

# Информатика и её применения

Том 18 Выпуск 3 Год 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

Модели анализа компоновочных схем в задаче формирования облика самолета <b>Л. Л. Вышинский, Ю. А. Флёров</b>	2
Статистическое моделирование дифференциальных стохастических систем, не разрешенных относительно производных <b>И. Н. Сеницын</b>	12
Условно-оптимальная фильтрация в стохастических системах со случайными параметрами и не разрешенных относительно производных <b>И. Н. Сеницын</b>	21
Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов <b>А. В. Борисов, Ю. Н. Куринов, Р. Л. Смелянский</b>	30
Стабилизация автономного линейного выхода марковской цепи по квадратичному критерию на бесконечном горизонте <b>А. В. Босов</b>	38
К определению периода занятости при нелокальном описании потоков <b>А. В. Зорин</b>	45
Сравнительный анализ показателей функционирования сети при повреждении узлов <b>Ю. Е. Малащенко, И. А. Назарова</b>	52
Корректная классификация по прецедентам: ДСМ-метод над производением частичных порядков <b>Е. В. Дюкова, Г. О. Масляков, Д. С. Янаков</b>	61
Асимптотическая нормальность и сильная состоятельность оценки риска при использовании FDR-порога в условиях слабой зависимости <b>М. О. Воронцов, О. В. Шестаков</b>	69
Численно-аналитическое решение задачи о настройке с дискретным временем для модели интервенций на валютном рынке <b>П. В. Шнурков, Д. А. Новиков</b>	80
Базовая архитектура рефлексивно-активных систем искусственных гетерогенных интеллектуальных агентов <b>С. В. Листопад</b>	89
Модель извлечения знания из параллельных текстов лексикографической информационной системы <b>Д. О. Добровольский, И. М. Зацман</b>	97
Принципы аннотирования имплицитных логико-семантических отношений в параллельных текстах <b>А. А. Гончаров, П. В. Ярошенко</b>	106
Applying computer-assisted tools to literary translation: The case of punctuation <b>V. A. Nuriev</b>	115
Об авторах	122
Правила подготовки рукописей	124
Requirements for manuscripts	127

# МОДЕЛИ АНАЛИЗА КОМПОНОВОЧНЫХ СХЕМ В ЗАДАЧЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОБЛИКА САМОЛЕТА

Л. Л. Вышинский<sup>1</sup>, Ю. А. Флёрв<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматриваются задачи анализа характеристик проектируемого самолета на стадии формирования его облика. Характерная особенность этих задач состоит в отсутствии достаточной информации о конструкции самолета, которая появляется только на этапах эскизного и рабочего проектирования. По сути, это задачи технического прогнозирования по довольно ограниченному набору параметров, которым может оперировать проектировщик на этом этапе. Основная задача формирования облика — это синтез компоновочной схемы самолета и построение ее параметрического представления. Компоновочные схемы в практике проектирования представляют собой один из основных проектных документов и служат прообразом разрабатываемого изделия. Настоящая работа посвящена представлению математических моделей, предназначенных для построения оценок весовых, аэродинамических, летно-технических (ЛТХ) и взлетно-посадочных (ВПХ) характеристик самолета по параметрам его компоновочной схемы и последующей проверке соответствия полученных оценок требованиям, предъявляемым к проектируемому изделию.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; автоматизация проектирования; самолет; компоновочная схема; характеристики самолета

DOI: 10.14357/19922264240301

EDN: VWQBMD

## 1 Задача формирования облика самолета

Процесс проектирования самолетов (далее для краткости — ЛА, летательных аппаратов) достаточно протяжен во времени и представляет собой последовательность этапов проектирования, отличающихся уровнем детализации конструкции и математических моделей, когда идет речь об автоматизации проектирования [1]. Начальный этап проектирования ЛА обычно называют формированием облика [2]. Такое название отражает реальные процессы этапа. На стадии этапа появляются первые эскизы будущего изделия, которые затем оформляются в основополагающий проектный документ — в компоновочную схему ЛА. Компоновочная схема определяет структуру ЛА, состав основных его агрегатов, параметры этих агрегатов

и их взаимное расположение. Формирование облика ЛА представляет собой сложный итерационный процесс, который включает анализ требований тактико-технического задания (ТТЗ), построение областей существования в пространстве основных проектных параметров ЛА, синтез компоновочной схемы проектируемого изделия и ее всесторонний анализ (рис. 1).

В ТТЗ формулируются цели создания ЛА и определяются конкретные задачи и требования, которые он должен выполнять в процессе эксплуатации. В ТТЗ могут быть также сформулированы критерии, по которым следует оптимизировать разрабатываемый проект.

На основании анализа ТТЗ и имеющегося опыта проектирования в пространстве основных проектных параметров ЛА (тяговооруженность, удельная нагрузка на крыло, максимальное аэродинамиче-



Рис. 1 Процесс формирования облика ЛА

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, wyshinsky@mail.ru

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, fler@ccas.ru

ское качества и ряд других величин) строится «область существования» проектируемого изделия [3]. Заметим, что принадлежность точки области существования еще не гарантирует реализуемость проекта, поскольку область существования на начальном этапе проектирования не учитывает многих ограничений, возникающих на более поздних этапах проектирования. Однако область существования позволяет выявить на множестве реально существующих и эксплуатирующихся самолетов подмножество ЛА, параметры которых лежат в построенной области существования. Экземпляры этого подмножества могут служить в качестве потенциальных прототипов проектируемого изделия при решении основной задачи формирования облика ЛА — синтезе компоновочной схемы.

В работах [4, 5] был представлен ряд математических моделей, связанных с решением этой задачи, которые были реализованы в модуле формирования облика ЛА (далее — МФО), разработанном в составе автоматизированной системы весового проектирования [6].

В настоящей статье рассматриваются математические модели анализа компоновочных схем, реализованные с помощью того же программного модуля. Модели анализа вместе с моделями синтеза образуют единую структурно-параметрическую модель ЛА. Цель анализа на этапе формирования облика состоит в последовательном расчете всех параметров и характеристик структурно-параметрической модели ЛА.

Анализ компоновочной схемы ЛА на этапе формирования облика решает две основных задачи: первая задача состоит в анализе возможности компоновки в рамках выбранной схемы всех агрегатов ЛА, систем и полезной нагрузки, а вторая задача — это расчет тактико-технических характеристик (ТТХ) ЛА и проверка их соответствия требованиям, сформулированным в ТТЗ. Если рассчитанные в процессе анализа компоновочной схемы ТТХ не соответствуют требованиям ТТЗ, то приходится возвращаться на стадию синтеза и корректировать основные проектные параметры и/или параметры компоновочной схемы.

Модели анализа на этапе формирования облика характерны тем, что они строятся по довольно ограниченному набору параметров, которым может оперировать проектировщик на этом этапе. Это, как правило, упрощенные полуэмпирические, полутеоретические модели, которые, с одной стороны, отражают тенденции и зависимости рассматриваемых характеристик от параметров компоновочной схемы ЛА, а с другой стороны, не требуют трудоемких расчетов, что позволяет использовать их при расчете большого числа альтернативных ва-

риантов компоновочных схем и тем более в алгоритмах оптимизации.

## 2 Геометрический анализ компоновочной схемы летательного аппарата

В пространстве конструктивных параметров компоновочной схемы ЛА геометрические параметры занимают центральное место. От них зависят весовые, аэродинамические и другие характеристики ЛА [7]. Геометрический анализ на этапе формирования облика решает две основные задачи. Во-первых, геометрические параметры планера служат исходной информацией для расчетов весовых и аэродинамических характеристик ЛА. Эта информация должна содержать ряд формообразующих параметров компоновочной схемы, таких как площадь основной несущей поверхности, удлинение, сужение, стреловидность крыла, удлинение фюзеляжа, параметры оперения, а также ряд расчетных величин. Среди расчетных параметров на этапе формирования облика важную роль играют площадь омываемой поверхности ( $S_{ом}$ ), которая определяет аэродинамическое сопротивление трения, и площадь миделя планера ( $S_M$ ), от которой зависит сопротивление давления на околозвуковых и сверхзвуковых скоростях. Иногда для расчета сопротивления сверхзвуковых ЛА рассматривают такую геометрическую характеристику, как «график площадей» — зависимость площади поперечного сечения планера от продольной координаты:  $S_{zy}(x)$ . Заметим, что график площадей может использоваться и для решения второй задачи геометрического анализа — внутренней компоновки ЛА. Эта задача состоит в проверке возможности размещения на самолете полезной нагрузки — пассажиров, коммерческих грузов и топлива, а также размещение экипажа, двигателей силовой установки, стоек шасси в убранном положении, самолетного и специального оборудования. Одной из характеристик самолета как транспортного средства служит величина располагаемого объема планера, которая может быть вычислена интегрированием графика площадей по координате  $x$ :

$$V_{расп} = \int_0^{L_{пл}} S_{zy}(x) dx .$$

В процессе решения задач внутренней компоновки формируется разбиение агрегатов компоновочной схемы на определенные зоны целевого использования — пассажирские салоны, грузовые, топливные,

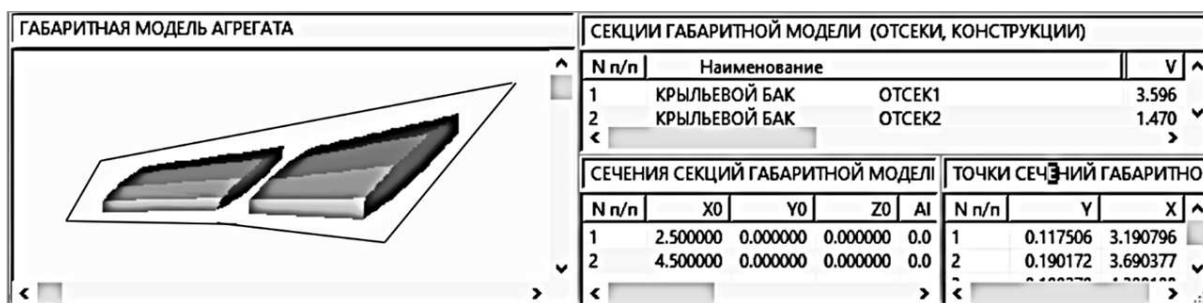


Рис. 2 Габаритная модель крыльцевого топливного бака

приборные, служебные и другие отсеки. При этом располагаемые объемы отсеков должны удовлетворять соотношениям

$$V_{\text{расп}} = \sum_i V_{\text{расп}}^i \geq k_{\text{зап}}^i V_{\text{потр}}^i,$$

где  $V_{\text{потр}}^i$  — потребный объем для размещения  $i$ -го объекта размещения;  $k_{\text{зап}}^i$  — коэффициент заполнения соответствующего отсека, которые определяются нормативными документами или практикой проектирования. Одна из важных задач геометрического анализа компоновочной схемы — анализ центровки ЛА в процессе выработки топлива, которая зависит от геометрии и размещения топливных емкостей [8].

В МФО в качестве основной структуры геометрического анализа компоновочной схемы реализован механизм построения параметрических габаритных моделей агрегатов. Габаритные модели («габаритки») — это традиционный инструмент, использовавшийся для внутренней компоновки размещаемых на борту объектов. В докомпьютерные времена «габаритки» вырезали из бумаги и манипулировали ими, накладывая на чертежи компоновочной схемы. Сейчас габаритные модели всех агрегатов, в том числе крыла, фюзеляжа, оперения, мотогондол, двигателей, топливных баков, можно воспроизвести на экране компьютера, управляя их параметрами и положением на компоновочной схеме и одновременно проводя вычисления нужных геометрических характеристик. На рис. 2 приведен пример габаритной модели размещаемых в крыле самолета топливных баков.

Габаритная модель строится как многосекционная конструкция, каждая секция которой задается положением в системе координат агрегата и состоит из упорядоченного набора плоских сечений определенного типа. В свою очередь, сечения задаются положением плоскости в системе координат секции и своими габаритами. Все сечения секции однотипны, а сам тип и число точек в сечении задаются в определении секции. В трехмерной

интерпретации каждая секция габаритной модели представляет собой объемное тело или поверхность некоторого многогранника, ограничивающего моделируемый агрегат. Такое представление габаритной модели допускает относительно простые алгоритмы расчета нужных геометрических характеристик или их оценку.

### 3 Весовой анализ на этапе формирования облика

Весовой анализ на этапе формирования облика ЛА представляет собой достаточно сложную задачу вычисления или оценки целого ряда весовых характеристик ЛА и в первую очередь  $m_0$  — взлетной массы самолета и  $m_T$  — стартовой массы заправляемого топлива. Основным соотношением весового анализа на всех этапах проектирования служит так называемое уравнение весового баланса, которое может быть представлено в следующем общем виде:

$$m_0 = \sum_i m_i(m_0).$$

Здесь суммирование ведется по всем агрегатам ЛА, включая целевую нагрузку и заправляемое топливо. Масса многих агрегатов ЛА, в частности масса агрегатов конструкции планера и потребная масса топлива, зависит от общей массы поднимаемого в воздух изделия. Априори эти зависимости не известны, но имеющийся опыт создания ЛА позволяет на начальных этапах проектирования оценить характер этих зависимостей и получить первое приближение взлетной массы ЛА и потребного запаса топлива. Как правило, первое приближение взлетной массы вычисляется по прототипам проектируемого изделия. В [5] была представлена одна из возможных реализованных в МФО схем построения первого приближения взлетной массы  $m_0^*$  путем анализа выборки прототипов из базы данных

ДЕРЕВО КОНСТРУКЦИИ ЛА	ВЕСОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЕРЕВА КОНСТРУКЦИИ	
Наименование	ID	Формула
ВЗЛЕТНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ ЛА	m0	m_пуст + m_пол_нагр
ПУСТОЕ ИЗДЕЛИЕ	m_пуст	m_пл + m_су + m_об
ПЛАНЕР	m_пл	m_кр + m_ф + m_оп + m_впу
КРЫЛО	m_кр	Fкр ( m0, S_ом_кр, ... )
ФЮЗЕЛЯЖ	m_ф	Fф ( m0, S_ом_ф, ... )
ОПЕРЕНИЕ	m_оп	Fоп ( m0, S_ом_оп, ... )
ВЗЛЕТНО-ПОСАДОЧНЫЕ УСТРОЙСТВА (ВПУ)	m_впу	Fвпу ( m0, Dк, ... )
СИЛОВАЯ УСТАНОВКА	m_су	N дв * M дв * K уст * M сист_су
ОБОРУДОВАНИЕ	m_об	Fоб ( m0, M_брэо, ... )
ПОЛЕЗНАЯ НАГРУЗКА	m_пол_нагр	m_сн + m_нагр + m_т
СНАРЯЖЕНИЕ	m_сн	Fсн ( m0, Nэк, m_нагр, ... )
ЦЕЛЕВАЯ НАГРУЗКА	m_нагр	Mцел_нагр
ТОПЛИВО	m_т	Fт ( m0, Lкрейс, ... )

Рис. 3 Дерево конструкции ЛА

готовых изделий. При этом уравнение весового баланса рассматривалось в виде

$$m_0^* = m_{пуст}^* + m_{пол\_нагр}^*,$$

где

$$m_{пол\_нагр}^* = m_{нагр} + m_{сн} + m_{т}.$$

Здесь  $m_{пуст}^*$  — масса пустого ЛА;  $m_{пол\_нагр}^*$  — масса полезной нагрузки, включающая массу целевой нагрузки  $m_{нагр}$ , задаваемую в ТТЗ, массу снаряжения ЛА и массу топлива  $m_{т}$ , потребного для полета с заданной нагрузкой на расстояние  $L_{крейс}$  в крейсерском режиме. При этом в результате анализа выборки прототипов вычислялись

$$m_{пол\_нагр}^* = f(L_{крейс}; m_{нагр});$$

$$m_{пуст}^* = g(m_{пол\_нагр}^*).$$

На этапе анализа компоновочной схемы ЛА, когда известны конструктивные параметры основных агрегатов ЛА, итерационный процесс весового анализа позволяет получить второе и, возможно, последующие приближения взлетной массы и других весовых характеристик ЛА. При этом основное соотношение весового баланса преобразуется в систему уравнений, в которой участвуют весовые параметры всех агрегатов, составляющих компоновочную схему. В МФО такая система уравнений реализована в рамках основной весовой модели ЛА — дерева конструкции изделия. Дерево конструкции представляет собой иерархическую структуру, построенную на множестве агрегатов ЛА с помощью бинарного отношения вхождения. Под агрегатами здесь понимаются детали, узлы и системы, а также собранные конструкции определенной конфигурации, в том числе такие, как планер, пустое изделие, самолет во взлетной конфигурации, последний слу-

жит корнем дерева конструкции. Дерево конструкции выстраивается постепенно в процессе развития проекта.

