозначное описание физических законов, лежащих в основе того или иного поведения, и часто невозможно выполнение многократных экспериментов с одним и тем же образцом. Примером служат перовскитовые солнечные батареи (perovskite solar cell, PSC) [5, 6], для которых, несмотря на имеющиеся теоретические и модельные обоснования их существенно большей производительности по сравнению с давно применяемыми панелями на кремнии и различных органических пленках [6], в настоящее время отсутствуют достаточно обоснованные физические модели, что затрудняет выбор стресс-воздействий для ускоренного тестирования.

В предлагаемой статье анализируется, насколько современные математико-статистические модели, так или иначе формирующие методологический и терминологический аппарат АТ [1], а именно: цензурирование выборок [2], теории выживаемости (SA), теории экстремальных значений (EVT) [7], позволяют получать прогнозы времени жизни проектируемых устройств в реальной эксплуатации на ранних этапах разработки/проектирования (разд. 2 и 3), предлагается эвристический способ решения задачи предсказания ЛТ для проектируемых технических устройств на ранних стадиях их разработки (разд. 4), демонстрируется его применение для оценки скорости деградации при разработке новых классов солнечных батарей (разд. 5) на примере трудностей такой оценки популярными программными инструментами машинного обучения.

2 Формализация задачи предсказания деградации

С содержательной точки зрения задача тестирования ЛТ состоит в статистической оценке значения правой точки временного интервала $[t_0, x]$, в которой зависимость производительности (или эффективности) устройства $x(t)$ в момент $t > t_0$ (конкретный пример определения производительности дан в разд. 4) «деградирует» (необязательно монотонно) до некоторого предельно допустимого порога производительности U_α , где показатель α , называемый

далее «уровень деградации», определяется как отношение значения U_α к наибольшей достижимой производительности в рабочей временной области $D \supseteq [t_0, t]$, т. е. $\alpha = U_\alpha / \max_D(x(t_\alpha))$.

Предполагаем, что «лучшее» (с точки зрения функционального назначения) достижимое значение $x(t)$ на протяжении своего времени жизни соответствует глобальному максимуму производительности на временном интервале тестирования и что любое устройство (тестируемый объект) достигает его на интервале наблюдения (см., например, рис. 1 в разд. 4). При этом на интервале наблюдения до определенного момента может происходить определенное восстановление значения $x(t)$ после некоторого периода деградации, как это, например, имеет место в перовскитовых солнечных элементах (PSC) (см. рис. 1 в разд. 4) [5, 6]. (Заметим, что, говоря о деградации, мы подразумеваем уменьшение производительности во времени. Однако рассматриваемая модель принципиально не изменится, если рассматривать деградацию производительности как возрастающую функцию, например как рост числа потерянных пакетов в телекоммуникационной сети [8, 9].)

Фактически ускоренное тестирование технических устройств связано с принятой в статистике процедурой *правого цензурирования*. Правое цензурирование происходит, когда за объектом наблюдают от начала отсчета времени t_0 до некоторого более позднего момента времени t_c , и за это время не происходит интересующего события, например деградации до уровня α , т. е. измерение (тестирование) прекращается до того, как наступает интересующее событие. Таким образом, со статистической точки зрения АТ сводится к оценке величины крайней правой точки временного интервала $[t_0, x]$ по измерениям в пределах времени $t_c < x$, причем решение задачи АТ включает также и проблему выбора t_c . Соответственно, для точной формулировки задачи АТ необходимо формализовать понятие правой конечной точки (right endpoint, REP) распределения, определяющей ЛТ, например, чтобы исключить умозрительный, но потенциально осуществимый случай $t_c > \text{ЛТ}$.

Предположим, что продолжительность жизни X некоторого объекта тестирования (солнечной батареи, времени достижения допустимой задержки пакета внутри некоторого сеанса телекоммуникационной сети и т. д.) как случайная величина имеет распределение $F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$. Тогда *правая конечная точка* (соответствующая правой границе рассмотренной выше области D), определяется как [10]

$$x_F := \sup\{x : F(x) < 1\} \leq \infty,$$

т. е. наибольшая среди точек, при которой значения случайной величины $x(t)$ могут соответствовать как «жизни», так и «смерти» изучаемой системы, т. е. с той или иной вероятностью < 1 , тогда как при любой точке *правее* все события, соответствующие вероятностному пространству, на котором определено распределение F , уже наступили ($F(x) = 1$). Отсутствие конечной точки ($x_F \rightarrow \infty$) означает отсутствие статистических процедур ее предсказания, и в этом смысле можно говорить о непредсказуемости в этом случае времени жизни.

Рассмотрим используемые в настоящее время модели оценки REP как основу вероятностных моделей деградации.

3 Вероятностные и статистические модели деградации

Пусть некоторый случайный процесс $x(t)$ рассматривается как «живой» до момента, пока он не достиг уровня деградации α в момент t_α .

В рамках подходов современной SA формальное определение величины ЛТ связано с определением «функции выживания» (survival function, называемой также Reliability function, $R(t)$) и ЛТ соответствует REP ее области определения [10]. Перефразируя [2] под рассматриваемые задачи, под функцией выживания будем понимать вероятность того, что деградация значений случайного временного ряда $x(t)$ в некоторый момент T после момента t не приведет к деградации ниже уровня α , т. е., используя терминологию SA, объект будет «жив» при $T > t$:

$$S(t) = \text{Prob}(T > t), \quad t < \alpha.$$

С этой точки зрения разработка стратегии тестирования (оценки) ЛТ состоит в оценке параметров функции $S(t)$.

Получив то или иное представление $S(t)$ (подробный обзор см., например, в [11]) и рассматривая ее как непрерывную функцию времени, прогнозируемое время жизни t_p на уровне надежности $1 - p$ можно определить [4] как решение уравнения $F(t_p) = p$, т. е. время жизни t_p выводится из уравнения $t_p = S^{-1}(1 - p)$ (квантиля), где S^{-1} — это обратная функция (называемая в теории надежности inverse reliability function, IRS) [4]. *Потенциальное* время жизни t_p — это время, в течение которого тестируемое устройство не выйдет из строя с вероятностью $1 - p$.

Однако рассмотренные решения в рамках SA-подходов сильно зависят от распределения вероятностей случайных переменных, что затрудняет

использование различных статистических процедур [11]. Поэтому более приемлемыми с практической точки зрения представляются методы EVT, ввиду того что распределения экстремумов сходятся к одному из трех известных распределений [7]. При этом, поскольку необходимо оценить вероятность выхода за рамки наибольшего (или наименьшего — в зависимости от того, как формулировать требование к качеству) наблюдения, формулировка в терминах EVT представляется естественной для поставленной задачи [10]. Существенно, что они могут быть интегрированы в обобщенном законе Generalized Extreme Value (GEV), зависящем от одного параметра, выбор которого позволяет получить каждое из указанных распределений. В терминах GEV разработаны практические алгоритмы оценки REP [10]. Однако эти законы — асимптотические и, как показывает анализ, обладают крайне медленной сходимостью к отмеченным предельным распределениям, что делает их трудноприменимыми для малых выборок, с которыми приходится иметь дело в поставленной задаче (учитывая связь GEV distributions с оценками параметров Gamma distribution [12], существенно также иметь в виду [13]). У авторов заведомо нет длинных (тысячи) записей экстремумов и/или превышений над заданным уровнем для оценки функций распределений. Поэтому покажем возможность оценки ЛТ по имеющимся записям $x(t)$ для индивидуального модуля, поскольку в рассматриваемых условиях оценки разработки происходят на ранних этапах, когда число доступных для измерения экземпляров устройств обычно не превышает нескольких экземпляров, и это затрудняет получение сколь угодно надежной статистики по образцам.

4 Быстрая оценка времени жизни для данного прототипа устройства

Рассмотрим задачу оценки времени жизни образца некоторого разрабатываемого устройства с учетом влияния большого числа трудно измеряемых внешних факторов, что затрудняет предсказание производительности в реальных условиях по имеющимся данным indoor, хотя бы и дополненным данными, полученными outdoor.

Метрики деградации часто рассматриваются как отношение двух рабочих параметров $z = x/y$ спроектированной системы, например числа полученных пакетов к числу входящих пакетов в телекоммуникационной сети, разработанной для удовлетворения определенных новых требований в зависимости от различных факторов [8], или

отношение энергии, вырабатываемой солнечным элементом (в кДж), к солнечной энергии, полученной в течение определенного интервала времени (см. ниже). Речь идет об отношении случайных величин, и существует определенная свобода выбора возможных метрик для z , например с учетом различных временных интервалов их определения (например, миллисекунды, дни или протяженности определенных сессий).

Общая проблема статистической оценки таких мер производительности заключается в том, что они, как известно, имеют распределение Коши [14]. Такие случайные величины не имеют конечного математического ожидания, что на практике означает возможность резких колебаний вычисляемых текущих (скользящих) средних при изменении интервала их оценки и, следовательно, трудности их использовать для характеристики, например, времени до достижения уровня деградации. Отсутствие конечных математического ожидания и дисперсии говорит о том, что случайный ряд с распределенными по Коши членами не является стационарным процессом в широком (слабом) смысле, поскольку скользящее среднее будет различным на разных интервалах его вычисления, что означает наличие некоторого временного тренда.

Иными словами, такая математическая модель вполне подходит для представления тренда производительности. Поэтому естественным выглядит вопрос, как представить тренд деградации по имеющимся измерениям.

Предсказание деградации по выделенному тренду. Представим производительность $z(t)$ как

$$z(t) = \tau(t) + c(t),$$

где $\tau(t)$ — трендовая составляющая; $c(t)$ — циклическая быстрая компонента, определяемая, например, изменением освещенности в течение суток солнечных электрических преобразователей или тех или иных факторов суточной цикличности трафика в телекоммуникационных сетях [9].

Для определения компонентов этой модели предлагается использовать алгоритм (фильтр) Hodrick–Prescott (HP) [9], который представляет собой частный случай сглаживающего сплайна. Алгоритм HP минимизирует разность между значением тренда в момент времени t и скользящего среднего первого порядка с центром в момент времени t . Прогнозировать время деградации T_α до уровня α предлагается с помощью выявленного тренда, обозначаемого как $HPtrend(t)$:

$$\alpha = \frac{U_{T_\alpha}}{\max_D(HPtrend(t))},$$

где α — допустимая доля падения производительности, например до 80% от максимальной ($\alpha = 0,8$); $HPtrend(t)$ — значение тренда в точке t ; D — временной интервал, на котором была выполнена оценка производительности; U_{T_α} — значение производительности при деградации до $\alpha\%$, например до 80%; T_α — соответствующее значение времени, прошедшего до деградации до уровня α без последующего роста в будущем.

Если известна математическая или алгоритмическая модель временной зависимости производительности $z(t) = G(z_0, t, A)$, где $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ — некоторый набор параметров модели; z_0 — начальная производительность, то время жизни по уровню α есть статистическая оценка крайне правого корня уравнения

$$G(z_0, t, A) - U_\alpha = 0, \tag{1}$$

$t_\alpha = \max(t_\alpha^1, \dots, t_\alpha^m)$ (если есть несколько корней $t_\alpha^1, \dots, t_\alpha^m$).

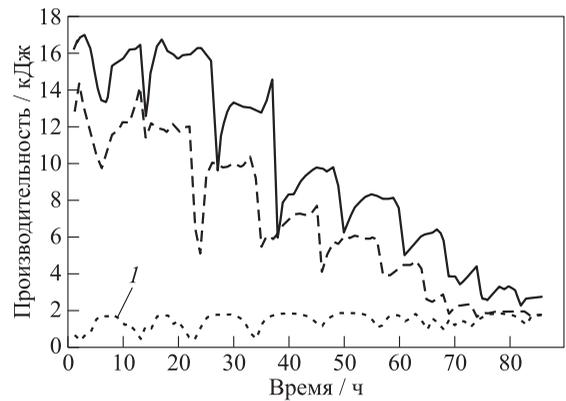


Рис. 1 Производительность outdoor (как отношение HP(h) в процентах) в светлые часы суток двух образцов PSC, изготовленных в одном и том же производственном процессе: I — энергия солнечной радиации

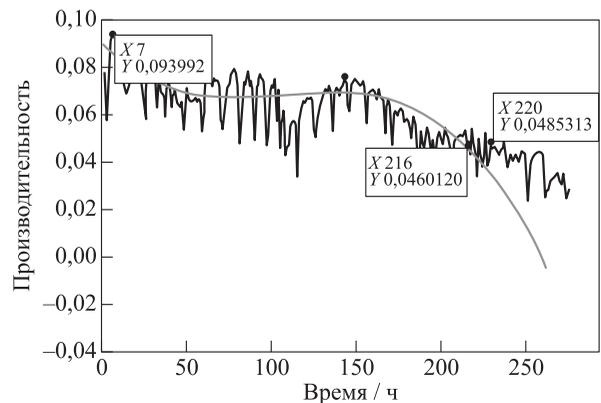


Рис. 2 Прогнозирование $T_{0,5}$ (фактическое значение — 216 ч) с помощью полинома, рассчитанного по первым 100 ч, и экстраполяции тренда (серая кривая), который соответствует 229-му часу

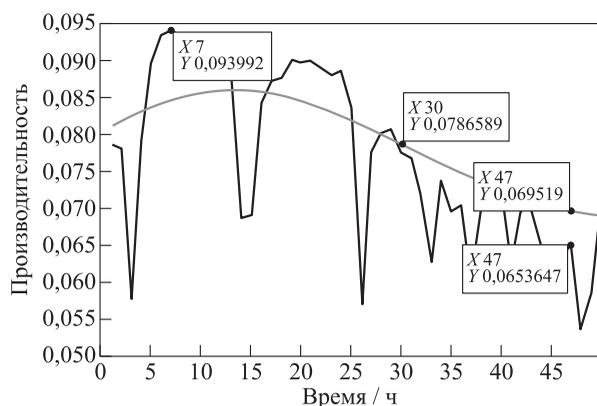


Рис. 3 Прогнозирование $T_{0,s}$ (фактическое значение — 47-й час) с помощью полинома, рассчитанного по первым 30 ч экстраполяции тренда (серая кривая)

В качестве примера покажем возможность предсказания ЛТ для PSC по результатам измерения outdoor [6]. Поясним, что паттерны, подобные паттернам производительности PSC (рис. 1–3), могут присутствовать в различных системах, прежде всего сетевых [15], поскольку часто обладают свойством самоподобия (self-similarity) [15]. Поэтому демонстрируемый ниже пример представляет интерес для существенно большей области приложений, чем PSC.

5 Пример прогноза деградации по НР-тренду

На практике для расчета рассматриваемой величины требуется выполнить представление тренда некоторым уравнением, т. е. найти некоторое аналитическое приближение $G(\cdot)$ из (1). Разумеется, для этого можно выбрать класс интерполирующих функций, от выбора которых так или иначе будет зависеть точность предсказания. Ввиду ограниченности объема статьи здесь не будем рассматривать этот вопрос, а просто продемонстрируем примеры экстраполяции НР-кривой полиномом 3-й степени и получаемые оценки времени предсказания достижения порога деградации согласно определению (1). При этом, как хорошо известно, хотя аппроксимация полиномами более высокого порядка может быть более точна в пределах известного интервала, она существенно менее надежна за его пределами.

Покажем использование предлагаемой модели для предсказания времени деградации модуля PSC, используя данные измерений из [16, 17]. Существенно, что помимо указанного наличия большого числа случайных, трудно измеряемых внешних факторов, влияющих на производительность, име-

ет место также разброс производительности выполненных по одной технологии модулей PSC. Примеры такого разброса показаны на рис. 2 в [16], на котором производительности двух PSC с одинаковым физико-химическим механизмом ведут себя совершенно по-разному. Производительность (эффективность) PSC понимается как отношение текущих значений мощности генерируемой электрической и поглощаемой солнечной энергии. При отсутствии явных физических моделей поведения можно, тем не менее, попробовать для определения модели деградации учесть характер ее *тренда* — линейный, экспоненциальный и т. д. [9]. Это, однако, зависит от свойств выбранной метрики производительности. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Вырабатываемая PSC энергия P_{out} нелинейно зависит от мощности энергии солнечного облучения P_{in} , причем получение достаточно гладких зависимостей $P_{out}(P_{in})$ затруднено ввиду сложного поведения P_{in} в течение суток. Поэтому, чтобы обеспечить совместное рассмотрение пар (P_{in}, P_{out}) (измеряемых, например в $\text{мВт}/\text{см}^2$), используют характеристику эффективности $\text{PCE} = P_{out}(t)/P_{in}(t)$ в данный момент измерения t [6]. Применяют также дневную меру производительности как отношение суммарных дневных значений выделенной электрической и поглощенной мощности солнечной энергии [5, 6], $E(P_{out})/E(P_{in})$, где $E(\cdot)$ — средняя мощность поглощенной солнечной энергии $E(P_{in})$ и преобразованной в электрическую $E(P_{out})$ в сутки (вычисляемой, например, по ежеминутным наблюдениям).

Однако число членов временного ряда, описывающего временную зависимость P_{out} , ограничено числом дней и оказывается недостаточным для хорошей статистической оценки. Поэтому наряду с дневной производительностью рассматривается производительность как доля энергии, суммарно выделяемой в течение часа (измеряемой в $\text{кДж}/\text{см}^2$), преобразуемая в электрическую — hourly integral performance (HIP(h)), где $h = 1, 2, \dots$ — число часов с начала наблюдения. Благодаря почасовым отношениям существенно (в 24 раза) увеличивается размер выборок по сравнению с дневной оценкой производительности.

Однако на определение модели тренда существенно влияет факт трудно интерпретируемых отличий в характеристиках производительности в одной и той же партии производимых образцов (см. рис. 1).

Поскольку полиномиальная кривая тренда представляет собой существенно более гладкий и сильно коррелированный временной ряд по сравнению с временным рядом реальных измерений

производительности НР, предсказание ее удаленных точек по известным предыдущим значениям ожидается существенно более точным.

Экстраполяцию тренда модуля РС выполняем следующим образом:

- оцениваем коэффициенты экстраполирующего полинома

$$y(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3,$$

используя минимум среднеквадратичной ошибки как критерий точности экстраполяции по выполненным измерениям НР на временном обучающем интервале $LI = (t_1, \dots, t_H)$ (обучающая последовательность), где H — число единиц времени на интервале обучения (t_0, t_H) , t_0 — время начала функционирования данного модуля РС, с которого отсчитываем начало деградации характеристик качества;

- экстраполируем (предсказываем) значение полинома $y(t)$, $t \in TI$ на тестовый интервал TI времен вне обучающего интервала и, согласно условию (1), ищем момент деградации до уровня α как значение времени, ближайшего к самому правому корню уравнения

$$y(t) - \alpha \text{НР}(t^M) = 0,$$

где t^M — момент времени, в который значения производительности НР принимают максимальное значение.

Таким образом, предсказание значений НР на интервале времен вне обучающего интервала выполняется вычислением значений полинома $y(t)$ для соответствующих значений t , а время достижения порогового значения определяется согласно (1).

На рис. 2 погрешность определения времени ближайшей к 50%-ной деградации точки (216-й час), определяемой экстраполяцией полинома, полученного по 100-часовому наблюдению относительно фактической (измеренной) ближайшей к 50%-ной деградации точке (229-й час) составляет 6%. (Точность отображения значений НР на рис. 2 и 3 и, соответственно, их отклонения от анализируемых значений $\alpha \text{НР}$ определяется свойствами Matlab, используемого в данной работе.)

На рис. 3 приведены результаты предсказания по результатам измерений по существенно меньшим интервалам времени (30 ч).

Как видно из приведенных данных, чем меньше интервал обучения, тем меньше горизонт точного прогноза, что согласуется с известной статистической практикой. При этом ошибка определения времени деградации практически нулевая.

Сравнение с результатом предсказания средствами машинного обучения. В [17] получена модель предсказания времени деградации РС с использованием в качестве инструмента ML функции KRR (Kernel Ridge Regression) из Python sklearn library. Результаты показывают, что реально хорошие предсказания outdoor по результатам indoor можно получить, если indoor-тесты при выбранных стресс-факторах (только освещенность и температура) приводят к тому же паттерну деградации тестируемого модуля, что и его поведение в естественных условиях (outdoor), т.е. для данного модуля взаимодействие (коррелированность) используемых стресс-факторов и значимость остальных в indoor и outdoor близки. Однако, когда обучающему алгоритму были представлены тестовые данные outdoor, полученные в пустыне Негев, Израиль, по результатам тренировки алгоритма KRR на данных, полученных в Барселоне [17], где такие значимые факторы, как спектральный состав солнечного света, влажность, углы падения солнечных лучей, имеют существенные отличия, прогноз оказался менее точным, что видно по кривым на рис. 3 в [17]. Видно, что, в отличие от примеров, представленных на рис. 2 и 3, даже на небольших временных интервалах ошибка предсказания может быть велика (например, интервал 20–30 ч). Таким образом, необходимо переобучение используемого инструмента предсказания для региона Негев с использованием новых измерений outdoor, что требует перенастройки инструментов предсказания и привлечения высококвалифицированного специалиста в области ML. Заметим, что целью работы [17] ставилось изучение тонких физических явлений, понимание которых должно помочь достигнуть соответствующих характеристик производительности. При этом исключительно важным остается время использования весьма дорогостоящего оборудования для измерений. При применении предлагаемого эвристического метода предсказания фактически сокращается длительность тестирования на предсказываемый с приемлемой погрешностью временной интервал, что могло бы существенно ускорить и удешевить тестирование и отбраковку приемлемых/неприемлемых РС-модулей.

6 Обсуждение и заключение

Проблема «начального этапа» представляет собой самостоятельную проблему в общей теории проектирования технических систем [18]. В статье рассмотрена возможность предсказания времени жизни систем, для которых нет явных физических моделей поведения, которые бы объясняли и интегрировали влияние различных значимых внут-

ренних и внешних факторов функционирования, и нет достаточного числа образцов и измерений для каждого из них, вследствие чего применение стандартных статистических методов предсказания не дает хороших результатов. Эти же обстоятельства приводят к значительным затратам при использовании ML и при этом обуславливают значительную неопределенность предсказания. Поэтому интерес представляют эвристические методы, которые позволяли бы делать быстрое и недорогое предсказание на сравнительно небольшие временные горизонты для весьма частных задач, но по которым можно было бы произвести как быструю отбраковку некачественных образцов, наличие которых тем более вероятно, чем больше указанный разброс при производстве, так и изучить влияние на время деградации тех или иных факторов, минимизируя при этом затраты на используемое оборудование. Авторы уверены, что этому требованию отвечает предложенный способ экспресс-предсказания, основанный на оценке тренда методом НР-фильтра.

Заметим, что проблема учета влияния многих факторов на характеристики систем остается исключительно сложной задачей современной науки о данных (Data Science, Big Data). В частности, имеет большое значение задача контроля связей между факторами деградации аналогично, например, рассматриваемой в [19] задаче разбиения периода наблюдения на интервалы, в течение которых может проявиться корреляция факторов. Этот аспект проблемы предсказания времени деградации предполагается исследовать на следующем этапе. При этом для более полного решения вопроса о выборе метода предсказания времени рассматриваемых технических систем представляет интерес формальное описание соответствующих процедур, основанных на математическом и компьютерном моделировании [20].

Литература

1. Escobar L. A., Meeker W. Q. A review of accelerated test models // *Stat. Sci.*, 2006. Vol. 21. No. 4. P. 552–577. doi: 10.1214/088342306000000321.
2. Klein J., Moeschberger M. *Survival analysis: Techniques for censored and truncated data*. — 2nd ed. — New York, NY, USA: Springer, 2003. 538 p. doi: 10.1007/b97377.
3. Kalbfleisch J. D., Prentice R. L. *The statistical analysis of failure time data*. — 2nd ed. — Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2002. 462 p.
4. Andrzejczak K., Bukowski L. A method for estimating the probability distribution of the lifetime for new technical equipment based on expert judgement // *Eksploat. Niezawodn.*, 2021. Vol. 23. No. 4. P. 757–769. doi: 10.17531/ein.2021.4.18.
5. Panidi J., Georgiadou D., Schoetz T., Prodromakis T. Advances in organic and perovskite photovoltaics enabling a Greener Internet of Things // *Adv. Funct. Mater.*, 2022. Vol. 32. No. 23. Art. 2200694. 26 p. doi: 10.1002/adfm.202200694.
6. Burlingame Q., Loo Yueh-Lin, Katz E. A. Accelerated ageing of organic and perovskite photovoltaics // *Nature Energy*, 2023. Vol. 8. No. 12. P. 1300–1302. doi: 10.1038/s41560-023-01330-8.
7. Ding D., Zhang M., Pan X., Yang M., He X. Modeling extreme events in time series prediction // 25th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 2019. P. 1114–1122. doi: 10.1145/3292500.3330896.
8. Chuprov L., Reznik A., Shetty O. How degrading network conditions influence machine learning end systems performance? // *Conference on Computer Communications Workshops Proceedings*. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2022. Art. 9798388. 6 p. doi: 10.1109/INFOCOMWKSHP54753.2022.9798388.
9. Wen Yi, Zeng B. A simple nonlinear filter for economic time series analysis // *Econ. Lett.*, 1999. Vol. 64. No. 2. P. 151–160. doi: 10.1016/S0165-1765(99)00089-0.
10. Einmahl J., Einmahl J. H., Haan L. Limits to human life span through extreme value theory // *American Statistical Association*, 2019. Vol. 114. P. 1075–1080. doi: 10.1080/01621459.2018.1537912.
11. Xiao-Sheng S., Wang W., Hu C.-H., Zhou D.-H. Remaining useful life estimation — a review on the statistical data driven approaches // *Eur. J. Oper. Res.*, 2011. Vol. 213. No. 1. P. 1–14. doi: 10.1016/j.ejor.2010.11.018.
12. Montfort M., Putten B. A comment on modelling extremes: Links between multi-component extreme value and general extreme value distributions // *J. Hydrol.*, 2002. Vol. 41. No. 2. P. 197–202.
13. Кудрявцев А. А., Шестаков О. В. Метод оценивания параметров гамма-экспоненциального распределения по выборке со слабо зависимыми компонентами // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 58–63. doi: 10.14357/19922264230308. EDN: PEXTVK.
14. Gao J., Wu F., Yasen Y., Song W., Ren L. Generalized Cauchy process based on heavy-tailed distribution and grey relational analysis for reliability predicting of distribution systems // *MBE*, 2022. Vol. 19. No. 7. P. 6620–6637. doi: 10.3934/mbe.202231.
15. Willinger W., Taqqu M., Sherman R., Wilson D. Self-similarity through high-variability: statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level // *IEEE ACM T. Network.*, 1997. Vol. 5. No. 1. P. 71–86. doi: 10.1109/90.554723.
16. Sohrabpoor H., Puccettib G., Gorji N. Modeling the decay and recovery of perovskite solar cells // *RSC Adv.*, 2016. Vol. 6. P. 49328–49334. doi: 10.1039/C6RA06635F.
17. Kouroudis I., Tanko K., Karimipour M., Ben Ali A., Kumar D., Sudhakar V., Gupta R., Visoly-Fisher I., Lira-Cantu M., Gagliardi A. Artificial intelligence-based, wavelet-aided prediction of long-term outdoor // *ACS En-*