На рис. 3 показано дерево конструкции ЛА на начальном этапе формирования облика. Выделенные серым цветом агрегаты на этом этапе не имеют подчиненных вершин, которые называют терминальными агрегатами.

С каждой вершиной дерева конструкции связаны соотношения, определяющие массу, статические моменты центра массы и моменты инерции соответствующего агрегата. На правой панели рис. 3 показаны соотношения для масс. Для нетерминальных вершин дерева конструкции эти соотношения выстраиваются автоматически суммированием по подчиненным агрегатам. Что касается терминальных агрегатов, то весовые параметры некоторых из них задаются или следуют из ТТЗ, как, например, масса целевой нагрузки и масса размещаемого на борту специального оборудования. Это может относиться и к такому важному агрегату, как силовая установка ЛА, если проект заранее ориентирован на определенный тип серийного или разрабатываемого двигателя. Весовые характеристики большинства агрегатов конструкции ЛА, как правило, заранее не могут быть известны и должны вычисляться в процессе формирования облика. Существуют различные подходы к построению алгоритмов их вычисления. Например, путем анализа прототипов, или по габаритным моделям агрегатов, или по специально разработанным так называемым «весовым формулам». Многие из этих методов описаны в учебных пособиях по проектированию ЛА (например, в [9]). Пользователи могут выбрать любые из них или использовать свои наработки. В МФО реал-

лизованы механизмы включения широкого класса соотношений в систему уравнений весового баланса. Иерархическая структура дерева конструкции позволяет свести приведенную выше систему соотношений к одному уравнению весового баланса относительно переменной  $m_0$ :

$$m_0 = m_{кр}(m_0) + m_{ф}(m_0) + m_{оп}(m_0) + m_{впу}(m_0) + \\ + m_{об}(m_0) + m_{сy}(m_0) + m_{т}(m_0) + \\ + m_{сн}(m_0, m_{нагр}) + m_{нагр}.$$

При заданной массе целевой нагрузки  $m_{нагр}$  и заданных зависимостях остальных слагаемых от  $m_0$  это уравнение может быть решено численно. В дереве конструкции аналогичные соотношения могут быть выписаны и для статических моментов, и для моментов инерции. Положения центров масс и моменты инерции агрегатов дерева конструкции могут быть приближенно получены из габаритных моделей агрегатов. Заметим, что детализация дерева конструкции позволяет, изменяя состав терминальных вершин, последовательно уточнять значения весовых характеристик ЛА. Уточнение весовых характеристик ЛА происходит на всех этапах жизненного цикла ЛА. Задача весового анализа на этапе формирования облика состоит в построении информационной весовой модели ЛА [10, 11], которая может быть использована при решении многих задач весового проектирования [12], производства и эксплуатации [13].

#### 4 Аэродинамический анализ на этапе формирования облика

Под аэродинамическим анализом на этапе формирования облика понимается оценка значений ЛТХ и ВПХ ЛА. Для расчета ЛТХ и ВПХ не требуется моделирование движения ЛА вокруг центра масс, поэтому могут быть использованы упрощенные уравнения движения центра масс ЛА:

$$\dot{X} = V \cos \theta \cos \Psi; \quad \dot{H} = V \sin \theta; \quad \dot{Z} = V \cos \theta \sin \Psi;$$

$$m\dot{V} = P(M, H)\aleph \cos \alpha - c_x(M, H, c_y(M, \alpha))qS - \\ - mg(\sin \theta + f_{тр}(H));$$

$$mV\dot{\theta} = (P(M, H)\aleph \sin \alpha + c_y(M, \alpha)qS) \cos \gamma - \\ - mg \cos \theta;$$

$$mV \cos \theta \dot{\Psi} = (P(M, H)\aleph \sin \alpha + c_y(M, \alpha)qS) \sin \gamma; \\ \dot{\eta} m_{т} = c_p(M, H)P(M, H)\aleph.$$

Здесь  $X$ ,  $H$  и  $Z$  — координаты центра масс полета в земной системе координат;  $V$  — скорость

полета;  $\theta$  — угол тангажа траектории полета;  $\Psi$  — угол рыскания;  $m$  — текущая масса самолета;  $\eta$  — безразмерная фазовая переменная, обозначающая долю выработанного на текущий момент топлива ( $m = m_0 - \eta m_{т}$ , где  $m_0$  — взлетная масса самолета;  $m_{т}$  — стартовая масса расходуемого топлива). В качестве управления траекторией полета в приведенной системе уравнений приняты угол атаки и угол крена самолета —  $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$  и  $\gamma \in [-\pi, \pi]$ , а  $\aleph \in [0, 1]$  — параметр управления тягой силовой установки;  $M = V/a(H)$  — число Маха;  $q = \rho(H)V^2/2$  — скоростной напор набегающего потока, где  $a(H)$  и  $\rho(H)$  — скорость звука и плотность воздуха на высоте  $H$ ;  $f_{тр}(H) = 0$  при  $H > 0$  — коэффициент трения при движении самолета по земле. Изменяемая в полете масса самолета здесь обозначена маленькой буквой  $m$ , чтобы не путать ее с традиционным обозначением числа Маха.

Состав контролируемых ЛТХ зависит от тех задач ЛА, которые определены в ТТЗ, но всегда это диапазон скоростей и практический потолок возможного полета, дальность крейсерского полета, максимальная взлетная масса и максимальная допустимая перегрузка. Для маневренных самолетов это могут быть скороподъемность, разгонные характеристики, минимальный радиус разворота и другие производные от этих характеристики. Кроме того, обязательно контролируется длина взлета и посадки ЛА. Средствами МФО все эти характеристики могут быть вычислены на основе анализа приведенных уравнений движения при заданных режимах полета и заданных законах управления.

В уравнения движения явно входят такие параметры, как характерная площадь несущей поверхности  $S$ , взлетная масса  $m_0$  и  $m_{т}$  — стартовая масса расходуемого топлива. Это центральные параметры, вокруг которых строится в дальнейшем целая стратегия весового проектирования, в том числе весовой контроль и весовой анализ. Кроме этих параметров в уравнения ЛА явно входят коэффициент подъемной силы  $c_y(M, \alpha)$  и коэффициент лобового сопротивления  $c_x(M, H, c_y)$ , зависящий от действующей подъемной силы. Для приближенных расчетов эту зависимость принято интерполировать «параболической полярой»:

$$c_x(M, H, c_y) \cong c_{x0}(M, H) + A(M)c_y^2,$$

где  $c_{x0}$  — коэффициент лобового сопротивления при нулевой подъемной силе;  $A(M)$  — коэффициент отвала поляры. В свою очередь, лобовое сопротивление при нулевой подъемной силе складывается из сопротивления аэродинамического трения и сопротивления давления:

$$c_{x0}(M, H) = c_{x0-тр}(M, H) + c_{x0-д}(M).$$

Все агрегаты ЛА, которые по компоновочной схеме находятся в набегающем воздушном потоке, вносят свой вклад в лобовое сопротивление ЛА

$$c_{x0}(M, H) = \sum_i c_{x0.i}(M, H, S, \bar{d}_i)$$

и рассчитываются как функции своих конструктивных параметров  $\bar{d}_i$ . Площадь  $S$  — характерная площадь, относительно которой рассчитываются аэродинамические коэффициенты всех агрегатов компоновочной схемы. Нужно сделать замечание, что к вычисленным аэродинамическим коэффициентам должны быть прибавлены (или удалены) поправки, связанные с влиянием агрегатов друг на друга.

Коэффициент подъемной силы компоновочной схемы ЛА также может быть оценен поагрегатно

и затем просуммирован в соответствии с их вкладом в общее значение

$$c_y(M) = \sum_i c_{y.i}(M, S, \bar{d}_i).$$

Кроме суммарного коэффициента подъемной силы поагрегатное вычисление позволяет оценить положение центра приложения подъемной силы ЛА (положение аэродинамического фокуса). В МФО реализованы алгоритмы приближенного расчета аэродинамических коэффициентов, основанные на использовании известных из литературы экспериментальных данных, проверенных на теоретических моделях и апробированных в реальном проектировании. На рис. 4 приведены результаты расчета квадратичной поляры.

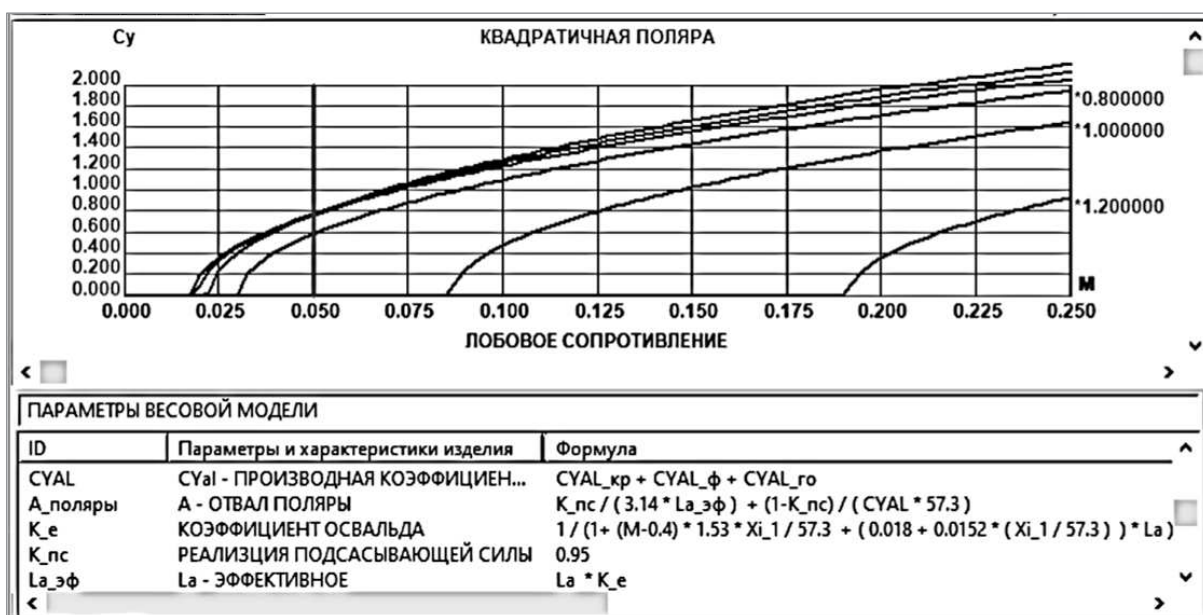


Рис. 4 Пример расчета квадратичной поляры

Параметры и характеристики изделия	ID	Формула
ВЫСОТНО-СКОРОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СУ	РАЗДЕЛ_5	
СТАРТОВАЯ ТЯГА ДВИГАТЕЛЕЙ СУ	P0	68000.000000
ТЯГА ДВИГАТЕЛЕЙ СУ от М и Н (даН)	P	$P0 * K4 * K5 * \sigma_{vx} \wedge 1.25 * (1 - 0.18 * (M \wedge 1.2) * (m_{дв} \wedge 0.65)) * ((1 + 0.2 * (M \wedge 2)) - 0.001 * (M \wedge 3))$
ПРОДОЛЖЕНИЕ ФОРМУЛЫ 1 P(М,Н)	K4	$(Atm\_Ro(H) / Atm\_Ro(0.0)) * (1 - 0.041 * m_{дв} * M) / (1 - 0.74 * (M \wedge 1.5) * (1 - (Atm\_Ro(H) / Atm\_Ro(0.0))))$
ПРОДОЛЖЕНИЕ ФОРМУЛЫ 2 P(М,Н)	K5	$((Atm\_T(0.0) / Atm\_T(H)) \wedge (0.35 * M)) * (1 - M * (pi\_k_{дв} \wedge 0.2) / (0.361 * (T_r \wedge 0.4)))$
СТАРТОВЫЙ УДЕЛЬНЫЙ РАСХОД ТОПЛИВА(кр ...	ср0_уд	$0.053 * \text{Sqrt}(T_r) * (1 + 0.05 * m_{дв} - \text{Sqrt}(0.14 * m_{дв})) / (pi\_k_{дв} \wedge 0.25)$
УДЕЛЬНЫЙ РАСХОД ТОПЛИВА от М и Н (кг / д...	ср_уд	$ср0\_уд * (1.28 - Atm\_T(H) * 0.001 * (1 + 0.2 * (M \wedge 2))) * (1 - 0.001 * (M \wedge 3)) * (1 + 0.162 * m_{дв} * ((Atm\_Ro(H) / Atm\_Ro(0.0)) \wedge 0.5))$
ПРОДОЛЖЕНИЕ ФОРМУЛЫ РАСХОДА (М,Н)	K6	$0.93 * (\sigma_{vx} \wedge 0.25) * ((Atm\_T(0.0) / Atm\_T(H)) \wedge (0.5 * M)) * (1 - M * (pi\_k_{дв} \wedge 0.2) / (0.361 * (T_r \wedge 0.4)))$
Степень двухконтурности двигателя	m_дв	6
Температура газа перед компрессором (К)	T_r	1400
Суммарная степень повышения давления	pi_k_дв	20
Коэффициент восстановления давления	sigma_vx	0.97

Рис. 5 Формулы для расчета тяги и расхода топлива силовой установки

Энергетические характеристики ЛА в уравнениях движения задаются функциями максимальной тяги и удельного секундного расхода топлива:  $P(M, H)$  и  $C_p(M, H)$ . Эти характеристики могут быть заранее известны, если марка двигателей, устанавливаемых на самолете, задана в ТТЗ как условие проектирования. В противном случае для определения характеристик силовой установки нужны специальные модели. Базовыми числовыми характеристиками силовой установки служат максимальная стартовая тяга  $P_0 = P(0, 0)$  и удельный секундный расход топлива в крейсерском режиме  $C_{p_{кр}}$ . Если заданы эти параметры, то

$$P(M, H) = P_0 \bar{P}(M, H);$$

$$C_p(M, H) = C_{p_{кр}} \bar{C}_p(M, H).$$

В МФО использованы в качестве одного из возможных вариантов расчета характеристик силовой установки формулы, приведенные в [14], зависящие от основных параметров двухконтурных турбореактивных двигателей. Фрагменты формул показаны на рис. 5.