- ergy Letters, 2024. Vol. 9. P. 1581–1586. doi: 10.1021/acseenergylett.4c00328.
18. *Вышинский Л. Л., Флеров Ю. А.* Модели синтеза компоновочной схемы в задаче формирования образа самолета // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 61–70. doi: 10.14357/19922264240109. EDN: DSPGKV.
 19. *Грушо А. А., Забежайло М. И., Смирнов Д. В., Тимошина Е. Е.* О вероятностных оценках достоверности эмпирических выводов // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 4. С. 3–8. doi: 10.14357/19922264200401. EDN: DOQKNU.
 20. *Ковалёв С. П.* Методы теории категорий в цифровом проектировании гетерогенных киберфизических систем // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 1. С. 23–29. doi: 10.14357/19922264210104. EDN: YZVCME.

Поступила в редакцию 25.08.24

ON THE PROBLEM OF PREDICTING DEGRADATION IN TECHNICAL SYSTEMS

S. L. Frenkel and V. N. Zakharov

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The problem of predicting the degradation rate of technical system characteristics (life time, LT) is usually solved within the framework of the accelerating testing (AT) paradigm under stress effects. However, statistical methods for evaluating the results may be ineffective for AT when the system performance depends on a very large number of factors. Accelerating testing also has its own specifics at the early stages of experimental design work when, having only a small number of device copies, it is necessary to estimate their potential service life to assess the feasibility of continuing the development. The article analyzes the extent to which modern mathematical and statistical models that form the AT methodology, namely, survival analysis, extreme value theory, allow obtaining forecasts of the service life of the designed devices under real operating conditions at the early stages of development/design. The authors indicate the problems of solving the LT forecasting problem using known machine learning tools, consider and propose a heuristic method for solving the LT forecasting problem in real conditions. As an example, the authors consider the prediction of performance degradation for new solar cell designs whose performance tends to degrade. This heuristic refers to the extraction of the Hondrick–Prescott trend from a nonstationary time series that represents the degradation of a quality characteristic. The applicability of the proposed heuristic to predict degradation in other technical applications, particularly, in computer networks, is discussed and justified.

Keywords: accelerating testing; machine learning

DOI: 10.14357/19922264240409

EDN: ZEMQWD

References

1. Escobar, L. A., and W. Q. Meeker. 2006. A review of accelerated test models. *Stat. Sci.* 21(4):552–577. doi: 10.1214/088342306000000321.
2. Klein, J. P., and M. L. Moeschberger. 2003. *Survival analysis: Techniques for censored and truncated data*. 2nd ed. New York, NY: Springer-Verlag. 538 p. doi: 10.1007/b97377.
3. Kalbfleisch, J. D., and R. L. Prentice. 2002. *The statistical analysis of failure time data*. 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley. 462 p.
4. Andrzejczak, K., and L. Bukowski. 2021. A method for estimating the probability distribution of the lifetime for new technical equipment based on expert judgement. *Ekspluat. Niezawodn.* 23(4):757–769. doi: 10.17531/ein.2021.4.18.
5. Panidi, J., D. Georgiadou, T. Schoetz, and T. Prodromakis. 2022. Advances in organic and perovskite photovoltaics enabling a greener internet of things. *Adv. Funct. Mater.* 32(23):2200694. 26 p. doi: 10.1002/adfm.202200694.
6. Burlingame, Q., Yueh-Lin Loo, and E. A. Katz. 2023. Accelerated ageing of organic and perovskite photovoltaics. *Nature Energy* 8(12):1300–1302. doi: 10.1038/s41560-023-01330-8.
7. Ding, D., M. Zhang, X. Pan, M. Yang, and X. He. 2019. Modeling extreme events in time series prediction. *25th ACM SIGKDD Conference (International) on Knowledge Discovery and Data Mining Proceedings*. New York, NY: ACM. 1114–1122. doi: 10.1145/3292500.3330896.
8. Chuprov, L., A. Reznik, and O. Shetty. 2022. How degrading network conditions influence machine learning end systems performance? *Conference on Computer Communications Workshops Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. Art. 9798388. 6 p. doi: 10.1109/INFOCOMWKSHPS54753.2022.9798388.

9. Wen, Yi, and B. Zeng. 1999. A simple nonlinear filter for economic time series analysis. *Econ. Lett.* 64(2):151–160. doi: 10.1016/S0165-1765(99)00089-0.
10. Einmahl, J., J. H. Einmahl, and L. Haan. 2019. Limits to human life span through extreme value theory. *American Statistical Association* 114(527):1075–1080. doi: 10.1080/01621459.2018.1537912.
11. Xiao-Sheng, S., W. Wang, C.-H. Hu, and D.-H. Zhou. 2011. Remaining useful life estimation — a review on the statistical data driven approaches. *Eur. J. Oper. Res.* 213(1):1–14. doi: 10.1016/j.ejor.2010.11.018.
12. Montfort, M., and B. Putten. 2002. A comment on modelling extremes: Links between multi-component extreme value and general extreme value distributions. *J. Hydrol.* 41(2):197–202.
13. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2023. Metod otsenivaniya parametrov gamma-eksponentsial'nogo raspredeleniya po vyborke so slabo zavisimymi komponentami [A method for estimating parameters of the gamma-exponential distribution from a sample with weakly dependent components]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):58–63. doi: 10.14357/19922264230308. EDN: PEXTVK.
14. Gao, J., F. Wu, Y. Yasen, W. Song, and L. Ren. 2022. Generalized Cauchy process based on heavy-tailed distribution and grey relational analysis for reliability predicting of distribution systems. *MBE* 19(7):6620–6637. doi: 10.3934/mbe.202231.
15. Willinger, W., M. Taqqu, R. Sherman, and D. Wilson. 1997. Self-similarity through high-variability: Statistical analysis of ethernet LAN traffic at the source level. *IEEE ACM T. Network.* 5(1):71–86. doi: 10.1109/90.554723.
16. Sohrabpoor, H., G. Puccettib, and N. Gorji. 2016. Modeling the decay and recovery of perovskite solar cells. *RSC Adv.* 6:49328–49334. doi: 10.1039/C6RA06635F.
17. Kouroudis, I., K. Tanko, M. Karimipour, A. Ben Ali, D. Kumar, V. Sudhakar, R. Gupta, I. Visoly-Fisher, M. Lira-Cantu, and A. Gagliardi. 2024. Artificial intelligence-based, wavelet-aided prediction of long-term outdoor. *ACS Energy Letters* 9(4):1581–1586. doi: 10.1021/acsenenergylett.4c00328.
18. Vyshinsky, L. L., and Yu. A. Flerov. 2024. Modeli sin-teza komponovochnoy skhemy v zadache formirovaniya obraza samoleta [Synthesis models of layout scheme in the task of forming an aircraft image]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):61–70. doi: 10.14357/19922264240109. EDN: DSPGKV.
19. Grusho, A. A., M. I. Zabezhailo, D. V. Smirnov, and E. E. Timonina. 2020. O veroyatnostnykh otsenkakh dostovernosti empiricheskikh vyvodov [On probabilistic estimates of the validity of empirical conclusions]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(4):3–8. doi: 10.14357/19922264200401. EDN: DOQKNU.
20. Kovalyov, S. P. 2021. Metody teorii kategoriy v tsifrovom proektirovanii geterogennykh kiberfizicheskikh sistem [Methods of the category theory in digital design of heterogeneous cyber-physical systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(1):23–29. doi: 10.14357/19922264210104. EDN: YZVCME.

Received August 25, 2024

Contributors

Frenkel Sergey L. (b. 1951) — Candidate of Science (PhD) in technology, associate professor, senior scientist, Federal Research Center “Computer Sciences and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; fsergei51@gmail.com

Zakharov Victor N. (b. 1948) — Doctor of Science in technology, associate professor; scientific secretary, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; vzakharov@ipiran.ru

НЕЙРОСЕТЕВОЕ КВАДРОДЕРЕВО И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ СЕГМЕНТИРОВАНИЯ СПУТНИКОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ*

А. М. Достовалова¹

Аннотация: Предложена ансамблевая нейросетевая архитектура, использующая модель квадродерева (КД) для решения задачи сегментации изображений в условиях недостатка обучающих данных. Нейросетевое КД (НКД) состоит из сети-сегментатора, формирующего признаки пикселей, и графово-сверточной сети со специальным блоком обрезки ветвей, устанавливающей между пикселями изображения пространственно-иерархические связи. Разработанная модель была протестирована на нескольких радиолокационных (РЛ) снимках земной поверхности, различных как по типам поверхности, так и по характеристикам радиолокаторов (Sentinel 1, ESAR, HRSID). Проведено сравнение результатов обработки снимков НКД и обычным КД, использующим общую сеть-сегментатор типа U-Net. Нейросетевое КД продемонстрировало более высокие способности к распознаванию малых объектов в сравнении с обычным КД. Прирост значений метрики Recall для таких классов у НКД относительно обычного КД составил от 2,13% до 11,63%.

Ключевые слова: квадродерево; графовые нейронные сети; радиолокационные изображения; обнаружение малых объектов

DOI: 10.14357/19922264240410

EDN: LCGQQC

1 Введение

Спутниковые изображения нередко становятся основным источником данных для решения прикладных задач мониторинга состояния земной поверхности. Для выделения на спутниковых снимках участков интереса популярным стало использование нейронных сетей (НС), решающих эту задачу как задачу сегментирования. Сегментировать снимок означает определить для каждого пикселя s наиболее вероятную метку класса x из набора X :

$$x_s = \arg \max_{x \in X} \mathbb{P}(s | x).$$

Нейронные сети и методы машинного обучения применяют для сегментирования спутниковых данных разной природы: как оптических снимков [1], так и радиолокационных [2]. Развитие методов обработки последних вызывает особый интерес, поскольку РЛ данные, в отличие от оптических, могут быть получены вне зависимости от времени суток и погодных условий. Интерес представляет развитие как общих методов сегментирования, так и специализированных, настроенных на выделение определенных объектов — дорог [3], береговой линии побережья [4] и др.

Главное ограничение практического применения НС заключается в отсутствии достаточного количества размеченных обучающих данных. Свой-

ства спутниковых снимков сильно зависят от географии и объектов съемки, а также свойств сенсора, например его пространственного разрешения. На практике нередко возникает задача обработки набора снимков интересующей области, состоящего всего из одного или нескольких неразмеченных изображений со специфическими отражающими свойствами [5]. Такая постановка задачи обработки спутниковых снимков соответствует направлению обучения на ограниченных примерах (*англ.* *few-shot learning* [6]). Один из подходов в рамках этого направления называется физическим информированием сети [7]. Он состоит в использовании при обучении НС представлений данных их физической моделью.