## 5 Анализ тактико-технических характеристик на этапе формирования облика летательного аппарата

Основной задачей анализа компоновочной схемы ЛА считается проверка соответствия ТТХ требованиям, сформулированным в ТТЗ. Расчет ТТХ базируется на моделях геометрического, весового и аэродинамического анализа, о которых шла речь выше. В качестве примера рассмотрим требования, связанные с обеспечением равномерного горизонтального полета в диапазоне скоростей на разных высотах  $[V_{\min}^*(H), V_{\max}^*(H)]$ . Эти требования сводятся к следующим соотношениям:

$$V_{\min}(H) = \sqrt{\frac{2mg}{\rho(H^*)Sc_{y_{\max}}}} \leq V_{\min}^*(H);$$

$$V_{\max}(H) = \sqrt{\frac{2P_{\max}(H)}{\rho(H)Sc_{x0}(H)}} \geq V_{\max}^*(H).$$

Требования к маневренности самолета могут задаваться значениями максимально допустимых перегрузок ( $n_y^*$ ), максимальной угловой скорости ( $\dot{\Psi}_{\max}^*$ ) или минимального радиуса разворота ( $R_{\min}^*$ ) в горизонтальной плоскости:

$$n_{y_{\max}}(V, H, m) = \frac{qS}{mg} c_{y_{\max}}(M) \geq n_y^*;$$

$$\dot{\Psi}_{\max}(V, H, m) = \frac{g}{V} \sqrt{n_{y_{\max}}^2 - 1} \geq \dot{\Psi}_{\max}^*;$$

$$R_{\min}(V, H, m) = \frac{V}{\dot{\Psi}_{\max}(V, H, m)} \leq R_{\min}^*.$$

Требования к транспортным характеристикам самолета, как правило, задаются в значениях максимальной дальности крейсерского горизонтального полета на крейсерской высоте ( $H_{кр}$ ) и с постоянной крейсерской скоростью ( $V_{кр}$ ). Требования дальности крейсерского полета соответствуют соотношению

$$L(V_{кр}, H_{кр}) = V_{кр} \int_0^1 \frac{K(M_{кр}, H_{кр}, m) m_T d\eta}{c_p(M_{кр}, H_{кр}) mg} \geq L_{кр}^*,$$

где  $K(M_{кр}, H_{кр}, m)$  — так называемое аэродинамическое качество, зависящее от текущего режима полета:

$$K(M_{кр}, H_{кр}, m) = \frac{c_y(M_{кр}, H_{кр}, m)}{c_x(M_{кр}, H_{кр}, m) c_y(M_{кр}, H_{кр}, m)}.$$

Для обеспечения различных сценариев анализа компоновочных схем в МФО реализованы механизмы параметрических расчетов различных функциональных зависимостей, поиска экстремумов функций, интегрирования и ряд других операций. Кроме того, реализована визуализация результатов расчетов.

Как было сказано выше, в ТТЗ могут быть сформулированы критерии, по которым следует оптимизировать анализируемую компоновочную схему. В данной работе вопросы методов и моделей оптимизации не рассматривались, хотя инструменты разработанного МФО позволяют проводить многовариантный синтез и анализ компоновочных схем. Отдельные параметры структурно-параметрической модели в МФО могут быть объявлены варьируемыми в определенных диапазонах значений, определяющих область поиска наилучших решений. Критерии оптимизации также могут быть заданы на уровне описания моделей компоновочных схем. Задание критериев оптимизации считается более тонкой задачей, которой в свое время было посвящено много работ. В частности, для многоцелевых маневренных самолетов в работах [15–17] сформулирован ряд принципов постановки задач оптимизации и выбора критериев. Для гражданских самолетов основные критерии лежат в области минимизации затрат при их производстве и экономической эффективности их эксплуатации. На уровне формирования облика такие задачи могут



быть поставлены, и в рамках механизмов разработанного модуля, по мнению авторов, могут быть реализованы.

## 6 Заключение

Представленные в данной работе модели анализа компоновочных схем ЛА вместе с описанными в [5] моделями синтеза представляют собой пример единой структурно-параметрической модели для решения задачи формирования облика ЛА. Традиционно формирование облика, т. е. разработка первоначального общего вида самолета, считалось исключительно творческим актом, чуть ли не искусством. Одним из первых математическую, вычислительную сущность этой задачи понял замечательный авиаконструктор О. С. Самойлович. Он вместе с математиком академиком П. С. Краснощековым создал направление автоматизации задач формирования облика самолетов, которое можно определить как математическое проектирование ЛА. Тогда стало понятно, что формирование облика ЛА — многокритериальная задача математического программирования, правда, очень большой размерности, в которой задействованы несколько моделей из разных предметных областей. Модуль формирования облика ЛА, представленный авторами настоящей статьи, во многом основан на тех идеях, которые были заложены в работах О. С. Самойловича, П. С. Краснощекова, их сотрудников и единомышленников. Модуль формирования облика ЛА был разработан с применением технологии «Генератор проектов», описанной в [18].

## Литература

1. *Егер С. М., Лисейцев И. К., Самойлович О. С.* Основы автоматизированного проектирования самолетов. — М.: Машиностроение, 1986. 232 с.
2. *Вышинский Л. Л., Самойлович О. С., Флёров Ю. А.* Программный комплекс формирования облика летательных аппаратов // Задачи и методы автоматизированного проектирования в авиастроении. — М.: ВЦ АН СССР, 1991. С. 24–42.
3. *Самойлович О. С.* Формирование области существования самолета в пространстве обобщенных проектных параметров. — М.: МАИ, 1994. 55 с.
4. *Вышинский Л. Л., Флёров Ю. А.* Теоретические основы формирования весового облика самолета // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 93–102. doi: 10.14357/19922264210413. EDN: UGQQLU.
5. *Вышинский Л. Л., Флёров Ю. А.* Модели синтеза компоновочной схемы в задаче формирования облика самолёта // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 61–70. doi: 10.14357/19922264240109. EDN: DSPGKV.
6. *Вышинский Л. Л., Флёров Ю. А., Широков Н. И.* Автоматизированная система весового проектирования самолетов // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 1. С. 18–30. doi: 10.14357/19922264180103. EDN: YTTTBQ.
7. *Микеладзе В. Г., Титов В. М.* Основные геометрические и аэродинамические характеристики самолетов и ракет. — М.: Машиностроение, 1990. 144 с.
8. *Вышинский Л. Л., Флеров Ю. А.* Вычислительные модели в задачах проектирования топливных систем самолетов // Информационные технологии и вычислительные системы, 2022. № 2. С. 70–83. doi: 10.14357/20718632220208. EDN: ИННТИН.
9. *Шейнин В. М., Козловский В. И.* Весовое проектирование и эффективность пассажирских самолетов. — М.: Машиностроение, 1977. Т. 1. 343 с.
10. *Вышинский Л. Л., Флёров Ю. А.* Информационная модель весового облика летательных аппаратов // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 1. С. 50–56. doi: 10.14357/19922264210107. EDN: BTLLPF.
11. *Кантимиров С. А., Серебрянский С. А.* Весовое проектирование летательного аппарата на цифровой платформе в едином информационном пространстве жизненного цикла изделия // Управление развитием крупномасштабных систем: Сб. трудов XIV Междунар. конф. — М.: ИПУ РАН, 2021. С. 1151–1161. doi: 10.25728/2486.2021.63.53.001. EDN: ZLYWZK.
12. *Skobelev S. I., Strelets D. Yu., Kuryanskiy M. K., Vyshinskiy L. L., Grinev I. L.* Digital platform for aircraft weight design // Aerospace Systems, 2022. Vol. 5. Iss. 4. P. 577–589. doi: 10.1007/s42401-022-00154-w.
13. *Вышинский Л. Л., Курьянский М. К., Флеров Ю. А.* Цифровая модель весового паспорта летательного аппарата // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 4. С. 3–10. doi: 10.14357/19922264190401. EDN: XXZPSJ.
14. Проектирование самолетов / Под ред. М. А. Погосяна. — 5-е изд. — М.: Инновационное машиностроение, 2018. 864 с.
15. *Краснощеков П. С., Федоров В. В., Флеров Ю. А.* Элементы математической теории принятия проектных решений // Автоматизация проектирования, 1996. № 2. С. 15–23.
16. *Платунов В. С.* Методология системных военно-научных исследований авиационных комплексов. — М.: Дельта, 2005. 344 с.
17. *Мышкин Л. В.* Прогнозирование развития авиационной техники: теория и практика. — М.: Физматлит, 2006. 304 с.
18. *Флёров Ю. А., Вышинский Л. Л.* Автоматизация проектирования прикладных информационных вычислительных систем // Информационные технологии и вычислительные системы, 2018. № 3. С. 29–41. doi: 10.14357/20718632180303. EDN: YCMETJ.

Поступила в редакцию 07.05.24

## MODELS FOR ANALYZING LAYOUT SCHEMES IN THE PROBLEM OF AIRCRAFT DESIGN

L. L. Vyshinsky and Yu. A. Flerov

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The problems of analyzing the characteristics of the designed aircraft at the stage of its appearance formation are considered. The characteristic feature of these tasks is the lack of sufficient information about the aircraft design which appears only at the stages of preliminary and detailed design. In essence, these are the tasks of technical forecasting for a rather limited set of parameters that can be operated by the designer at this stage. The main task of image formation is synthesis of the aircraft layout scheme and construction of its parametric representation. Composition diagrams in design practice represent one of the main design documents and serve as a prototype of the developed product. The present work is devoted to the presentation of mathematical models designed to build estimates of weight, aerodynamic, flight and technical, take-off, and landing characteristics of the aircraft using the parameters of its layout and the subsequent verification of compliance of the obtained estimates with the requirements for the designed product.

**Keywords:** mathematical modeling; design automation; aircraft; aircraft layout; aircraft characteristics

**DOI:** 10.14357/19922264240301

**EDN:** VWQBMD

### References

1. Eger, S. M., I. K. Liseytshev, and O. S. Samoylovich. 1986. *Osnovy avtomatizirovannogo proektirovaniya samoletov* [Fundamentals of aircraft automated design]. Moscow: Mashinostroenie. 232 p.
2. Vyshinsky, L. L., O. S. Samoylovich, and Yu. A. Flerov. 1991. Programmnyy kompleks formirovaniya oblika letatel'nykh apparatov [Program complex for forming the appearance of aircraft]. *Zadachi i metody avtomatizirovannogo proektirovaniya v aviastroenii* [Tasks and methods of computer-aided design in aircraft industry]. Moscow: CC USSR AS. 24–42.
3. Samoylovich, O. S. 1994. *Formirovanie oblasti sushchestvovaniya samoleta v prostranstve obobshchennykh parametrov* [Formation of the area of existence of the aircraft in the space of generalized design parameters]. Moscow: MAI. 55 p.
4. Vyshinsky, L. L., and Yu. A. Flerov. 2021. Teoreticheskie osnovy formirovaniya vesovogo oblika samoleta [Theoretical foundation of formation of aircraft weight appearance]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(4):93–102. doi: 10.14357/19922264210413. EDN: UGQQLU.
5. Vyshinsky, L. L., and Yu. A. Flerov. 2024. Modeli sinteza komponovochnoy skhemy v zadache formirovaniya oblika samoleta [Synthesis models of layout scheme in the task of forming an aircraft image]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):61–70. doi: 10.14357/19922264240109. EDN: DSPGKV.
6. Vyshinsky, L. L., Yu. A. Flerov, and N. I. Shirokov. 2018. Avtomatizirovannaya sistema vesovogo proektirovaniya samoletov [Computer-aided system of aircraft weight design]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(1):18–30. doi: 10.14357/19922264180103. EDN: YTTRBQ.
7. Mikeladze, V. G., and V. M. Titov. 1990. *Osnovnye geometricheskie i aerodinamicheskie kharakteristiki samoletov i raket* [Basic geometric and aerodynamic characteristics of aircraft and missiles]. Moscow: Mashinostroenie. 144 p.
8. Vyshinsky, L. L., and Yu. A. Flerov. 2022. Vychislitel'nye modeli v zadachakh proektirovaniya toplivnykh sistem samoletov [Computational models in aircraft fuel system design problems]. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy* [J. Information Technologies Computing Systems] 2:70–83. doi: 10.14357/20718632220208. EDN: IHHTIH.
9. Sheynin, V. M., and V. I. Kozlovskiy. 1977. *Vesovoe proektirovanie i effektivnost' passazhirskikh samoletov* [Weight design and efficiency of passenger aircraft]. Moscow: Mashinostroenie. Vol. 1. 343 p.
10. Vyshinsky, L. L., and Yu. A. Flerov. 2021. Informatsionnaya model' vesovogo oblika letatel'nykh apparatov [Information model of aircraft weight profile]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(1):50–56. doi: 10.14357/19922264210107. EDN: BTLPLF.
11. Kantimirov, S. A., and S. A. Serebryanskiy. 2021. Vesovoe proektirovanie letatel'nogo apparata na tsifrovoy platforme v edinom informatsionnom prostranstve zhiznennogo tsikla izdeliya [Weight design of an aircraft on a digital platform in a single information space of the product life cycle]. *14th Conference (International) on Management of Large-Scale System Development*. Moscow: IPU RAN. 1151–1161. doi: 10.25728/2486.2021.63.53.001. EDN: ZLYWZK.
12. Skobelev, S. I., D. Yu. Strelets, M. K. Kuryanskii, L. L. Vyshinskii, and I. L. Grinev. 2022. Digital platform for aircraft weight design. *Aerospace Systems* 5(4):577–589. doi: 10.1007/s42401-022-00154-w.
13. Vyshinsky, L. L., M. K. Kuryansky, and Yu. A. Flerov. 2019. Tsifrovaya model' vesovogo pasporta letatel'nogo

- apparata [Digital model of the aircraft's weight passport]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(4):3–10. doi: 10.14357/19922264190401. EDN: XXZPSJ.
14. Pogosyan, M. A., ed. 2018. *Proektirovanie samoletov* [Aircraft design]. 5th ed. Moscow: Innovatsionnoe mashinostroenie. 864 p.
  15. Krasnoshchekov, P. S., V. V. Fedorov, and Yu. A. Flerov. 1997. Elementy matematicheskoy teorii prinyatiya proektnykh resheniy [Elements of the mathematical theory of design decision making]. *Avtomatizatsiya proektirovaniya* [Design Automation] 1:15–18.
  16. Platonov, V. S. 2005. *Metodologiya sistemnykh voyenno-nauchnykh issledovaniy aviatsionnykh kompleksov* [Methodology of systemic military scientific research of aviation complexes]. Moscow: Delta. 344 p.
  17. Myshkin, L. V. 2006. *Prognozirovanie razvitiya aviatsionnoy tekhniki: teoriya i praktika* [Forecasting the development of aviation technology: Theory and practice]. Moscow: Fizmatlit. 304 p.
  18. Flerov, Yu. A., and L. L. Vyshinskiy. 2018. Avtomatizatsiya proektirovaniya prikladnykh informatsionnykh vychislitel'nykh sistem [Computer-aided design of applied information computing systems]. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy* [J. Information Technologies Computing Systems] 3:29–41. doi: 10.14357/20718632180303. EDN: YCMETJ.