Альтернативой физическим могут стать вероятностные модели данных [8–11], особенно для случаев, когда вероятностные представления развиты [12, 13], а физические — сложны или вовсе не существуют. Вероятностной моделью изображения, описывающей связи между пикселями в разных разрешениях, является случайное поле, имеющее структуру КД. Эффективность использования этой модели была продемонстрирована в работах [14–16], развитием ее стала НС-реализация. Однако существующие реализации КД используются только в специфических подзадачах — оптимизации вычислений в свертках [17], токенизации изображения [18, 19] или реализации многомасштабного

* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

¹ Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук, adostovalova@frccsc.ru

внимания [20, 21]. Кроме того, они обычно используют менее явные, чем графовые, сверточные представления пространственных связей [22].

В работе предложена архитектура НКД, реализующего структуру КД на основе графовых представлений. Был использован специальный блок обрезки ветвей для повышения эффективности учета связей между пикселями в разных разрешениях. С помощью НКД была проведена многоклассовая сегментация четырех различных РЛ снимков в условиях недостатка обучающих данных и выполнено сравнение с результатами обработки обычным КД.

2 Архитектура нейросетевого квадродерева

Квадродеревом называется графовая структура в виде дерева с четырьмя потомками у каждой вершины (за исключением нижнего слоя). Его можно представить в виде пирамиды изображений S_0, \dots, S_n одного и того же участка поверхности, снятой в разных разрешениях. Каждый пиксель $s \in S_l$ имеет предка $s^- \in S_{l-1}$, четырех потомков $s^+ \in S_{l+1}$ и множество предшественников $\{r \in S_l, r \preceq s\}$ [14]. В работе [15] был предложен подход к повышению точности обработки изображений, изначально сегментированных НС, за счет постобработки таким КД. Этот подход состоит из

трех этапов: помимо начального сегментирования и постобработки необходим дополнительный этап получения признаков для верхних слоев дерева — за счет сегментирования снимков меньшего разрешения [16], ансамблирования сегментатора с другой архитектурой или дополнительной обработки выходов сегментатора каким-либо методом классификации (в [15] — случайный лес). Кроме того, КД не обучается в процессе обработки — значения переходных вероятностей задаются из эмпирических соображений.

Нейросетевое КД устраняет указанные недостатки реализации модели. Архитектура НКД состоит из ансамбля кодировщика, блока графовых сверток [23] и классификатора (рис. 1), повышающих точность предсказаний первой сети [24]. Кодировщик (упрощенная U-Net с областью обработки $N \times N$) формирует в разных пространственных разрешениях признаки пикселей изображения, которые приводятся свертками 1×1 к одинаковому числу каналов K и объединяются в вектор размерности $K \times N_{1-4}$, $N_{1-4} = N^2 + N^2/2 + N^2/4 + N^2/8$.

Графово-сверточная сеть состоит из трех сверток [23] (по аналогии с алгоритмом обработки обычным КД из [14]), получающих на вход вектор размерности $H_i \times N_{1-4}$, $i = 0, 1, 2$, $H_0 = K$, слоя дропаута с вероятностью прореживания d_prob и блока обрезки ветвей. Величины $H_1 = H_2$ по аналогии с обычным квадродеревом, а H_3 равняется числу классов на снимке.

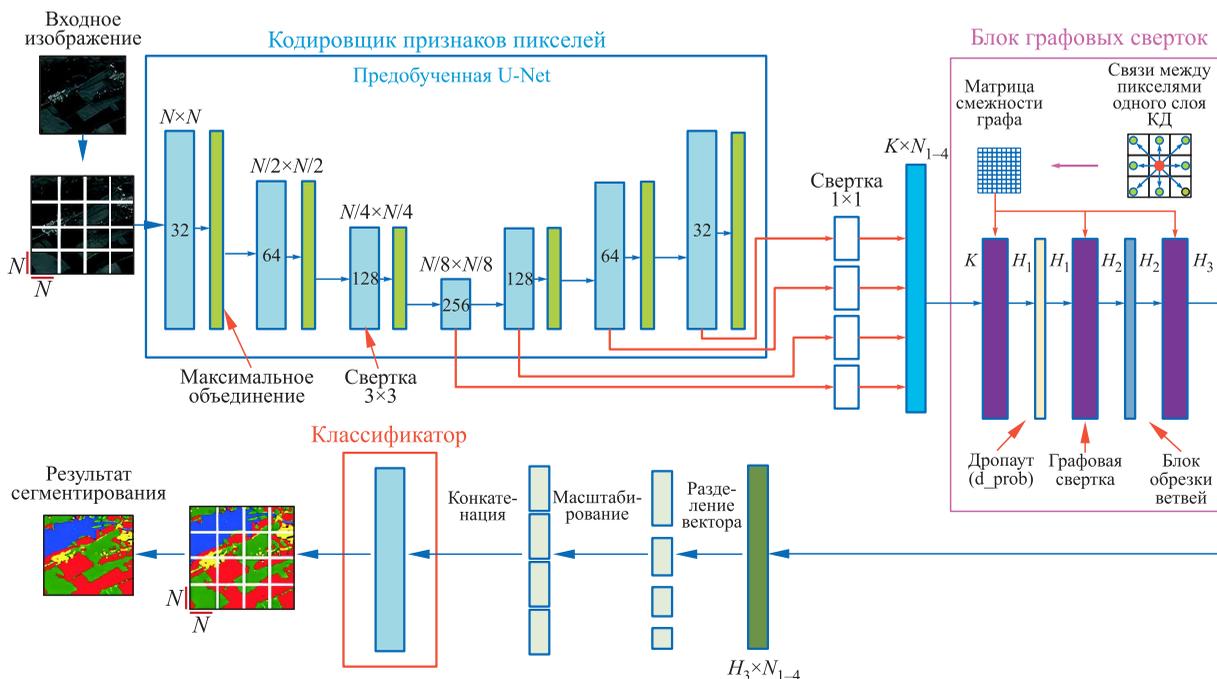


Рис. 1 Архитектура НКД

Блок обрезки ветвей используется для выявления и усиления сходства пикселей в соседних слоях дерева. Этот структурный элемент продолжает идею, описанную в работе [16], в которой для повышения точности сегментирования однородных участков снимков характеристики нижележащих слоев принимались равными характеристикам вышележащих слоев при достаточном уровне сходства между ними, определяемым заданным порогом. В этой работе применяется более гибкий подход: новые значения характеристик элементов нижнего слоя вычисляются как среднее старых значений с характеристиками вышележащего слоя, умноженных на коэффициент сходства p (q — пороговое значение значимости коэффициента сходства, лучшие по точности результаты были получены при $q = 0,3$):

$$p = 1 - \frac{\text{ReLU}(\text{softmax}(((S_l - \text{Upsample}(S_{l-1}))^2)) - q)}{1 - q}.$$

Выходной вектор графовой сети разделяется на подвекторы, каждый из которых соответствует одному из слоев квадродревца: первый вектор содержал N^2 элементов, второй $N^2/2$ и т. д. Эти векторы

приводятся к размерности N^2 , конкатенируются и уже потом обрабатываются классификатором, состоящим из слоя двумерной свертки.

3 Обработка изображений нейросетевым квадродревцом

Для тестирования НКД был составлен набор из четырех РЛ-снимков (рис. 2). Были использованы данные радиолокатора спутника Sentinel 1 [25] (разрешение порядка 20 м), авиационного радиолокатора ESAR [26] (разрешение около 7 м), а также снимок из набора HRSID [27] (разрешение 0,5–3 м). Типичные размеры исследуемых снимков — от 800×800 до 3000×3000 пикселей. Изображения были трехканальными, в градациях серого цвета — в качестве данных о поверхности съемки использовались значения амплитуды отраженного сигнала без учета его поляризации.

Снимки были или неразмеченными (Sentinel 1, ESAR), или частично размеченными (набор HRSID). При ручной разметке формировалось изображение-маска снимка, которая использовалась для проведения оценки точности сегментирования. Всего выделены 6 типов встречающихся на

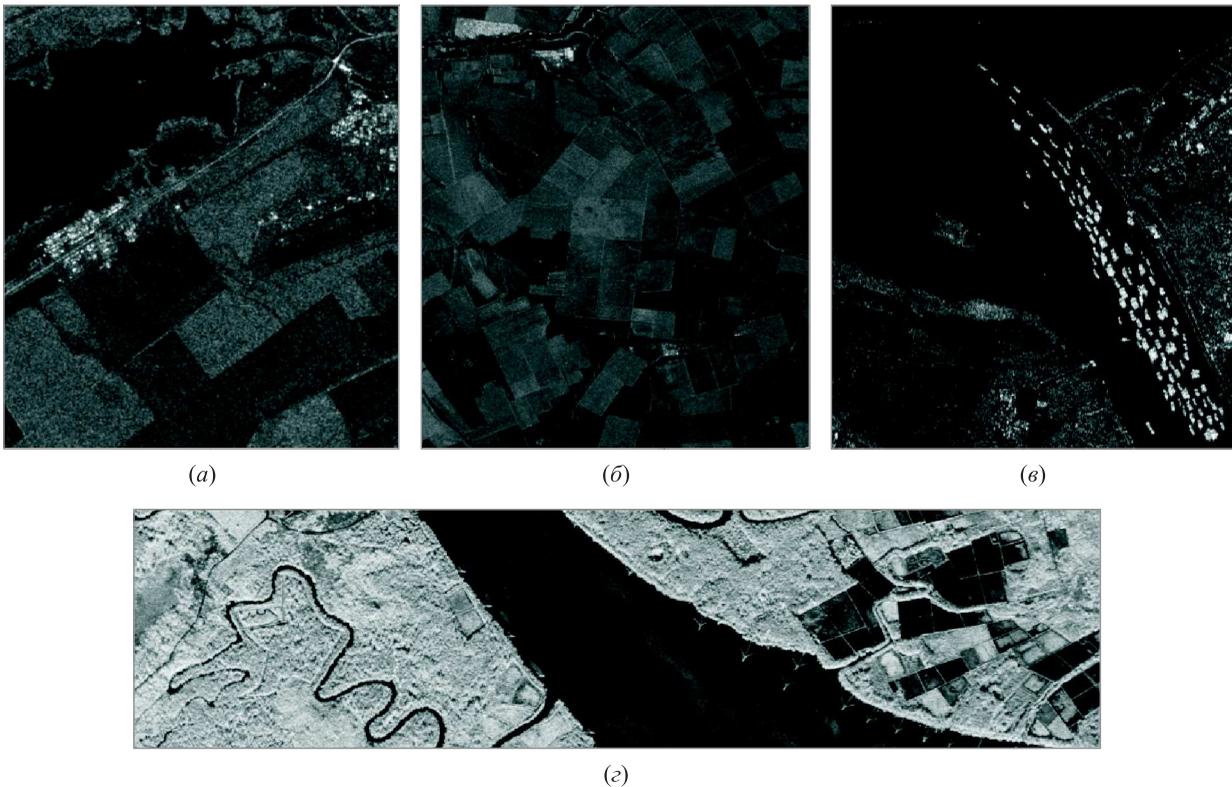


Рис. 2 Сегментируемые изображения: (а) и (б) Sentinel 1; (в) HRSID; (г) ESAR

изображениях поверхностей: водная гладь; обрабатываемые поля; необрабатываемые земли; лес; поселения; корабли.

Снимки сегментировались патчами: для этого каждое изображение разбивалось на патчи заданного размера, часть из которых использовалась только для обучения сети, а другая часть — для тестирования метода. Наборы для тестирования и обучения не пересекались. Для формирования обучающего набора на исходном изображении вручную выделялись небольшие участки, соответствующие разным типам поверхности. Все патчи изображения, попавшие в выделенные области, были отнесены к обучающему множеству, а непопавшие — к тестовому. При этом число пикселей, попавших в выделенные области, не превосходило и 7% от общего числа размеченных пикселей изображения. Длина и ширина каждой такой области составляла порядка 50–100 пикселей, чтобы в обучающем наборе присутствовали все классы. Поэтому размер патчей, которыми сегментировалось изображение, составлял 16×16 пикселей. Размер обучающего набора после аугментации (поворот на случайный угол и сдвиг) составлял от 2000 до 6000 элементов.

Для оценки точности сегментирования использовались метрики Precision (Prec) и Recall (Rec), вычисляемые по формулам

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP};$$

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP + FN}$$

для каждого класса по отдельности, и Recall full и Precision full для всех классов вместе. Значения

метрик зависят от значений TP — числа пикселей, верно классифицированных принадлежащими к рассматриваемому классу, FP — числа пикселей, неверно отнесенных к рассматриваемому классу, и FN — числа пикселей класса, классифицированных неверно. Определение числа TP, FP и FN пикселей проводилось при попиксельном сравнении сегментированного изображения и его маски, из которой были удалены все области, на которых сеть обучалась. Совместное использование двух метрик позволяло оценить точность сегментирования изображения в случае несбалансированных классов.