*Received May 7, 2024*

## Contributors

**Vyshinsky Leonid L.** (b. 1941) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; vyshinsky@mail.ru

**Flerov Yuri A.** (b. 1942) — Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Deputy Director, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; fler@ccas.ru

# СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

И. Н. Синицын<sup>1</sup>

**Аннотация:** Статья посвящена методическому обеспечению статистического моделирования дифференциальных стохастических систем (СтС), не разрешенных относительно производных (НРОП). Дан обзор работ в области аналитического моделирования стохастических процессов (СтП) в СтС НРОП. Получены две теоремы приведения стохастических функционально-дифференциальных уравнений к дифференциальному. Изложен эйлеров метод аппроксимации для дифференциальных уравнений Ито с гауссовскими и пуассоновскими шумами. Представлены три теоремы, уточняющие алгоритмы Эйлера численного интегрирования в рамках сильной и слабой аппроксимации распределений. В их основу положена обобщенная формула Ито для дифференцирования нелинейных функций, гауссовских и пуассоновских шумов, а также формулы для плотностей распределений соответствующих случайных величин при аппроксимации соответствующих интегралов. Особое внимание уделено подходам к аппроксимации стохастических интегралов в случае негладких функций в СтС НРОП. Проведен методологический анализ уточняющих алгоритмов различной степени точности для детерминированных и случайных составляющих. Представлены выводы и предложены направления дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** аналитическое моделирование; методическое обеспечение; система, стохастически не разрешенная относительно производных; статистическое моделирование; стохастическая система, не разрешенная относительно производной (СтС НРОП)

DOI: 10.14357/19922264240302

EDN: WWMEOT

## 1 Введение

В [1–4] рассмотрены вопросы аналитического моделирования процессов в СтС НРОП. Особое внимание в них уделено нормальным (гауссовским) СтП. В [5] предложены методы нормализации систем, стохастически НРОП. Теория распределений с инвариантной мерой в СтС НРОП развита в [6]. В [7] дано обобщение [1–4] на случай СтС НРОП со случайными параметрами. Для СтС НРОП, допускающих приведение к системе дифференциальных и конечных стохастических уравнений, могут быть использованы известные методы численного интегрирования [8–10]. В [11, 12] предложен ряд численных методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений, основанных на использовании обобщенной формулы Ито, а также канонических разложениях СтП.

Рассмотрим методическое обеспечение численного интегрирования уравнений дифференциальных СтС НРОП, приводимых к дифференциальному СтС. В разд. 2 даны сведения из теории приведения функционально-дифференциальных уравнений к дифференциальному. Разделы 3 и 4 содержат основные результаты для приведенных

СтС НРОП. В разд. 5 приведены основные выводы, а также обобщения на случай общих неявных детерминированных и стохастических непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем.

## 2 Дифференциальные стохастические системы, не разрешенные относительно производных

Рассмотрим сначала дифференциальную СтС с нелинейностями, описываемыми гладкими детерминированными скалярными функциями:

$$\Phi = \Phi(t, Y_t, \dot{Y}_t, \dots, Y_t^{(k)}, U_t) = 0, \quad Y(t_0) = Y_0, \\ \dot{Y}(t_0) = \dot{Y}_0, \dots, Y^{(k)}(t_0) = Y_0^{(k)}. \quad (1)$$

При этом уравнение нелинейного формирующего фильтра (ФФ) для стохастических возмущений  $U_t$  возьмем в виде, разрешенном относительно возмущений

$$\dot{U}_t = a^U(t, U_t) + b^U(t, U_t)V_t^U, \quad U(t_0) = U_0. \quad (2)$$

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский авиационный институт, sinitsin@dol.ru

Здесь  $a^U = a^U(t, U_t)$  и  $b^U(t, U_t) — (n^Y \times 1)$ - и  $(n^Y \times n^V)$ -мерные функции;  $V_t^U$  — белый шум в строгом смысле [11], допускающий представление вида

$$V_t^U = \dot{W}_t^U, \quad W_t^U = W_0^U(t) + \int_{R_0^q} c^U(\rho) P^0(t, d\rho),$$

где  $\nu_t$  — его интенсивность:

$$\nu_t = \nu_t^W = \nu_t^{W_0} + \int_{R_0^q} c^U(\rho) [c^U(\rho)]^T \nu_P(t, \rho) d\rho;$$

$c^U = c^U(\rho)$  — известная векторная функция той же размерности, что и  $W_0^U$ ; интеграл при любом  $t \geq \geq t_0$  представляет собой стохастический интеграл по центрированной пуассоновской мере  $P^0(t, \mathcal{A})$ , независимой от  $W_0^U$  и имеющей независимые значения на попарно непересекающихся множествах;  $\mathcal{A}$  — борелевское множество пространства  $R_0^q$  с выколотым началом;  $\nu_t^W, \nu_t^{W_0}$  и  $\nu_P$  — интенсивности СтП  $W_t^U, W_0^U$  и  $P^0$ . Уравнение (2) понимается в смысле Ито и имеет единственное решение в среднем квадратичном [11].

Для гладких функций в (1), допускающих стохастические производные Ито до  $h$ -го порядка, выполним следующие преобразования. Будем дифференцировать сполна по  $t$  левые части уравнений (1) по обобщенной формуле Ито [11, 12] до тех пор, пока не появятся производные белого шума. В результате получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\Phi = 0, \quad \dot{\Phi} = 0, \dots, \Phi^{(h)} = 0. \quad (3)$$

Далее введем вектор  $Z_t = [Y_t^T X_t^T]^T$ , составленный из  $Y_t = [Y_t^T \dot{Y}_t^T \dots Y_t^{(k-1)T}]^T$  и вспомогательного вектора  $X_t$ , определяемого уравнениями (3). В результате придем к уравнениям, разрешенным относительно дифференциалов, следующего вида:

$$dZ_t = a^Z dt + b^Z dW_0 + \int_{R_0^q} c^Z P^0(t, du), \quad (4)$$

где  $a^Z = a^Z(t, Z_t)$ ;  $b^Z = b^Z(t, Z_t)$ ;  $c^Z = c^Z(t, Z_t, u)$ .

Таким образом, имеем следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** Пусть нелинейная негауссовская СтС (1), (2), НРОП  $k$ -го порядка, удовлетворяет условиям:

1<sup>0</sup> функции (1) допускают обобщенные стохастические дифференциалы Ито вплоть до  $h$ -го порядка включительно;

2<sup>0</sup> уравнение ФФ (2) разрешено относительно возмущений  $U_t$ , имеет единственное среднеквадратичное решение.

Тогда система (1), (2) приводима к системе, разрешенной относительно производных (4).

Положим, что в (1) стохастическое возмущение  $U_t$  представляет собой автокоррелированный СтП и описывается стохастическим дифференциальным уравнением следующего ФФ:

$$\begin{aligned} U_t^{(n)} + \sum_{k=n-m}^{n-1} \alpha_k^U(t, U_t, \dot{U}_t, \dots, U_t^{(n-m-1)}) U_t^{(k)} + \\ + \alpha_0^U(t, U_t, \dot{U}_t, \dots, U_t^{(n-1)}) = \\ = \sum_{h=1}^m \beta_h^U(t, U_t, \dot{U}_t, \dots, U_t^{(n-m-1)}) V_t^{(h)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $n = n^U$  — порядок дифференциального уравнения, причем  $0 < m < n$ ;  $\alpha_0^U, \alpha_k^U$  и  $\beta_k^U$  — известные функции отмеченных переменных.

Пусть компоненты СтП  $Y_t, \dot{Y}_t, \dots, Y_t^{(k)}$  более гладкие, чем  $U_t$ . В этом случае для приведения (1), (5) к (4) можно применить способ, основанный на дифференцировании (1) и исключении  $U_t$  и ее производных, не содержащих белого шума из уравнений (1) и уравнений, полученных из него дифференцированием (5) по обобщенной формуле Ито [11, 12]. В результате придем к следующему уравнению вида (4):

$$d\bar{Z}_t = \bar{a}^Z dt + \bar{b}^Z dW_0 + \int_{R_0^q} \bar{c}^Z P^0(t, du), \quad (6)$$

где  $\bar{a}^Z = \bar{a}^Z(t, \bar{Z}_t)$ ;  $\bar{b}^Z = \bar{b}^Z(t, \bar{Z}_t)$ ;  $\bar{c}^Z = \bar{c}^Z(t, \bar{Z}_t, u)$ .

Аналогично [1–6] рассматривается случай векторных дифференциальных СтС НРОП.

Таким образом, получаем следующий результат.

**Теорема 2.2.** Пусть нелинейная негауссовская СтС (1), (5) удовлетворяет условиям:

1<sup>0</sup> функции (1) допускают обобщенные стохастические дифференциалы Ито вплоть до  $h$ -го порядка включительно;

2<sup>0</sup> уравнение ФФ (5) имеет единственное среднеквадратичное решение;

3<sup>0</sup> СтП  $Y_t, \dot{Y}_t, \dots, Y_t^{(k)}$  более гладки, чем возмущение  $U_t$ .

Тогда система (1), (5) приводима к системе (6).

Для гладких вектор-функций (3) конечные уравнения в (1) допускают гладкую замену переменных и приведение исходных дифференциальных уравнений СтС НРОП к системе, состоящей из дифференциального векторного дифференциального

стохастического уравнения Ито и конечного векторного уравнения вида

$$dY_t = a^Y(t, Y_t) dt + b^Y(t, Y_t) dW_0 + \int_{R_0^q} c^Y(t, Y_t, u) P^0(t, du) \quad (7)$$

и конечным уравнениям вида

$$\Psi(Y_t, X_t, t) = 0. \quad (8)$$

### 3 Метод Эйлера

Следуя [11, 12], заменим интеграл по переменной  $u$  в (7) соответствующей интегральной суммой. В результате (7) заменится уравнением

$$dY = a(Y, t) dt + b(Y, t) dW_0 + \sum_{i=1}^N c_i(Y, t) dP_i^0, \quad (9)$$

где  $c_i(y, t)$  —  $p$ -мерные векторные функции, представляющие собой значения функции  $c(y, t, v)$  в некоторых средних точках  $u_i$  соответствующих элементов  $A_i$  разбиения  $r$ -мерного шара достаточно большого радиуса;  $u_i \in A_i$  ( $i = \overline{1, N}$ );  $P_i^0(t)$  — центрированные простые пуассоновские СтП:

$$P_i^0(t) = P^0([0, t], A_i) - \mu([0, t], A_i), \quad i = \overline{1, N}.$$

Интенсивности этих СтП определяются через математическое ожидание  $\mu(\Delta, A)$  пуассоновской меры  $P(\Delta, A)$  по формуле

$$\nu_i(t) = \frac{d\mu([0, t], A_i)}{dt}.$$

Простейший способ замены уравнения (9) разностным уравнением состоит в замене всех дифференциалов элементами интегральных сумм:

$$Y((n+1)h) - Y(nh) = a(Y(nh), nh)h + b(Y(nh), nh) [W_0((n+1)h) - W_0(nh)] + \sum_{i=1}^N c_i(Y(nh), nh) [P_i^0((n+1)h) - P_i^0(nh)].$$

Положив

$$\begin{aligned} \bar{Y}_n &= Y(nh); \\ \varphi_n(\bar{Y}_n) &= Y(nh) + a(Y(nh), nh)h; \\ \psi_{1n}(\bar{Y}_n) &= b(Y(nh), nh); \\ \psi_{in}(\bar{Y}_n) &= c_{i-1}(Y(nh), nh); \\ V_{1n} &= W_0((n+1)h) - W_0(nh); \\ V_{in} &= P_{i-1}^0((n+1)h) - P_{i-1}^0(nh), \quad i = \overline{2, N+1}, \end{aligned}$$

получим стохастическое разностное уравнение

$$\bar{Y}_{n+1} = \varphi_n(\bar{Y}_n) + \sum_{i=1}^{N+1} \psi_{in}(\bar{Y}_n) V_{in}.$$

Вводя блочную матрицу  $p \times (m+N)$

$$\psi_n(\bar{Y}_n) = [\psi_{1n}(\bar{Y}_n) \cdots \psi_{N+1,n}(\bar{Y}_n)]$$

и  $(m+N)$ -мерный случайный вектор

$$V_n = [V_{1n}^T \ V_{2n} \ \cdots \ V_{N+1,n}^T]^T,$$

можем записать полученное разностное уравнение коротко в виде

$$\bar{Y}_{n+1} = \varphi_n(\bar{Y}_n) + \psi_n(\bar{Y}_n) V_n. \quad (10)$$

Случайные векторы  $V_n$  образуют последовательность независимых случайных векторов  $\{V_n\}$ , причем блоки  $V_{1n}$  векторов  $V_n$  имеют нормальное (гауссовское) распределение  $\mathfrak{N}(0, \bar{G}_n)$ , где

$$\bar{G}_n = \int_{nh}^{(n+1)h} \nu_0(\tau) d\tau \cong \nu_0(nh)h;$$

$\nu_0(t)$  — интенсивность винеровского СтП  $W_0(t)$ ; скалярные блоки  $V_{in}$  ( $i = \overline{2, N+1}$ ) имеют пуассоновские распределения с параметрами

$$\mu_{in} = \int_{nh}^{(n+1)h} \nu_i(\tau) d\tau \cong \nu_i(nh)h.$$

Ковариационная матрица  $G_n$  вектора  $V_n$  представляет собой блочно-диагональную матрицу:

$$G_n = \begin{bmatrix} \bar{G}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{3n} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N+1,n} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (10) определяет  $\bar{Y}_{n+1}$  при данном  $\bar{Y}_n$  с точностью до  $h$  в детерминированном слагаемом  $\varphi_n(\bar{Y}_n)$  и с точностью до  $\sqrt{h}$  в случайном слагаемом  $\psi_n(\bar{Y}_n) V_n$  (**теорема 3.1**).

### 4 Более точные методы

**4.1.** Методы  $h^2$  и  $h^{3/2}$  для приведенных уравнений (7) и (8) с точностью до  $h^2$  в детерминиро-

ванном слагаемом и  $h^{3/2}$  в случайном слагаемом, следуя [11, 12], дают следующую **теорему 4.1**:

$$\bar{Y}_{n+1} = \varphi_n(\bar{Y}_n) + \psi_n(\bar{Y}_n, V_n^{(1)})V_n. \quad (11)$$

Входящие в уравнения (11) величины определяются формулами:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\bar{Y}_n) = & \bar{Y}_n + \left[ a(\bar{Y}_n, nh) - \sum_{j=1}^N c_j(\bar{Y}_n, nh)\nu_{jn} \right] h + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ a_t(\bar{Y}_n, nh) - \sum_{j=1}^N c_{jt}(\bar{Y}_n, nh)\nu_{jn} + \right. \\ & + \left[ a_y(\bar{Y}_n, nh)^T - \sum_{j=1}^N c_{jy}(\bar{Y}_n, nh)^T \nu_{jn} \right] \left[ a(\bar{Y}_n, nh) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^N c_j(\bar{Y}_n, nh)\nu_{jn} \right] + \frac{1}{3} \left[ a_{yy}(\bar{Y}_n, nh) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^N c_{jyy}(\bar{Y}_n, nh)\nu_{jn} \right] : \sigma(\bar{Y}_n, nh) \left. \right\} h^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{1n}(\bar{Y}_n) = & b(\bar{Y}_n, nh) + \frac{1}{2} \left[ a_y(\bar{Y}_n, nh)^T - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^N c_j(\bar{Y}_n, nh)^T \nu_{jn} \right] b(\bar{Y}_n, nh); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{in}(\bar{Y}_n) = & \\ = & c_{i-1}(\bar{Y}_n, nh) + \left[ \Delta_{i-1}a_n - \sum_{j=1}^N \Delta_{i-1}c_{jn}\nu_{jn} \right] h; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'_{1n}(\bar{Y}_n, V_n^{(1)}) = & \left\{ b(\bar{Y}_n, nh) + \left[ a(\bar{Y}_n, nh)^T - \right. \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^N c_j(\bar{Y}_n, nh)^T \nu_{jn} \right] \frac{\partial}{\partial y} b(\bar{Y}_n, nh) + \\ & \left. + V_{1n}^T b(\bar{Y}_n, nh)^T \frac{\partial}{\partial y} b(\bar{Y}_n, nh) \right\} h + \sum_{j=1}^N \Delta_j b_n V_{j+1,n}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'_{in}(\bar{Y}_n, V_n^{(1)}) = & \left\{ c_{i-1,t}(\bar{Y}_n, nh) + \right. \\ & \left. + c_{i-1,y}(\bar{Y}_n, nh)^T \left[ a(\bar{Y}_n, nh) - \sum_{j=1}^N c_j(\bar{Y}_n, nh)\nu_{jn} \right] \right\} h + \\ & + c_{i-1,y}(\bar{Y}_n, nh)^T b(\bar{Y}_n, nh) V_{1,n} + \sum_{j=1}^N \Delta_j c_{j-1,n} V_{j+1,n}; \end{aligned}$$

$$\psi''_{1n}(\bar{Y}_n) = \frac{1}{2} [b_{yy}(\bar{Y}_n, nh) : \sigma(\bar{Y}_n, nh)];$$

$$\psi''_{in}(\bar{Y}_n) = \frac{1}{2} [c_{i-1,yy}(\bar{Y}_n, nh) : \sigma(\bar{Y}_n, nh)];$$

$$V_{1n} = \Delta W_n = W_0((n+1)h) - W_0(nh);$$

$$V_{in} = \Delta P_{i-1,n} = P_{i-1}((n+1)h) - P_{i-1}(nh), \quad i = \overline{2, N};$$

$$V'_{1n} = \int_{nh}^{(n+1)h} \frac{\tau - nh}{h} dW_0(\tau);$$

$$V''_{1n} = \int_{nh}^{(n+1)h} \left( \frac{\tau - nh}{h} \right)^2 dW_0(\tau);$$

$$\left. \begin{aligned} V'_{in} &= \int_{nh}^{(n+1)h} \frac{\tau - nh}{h} dP_{i-1}^0(\tau); \\ V''_{in} &= \int_{nh}^{(n+1)h} \left( \frac{\tau - nh}{h} \right)^2 dP_{i-1}^0(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$i = \overline{2, N+1}.$

Здесь введены следующие обозначения для векторных функций:

$$[\varphi_{yy} : \sigma]_k = \text{tr} [\varphi_{kyy} \sigma], \quad \sigma = b\nu_0(t)b^T.$$

Величина  $\varphi_{yy} : \sigma$  в случае матричной функции  $\varphi$  представляет собой матрицу, элементами которой служат следы произведений на матрицу  $\sigma$  матриц вторых производных соответствующих элементов матрицы  $\varphi$  по компонентам вектора  $y$  на матрицу  $\sigma$ :

$$[\varphi_{yy} : \sigma]_{kl} = \text{tr} [\varphi_{klyy} \sigma].$$

Далее обозначим

$$V_n^{(1)} = [V_{1n}^T \ V_{2n} \ \dots \ V_{n+1}]^T$$

и введем блочную матрицу

$$\begin{aligned} \psi_n(\bar{Y}_n, V_n^{(1)}) = & \\ = & [\psi_{1n}(\bar{Y}_n) \ \psi'_{1n}(\bar{Y}_n, V_n^{(1)}) \ \psi''_{1n}(\bar{Y}_n) \ \dots \\ & \dots \ \psi_{N+1,n}(\bar{Y}_n) \ \psi'_{N+1,n}(\bar{Y}_n, V_n^{(1)}) \ \psi''_{N+1,n}(\bar{Y}_n)] \end{aligned}$$

и блочный случайный вектор

$$\begin{aligned} V_n = & [V_{1n}^T \ V_{1n}'^T \ V_{1n}''^T \ V_{2n}^T \ V_{2n}'^T \ V_{2n}''^T \ \dots \\ & \dots \ V_{N+1,n} \ V_{N+1,n}' \ V_{N+1,n}'' ]^T. \end{aligned}$$

**Замечание 4.1.** Для полного определения распределения случайного вектора  $V_n$  в (11) достаточно найти ковариационную матрицу нормально распределенного случайного вектора  $[V_{in}^T \ V_{in}'^T \ V_{in}''^T]^T$ .

Пользуясь известными формулами ковариационных и взаимных ковариационных матриц стохастических интегралов, находим блоки ковариационной матрицы  $K_{1n}$  случайного вектора  $[V_{in}^T V_{in}'^T V_{in}''^T]^T$ :

$$K_{1n,11} = MV_{1n}V_{1n}^T = \int_{nh}^{(n+1)h} \nu_0(\tau) d\tau \cong \nu_0 \left( nh + \frac{h}{2} \right) h;$$

$$K_{1n,12} = MV_{1n}V_{1n}'^T = \int_{nh}^{(n+1)h} \frac{\tau - nh}{h} \nu_0(\tau) d\tau \cong \frac{1}{2} \nu_0 \left( nh + \frac{h}{2} \right) h;$$

$$K_{1n,13} = MV_{1n}V_{1n}''^T = \int_{nh}^{(n+1)h} \left( \frac{\tau - nh}{h} \right)^2 \nu_0(\tau) d\tau \cong \frac{1}{3} \nu_0 \left( nh + \frac{h}{2} \right) h;$$

$$K_{1n,21} = K_{1n,12}; \quad K_{1n,31} = K_{1n,13};$$

$$K_{1n,23} = MV_{1n}V_{1n}'^T = \int_{nh}^{(n+1)h} \left( \frac{\tau - nh}{h} \right)^3 \nu_0(\tau) d\tau \cong \frac{1}{4} \nu_0 \left( nh + \frac{h}{2} \right) h;$$

$$K_{1n,31} = K_{1n,13}; \quad K_{1n,32} = K_{1n,23};$$

$$K_{1n,33} = MV_{1n}''V_{1n}''^T = \int_{nh}^{(n+1)h} \left( \frac{\tau - nh}{h} \right)^4 \nu_0(\tau) d\tau \cong \frac{1}{5} \nu_0 \left( nh + \frac{h}{2} \right) h.$$

**Замечание 4.2.** Практически целесообразно аппроксимировать стохастические интегралы от неслучайных функций в (12), определяющие величины  $V_{in}'$  и  $V_{in}''$  ( $i = \overline{2, N+1}$ ), с помощью аналога интегральной теоремы о среднем для стохастических интегралов:

$$V_{in}' = \int_{nh}^{(n+1)h} \frac{\tau - nh}{h} dP_{i-1}^0(\tau) \cong \frac{\int_{nh}^{(n+1)h} ((\tau - nh)/h) \nu_{i-1}(\tau) d\tau}{\int_{nh}^{(n+1)h} \nu_{i-1}(\tau) d\tau} \Delta P_{i-1,n} \cong \frac{1}{2} \Delta P_{i-1,n} = \frac{1}{2} V_{in};$$

$$V_{in}'' = \int_{nh}^{(n+1)h} \left( \frac{\tau - nh}{h} \right)^2 dP_{i-1}^0(\tau) \cong \frac{\int_{nh}^{(n+1)h} ((\tau - nh)/h)^2 \nu_{i-1}(\tau) d\tau}{\int_{nh}^{(n+1)h} \nu_{i-1}(\tau) d\tau} \Delta P_{i-1,n} \cong \frac{1}{3} \Delta P_{i-1,n} = \frac{1}{3} V_{in}, \quad i = \overline{2, N+1}.$$

**4.2.** В уточнении метода  $h^2$  и  $h^{3/2}$  при выводе уравнения (11) были допущены две небольшие неточности. Во-первых, при замене  $\bar{Y}_\tau$  величиной  $\bar{Y}_n + (\tau - nh)\Delta Y_n/h$  случайные функции  $b(Y_\tau, \tau)$  и  $c_i(Y_\tau, \tau)$ , независимые от  $dW_0(\tau)$  и  $dP_i^0(\tau)$  в силу конструкции интеграла Ито, были заменены неслучайными функциями, зависящими от случайного параметра  $\Delta Y_n$ , который зависит от значений  $dW_0(\tau)$  и  $dP_i^0(\tau)$  в интервале  $(nh, (n+1)h)$ . Во-вторых, если  $c_i(y, t) \neq 0$  хотя бы при одном  $i$ , реализации СтП  $Y(t)$  имеют разрывы первого рода в случайных точках, несмотря на его среднеквадратичную непрерывность. Поэтому линейную интерполяцию данного СтП, строго говоря, проводить нельзя. В условиях **теоремы 4.2** первую из этих неточностей можно устранить двумя способами [11, 12]. Первый состоит в замене интерполяции СтП  $Y(t)$  экстраполяцией, что равноценно замене  $\Delta Y_n$  в получаемом выражении для  $Y_\tau$  величиной  $\Delta Y_{n-1}$ . Однако это приведет к появлению в правой части разностного уравнения величин  $\bar{Y}_{n-1}$  и  $V_{n-1}^{(1)}$ , т. е. к замене уравнения первого порядка разностным уравнением второго порядка. Второй способ состоит в отказе от интерполяции процесса  $Y(t)$  на интервале  $(nh, (n+1)h)$  и непосредственном выражении приращений функций  $a(Y_\tau, \tau)$ ,  $b(Y_\tau, \tau)$  и  $c_i(Y_\tau, \tau)$  на малом интервале  $(nh, (n+1)h)$  по обобщенной формуле Ито с заменой в ней дифференциалов приращениями. При этом способе устраняется и вторая допущенная неточность. Но полученное таким путем разностное уравнение будет более сложным. В него войдут случайные величины, представляющие собой двойные интегралы по компонентам винеровского СтП  $W(t) = W_0(t)$  и по пуассоновским СтП:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{nh}^{(n+1)h} \int_{nh}^{\tau} dW_j(\sigma) dW_j(\tau); \quad \int_{nh}^{(n+1)h} \int_{nh}^{\tau} dP_i(\sigma) dP_j^0(\tau); \\ & \int_{nh}^{(n+1)h} \int_{nh}^{\tau} dP_i^0(\sigma) dW_j(\tau); \quad \int_{nh}^{(n+1)h} \int_{nh}^{\tau} dP_j^0(\sigma) dW_i(\tau). \end{aligned} \right\} (13)$$



**Замечание 4.3.** Распределения этих случайных величин найти чрезвычайно сложно, и только первые две из них легко вычисляются при  $j = i$ :

$$\int_{nh}^{(n+1)h} \int_{nh}^{\tau} dW_i(\sigma) dW_i(\tau) = \frac{[\Delta W_{in}]^2 - \nu_{ii}(nh + h/2)h}{2};$$

$$\int_{nh}^{(n+1)h} \int_{nh}^{\tau} dP_i^0(\sigma) dP_i^0(\tau) = \frac{[\Delta P_{in}]^2 - \Delta P_{in}}{2}.$$

Что касается второй неточности, то она не может существенно повлиять на результат, так как вероятность появления скачка пуассоновского процесса на достаточно малом интервале  $(nh, (n + 1)h)$  ничтожно мала.

**4.3.** В условиях **теоремы 4.3** точность аппроксимации стохастического дифференциального уравнения разностным можно повышать и дальше. В частности, в одном из способов достаточно выразить  $a(Y_\tau, \tau)$ ,  $b(Y_\tau, \tau)$  и  $c_i(Y_\tau, \tau)$  на интервале  $(nh, (n + 1)h)$  интегральной формулой Ито, соответствующей дифференциальной формуле:

$$\begin{aligned} a(Y_\tau, \tau) = & a(\bar{Y}_n, nh) + \int_{nh}^{\tau} a_t(Y_s, s) + \\ & + a_y(Y_s, s)^T \left[ a(Y_s, s) - \sum_{i=1}^N c_i(Y_s, \nu_i(s)) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} a_{yy}(Y_s, s) : \sigma(Y_s, s) \right] ds + \\ & + \int_{nh}^{\tau} a_y(Y_s, s)^T b(Y_s, s) dW_0(s) + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{nh}^{\tau} [a(Y_s + c_i(Y_s, s), s) - a(Y_s, s)] dP_i^0(s) \quad (14) \end{aligned}$$

(формулы для  $b(Y_\tau, \tau)$  и  $c_i(Y_\tau, \tau)$  аналогичны). В результате получим правую часть разностного уравнения с точностью до  $h^3$  в детерминированном (при данном  $\bar{Y}_n$ ) слагаемом и  $h^{5/2}$  в случайном слагаемом. Процесс уточнения разностного уравнения, соответствующего данному стохастическому дифференциальному уравнению, можно продолжать неограниченно. Каждое новое уточнение требует существования производных функций  $a$ ,  $b$  и  $c_i$  все более высоких порядков.