Обучение U-Net занимало 100 эпох, потом веса этой сети замораживались и выходы ее слоев использовались для обработки обычным КД или обучения НКД. Параметры K (диапазон изменения — 32 или 100 элементов), H_1 (11–15) и d_prob (0,2–0,5) служили гиперпараметрами сети, выбор лучшей комбинации параметров осуществлялся методом Grid Search [28]. В работе приведены лучшие по значениям Recall full (далее — общей точности) результаты сегментирования каждого снимка, полученные обычным КД или НКД, а также точности обработки U-Net и КД второго типа.

3.1 Набор данных Sentinel 1

Рисунок 2, *a* включает в себя водную гладь (класс 1), светлые поля (класс 2), поселения и дороги (класс 3) и темные поля (класс 4). Максимальное значение метрики Recall full получено с использованием обычного КД (рис. 3). В табл. 1 представлены оценки точности для U-Net, обычного КД и НКД

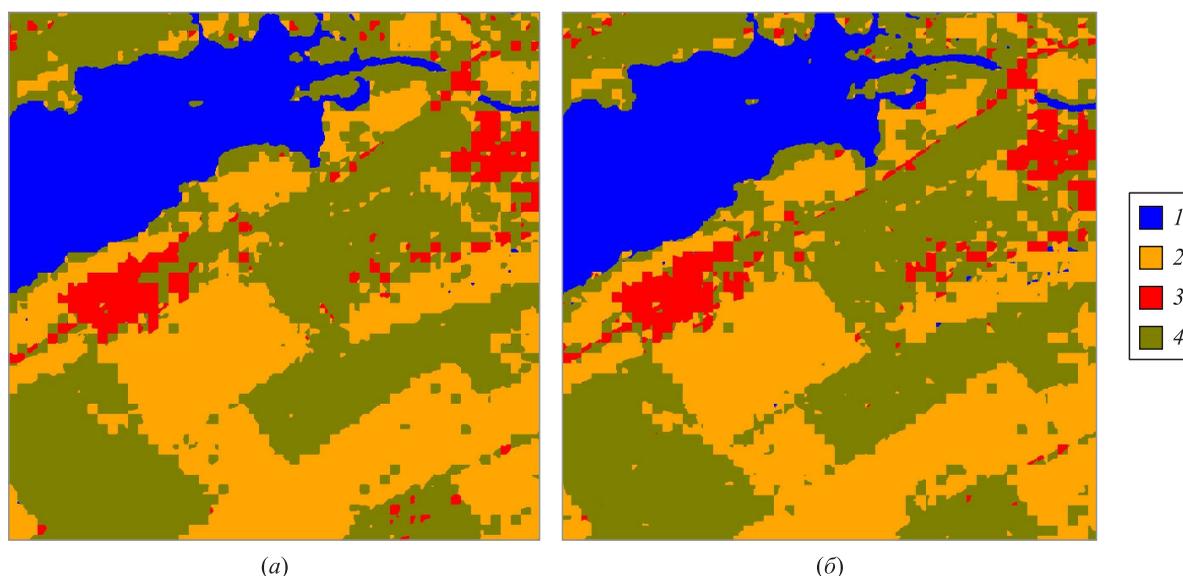


Рис. 3 Результаты сегментирования изображения рис. 2, *a*: (а) обычное КД; (б) НКД; 1–4 — классы 1–4

Таблица 1 Точность сегментирования (в %) снимка рис. 2, а (Sentinel 1)

Метод	Класс 1		Класс 2		Класс 3		Класс 4		Recall	Precision
	Rec	Prec	Rec	Prec	Rec	Prec	Rec	Prec	full	full
U-Net	98,17	98,96	86,10	92,54	80,06	82,89	93,42	85,91	91,25	90,81
Обычное КД	98,10	98,95	86,52	93,32	80,81	84,13	94,15	86,25	91,69	91,25
Нейросетевое КД	98,38	98,69	85,47	92,93	82,94	80,15	93,82	86,39	91,36	90,92

Таблица 2 Точность сегментирования (в %) снимка рис. 2, б (Sentinel 1)

Метод	Класс 1		Класс 2		Класс 3		Класс 4		Recall	Precision
	Rec	Prec	Rec	Prec	Rec	Prec	Rec	Prec	full	full
U-Net	82,93	69,83	79,91	87,62	0,0	0,0	0,0	0,0	79,45	79,45
Обычное КД	82,55	70,72	80,91	87,57	0,0	0,0	0,0	0,0	79,89	79,95
Нейросетевое КД	80,37	73,43	81,75	87,03	81,61	69,01	67,29	92,60	81,08	81,08

($K = 100$, $H_1 = 11$ и $d_{\text{prob}} = 0,2$) — максимальные для каждого класса выделены жирным шрифтом. Рисунок 2, б включает необрабатываемые земли (класс 1), обрабатываемые поля (класс 2), реки (класс 3) и поселения (класс 4). Максимальное значение метрики Recall full демонстрирует НКД ($K = 32$, $H_1 = 11$ и $d_{\text{prob}} = 0,2$). В табл. 2 приведены оценки точности для U-Net, обычного КД и НКД.

Приращения точности для классов крупных объектов (классы 1, 2 и 4 первого и классы 1 и 2 второго изображений) у трех методов обработки двух изображений сопоставимы. Разница значений метрик не превосходит 1,84%. При этом для классов малых объектов НКД демонстрирует превосходящие результаты. На втором изображении U-Net или КД теряют классы 3 и 4, а НКД — сегментирует их с высокой точностью. При обработке НКД первого изображения можно отметить более высокое качество восстановления дороги между поселениями, что отражено для соответствующего класса 3 максимальным приращением Recall на 2,88%. Таким образом, НКД для изображений Sentinel 1 демонстрирует лучшие по качеству и точности результаты, особенно при обработке малых объектов.

3.2 Набор данных HRSID

Рисунок 2, в изображает водную поверхность (класс 1), поселения (класс 2), поля (класс 3), необ-

рабатываемые земли (класс 4) и корабли (класс 5). Максимальное значение метрики Recall full демонстрирует НКД ($K = 32$, $H_1 = 11$ и $d_{\text{prob}} = 0,2$). В табл. 3 приведены оценки точности для U-Net, обычного КД и НКД. Обработка изображения с помощью НКД увеличивает Recall full на 0,78%–1,65% в сравнении с результатами U-Net, а обработка с помощью обычного КД — на 0,12%–0,3%. Для классов 1, 3 и 4, соответствующих крупным объектам, результаты обработки КД и НКД практически идентичны: разница значений метрик не превосходит 1,0%. Однако для классов 2 и 5, соответствующих малым объектам, НКД демонстрирует прирост относительно результатов U-Net на 3,98–10,87% по Recall и 2,47–10,32% по Precision, в то время как при обработке КД из-за искажения формы объектов даже наблюдается снижение точности. Уменьшение Recall составляет 0,76%–8,56%. Таким образом, НКД при обработке изображения HRSID демонстрирует лучшие по качеству и точности результаты, особенно при обработке малых объектов.

3.3 Набор данных ESAR

Рисунок 2, г изображает водную гладь (класс 1), обрабатываемые поля (класс 2) и лес (класс 3). Максимальное значение метрики Recall full получено с использованием КД. В табл. 4 представлены оценки точности U-Net, обычного КД и НКД ($K = 100$,

Таблица 3 Точность сегментирования (в %) снимка рис. 2, в (HRSID)

Метод	Класс 1		Класс 2		Класс 3		Класс 4		Класс 5		Recall	Precision
	Rec	Prec	full	full								
U-Net	95,38	95,94	45,48	54,67	66,43	64,33	76,24	73,09	81,81	82,09	87,07	87,06
Обычное КД	95,24	96,44	44,72	60,78	69,05	69,55	77,46	75,37	73,25	84,34	87,19	88,79
Нейросетевое КД	96,17	96,07	56,35	64,99	69,17	70,38	78,29	75,51	85,79	84,56	88,72	88,71

Таблица 4 Точность сегментирования (в %) снимка рис. 2, z (ESAR)

Метод	Класс 1		Класс 2		Класс 3		Recall	Precision
	Rec	Prec	Rec	Prec	Rec	Prec	full	full
U-Net	87,16	93,01	69,06	64,90	93,68	91,08	86,86	86,86
Обычное КД	89,79	94,24	70,95	70,35	94,28	90,91	88,46	88,46
Нейросетевое КД	93,13	90,97	62,65	74,46	94,47	90,60	88,35	88,35

$H_1 = 11$ и $d_{\text{prob}} = 0,2$). Обработка КД увеличивает Recall full на 1,09%–1,6%, а НКД — на 0,9%–1,81%. Для КД поклассовый прирост Recall не превосходит 2,63%, Precision — 5,45%. Для НКД прирост Recall для классов 1 и 2 достигает 5,97%, Precision — 9,56%. Сильные изменения Recall и Precision возникают из-за систематических ошибок сегментирования. Из-за особенностей рельефа области съемки (впадина на дне водоема) пиксели класса 1 в области впадины и класса 2 обладают схожими отражающими свойствами: средние значения яркости составляют 20,25 и 18,65 соответственно. Поэтому можно заключить, что для изображения ESAR результаты обработки КД и НКД сопоставимы.

4 Заключение

Результаты сегментирования нескольких разных РЛ-изображений показали, что использование НКД повышает точность сегментирования снимков, получаемую базовым кодировщиком. Прирост по Recall составил от 0,11% до 1,63%, притом что базовая точность сегментирования была довольно высокой — от 86,86% до 91,25% для трех из четырех изображений.

Поклассовые оценки точности зависят от типов объектов, которыми представлен класс на изображении. Для крупных объектов искажения в основном имеют характер зашумлений и точности сегментирования их КД и НКД практически идентичны, поскольку оба подхода реализуют одинаковую систему пространственных связей и восстанавливают шумовые искажения схожим образом. Малые объекты НКД восстанавливает более эффективно в сравнении с КД: прирост Recall составляет 2,88%–10,32%, а для КД — не превосходит 0,75%. Обычное КД ограничено результатами первоначального сегментирования снимка. Если объект или целый класс был потерян, восстановить его с помощью КД не представляется возможным, в то время как НКД на такое способно. В дальнейшем планируется продолжить исследования НКД в задаче выделения малых объектов, в частности с помощью подходов, использующих представленные изображения в виде суперпикселей.

Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору А. К. Горшенину за плодотворные обсуждения вопросов построения архитектуры НКД.

Литература

1. *Clabaut E., Foucher S., Bouroubi Y., Germain M.* Synthetic data for Sentinel-2 semantic segmentation // *Remote Sens.* — Basel, 2024. Vol. 16. Iss. 5. Art. 818. doi: 10.3390/rs16050818.
2. *Aleissaeae A. A., Kumar A., Anwer R. M., et al.* Transformers in remote sensing: A survey // *Remote Sens.* — Basel, 2023. Vol. 15. Iss. 7. Art. 1860. doi: 10.3390/rs15071860.
3. *Sun Z., Geng H., Lu Z., Scherer R., Wozniak M.* Review of road segmentation for SAR images // *Remote Sens.* — Basel, 2021. Vol. 13. Iss. 5. Art. 1011. doi: 10.3390/rs13051011.
4. *Ciecholewski M.* Review of segmentation methods for coastline detection in SAR images // *Arch. Comput. Method. E.*, 2024. Vol. 31. P. 839–869. doi: 10.1007/s11831-023-10000-7.
5. *Прохорец И. О., Степанов А. С.* Картографирование земель сельскохозяйственного назначения Хабаровского края методами машинного обучения с использованием изображений SENTINEL-2 // *Системы и средства информатики*, 2024. Т. 34. № 1. С. 57–69. doi: 10.14357/08696527240105. EDN: YEZNXD.
6. *Song Y., Wang T., Cai P., Mondal S. K., Sahoo J.* A comprehensive survey of few-shot learning: Evolution, applications, challenges, and opportunities // *ACM Comput. Surv.*, 2023. Vol. 55. Iss. 13s. Art. 271. 40 p. doi: 10.1145/3582688.
7. *Karniadakis G. E., Kevrekidis I. G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L.* Physics-informed machine learning // *Nature Reviews Physics*, 2021. Vol. 3. P. 422–440. doi: 10.1038/s42254-021-00314-5.
8. *Горшенин А. К., Кузьмин В. Ю.* Анализ конфигураций LSTM-сетей для построения среднесрочных векторных прогнозов // *Информатика и её применения*, 2020. Т. 14. Вып. 1. С. 10–16. doi: 10.14357/1992264200102. EDN: SZNTXE.
9. *Горшенин А. К., Кузьмин В. Ю.* Метод повышения точности нейросетевых прогнозов с использованием смешанных вероятностных моделей и его реализация в виде цифрового сервиса // *Информатика и её применения*, 2021. Т. 15. Вып. 3. С. 63–74. doi: 10.14357/1992264210309. EDN: FDRKZX.