**Замечание 4.4.** Для уточнения разностного уравнения (11) можно применить и другой способ, а именно: можно выразить подынтегральные функции в (13) и аналогичных формулах для  $b(Y_\tau, \tau)$

и  $c_i(Y_\tau, \tau)$  их выражениями по обобщенной формуле Ито, заменив в ней дифференциалы приращениями. При этом в разностное уравнение войдут тройные интегралы по компонентам винеровского СтП  $W_0(t)$  и пуассоновским СтП  $P_i(t)$ . Для дальнейшего уточнения аппроксимации стохастического дифференциального уравнения разностным в этом случае следует подынтегральные функции в (14) и в соответствующих формулах для  $b(Y_\tau, \tau)$  и  $c_i(Y_\tau, \tau)$ , в свою очередь, представить интегральной формулой Ито, а затем уже применять дифференциальную формулу Ито с заменой дифференциалов приращениями. Данный СтП можно продолжать неограниченно, и в итоге он приведет к представлению СтП  $Y(t)$  на интервале  $(nh, (n + 1)h)$  стохастическими аналогами формулы Тейлора. При этом в разностное уравнение войдут кратные стохастические интегралы по компонентам винеровского СтП  $W_0(t)$  и по пуассоновским СтП  $P_i(t)$ . Нахождение распределения этих интегралов представляет практически непреодолимые трудности. И лишь интегралы любой кратности по одной и той же компоненте винеровского процесса  $W_0(t)$  или по одному и тому же пуассоновскому процессу  $P_i(t)$  вычисляются очень просто.

**Замечание 4.5.** Чтобы избежать вычисления производных функций  $a(Y_\tau, \tau)$ ,  $b(Y_\tau, \tau)$  и  $c_i(Y_\tau, \tau)$  при применении двух изложенных способов аппроксимации стохастического дифференциального уравнения разностным, можно рекомендовать заменить их отношениями конечных приращений, например на интервале  $(nh, (n + 1)h)$  по  $t$  и на интервалах  $(\bar{Y}_{nk}, \bar{Y}_{nk} + a_k(\bar{Y}_n, nh)h)$  по компонентам вектора  $y$ .

**Замечание 4.6.** Полученные разностные уравнения можно использовать как при теоретических исследованиях, так и для численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений СтС НРОП. При этом нужно знать распределение всех случайных величин, входящих в разностные уравнения. В данном случае разностные уравнения будут представлять собой так называемую сильную аппроксимацию стохастических дифференциальных уравнений. При численном интегрировании такая аппроксимация нужна, когда требуется получить реализации СтП  $Y(t)$ . Однако часто нет нужды в получении реализаций СтП, а достаточно иметь лишь оценки моментов или математических ожиданий каких-либо функций от значения СтП  $Y(t)$  в определенный момент. В таких случаях можно отказаться от использования точных распределений входящих в разностные уравнения случайных величин, а заменить их какими-нибудь более простыми распределениями с теми же моментными характеристиками. Например, нормально распределенную

скалярную величину с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $D$  можно заменить дискретной случайной величиной, принимающей два значения  $\pm\sqrt{D}$  с вероятностями  $1/2$ . При замене случайных величин на величины с более простыми распределениями разностное уравнение будет представлять собой слабую аппроксимацию стохастического дифференциального уравнения.

## 5 Выводы и обобщения

Методическое обеспечение статистического моделирования для различных уровней точности аппроксимации, основанное на численном интегрировании уравнений дифференциальных СтС НРОП, приводимых к дифференциальным системам, применимо только к приведенным системам (7) и (8) с гладкими нелинейными функциями.

Для негладких нелинейных функций в исходных уравнениях (1) в рамках корреляционной теории, как показано в [3–6], целесообразно сразу применить регрессионную линеаризацию или полиномиальную аппроксимацию. В результате придем к уравнениям (7) и (8), линеаризованным или полиномиальным стохастическим уравнениям, параметрически зависящим от первых двух вероятностных методов переменных  $X$  и  $Y$ . Эти вероятностные моменты определяются или непосредственно статистическим, или аналитическим моделированием путем численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений для вероятностных моментов первого и второго порядка [2, 11, 12]. Для полиномиальных моделей аппроксимации приходится решать обыкновенные дифференциальные уравнения для параметризованных одно- и многомерных плотностей. Такие методы моделирования называют комбинированными вероятностно-статистическими. К последним также относят методы моделирования СтС НРОП со случайными параметрами [7] как на основе канонических представлений случайных функций, так и прямого статистического моделирования уравнений для параметров одно- и многомерных распределений. Соответствующие примеры приведены в [7].

Представляет интерес развитие вероятностно-статистических методов моделирования для систем, стохастически НРОП [5], а также непрерывно-дискретных систем, не разрешенных относительно производных (разностей), в том числе на основе канонических разложений и интегральных канонических представлений [12]. Особый интерес представляют системы с неявной переменной детерминированной и неявной стохастической структурой.

## Литература

1. Синецын И. Н. Аналитическое моделирование широкополосных процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 1. С. 3–10. doi: 10.14357/19922264170101. EDN: YOCMVL.
2. Синецын И. Н. Параметрическое аналитическое моделирование процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Системы и средства информатики, 2017. Т. 27. № 1. С. 21–45. doi: 10.14357/08696527170102. EDN: YODCZL.
3. Sinityn I. N. Analytical modeling and estimation of normal processes defined by stochastic differential equations with unsolved derivatives // J. Mathematics Statistical Research, 2021. Vol. 3. Iss. 1. Art. 139. 7 p. doi: 10.36266/JMSR/139.
4. Синецын И. Н. Аналитическое моделирование и оценивание нестационарных нормальных процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Системы и средства информатики, 2022. Т. 32. № 2. С. 58–71. doi: 10.14357/08696527220206. EDN: YMGERJ.
5. Синецын И. Н. Нормализация систем, стохастически не разрешенных относительно производных // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 1. С. 32–38. doi: 10.14357/19922264220105. EDN: LDFJJB.
6. Синецын И. Н. Аналитическое моделирование распределений с инвариантной мерой в стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 2–10. doi: 10.14357/19922264230101. EDN: QWXVXC.
7. Синецын И. Н. Аналитическое моделирование стохастических систем, не разрешенных относительно производных, со случайными параметрами // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 1. С. 4–22. doi: 10.14357/08696527240101. EDN: ZPTXJI.
8. Kloeden P., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1992. 636 p. doi: 10.1007/978-3-662-12616-5.
9. Артемьев А. А., Михайличенко А. М., Синецын И. Н. Статистическое моделирование срочных финансовых операций. — Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1996. Кн. 1, 2. 280 с.
10. Кузнецов Д. Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. — СПб: СПбГУ, 2001. 712 с.
11. Пугачёв В. С., Синецын И. Н. Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2000; 2004. 1000 с.
12. Синецын И. Н. Канонические представления случайных функций. Теория и применения. — 2-е изд. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2023. 816 с.

Поступила в редакцию 18.01.24

# STATISTICAL MODELING OF DIFFERENTIAL STOCHASTIC SYSTEMS WITH UNSOLVED DERIVATIVES

I. N. Sinitsyn<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>2</sup>Moscow State Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation

**Abstract:** The paper is dedicated to statistical modeling methodological support for differential stochastic systems with unsolved derivatives (StS USD). The basic results are: (i) two theorems concerning reduction of stochastic functional-differential equations to stochastic Ito equations; (ii) Euler approximation method for stochastic differential equations with Gaussian and Poisson noises; (iii) three theorems concerning numerical algorithms of various accuracy for StS USD with smooth nonlinearities; and (iv) two algorithms for StS USD with nonsmooth nonlinearities. Special attention is paid to methodological aspects of numerical statistical analysis of deterministic and random components in the cases of weak and strong approximation. Directions for further research are given.

**Keywords:** analytical (probabilistic) modeling; methodological support; statistical modeling; stochastic systems (StS); StS with unsolved derivatives (StS USD)

**DOI:** 10.14357/19922264240302

**EDN:** WWMEOT

## References

1. Sinitsyn, I. N. 2017. Analiticheskoe modelirovanie shirokopolosnykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Analytical modeling of wide band processes in stochastic systems with unsolved derivatives]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(1):3–10. doi: 10.14357/19922264170101. EDN: YOVMVL.
2. Sinitsyn, I. N. 2017. Parametricheskoe analiticheskoe modelirovanie protsessov v stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Parametric analytical modeling of wide band processes in stochastic systems with unsolved derivatives]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 27(1):21–45. doi: 10.14357/08696527170102. EDN: YODCZL.
3. Sinitsyn, I. N. 2021. Analytical modeling and estimation of normal processes defined by stochastic differential equations with unsolved derivatives. *J. Mathematics Statistics Research* 3(1):139. 7 p. doi: 10.36266/JMSR/139.
4. Sinitsyn, I. N. 2022. Analiticheskoe modelirovanie i otsenivanie nestatsionarnykh normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Analytical modeling and estimation of nonstationary normal processors with unsolved derivatives]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 32(2):58–71. doi: 10.14357/08696527220206. EDN: YMGERJ.
5. Sinitsyn, I. N. 2022. Normalizatsiya sistem, stokhasticheski ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Normalization of systems with stochastically unsolved derivatives]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(1):32–38. doi: 10.14357/19922264220105. EDN: LDFJJB.
6. Sinitsyn, I. N. 2023. Analiticheskoe modelirovanie raspredeleniy s invariantnoy meroy v stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Analytical modeling of distributions with invariant measure in stochastic systems with unsolved derivatives]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(1):2–10. doi: 10.14357/19922264230101. EDN: QWVXVC.
7. Sinitsyn, I. N. 2024. Analiticheskoe modelirovanie stokhasticheskikh sistem, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh, so sluchaynymi parametrami [Analytical modeling of stochastic systems with random parameters and unsolved derivatives]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(1):4–22. doi: 10.14357/08696527240101. EDN: ZPTXJI.
8. Kloeden, P. E., and E. Platen. 1992. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag. 636 p. doi: 10.1007/978-3-662-12616-5.
9. Artemyev, A. A., A. M. Mikhaylichenko, and I. N. Sinitsyn. 1996. *Statisticheskoe modelirovanie srochnykh finansovykh operatsiy* [Statistical modeling of urgent financial transactions]. Novosibirsk: CC SB RAS. 280 p.
10. Kuznetsov, D. F. 2001. *Chislennoe integrirovaniye stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy* [Numerical integration of stochastic differential equations]. Saint Petersburg: SPbGU. 712 p.
11. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 2001. *Stochastic systems: Theory and applications*. Singapore: World Scientific. 908 p.
12. Sinitsyn, I. N. 2023. *Kanonicheskie predstavleniya sluchaynykh funktsiy. Teoriya i primeneniya* [Canonical expansions of random functions. Theory and application]. Moscow: TORUS PRESS. 816 p.

Received January 18, 2024

## Contributor

**Sinitsyn Igor N.** (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; professor, Moscow State Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

# УСЛОВНО-ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

И. Н. Синицын<sup>1</sup>

**Аннотация:** Для наблюдаемых дифференциальных гауссовских стохастических систем (СтС), не разрешенных относительно производных (НРОП), со случайными параметрами в виде интегральных канонических представлений (ИКП) и приводимых к дифференциальным СтС, разработано методическое обеспечение и алгоритм условно-оптимальной фильтрации и анализа точности фильтров. Дан обзор результатов в области субоптимальных (СОФ) и условно-оптимальных фильтров (УОФ) и приведены необходимые сведения из корреляционной теории ИКП и многокомпонентных (МК) ИКП. Особое внимание уделено регрессионной линеаризации посредством МК ИКП. Представлено методическое обеспечение и базовые алгоритмы УОФ для приведенных дифференциальных СтС НРОП. Для оценки точности УОФ используются среднеквадратичные регрессионные уравнения для условных вероятностных характеристик при фиксированном векторе случайных параметров, а МК ИКП применяется для получения безусловных характеристик для случайных переменных параметров на основе МКМ. В качестве примера рассмотрен УОФ для линейной СтС НРОП с параметрическим шумом. Определены направления дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** регрессионная среднеквадратичная линеаризация; стохастическая система, не разрешенная относительно производных (СтС НРОП); стохастический процесс (СтП); условно-оптимальный фильтр (УОФ)

**DOI:** 10.14357/19922264240303

**EDN:** XCXLGD

## 1 Введение

В [1] рассмотрены вопросы синтеза нормальных СОФ (НСОФ) для дифференциальных СтС НРОП. Представлены уравнения состояния и наблюдения нелинейных дифференциальных СтС НРОП. Синтез НСОФ выполнен при следующих условиях:

- (1) отсутствуют пуассоновские шумы в наблюдениях;
- (2) коэффициент при гауссовском шуме не зависит от состояния.

Подробно рассмотрен синтез НСОФ при аддитивных шумах в уравнениях состояния и наблюдения. В [2] для нелинейных интегро-дифференциальных СтС (ИДСтС), не разрешенных относительно производных и приводимых к дифференциальным методом сингулярных ядер, разработаны алгоритмы аналитического моделирования нормальных СтП, при этом нелинейность под интегралом может быть разрывной, а также синтез НСОФ для онлайн-обработки информации в ИДСтС. Предложены алгоритмы оценки качества НСОФ на основе теории чувствительности. В [3] разработано методическое обеспечение для негладких правых частей уравнений СтС НРОП. Рассмотрены

вопросы аналитического моделирования нормальных СтП на основе нелинейных регрессионных моделей. Особое внимание уделено методам гауссовской фильтрации и экстраполяции. Изучены вопросы условно-оптимальной фильтрации и экстраполяции для СтС НРОП с параметрическими шумами. В [4] разработано методическое и алгоритмическое обеспечение аналитического моделирования оценивания и идентификации для существенно нестационарных процессов (например, ударных) в СтС НРОП. Дан обзор профильных публикаций и изучены основные классы регрессионных уравнений СтС НРОП. Основные результаты:

- (1) для общего вида нелинейных СтС НРОП приведены оптимальные алгоритмы совместной фильтрации и распознавания;
- (2) для линейных гауссовских СтС НРОП получены простые алгоритмы;
- (3) для СтС НРОП, линейных относительно состояния  $X_t$  и нелинейных относительно наблюдений  $Y_t$ , получены соответствующие алгоритмы;
- (4) в случае 3 методом нормальной аппроксимации (МНА) получен простой алгоритм.

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, kafedra802@yandex.ru

Приводится иллюстративный пример скалярной нелинейной гауссовской СтС НРОП.

В [5] для наблюдаемых гауссовских дифференциальных СтС НРОП со случайными параметрами в виде ИКП, приводимых к дифференциальным СтС, разработано методическое обеспечение анализа точности субоптимальной фильтрации, основанное на МНА при фиксированном векторе параметров для условных вероятностных характеристик и регрессионной линеаризации посредством ИКП безусловных характеристик.

В настоящей статье рассматривается задача разработки методического обеспечения и алгоритмов условно-оптимальной фильтрации процессов в СтС НРОП со случайными переменными параметрами, описываемыми МК ИКП, и моделирования точности УОФ. В разд. 2 приводятся сведения по теории МК ИКП и их преобразованиям. Раздел 3 посвящен вопросам приведения дифференциальных СтС НРОП к дифференциальным СтС. Основные результаты по теории УОФ приводятся в разд. 4. В разд. 5 рассматривается УОФ в системах с мультипликативными шумами. Приводится иллюстративный пример. Заключение содержит основные выводы и направления дальнейших исследований.

## 2 Многокомпонентные интегральные канонические представления

Как известно [6], для векторного СтП  $X(t) = [X_1(t) \cdots X_n(t)]^T$  справедливы следующие выражения для однокомпонентных ИКП:

$$X(t) = m^x(t) + \int_{\Lambda} V(\lambda)x(t, \lambda) d\lambda,$$

$$X_h(t) = m_h^x(t) + \int_{\Lambda} V(\lambda)x_h(t, \lambda) d\lambda \quad (h = \overline{1, n}). \quad (1)$$

Здесь

$$m^x(t) = [m_1^x(t) \cdots m_n^x(t)]^T.$$

При этом ИКП матрицы ковариационных функций  $K^x(t, t') = [K_{hl}^x(t, t')]$  имеет вид

$$K_{hl}^x(t, t') = \int_{\Lambda} G(\lambda)x_h(t, \lambda)\overline{x_l(t', \lambda)} d\lambda \quad (h, l = \overline{1, n}), \quad (2)$$

где белый шум  $V(\lambda)$  определяется формулой

$$V(\lambda) = \sum_{h=1}^n \int_T \overline{a_h(t, \lambda)} X_h^0(t) dt,$$

а его интенсивность  $G(\lambda)$  равна

$$G(\lambda) = \sum_{h, l=1}^n \int_T \int_T \overline{a_h(t, \lambda)} a_l(t', \lambda') K_{hl}^x(t, t') dt dt' d\lambda'.$$

Для вычисления координатных функций  $x_h(t, \lambda)$  и функций  $a_h(t, \lambda)$  получим уравнения

$$x_h(t, \lambda) = \frac{1}{G(\lambda)} \sum_{l=1}^n \int_T a_l(t', \lambda) K_{hl}^x(t, t') dt' \quad (h = \overline{1, n}); \quad (3)$$

$$\sum_{h=1}^n \int_T \overline{a_h(t, \lambda)} x_h(t, \lambda') dt = \delta(\lambda - \lambda'),$$

$$\int_{\Lambda} \overline{a_l(t', \lambda)} x_h(t, \lambda) d\lambda = \delta_{hl}(t - t'). \quad (4)$$

Если параметр  $\lambda$  принимает все возможные значения, принадлежащие нескольким областям  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ , то такое МК ИКП векторного СтП  $X(t) = [X_1(t) \cdots X_n(t)]^T$  и матрицы ковариационных функций  $K^x(t, t') = [K_{hl}^x(t, t')]$  будут иметь вид:

$$X(t) = m^x(t) + \sum_{\rho=1}^r \int_{\Lambda_{\rho}} V_{\rho}(\lambda)x_{\rho}(t, \lambda) d\lambda,$$

$$X_h(t) = m_h^x(t) + \sum_{\rho=1}^r \int_{\Lambda_{\rho}} V_{\rho}(\lambda)x_{\rho h}(t, \lambda) d\lambda \quad (h = \overline{1, n}); \quad (5)$$

$$K_{hl}(t, t') = \sum_{\rho=1}^r \int_{\Lambda_{\rho}} G_{\rho}(\lambda)x_{\rho h}(t, \lambda)\overline{x_{\rho l}(t', \lambda)} d\lambda \quad (h, l = \overline{1, n}), \quad (6)$$

где  $V_1(\lambda), \dots, V_r(\lambda)$  — некоррелированные белые шумы, определяемые формулой

$$V_{\rho}(\lambda) = \sum_{h=1}^n \int_T \overline{a_{\rho h}(t, \lambda)} X_h^0(t) dt \quad (\lambda \in \Lambda_{\rho}; \quad \rho = \overline{1, r}).$$

Интенсивности белых шумов  $V_{\rho}(\lambda)$  определяются формулой:

$$G_{\rho}(\lambda) = \sum_{h, l=1}^n \int_T \int_T \overline{a_{\rho h}(t, \lambda)} a_{\rho l}(t', \lambda') K_{hl}^x(t, t') dt dt' d\lambda' \quad (\lambda \in \Lambda_{\rho}; \quad \rho = \overline{1, r}).$$

Для вычисления координатных функций  $x_{\rho h}(t', \lambda')$  и функций  $a_{\rho h}(t, \lambda)$  используются формулы:

$$x_{\rho h}(t, \lambda) = \frac{1}{G_{\rho}(\lambda)} \sum_{l=1}^n \int_T a_{\rho l}(t', \lambda) K_{hl}^x(t, t') dt' \quad (\lambda \in \Lambda_{\rho}; \quad \rho = \overline{1, r}; \quad h = \overline{1, n}); \quad (7)$$

$$\sum_{h=1}^n \int \overline{a_{\mu h}(t, \lambda)} a_{\rho h}(t, \lambda') dt = \delta_{\rho\mu} \delta(\lambda - \lambda') \quad (\lambda \in \Lambda_{\mu}; \quad \lambda' \in \Lambda_{\rho}; \quad \rho, \mu = \overline{1, r}); \quad (8)$$

$$\sum_{\rho=1}^r \int \overline{a_{\rho l}(t', \lambda)} x_{\rho h}(t, \lambda) d\lambda = \delta_{hl} \delta(t - t') \quad (h, l = \overline{1, n}),$$

выражающие необходимые и достаточные условия представления векторного СтП посредством МК ИКП.

**Теорема 2.1.** В условиях (3), (4) или (7), (8) из ИКП (1) или (5) вытекает МК ИКП матрицы его ковариационных функций (2) или (6).

**Теорема 2.2.** Если известно ИКП векторного СтП (1), то вектор математического ожидания и матрица ковариационных функций линейного преобразования  $Y_t(t) = A_t X_t$  допускают МК ИКП, определяемые формулами [6]:

$$X_p(t) = m_p^x(t) + \sum_{\rho=1}^r \int V_{\rho}(\lambda) x_{\rho p}(t, \lambda) d\lambda \quad (p = \overline{1, n});$$

$$Y_p(s) = m_p^y(s) + \sum_{\rho=1}^r \int V_{\rho}(\lambda) y_{\rho p}(s, \lambda) d\lambda \quad (p = \overline{1, m});$$

$$y_{\rho p}(s, \lambda) = \sum_{h=1}^n A_{ph} x_{\rho h}(t, \lambda) \quad (p = \overline{1, m});$$

$$K^y(s, s') = [K_{pq}^y(s, s')],$$

$$K_{pq}^y(s, s') = \sum_{\rho=1}^r \int G_{\rho}(\lambda) y_{\rho p}(s, \lambda) \overline{y_{\rho q}(s', \lambda)} d\lambda \quad (p, q = \overline{1, m}).$$

В задачах нелинейной корреляционной теории невырожденные безынерционные скалярные и векторные существенно нелинейные преобразования  $Y_t = \varphi_t(X_t)$  заменяют оптимальными в среднеквадратичном смысле линейными регрессионными преобразованиями [7, 8]. Задача эквивалентной регрессионной линейаризации детерминированной векторной нелинейной функции  $Y = \varphi(X)$  при использовании критерия минимума среднеквадратичной ошибки совпадает с классической задачей линейного регрессионного анализа. В этом случае оптимальная линейная среднеквадратичная регрессия вектора  $Y$  на вектор  $X$  определяется формулой

$$m^y(X) = gX + a;$$

где

$$g = K^{yx}(K^x)^{-1}; \quad (9)$$

$$a = m^y - gm^x.$$

Пусть  $f(y, x)$  — совместная плотность случайных векторов  $Y$  и  $X$ ;  $m^x$  и  $K^x$  — математическое ожидание и ковариационная матрица вектора  $x$ ,  $\det |K^x| \neq 0$ . Формула (9) при этом принимает вид:

$$g = K^{yx}(K^x)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} [m^y(x) - m^y] (x - m^x)^T (K^x)^{-1} f_1(x) dx, \quad (10)$$

где  $f_1(x)$  — плотность случайного вектора  $X$ . Эта формула вместе с приближенной формулой

$$m^y(X) \approx m^y + g(X - m^x)$$

дает статистическую линейаризацию регрессии  $m^y(X)$  по Казакову.

**Теорема 2.3.** Если существуют конечные моменты первого и второго порядка векторного СтП  $X = X(t)$ , то векторное нелинейное преобразование  $Y = \varphi(X)$  допускает линейную среднеквадратичную регрессию  $Y = Y(t)$  на  $X = X(t)$ , определяемую по Казакову формулами (9) и (10).

Первый подход к линейаризации основан на использовании формул для ИКП  $X_t$  в теореме 2.1 в случае одной области  $\Lambda$ , а второй подход — для нескольких областей  $\Lambda_{\rho}$ . При этом имеют место следующие утверждения.

**Теорема 2.4.** Оптимальная среднеквадратичная линейаризация посредством ИКП (теорема 2.1) первого рода определяется следующими формулами:

$$\varphi_t(X_t) \approx m_t^{(1)y}(X_t) = \varphi_{0t}^{(1)}(m_t^x, K_t^x) + g_t^{(1)}(m_t^x, K_t^x) \times \left[ \sum_{\rho=1}^r \int V_{\rho}(\lambda) x_{\rho t}(\lambda) d\lambda - m_t^x \right];$$

$$\varphi_{0t}^{(1)}(m_t^x, K_t^x) = M_N [\varphi(X_t)];$$

$$g_t^{(1)}(m_t^x, K_t^x) = K_t^{yx} (K_t^x)^{-1}.$$

Здесь  $M_N$  — символ математического ожидания для нормального распределения.

**Теорема 2.5.** Оптимальная среднеквадратичная линейаризация посредством МК ИКП (теорема 2.1) второго рода определяется следующими формулами:

$$\varphi_t(X_t) \approx m_t^{(2)y}(X_t) = \varphi_{0t}^{(2)}(m_t^x, K_{\rho t}^x) + \sum_{\rho=1}^r \int g_{\rho t}^{(2)}(m_t^x, K_{\rho t}^x) V_{\rho}(\lambda) x_{\rho t} d\lambda - g_t^{(2)}(m_t^x, K_t^x) m_t^x;$$

$$\begin{aligned}\varphi_{0t}^{(2)}(m_t^x, K_{\rho t}^x) &= M_N[\varphi(X_t)]; \\ g_{0t}^{(2)}(m_t^x, K_{\rho t}^x) &= K_{\rho t}^{yx} (K_{\rho t}^x)^{-1}.\end{aligned}$$

### 3 Стохастические системы, не разрешенные относительно производных

В качестве исходной СтС НРОП рассмотрим детерминированную векторную систему уравнений

$$\Phi = \Phi(t, X_t, \bar{X}_t, Y_t, \Theta_t, U_t) = 0. \quad (11)$$

Здесь  $X_t$  — вектор состояния;  $\bar{X}_t = [\dot{X}_t^T \dots (X^{(l)})^T]^T$  — расширенный вектор состояния, состоящий из  $l$ -го порядка производных по времени;  $Y_t$  — вектор наблюдений;  $\Theta_t$  — вектор случайных параметров, описываемый МК ИКП (см. разд. 2);  $\Phi$  — нелинейная функция переменных  $\bar{X}_t = [X_t^T \bar{X}_t^T U_t^T]^T$  и  $\Theta_t$ , допускающая при фиксированном векторе случайных параметров  $\Theta_t$  средне-квадратичную регрессионную линейризацию по  $\bar{X}_t$  и  $U_t$  вида

$$\Phi \approx \Phi_0 + \sum_{j=1} k_{\bar{X},j}^{\Phi} \bar{X}_t^j + k_U^{\Phi} U_t^0;$$

$U_t$  — вектор возмущений, связанный с гауссовским белым шумом  $V_0$  линейным уравнением формирующего фильтра:

$$\dot{U}_t = a_t^U U_t + a_{0t}^U + b_t^U V_0, \quad (12)$$

где  $MV_0 = 0$ ;  $M[\nu_0(t, \Theta_t)\nu_0(t, \Theta_t)^T] = \nu_0\delta(t - \tau)$ . Тогда при фиксированном  $\Theta$  и при условиях  $\det k_{\bar{X},l}^{\Phi} \neq 0$  и  $\det K_U^{\Phi} \neq 0$  дифференциальная СтС НРОП (11) приводится к дифференциальной СтС следующего вида (**теорема 3.1**):

$$\begin{aligned}\dot{X}_{1t} &= \bar{X}_{2t}, \dots, \dot{X}_{(l-1)t} = \bar{X}_{lt}, \\ \dot{X}_{lt} &= -\left(k_{\bar{X},l}^{\Phi}\right)^{-1} \bar{X}_t^{(l)} - \left(k_{\bar{X},l}^{\Phi}\right)^{-1} \left(k_U^{\Phi}\right)^{-1} U_t\end{aligned}$$

и (12). Матрицы коэффициентов  $k_{\bar{X},l}^{\Phi}$  и  $k_U^{\Phi}$  неявно зависят от первых двух вероятностных моментов  $\bar{X}_t$ .

Пусть объектовая СтС НРОП допускает приведение к дифференциальной, измерительная система вполне наблюдаема, наблюдения влияют на объект, а уравнение наблюдения разрешено относительно  $Y_t$ . Тогда в качестве исходных приведенных дифференциальных уравнений (объект и измерительная система) можно принять следующую:

$$\begin{aligned}\dot{X}_t &= A^n(X_t, Y_t, \Theta_t, t) = \\ &= a^n(X_t, Y_t, \Theta_t, t) + b^n(X_t, Y_t, \Theta_t, t) V_0(\Theta_t); \quad (13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_t = \dot{Y}_t &= B(X_t, Y_t, \Theta_t, t) = \\ &= a_1(X_t, Y_t, \Theta_t, t) + b_1(X_t, Y_t, \Theta_t, t) V_0(\Theta_t).\end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $a^n$ ,  $a_1$ ,  $b^n$  и  $b_1$  — известные векторно-матричные функции;  $V_0$  — векторный нормальный (гауссовский) белый шум интенсивности  $\nu_0 = \nu_0(\Theta_t)$ .