10. *Gorshenin A. K., Kuzmin V. Yu.* Statistical feature construction for forecasting accuracy increase and its applications in neural network based analysis // *Mathematics*, 2022. Vol. 10. Art. 589. doi: 10.3390/math10040589.
11. *Gorshenin A. K., Vilyaev A. L.* Finite normal mixture models for the ensemble learning of recurrent neural networks with applications to currency pairs // *Pattern Recognition Image Analysis*, 2022. Vol. 32. P. 780–792. doi: 10.1134/S1054661822040058.
12. *Горшенин А. К., Королев В. Ю.* Аппроксимация распределений размеров частиц лунного реголита на основе метода статистической симуляции выборок // *Информатика и её применения*, 2020. Т. 14. Вып. 2. С. 50–57. doi: 10.14357/19922264200207. EDN: PQOYUJ.
13. *Горшенин А. К., Горбунов С. А., Волканов Д. Ю.* О кластеризации объектов сетевой вычислительной инфраструктуры на основе анализа статистических аномалий в трафике // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 76–87. doi: 10.14357/19922264230311. EDN: ХНТМVI.
14. *Pastorino M., Montaldo A., Fronda L., et al.* Multisensor and multiresolution remote sensing image classification through a causal hierarchical Markov framework and decision tree ensembles // *Remote Sens.* — Basel, 2021. Vol. 13. Iss. 5. Art. 849. doi: 10.3390/rs13050849.
15. *Pastorino M., Moser G., Serpico S. B., Zerubia J.* Semantic segmentation of remote-sensing images through fully convolutional neural networks and hierarchical probabilistic graphical models // *IEEE T. Geosci. Remote*, 2022. Vol. 60. Art. 5407116. 16 p. doi: 10.1109/TGRS.2022.3141996.
16. *Достовалова А. М.* Применение модели пространственно-иерархического квадродерева с усеченными ветвями для повышения точности классификации изображений // *Исследование Земли из космоса*, 2023. № 4. С. 83–91. doi: 10.31857/S0205961423040036. EDN: ХКХХHR.
17. *Jayaraman P. K., Mei J., Cai J., Zheng J.* Quadtree convolutional neural networks // *Computer vision / Eds. V. Ferrari, M. Hebert, C. Sminchisescu, Y. Weiss.* — Lecture notes in computer science ser. — Cham: Springer, 2018. Vol. 11210. P. 554–569. doi: 10.1007/978-3-030-01231-1_34.
18. *Jewsbury R., Bhalerao A., Rajpoot N. M.* A quadtree image representation for computational pathology // *IEEE/CVF Conference (International) on Computer Vision Science Proceedings.* — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2021. P. 648–656. doi: 10.1109/ICCVW54120.2021.00078.
19. *Ronen T., Levy O., Golbert A.* Vision transformers with mixed-resolution tokenization // *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Proceedings.* — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2023. P. 4612–4621.
20. *Ke L., Danelljan M., Li X., Tai Y. W., Tang C. K., Yu F.* Mask transfiner for high-quality instance segmentation // *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Proceedings.* — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2022. P. 4402–4411. doi: 10.1109/CVPR52688.2022.00437.
21. *Tang S., Zhang J., Zhu S., Tan P.* Quadtree attention for vision transformers. — Cornell University, 2023. arXiv: 2201.02767 [cs.CV]. 16 p.
22. *Chitta K., Alvarez J. M., Hebert M.* Quadtree generating networks: Efficient hierarchical scene parsing with sparse convolutions // *IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision Proceedings.* — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2020. P. 2009–2018. doi: 10.1109/WACV45572.2020.9093449.
23. *Zhang S., Tong H., Xu J., et al.* Graph convolutional networks: A comprehensive review // *Computational Social Networks*, 2019. Vol. 6. Iss. 11. P. 94–104. doi: 10.1186/s40649-019-0069-y.
24. *Горшенин А. К., Гусейнова Е. И.* Повышение доходности торговли на FOREX с помощью LSTM-идентификации свечных паттернов и индикатора тиковых объемов // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 16. Вып. 3. С. 26–38. doi: 10.14357/19922264220304. EDN: QOUMZY.
25. *Potin P., Bargellini P., Laur H., Rosich B., Schmuck S.* Sentinel-1 mission operations concept // *Geoscience and Remote Sensing Symposium (International) Proceedings.* — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2012. P. 1745–1749. doi: 10.1109/IGARSS.2012.6351183.
26. *Scheiber R., Hajnsek I., Horn R., Papathanassiou K. P., Prats P., Moreira A.* Recent developments and applications of multi-pass airborne interferometric SAR using the E-SAR system // *7th European Conference on Synthetic Aperture Radar Proceedings.* — Friedrichshafen, Germany: IEEE, 2008. 4 p.
27. *Wei Sh., Zeng X., Que Q., Wang M., Su H.* HRSID: A high-resolution SAR images dataset for ship detection and instance segmentation // *IEEE Access*, 2020. Vol. 8. P. 120234–120254. doi: 10.1109/ACCESS.2020.3005861.
28. *Bergstra J., Bengio Y.* Random search for hyper-parameter optimization // *J. Mach. Learn. Res.*, 2012. Vol. 13. Iss. 10. P. 281–305.

Поступила в редакцию 24.04.24

NEURAL QUADTREE AND ITS APPLICATIONS FOR SAR IMAGERY SEGMENTATION

A. M. Dostovalova

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper considers the neural ensemble neural network architecture that uses a quadtree model for SAR (Synthetic Aperture Radar) image segmentation under the lack of training data. The Neural Quadtree network (NQN) consists of segmentation network forming the image pixels features and a graph convolution network with the special branch pruning block establishing the spatial and hierarchical connections between pixels. The NQN is used for segmenting of several SAR images that differ a lot both in presented surfaces and characteristics (Sentinel-1, ESAR (Experimental SAR), HRSID (High-Resolution SAR Images Dataset)). A comparison was made of the results of processing images of NQN and a conventional quad-tree using a common U-Net network segmentor. The NQN demonstrates the higher quality in target detection in comparison with a conventional quadtree. The difference in Recall values for such objects classes between NQN and quadtree ranges from 2.13% to 11.63%.

Keywords: quadtree; graph convolution network; SAR images; target detection

DOI: 10.14357/19922264240410

EDN: LCGQQC

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (CKP “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

References

1. Clabaut, E., S. Foucher, Y. Bouroubi. and M. Germain. 2024. Synthetic data for Sentinel-2 semantic segmentation. *Remote Sens. — Basel* 16(5):818. doi: 10.3390/rs16050818.
2. Aleiassae, A., A. Kumar, R. M. Anwer, et al. 2023. Transformers in remote sensing: A survey. *Remote Sens. — Basel* 15(7):1860. doi: 10.3390/rs15071860.
3. Sun, Z., H. Geng, Z. Lu, R. Scherer, and M. Wozniak. 2021. Review of road segmentation for SAR images. *Remote Sens. — Basel* 13(5):1011. doi: 10.3390/rs13051011.
4. Ciecholewski, M. 2024. Review of segmentation methods for coastline detection in SAR images. *Arch. Comput. Method. E.* 31: 839–869. doi: 10.1007/s11831-023-10000-7.
5. Prokhorets, I. O., and A. S. Stepanov. 2024. Kartografirovaniye zemel' sel'skokhozyaystvennogo naznacheniya Khabarovskogo kraya metodami mashinnogo obucheniya s ispol'zovaniem izobrazheniy [Mapping of the Khabarovsk Region arable lands by machine learning using Sentinel-2 images]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(1):57–69. doi: 10.14357/08696527240105. EDN: YEZNXD.
6. Song, Y., T. Wang, P. Cai, S. K. Mondal, and J. Sahoo. 2023. A comprehensive survey of few-shot learning: Evolution, applications, challenges, and opportunities. *ACM Comput. Surv.* 55(13s):271. 40 p. doi: 10.1145/3582688.
7. Karniadakis, G. E., I. G. Kevrekidis, L. Lu, P. Perdikaris, S. Wang, and L. Yang. 2021. Physics-informed machine learning. *Nature Reviews Physics* 3:422–440. doi: 10.1038/s42254-021-00314-5.
8. Gorshenin, A. K., and V. Yu. Kuzmin. 2020. Analiz konfiguratsiy LSTM-setey dlya postroeniya srednesrochnykh vektornykh prognozov [Analysis of configurations of LSTM networks for medium-term vector forecasting]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 14(1):10–16. doi: 10.14357/19922264200102. EDN: SZNTXE.
9. Gorshenin, A. K., and V. Yu. Kuzmin. 2021. Metod povysheniya tochnosti neyrosetevykh prognozov s ispol'zovaniem smeshannykh veroyatnostnykh modeley i ego realizatsiya v vide tsifrovogo servisa [Method for improving accuracy of neural network forecasts based on probability mixture models and its implementation as a digital service]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 15(3):63–74. doi: 10.14357/19922264210309. EDN: FDRKZX.
10. Gorshenin, A. K., and V. Yu. Kuzmin. 2022. Statistical feature construction for forecasting accuracy increase and its applications in neural network based analysis. *Mathematics* 10:589. doi: 10.3390/math10040589.
11. Gorshenin, A. K., and A. L. Vilyaev. 2022. Finite normal mixture models for the ensemble learning of recurrent neural networks with applications to currency pairs. *Pattern Recognition Image Analysis* 32:780–792. doi: 10.1134/S1054661822040058.
12. Gorshenin, A. K., and V. Yu. Korolev. 2020. Approksimatsiya raspredeleniy razmerov chastits lunnogo regolita na osnove metoda statisticheskoy simulyatsii vyborok [Approximation of particle size distributions of

- lunar regolith based on the resampling]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 14(2):50–57. doi: 10.14357/19922264200207. EDN: PQOYUJ.
13. Gorshenin, A. K., S. A. Gorbunov, and D. Yu. Volkanov. 2023. O klasterizatsii ob"ektov setevoy vychislitel'noy infrastruktury na osnove analiza statisticheskikh anomalii v trafike [Toward clustering of network computing infrastructure objects based on analysis of statistical anomalies in network traffic]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):76–87. doi: 10.14357/19922264230311. EDN: XHTMVI.
 14. Pastorino, M., A. Montaldo, L. Fronda, *et al.* 2021. Multisensor and multiresolution remote sensing image classification through a causal hierarchical Markov framework and decision tree ensembles. *Remote Sens. — Basel* 13(5):849. doi: 10.3390/rs13050849.
 15. Pastorino, M., G. Moser, S. B. Serpico, and J. Zerubia. 2022. Semantic segmentation of remote-sensing images through fully convolutional neural networks and hierarchical probabilistic graphical models. *IEEE T. Geosci. Remote* 60:5407116. 16 p. doi: 10.1109/TGRS.2022.3141996.
 16. Dostovalova, A. M. 2023. Using a model of a spatial–hierarchical quadtree with truncated branches to improve the accuracy of image classification. *Izv. Atmos. Ocean. Phy.* 59(10):1255–1262. doi: 10.1134/S0001433823120071.
 17. Jayaraman, P. K., J. Mei, J. Cai, and J. Zheng. 2018. Quadtree convolutional neural networks. *Computer vision*. Eds. V. Ferrari, M. Hebert, C. Sminchisescu, and Y. Weiss. Lecture notes in computer science ser. Cham: Springer. 11210:554–569. doi: 10.1007/978-3-030-01231-1_34.
 18. Jewsbury, R., A. Bhalerao, and N. M. Rajpoot. 2021. A quadtree image representation for computational pathology. *IEEE/CVF Conference (International) on Computer Vision Science Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 648–656. doi: 10.1109/ICCVW54120.2021.00078.
 19. Ronen, T., O. Levy, and A. Golbert. 2023. Vision transformers with mixed-resolution tokenization. *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 4612–4621.
 20. Ke, L., M. Danelljan, X. Li, Y. W. Tai, C. K. Tang, and F. Yu. 2022. Mask transfiner for high-quality instance segmentation. *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 4402–4411. doi: 10.1109/CVPR52688.2022.00437.
 21. Tang, S., J. Zhang, S. Zhu, and P. Tan. 2023. Quadtree attention for vision transformers. Cornell University. 16 p. Available at: <https://arxiv.org/abs/2201.02767> (accessed March 13, 2024).
 22. Chitta, K., J. M. Alvarez, and M. Hebert. 2020. Quadtree generating networks: Efficient hierarchical scene parsing with sparse convolutions. *IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 2009–2018. doi: 10.1109/WACV45572.2020.9093449.
 23. Zhang, S., H. Tong, J. Xu, *et al.* 2019. Graph convolutional networks: A comprehensive review. *Computational Social Networks* 6(11):94–104. doi: 10.1186/s40649-019-0069-y.
 24. Gorshenin, A. K., and E. I. Guseynova. 2023. Povyshenie dokhodnosti trgovli na FOREX s pomoshch'yu LSTM-identifikatsii svechnykh patternov i indikatora tikovykh ob"emov [Increasing FOREX trading profitability with LSTM candlestick pattern recognition and tick volume indicator]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 16(3): 26–38. doi: 10.14357/19922264220304. EDN: QOUMZY.
 25. Potin, P., P. Bargellini, H. Laur, B. Rosich, and S. Schmuck. 2012. Sentinel-1 mission operations concept. *Geoscience and Remote Sensing Symposium (International) Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 1745–1749. doi: 10.1109/IGARSS.2012.6351183.
 26. Scheiber, R., I. Hajnek, R. Horn, K. P. Papathanassiou, P. Prats, and A. Moreira. 2008. Recent developments and applications of multi-pass airborne interferometric SAR using the E-SAR system. *7th European Conference on Synthetic Aperture Radar Proceedings*. Friedrichshafen, Germany: IEEE. 4 p.
 27. Wei, Sh., X. Zeng, Q. Que, M. Wang, and H. Su. 2020. HRSID: A high-resolution SAR images dataset for ship detection and instance segmentation. *IEEE Access* 8:120234–120254. doi: 10.1109/ACCESS.2020.3005861.
 28. Bergstra, J., and Y. Bengio. 2012. Random search for hyper-parameter optimization. *J. Mach. Learn. Res.* 13(10):281–305.

Received April 24, 2024

Contributor

Dostovalova Anastasia M. (b. 1999) — research engineer, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilova Str., Moscow 119333, Russian Federation; adostovalova@frcsc.ru

Борисов Андрей Владимирович (р. 1965) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Дараселия Анастасия Валерьевна (р. 1994) — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы

Достовалова Анастасия Михайловна (р. 1999) — инженер-исследователь Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Захаров Виктор Николаевич (р. 1948) — доктор технических наук, доцент, ученый секретарь Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Коновалов Михаил Григорьевич (р. 1950) — доктор технических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Куринов Юрий Наранович (р. 2002) — студент бакалавриата кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Кучерявый Евгений Александрович (р. 1974) — доктор технических наук, профессор Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Мартюшова Янина Германовна (р. 1970) — кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Наумов Андрей Викторович (р. 1966) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Разумчик Ростислав Валерьевич (р. 1984) — доктор физико-математических наук, заместитель директора Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Самуйлов Константин Евгеньевич (р. 1955) — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Синицын Игорь Николаевич (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Смелянский Руслан Леонидович (р. 1950) — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой автоматизации систем вычислительных комплексов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Сопин Эдуард Сергеевич (р. 1987) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и кибербезопасности Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Степанов Алексей Евгеньевич (р. 1998) — аспирант кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Московского авиационного ин-

ститута (национального исследовательского университета)

Сухарев Алексей Александрович (р. 1985) — стажер-исследователь Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Урюпин Илья Вадимович (р. 1993) — кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Френкель Сергей Лазаревич (р. 1951) — кандидат технических наук, доцент, старший научный со-

трудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Шестаков Олег Владимирович (р. 1976) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; ведущий научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ЗА 2024 г.

	Вып.	Стр.
Агаларов Я. М. Об однопороговом управлении очередью в системе массового обслуживания с нетерпеливыми заявками	2	40–46
Бесчастный В. А. см. Острикова Д. Ю.		
Борисов А. В. Рынок с марковской скачкообразной волатильностью IV: алгоритм мониторинга рыночной цены риска по потоку высокочастотных наблюдений базовых активов и деривативов	1	26–32
Борисов А. В. Рынок с марковской скачкообразной волатильностью V: пополнение рынка деривативами	2	9–16
Борисов А. В., Куринов Ю. Н., Смелянский Р. Л. Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов	3	30–37
Борисов А. В., Куринов Ю. Н., Смелянский Р. Л. Фильтрация состояний класса марковских скачкообразных процессов по разнородным наблюдениям с аддитивными шумами	4	10–18
Босов А. В. Стабилизация автономного линейного выхода марковской цепи по квадратичному критерию на бесконечном горизонте	3	38–44
Босов А. В. Управление линейным выходом автономной дифференциальной системы по квадратичному критерию на бесконечном горизонте	1	18–25
Босов А. В., Иванов А. В. О применении генеративных моделей в системе электронного обучения математическим дисциплинам	2	72–81
Васильев Н. С. О функторном представлении оптимизируемых динамических мульти-агентных систем	2	2–8
Воронцов М. О., Шестаков О. В. Асимптотическая нормальность и сильная состоятельность оценки риска при использовании FDR-порога в условиях слабой зависимости	3	69–79
Вышинский Л. Л., Флёров Ю. А. Модели анализа компоновочных схем в задаче формирования облика самолета	3	2–11
Вышинский Л. Л., Флёров Ю. А. Модели синтеза компоновочной схемы в задаче формирования облика самолета	1	61–70
Гайдамака Ю. В. см. Острикова Д. Ю.		
Голос Е. С. см. Острикова Д. Ю.		
Гончаров А. А., Ярошенко П. В. Принципы аннотирования имплицитных логико-семантических отношений в параллельных текстах	3	106–114
Грушо А. А., Грушо Н. А., Забейайло М. И., Кульченков В. В., Тимонина Е. Е. Выявление причинно-следственных связей при покрытии причин	2	54–59
Грушо А. А., Грушо Н. А., Забейайло М. И., Писковский В. О., Тимонина Е. Е., Шоргин С. Я. Логика обмана в машинном обучении	1	78–83
Грушо Н. А. см. Грушо А. А.		
Грушо Н. А. см. Грушо А. А.		
Дараселия А. В., Сопин Э. С., Самуйлов К. Е., Кучерявый Е. А. Минимизация задержки в системах 5G/6G IoT с групповым поступлением в восходящем и нисходящем направлениях	4	59–67
Добровольский Д. О., Зацман И. М. Модель извлечения знания из параллельных текстов лексикографической информационной системы	3	97–105
Достовалова А. М. Нейросетевое квадродререво и его применение для сегментирования спутниковых изображений	4	77–85
Дюкова Е. В., Масляков Г. О., Янаков Д. С. Корректная классификация по прецедентам: ДСМ-метод над произведением частичных порядков	3	61–68

	Вып.	Стр.
Забейайло М. И. см. Грушо А. А.		
Забейайло М. И. см. Грушо А. А.		
Захаров В. Н. см. Френкель С. Л.		
Зацман И. М. Трансформации объектов первого и второго порядка в лексикографической информационной системе	2	82–91
Зацман И. М. см. Добровольский Д. О.		
Зорин А. В. К определению периода занятости при нелокальном описании потоков		
Иванов А. В. см. Босов А. В.	3	45–51
Коваленко А. С. Применение разложения изображения с помощью дискретного вейвлет-преобразования для построения архитектуры шумоподавляющей нейронной сети	2	60–71
Ковалёв С. П. Алгебраическая спецификация распределенных систем с изменяющейся архитектурой	1	11–17
Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. О диспетчеризации в одном классе двухфазных систем массового обслуживания	4	52–58
Кочеткова И. А. см. Макеева Е. Д.		
Кривенко М. П. Статистический критерий стабильности системы массового обслуживания, основанный на входном и выходном потоках	1	54–60
Кудрявцев А. А., Шестаков О. В. Равномерные оценки скорости сходимости для интегрального индекса баланса	1	33–39
Кульченков В. В. см. Грушо А. А.		
Куринов Ю. Н. см. Борисов А. В.		
Куринов Ю. Н. см. Борисов А. В.		
Кучерявый Е. А. см. Дараселия А. В.		
Ланге А. М. см. Ланге М. М.		
Ланге М. М., Ланге А. М. Нижняя граница погрешности оценивания случайного параметра при заданном количестве информации	2	17–24
Леденева Т. М., Лещинская М. В. Анализ подходов к определению нечеткой резольвенты	1	92–99
Лери М. М., Павлов Ю. Л. Локальная древовидность в конфигурационных графах со степенным распределением	1	46–53
Лещинская М. В. см. Леденева Т. М.		
Листопад С. В. Базовая архитектура рефлексивно-активных систем искусственных гетерогенных интеллектуальных агентов	3	89–96
Листопад С. В. Жизненный цикл методологии построения рефлексивно-активных систем искусственных гетерогенных интеллектуальных агентов	1	84–91
Макеева Е. Д., Кочеткова И. А., Шоргин С. Я. Вероятностная модель затухания мощности сигнала в сценариях 3GPP TR 38.901 развертывания сети 5G	2	25–31
Малашенко Ю. Е., Назарова И. А. Сравнительный анализ показателей функционирования сети при повреждении узлов	3	52–60
Малашенко Ю. Е., Назарова И. А. Сравнительный анализ узловых мультипотоков в многопользовательской сетевой системе	1	40–45
Мартюшова Я. Г., Наумов А. В., Степанов А. Е. Оптимизация прохождения ограниченного по времени теста по квантильному критерию	4	44–51
Масляков Г. О. см. Дюкова Е. В.		
Мачнев Е. А. см. Острикова Д. Ю.		
Назарова И. А. см. Малашенко Ю. Е.		
Назарова И. А. см. Малашенко Ю. Е.		
Наумов А. В. см. Мартюшова Я. Г.		
Новиков Д. А. см. Шнурков П. В.		
Нуриев В. А. Компьютерные инструменты для обработки пунктуационного компонента в художественном переводе	3	115–121
Острикова Д. Ю., Голос Е. С., Бесчастный В. А., Мачнев Е. А., Шоргин В. С., Гайдамака Ю. В. Метод оценки характеристик систем 5G/6G «новое радио» с учетом макро- и микромобильности пользователей	2	32–39

Павлов Ю. Л. см. Лери М. М.		
Писковский В. О. см. Грушо А. А.		
Разумчик Р. В. см. Коновалов М. Г.		
Самуйлов К. Е. см. Дараселия А. В.		
Синицын И. Н. Методы условно-оптимальной фильтрации и экстраполяции в наблюдаемых неявных стохастических системах	4	2–9
Синицын И. Н. Статистическое моделирование дифференциальных стохастических систем, не разрешенных относительно производных	3	12–20
Синицын И. Н. Субоптимальная фильтрация в стохастических системах, не разрешенных относительно производных, со случайными параметрами	1	2–10
Синицын И. Н. Условно-оптимальная фильтрация в стохастических системах со случайными параметрами и не разрешенных относительно производных	3	21–29
Синицын И. Н. Условно-оптимальная фильтрация и экстраполяция в неявных дифференциальных гауссовских стохастических системах при автокоррелированной помехе в наблюдениях	4	19–25
Смелянский Р. Л. см. Борисов А. В.		
Смелянский Р. Л. см. Борисов А. В.		
Сопин Э. С. см. Дараселия А. В.		
Степанов А. Е. см. Мартюшова Я. Г.		
Сухарев А. А. см. Урюпин И. В.		
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.		
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.		
Торшин И. Ю. О порождении синтетических признаков на основе опорных цепей и произвольных метрик в рамках топологического подхода к анализу данных. Часть 1. Включение в формализм эмпирических функций расстояния	1	71–77
Торшин И. Ю. О порождении синтетических признаков на основе опорных цепей и произвольных метрик в рамках топологического подхода к анализу данных. Часть 2. Экспериментальная апробация на задачах фармакоинформатики	2	47–53
Урюпин И. В., Сухарев А. А. Моделирование ценовой эластичности спроса на авиационные перевозки в условиях ограниченности статистических данных	4	34–43
Флёров Ю. А. см. Вышинский Л. Л.		
Флёров Ю. А. см. Вышинский Л. Л.		
Френкель С. Л., Захаров В. Н. О задаче предсказания деградации в технических системах	4	68–76
Шестаков О. В. Статистические свойства оценки среднеквадратичного риска метода блочной пороговой обработки в задачах непараметрической регрессии со случайной сеткой	4	26–33
Шестаков О. В. см. Воронцов М. О.		
Шестаков О. В. см. Кудрявцев А. А.		
Шнурков П. В., Новиков Д. А. Численно-аналитическое решение задачи о настройке с дискретным временем для модели интервенций на валютном рынке	3	80–88
Шоргин В. С. см. Острикова Д. Ю.		
Шоргин С. Я. см. Грушо А. А.		
Шоргин С. Я. см. Макеева Е. Д.		
Янаков Д. С. см. Дюкова Е. В.		
Ярошенко П. В. см. Гончаров А. А.		

2024 AUTHOR INDEX

	Issue	Page
Agalarov Ya. M. On single-threshold queue management in a queuing system with impatient customers	2	40–46
Beschastnyi V. A. see Ostriko \dot{v} a D. Yu.		
Borisov A. V. Market with Markov jump volatility IV: Price of risk monitoring algorithm given high frequency observation flows of assets prices	1	26–32
Borisov A. V. Market with Markov jump volatility V: Market completion with derivatives	2	9–16
Borisov A. V., Kurinov Yu. N., and Smeliansky R. L. Filtering of a class of Markov jump processes by heterogeneous observations with additive noises	4	10–18
Borisov A. V., Kurinov Yu. N., and Smeliansky R. L. Probabilistic analysis of a class of Markov jump processes	3	30–37
Bosov A. V. Autonomous differential system linear output control by square criterion on an infinite horizon	1	18–25
Bosov A. V. Autonomous linear output of the Markov chain stabilization by square criterion on an infinite horizon	3	38–44
Bosov A. V. and Ivanov A. V. On the application of generative models in the e-learning system of mathematical disciplines	2	72–81
Daraseliya A. V., Sopin E. S., Samuylov K. E., and Koucheryavy E. A. Minimizing latency in 5G/6G IoT systems with group admission in ascending and descending directions	4	59–67
Djukova E. V., Masliakov G. O., and Ianakov D. S. Correct supervised classification: JSM-method over product of partial orders	3	61–68
Dobrovol'skij D. O. and Zatsman I. M. A model for extracting knowledge from parallel texts of a lexicographic information system	3	97–105
Dostovalova A. M. Neural quadtree and its applications for SAR imagery segmentation	4	77–85
Flerov Yu. A. see Vyshinsky L. L.		
Flerov Yu. A. see Vyshinsky L. L.		
Frenkel S. L. and Zakharov V. N. On the problem of predicting degradation in technical systems	4	68–76
Gaidamaka Yu. V. see Ostriko \dot{v} a D. Yu.		
Golos E. S. see Ostriko \dot{v} a D. Yu.		
Goncharov A. A. and Iaroshenko P. V. Implicit logical-semantic relations in parallel texts: Annotation principles	3	106–114
Grusho A. A., Grusho N. A., Zabezhailo M. I., Kulchenkov V. V., and Timonina E. E. Identification of cause-and-effect relationships when covering causes	2	54–59
Grusho A. A., Grusho N. A., Zabezhailo M. I., Piskovski V. O., Timonina E. E., and Shorgin S. Ya. Logic of deception in machine learning	1	78–83
Grusho N. A. see Grusho A. A.		
Grusho N. A. see Grusho A. A.		
Ianakov D. S. see Djukova E. V.		
Iaroshenko P. V. see Goncharov A. A.		
Ivanov A. V. see Bosov A. V.		
Kochetkova I. A. see Makeeva E. D.		
Konovalov M. G. and Razumchik R. V. On one problem of load balancing in two-phase tandem queues	4	52–58
Koucheryavy E. A. see Daraseliya A. V.		
Kovalenko A. S. Image decomposition with discrete wavelet transform to design a denoising neural network	2	60–71
Kovalyov S. P. Algebraic specification of graph computational structures	1	11–17

	Issue	Page
Krivenko M. P. Statistical criterion for queuing system stability based on input and output flows	1	54–60
Kudryavtsev A. A. and Shestakov O. V. Uniform convergence rate estimates for the integral balance index	1	33–39
Kulchenkov V. V. see Grusho A. A.		
Kurinov Yu. N. see Borisov A. V.		
Kurinov Yu. N. see Borisov A. V.		
Lange A. M. see Lange M. M.		
Lange M. M. and Lange A. M. Lower bound to estimation distortion of a random parameter for a given amount of information	2	17–24
Ledeneva T. M. and Leshchinskaya M. V. Analysis of approaches to defining fuzzy resolvent	1	92–99
Leri M. M. and Pavlov Yu. L. Local treelike structure in the power-law configuration graphs	1	46–53
Leshchinskaya M. V. see Ledeneva T. M.		
Listopad S. V. Basic architecture of reflexive-active systems of artificial heterogeneous intelligent agents	3	89–96
Listopad S. V. Life cycle of methodology for constructing reflexive-active systems of artificial heterogeneous intelligent agents	1	84–91
Machnev E. A. see Ostriкова D. Yu.		
Makeeva E. D., Kochetkova I. A., and Shorgin S. Ya. Stochastic path loss model in 5G network deployment scenarios: A study based on 3GPP TR 38.901	2	25–31
Malashenko Yu. E. and Nazarova I. A. Analysis of network performance indicators in case of node damage	3	52–60
Malashenko Yu. E. and Nazarova I. A. Analysis of node multiflows in a multiuser network system	1	40–45
Martyushova Ya. G., Naumov A. V., and Stepanov A. E. Optimization of the strategy of passing the time-limited test according to the quantile criterion	4	44–51
Masliakov G. O. see Djukova E. V.		
Naumov A. V. see Martyushova Ya. G.		
Nazarova I. A. see Malashenko Yu. E.		
Nazarova I. A. see Malashenko Yu. E.		
Novikov D. A. see Shnurkov P. V.		
Nuriev V. A. Applying computer-assisted tools to literary translation: The case of punctuation	3	115–121
Ostriкова D. Yu., Golos E. S., Beschastnyi V. A., Machnev E. A., Shorgin V. S., and Gaidamaka Yu. V. Assessing the characteristics of 5G/6G “new radio” systems with user’s macro- and micromobility	2	32–39
Pavlov Yu. L. see Leri M. M.		
Piskovski V. O. see Grusho A. A.		
Razumchik R. V. see Konovalov M. G.		
Samuylov K. E. see Daraseliya A. V.		
Shestakov O. V. Statistical properties of the mean-square risk estimate for the block threshold processing method in nonparametric regression problems with a random grid	4	26–33
Shestakov O. V. see Kudryavtsev A. A.		
Shestakov O. V. see Vorontsov M. O.		
Shnurkov P. V. and Novikov D. A. Numerical-analytical solution of the discrete-time tuning problem for an intervention model in the foreign exchange market	3	80–88
Shorgin S. Ya. see Grusho A. A.		
Shorgin S. Ya. see Makeeva E. D.		
Shorgin V. S. see Ostriкова D. Yu.		
Sinitsyn I. N. Conditionally optimal filtering and extrapolation for differential Gaussian implicit stochastic systems at autocorrelated noise in observations	4	19–25
Sinitsyn I. N. Conditionally optimal filtering and extrapolation methods for observable implicit stochastic systems	4	2–9
Sinitsyn I. N. Conditionally optimal filtering in stochastic systems with random parameters and unsolved derivatives	3	21–29
Sinitsyn I. N. Statistical modeling of differential stochastic systems with unsolved derivatives	3	12–20

	Issue	Page
Sinitsyn I. N. Suboptimal filtering in stochastic systems with random parameters and unsolved derivatives	1	2–10
Smeliansky R. L. see Borisov A. V.		
Smeliansky R. L. see Borisov A. V.		
Sopin E. S. see Daraseliya A. V.		
Stepanov A. E. see Martyushova Ya. G.		
Sukharev A. A. see Uryupin I. V.		
Timonina E. E. see Grusho A. A.		
Timonina E. E. see Grusho A. A.		
Torshin I. Yu. On the generation of synthetic features based on support chains and arbitrary metrics within a topological approach to data analysis. Part 1. Inclusion of empirical distance functions into the formalism	1	71–77
Torshin I. Yu. On the generation of synthetic features based on support chains and arbitrary metrics within the framework of a topological approach to data analysis. Part 2. Experimental testing on pharmacoinformatics problems	2	47–53
Uryupin I. V. and Sukharev A. A. Modeling the price elasticity of demand on passenger air transportation in Russia with limited statistical data	4	34–43
Vasilyev N. S. On functor representation of optimized dynamic multiagent systems	2	2–8
Vorontsov M. O. and Shestakov O. V. Asymptotic normality and strong consistency of risk estimate when using the FDR threshold under weak dependence condition	3	69–79
Vyshinsky L. L. and Flerov Yu. A. Models for analyzing layout schemes in the problem of aircraft design	3	2–11
Vyshinsky L. L. and Flerov Yu. A. Synthesis models of layout scheme in the task of forming an aircraft image	1	61–70
Zabekhailo M. I. see Grusho A. A.		
Zabekhailo M. I. see Grusho A. A.		
Zakharov V. N. see Frenkel S. L.		
Zatsman I. M. Object transformations of the first and second order in a lexicographic information system	2	82–91
Zatsman I. M. see Dobrovol'skiy D. O.		
Zorine A. V. Towards a definition of a busy period under nonlocal description of input flows	3	45–51

Правила подготовки рукописей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации предоставленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.
3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам. Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.
5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.
6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или \LaTeX (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи необязательно.

7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 10 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны оформления представлены в интернете:

http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip

8. Статья должна содержать следующую информацию на *русском и английском языках*:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием почтового адреса организации и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp и
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами;
- источники финансирования работы (ссылки на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.).

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний. Если источник имеет DOI и/или EDN, то их необходимо указывать.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала;
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://www.translit.net/ru/bgn/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Ниже приведены примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”.

Описание статьи из журнала:

Zagurenko, A. G., V. A. Korotovskikh, A. A. Kolesnikov, A. V. Timonov, and D. V. Kardymon. 2008. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizayna gidrorazryva plasta [Technical and economic optimization of the design of hydraulic fracturing]. *Neftyanoe hozyaystvo [Oil Industry]* 11:54–57.

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

Описание статьи из электронного журнала:

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.

Описание материалов конференций:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

Описание книги (монографии, сборники):

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Latyshev, V. N. 2009. *Tribologiya rezaniya. Kn. 1: Friksionnye protsessy pri rezanii metallov* [Tribology of cutting. Vol. 1: Frictional processes in metal cutting]. Ivanovo: Ivanovskii State Univ. 108 p.

Описание переводной книги (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (*Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. Vibration problems in engineering. — 4th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 1974. 521 p.*)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. New York: Wiley. 521 p.

Описание неопубликованного документа:

Laturov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004 (unpubl.). *Geologiya i dobycha (NGT GiD)* [Geology and production (NGT GiD)]. Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198.

Описание интернет-ресурса:

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

Описание диссертации или автореферата диссертации:

Semenov, V. I. 2003. *Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyy tor* [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. Moscow. D.Sc. Diss. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. *Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa* [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

Описание ГОСТа:

GOST 8.586.5-2005. 2007. *Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv* [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publs. 10 p.

Описание патента:

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. *Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya* [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- указывать в тексте письма название статьи, авторов и журнал, в который направляется статья;
- использовать attach (присоединение);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

12. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

Адрес редакции журнала «Информатика и её применения»:
Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН
Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05
e-mail: ieep@frccsc.ru (Стригина Светлана Николаевна)
<http://www.ipiran.ru/journal/issues/>

Requirements for manuscripts submitted to Journal “Informatics and Applications”

Journal “Informatics and Applications” (Inform. Appl.) publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of informatics and its applications.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

The topics covered include the following areas:

- theoretical fundamentals of informatics;
- mathematical methods for studying complex systems and processes;
- information systems and networks;
- information technologies; and
- architecture and software of computational complexes and networks.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

Agreement on the transfer of rights to publish:

“We, the undersigned authors of the manuscript “. . . ”, pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Informatics and Applications” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations.

Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If the authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved for publication. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or L^AT_EX (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.
7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 10 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site:

http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip.

8. The articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author’s name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format (see site):

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp and

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;

- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae;
 - indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.
Important! Keywords must not be sentences; and
 - Acknowledgments.
9. References. Russian references have to be presented both in English translation and Latin transliteration (refer <http://www.translit.net/ru/bgn/>).
- Please take into account the following examples of Russian references appearance:
- Article in journal:**
Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.
- Journal article in electronic format:**
Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).
- Article from the continuing publication (collection of works, proceedings):**
Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy "stal'-kompozit" [Experimental study of the strength of joints "steel-composite"]. *Trudy MGTU "Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem" [Bauman MSTU "Mathematical Modeling of Complex Technical Systems" Proceedings]*. 593:125–130.
- Conference proceedings:**
Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi" [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]*. Moscow. 267–272.
- Books and other monographs:**
Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem [Operation of turbine generators with direct cooling]*. Moscow: Energy Publ. 352 p.
- Dissertation and Thesis:**
Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.
- State standards and patents:**
GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publ. 10 p.
Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.
- References in Latin transcription are presented in the original language.
References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets. All items from the reference list should be cited.
10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.
11. Submissions of files by e-mail must include:
- the journal title and author's name in the "Subject" field;
 - the article title, authors' names, and the journal title, whereto the paper is being submitted, in the text of the email;
 - an article and additional materials have to be attached using the "attach" function; and
 - an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.
12. "Informatics and Applications" journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

Editorial Board address:

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia
Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05
e-mail: iiep@frccsc.ru (to Svetlana Strigina)
<http://www.ipiran.ru/english/journal.asp>