### 4 Основные результаты

**Теорема 4.1.** Пусть составной векторный СтП  $Z_t = [Y_t^T X_t^T \dot{X}_t^T]^T$  при фиксированном векторе случайных параметров  $\Theta_t$  определяется уравнениями (13), (14) и уравнением УОФ [8]:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}}_t &= C(Y_t, \hat{X}_t, \Theta_t, t) = \alpha_t \xi(Y_t, \hat{X}_t, \Theta_t, t) + \\ &+ \beta_t \eta(Y_t, \hat{X}_t, \Theta_t, t) \dot{Y}_t + \gamma_t,\end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_t m_1 + \beta_t m_2 + \gamma_t &= m_0, \\ m_0 &= M a^n, \quad m_1 = \xi, \quad m_2 = M \eta a_1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_t &= \kappa_{02} \kappa_{22}^{-1} (\det \kappa_{22} \neq 0), \\ \kappa_{02} &= M(X_t - \hat{X}_t) a_1^T \eta^T + M b^n \nu_0^{\pi} b_1^T \eta^T, \\ \kappa_{22} &= M \eta b_1 \nu_0^{\pi} b_1^T \eta^T;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_t \kappa_{11} + M \left[ (\hat{X}_t - X_t) (\xi^T \alpha_t^T + \gamma_t^T) \right] \frac{\partial \xi^T}{\partial \hat{X}_t} &= \\ &= \kappa'_{01} - \beta_t \kappa'_{21}, \\ \kappa_{21} &= M(\eta a_1 - m_2) \xi^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa'_{01} &= \kappa_{01} + M(X_t - \hat{X}_t) \frac{\partial \xi^T}{\partial t} + \\ &+ M \left[ (X_t - \hat{X}_t) a_1^T + b^n \nu_0^{\pi} b_1 - \beta_t \eta b_1 \nu_0^{\pi} b_1^T \right] \times \\ &\times \left( \frac{\partial}{\partial y} + \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \xi^T + \frac{1}{2} M(X_t - \hat{X}_t) \times \\ &\times \left\{ \text{tr} \left[ b_1 \nu_0^{\pi} b_1^T \left( \frac{\partial}{\partial y} + 2\eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \right) \frac{\partial^T}{\partial y} \right] + \right. \\ &\left. + \text{tr} \left[ \beta_t \eta b_1 \nu_0^{\pi} b_1^T \eta^T \beta_t^T \frac{\partial}{\partial \hat{X}_t} \frac{\partial^T}{\partial \hat{X}_t} \right] \right\} \xi^T, \\ \kappa_{01} &= M(a^n - m_0) \xi^T.\end{aligned}$$

Тогда совместное распределение составного вектора  $Z_t$  определяется уравнением Пугачёва для одномерной характеристической функции относительно  $\lambda = [\lambda_1^T \lambda_2^T \lambda_3^T]^T$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial t} &= M \left[ i \lambda_1^T a_1 + i \lambda_2^T a^n + \right. \\ &\left. + i \lambda_3^T (\alpha_3 \xi + \beta_t \eta a_1 + \gamma_t) + \right.\end{aligned}$$



$$+ \chi_0 \left( b_1^T \lambda_1 + b^{\pi T} \lambda_2 + b_1^T \eta^T \beta_t^T \lambda_3; t \right) \times \exp \left[ i \lambda_1^T Y_t + i \lambda_2^T X_t + i \lambda_3^T \hat{X}_t \right],$$

где

$$\chi_0(\mu; t) = -\frac{1}{2} \mu^T \nu_0 \mu,$$

и при начальном условии

$$g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t_0) = g_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

При этом точность УОФ оценивается по следующей формуле для производной ковариационной матрицы ошибки  $R_t$ :

$$\begin{aligned} \dot{R}_t &= D(Y_t, X_t, \hat{X}_t, \Theta_t, t) = \\ &= M \left[ (X_t - \hat{X}_t) a^{\pi T} + a^{\pi} (X_t^T - \hat{X}_t^T) - \right. \\ &\quad \left. - \beta_t \eta b_1 \nu_0^{\pi} b_1^T \eta^T \beta_t^T + b^{\pi} \nu_0^{\pi} b^{\pi T} \right]. \end{aligned}$$

Применяя регрессионную линеаризацию к уравнениям (13)–(15) посредством МК ИКП, согласно теоремам 2.4 и 2.5 для условных вероятностных характеристик при фиксированном векторе случайных параметров  $\Theta_t$  приходим к следующим уравнениям аналитического моделирования УОФ:

$$\hat{\hat{X}}_t = \hat{X}_t + \delta \hat{X}_t; \quad \tilde{\tilde{R}}_t = \tilde{R}_t + \delta \tilde{R}_t. \quad (16)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\hat{X}}_t &= C_0(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t); \\ \frac{d}{dt} \tilde{\tilde{R}}_t &= D_0(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t); \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \hat{\hat{X}}_t &= C_{1,\delta X}(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t) \hat{\hat{X}}_t + \\ &C_{1,\delta R}(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t) \delta R_t + \\ &+ C_{1,\Theta}(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t) \Theta_t; \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \tilde{\tilde{R}}_t &= D_{1,\delta X}(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t) \delta \hat{\hat{X}}_t + \\ &+ D_{1,\delta R}(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t) \delta R_t + \\ &+ D_{1,\Theta}(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t) \Theta_t, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $C_0 = C_0(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t)$ ,  $D_0 = D_0(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t)$ ,  $C_1 = C_1(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t)$  и  $D_1 = D_1(Y_t, \hat{\hat{X}}_t, O, t)$  представляют собой коэффициенты среднеквадратичной

линеаризации соответствующих функций посредством МК ИКП.

**Теорема 4.2.** Пусть в условиях теоремы 4.1 функции  $C$  и  $D$  допускают среднеквадратичную линеаризацию посредством МК ИКП, тогда в основе алгоритмов аналитического моделирования будут лежать уравнения (16)–(19).

## 5 Применение к линейным системам с мультипликативными шумами

Для приведенных дифференциальных уравнений линейной системы (13), (14) с мультипликативными шумами при фиксированном векторе  $\Theta_t$

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &= A^{\pi}(Y_t, X_t, \Theta_t, t) = a^{\pi} Y_t + a_1^{\pi} X_t + a_0^{\pi} + \\ &+ \left[ c_{10}^{\pi} + \sum_{r=1}^{n_y} c_{1r}^{\pi} Y_r + \sum_{r=1}^{n_x} c_{1,n_y+r}^{\pi} X_r \right] V_0; \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_t &= B(Y_t, X_t, \Theta_t, t) = b Y_t + b_1 X_t + b_0 + \\ &+ \left( c_{20} + \sum_{r=1}^{n_y} c_{2r} Y_r + \sum_{r=1}^{n_x} c_{2,n_y+r} X_r \right) V_0 \end{aligned}$$

согласно теореме 4.1 для  $\xi = [Y_t^T \hat{X}_t^T]^T$  и  $\eta = I_{n_y}$  уравнения УОФ имеют вид (15), где

$$\begin{aligned} \alpha_t &= [\alpha_1 \alpha_2] = [a^{\pi} - \beta_t b \quad a_1^{\pi} - \beta_t b_1]; \\ \beta_t &= \left\{ R_t b_1^T + \left( c_{10}^{\pi} + \sum_{r=1}^{n_y+n_x} c_{1r}^{\pi} m_r \right) \nu_0^{\pi} \times \right. \\ &\times \left( c_{20}^T + \sum_{r=1}^{n_y+n_x} c_{2r}^T m_r \right) + \sum_{r,s=1}^{n_y+n_x} c_{1r}^{\pi} \nu_0^{\pi} c_{2s}^T K_{rs} \left. \right\} \kappa_{11}^{-1}; \\ \gamma_t &= a_0^{\pi} - \beta_t b_0; \\ \dot{m}_t &= a^Q m_t + a_0^Q; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_t &= a^Q K_t + K_t a^{QT} + c_0^Q \nu_0^{\pi} c_0^{QT} + \\ &+ \sum_{r=1}^{n_y+n_x} \left( c_0^Q \nu_0^{\pi} c_r^{QT} + c_r^Q \nu_0^{\pi} c_0^{QT} \right) m_r + \\ &+ \sum_{r,s=1}^{n_y+n_x} c_r^Q \nu_0^{\pi} c_s^{QT} (m_r m_s + K_{rs}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^Q &= \begin{bmatrix} b & b_1 \\ a^{\pi} & a_1^{\pi} \end{bmatrix}; \quad a_0^Q = \begin{bmatrix} b_0 \\ a_0^{\pi} \end{bmatrix}; \\ c_0^Q &= \begin{bmatrix} c_{20} \\ c_{10}^{\pi} \end{bmatrix}; \quad c_r^Q = \begin{bmatrix} c_{2r} \\ c_{1r}^{\pi} \end{bmatrix} \quad (r = \overline{0, n_y + n_x}). \end{aligned}$$

Здесь  $m_t$  и  $K_t = [K_{lh}]$  — соответственно математическое ожидание и ковариационная матрица составного вектора  $Q = [\hat{X}_1 \cdots \hat{X}_{n_x} Y_1 \cdots Y_{n_y}]^T$ . Тогда совместное распределение составного вектора определяется уравнением Пугачёва для одномерной характеристической функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial t} &= (\lambda_1^T b + \lambda_2^T a^\pi + \lambda_3^T a^\pi) \frac{\partial g_1}{\partial \lambda_1} + \\ &+ (\lambda_1^T b_1 + \lambda_2^T a_1 + \lambda_3^T \beta_t b_1) \frac{\partial g_1}{\partial \lambda_2} + \\ &+ \lambda_3^T (a_1^\pi + \beta_t a^\pi) \frac{\partial g_1}{\partial \lambda_3} + i (\lambda_1^T b_0 + \lambda_2^T a_0^\pi + \lambda_3^T a_0^\pi) g_1 + \\ &+ M \chi_0 \left[ \left( c_{20}^T + \sum_{r=1}^{n_y} c_{2r}^T Y_r + \sum_{r=1}^{n_x} c_{2,n_x+r}^T X_r \right) \lambda_1 + \right. \\ &+ \left. \left( c_{20}^T + \sum_{r=1}^{n_y} c_{1r}^\pi Y_r + \sum_{r=1}^{n_x} c_{1,n_x+r}^\pi X_r \right) \times \right. \\ &\left. \times (\lambda_2 + \beta_t^T \lambda_3); t \right] \exp \left\{ i \lambda_1^T Y_t + i \lambda_2^T X_t + i \lambda_3^T \hat{X}_t \right\}. \end{aligned}$$

При этом для оценки точности УОФ используется следующее обобщенное уравнение Риккати:

$$\begin{aligned} \dot{R}_t &= D(R_t, \Theta_t) = a_1^\pi R_t + R_t a_1^{\pi T} - \left[ R_t b_1^T + \right. \\ &+ \left. \left( c_{10}^\pi + \sum_{r=1}^{n_y+n_x} c_{1r}^\pi m_r \right) \nu_0^\pi \left( c_{20}^T + \sum_{r=1}^{n_y+n_x} c_{2r}^T m_r \right) + \right. \\ &+ \left. \sum_{r,s=1}^{n_y+n_x} c_{1r}^\pi \nu_0^\pi c_{2s}^T K_{rs} \right] \kappa_{11}^{-1} \left[ b_1 R_t + \right. \\ &+ \left. \left( c_{20} + \sum_{r=1}^{n_y+n_x} c_{2r} m_r \right) \nu_0^\pi \left( c_{10}^{\pi T} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{r=1}^{n_y+n_x} c_{1r}^{\pi T} m_r \right) + \sum_{r,s=1}^{n_y+n_x} c_{2r} \nu_0^\pi c_{1s}^{\pi T} K_{rs} \right] + \\ &+ \left( c_{10}^\pi + \sum_{r=1}^{n_y+n_x} c_{1r}^\pi m_r \right) \nu_0^\pi \left( c_{10}^{\pi T} + \right. \\ &+ \left. \sum_{r=1}^{n_y+n_x} c_{1r}^{\pi T} m_r \right) + \sum_{r,s=1}^{n_y+n_x} c_{1r}^\pi \nu_0^\pi c_{1s}^{\pi T} K_{rs}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \\ &= \left( c_{20} + \sum_{r=1}^{n_y+n_x} c_{2r} m_r \right) \nu_0^\pi \left( c_{20}^T + \sum_{r=1}^{n_y+n_x} c_{2r}^T m_r \right) + \\ &+ \sum_{r=1}^{n_y+n_x} c_{2r} \nu_0^\pi c_{2s}^T K_{rs}. \end{aligned}$$

По теореме 4.2 оценка точности УОФ при случайных параметрах проводится в (20), (21) путем линеаризации коэффициентов  $a^\pi = a^\pi(\Theta_t, t)$ ,  $a_1^\pi = a_1^\pi(\Theta_t, t)$ ,  $a_0^\pi = a_0^\pi(\Theta_t, t)$ ,  $c_{10}^\pi = c_{10}^\pi(\Theta_t, t)$ ,  $c_{12}^\pi = c_{12}^\pi(\Theta_t, t)$  и  $\nu_0^\pi = \nu_0^\pi(\Theta_t, t)$  посредством МК ИКП с последующим решением нелинейных уравнений (17) для средних значений и линейных уравнений (18), (19) для отклонений.

## 6 Пример

Рассмотрим систему [5] при  $\gamma = \gamma_0 \Theta_t$  и  $\nu_1 = \nu_{10}$ ,  $\nu_2 = \nu_{20}$ :

$$\Phi = \Phi_1(\dot{X}_{1t}) + \gamma_0 \Theta_t X_{1t} + X_{2t} = 0; \quad (22)$$

$$\dot{X}_{2t} = a^U X_{2t} + V_1; \quad Z_t = \dot{Y}_t = b_1 X_{1t} + V_2. \quad (23)$$

Здесь  $[X_{1t} X_{2t}]^T = X_t$  — вектор состояния;  $V_1$  и  $V_2$  — независимые скалярные белые шумы с интенсивностями  $\nu_1$  и  $\nu_2$ ;  $a^U$  и  $b_1$  — известные количества;  $\Phi_1 = \Phi_1(\dot{X}_{1t})$  — функция, допускающая регрессионную линеаризацию

$$\Phi_1 \approx \Phi_{10} + k_1 \dot{X}_{1t}^0, \quad (24)$$

где  $\Phi_{10} = \Phi_{10}(m_{1t}^{\dot{X}}, D_{1t}^{\dot{X}})$ ;  $k_1 = k_1(m_{1t}^{\dot{X}}, D_{1t}^{\dot{X}})$ . При  $k_1 \neq 0$  уравнение (22) с учетом (24) приводится к виду:

$$\dot{X}_{1t} = -(\Phi_{10} + \gamma_0 \Theta_t X_{1t} - X_{2t}) k_1^{-1}. \quad (25)$$

Обозначая

$$a_{0t} = \begin{bmatrix} -\Phi_{10} k_1^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad a_{1t} = a_1(\Theta_t) = \begin{bmatrix} \gamma_0 \Theta_t k_1^{-1} \\ b_1 \quad 0 \end{bmatrix};$$

$$b_{1t} = [b_1 \ 0]; \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12} & R_{22} \end{bmatrix},$$

запишем уравнения (23), (25) в форме

$$\dot{X}_t = a_{1t}(\Theta_t) X_t + a_{0t} + V_1; \quad (26)$$

$$Z_t = \dot{Y}_t = b_{1t} X_t + V_2. \quad (27)$$

Для (26), (27) уравнения НСОФ [5] для условных характеристик УОФ имеют следующий вид:

$$\dot{\hat{X}}_t = a_{1t}(\Theta_t) \hat{X}_t + a_{0t} + \tilde{\beta}_t (Z_t - b_{1t} \hat{X}_t); \quad (28)$$

$$\tilde{\beta}_t = \tilde{R}_t b_{1t}^T \nu_{20t}^{-1}; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{R}}_t &= a_{1t}(\Theta_t) \tilde{R}_t + \tilde{R}_t a_{1t}^T(\Theta_t) - \\ &- \tilde{R}_t b_{1t}^T \nu_{20t}^{-1} b_{1t} \tilde{R}_t + \nu_{10}. \quad (30) \end{aligned}$$

Здесь

$$\Theta_t = m_t^\Theta + \int_{\Lambda} V(\lambda)x^\Theta(\lambda, t) d\lambda;$$

$$K_t^\Theta(t_1, t_2) = \int_{\Lambda} G(\lambda)x^\Theta(\lambda, t_1)x^\Theta(\lambda, t_2) d\lambda;$$

$$x^\Theta(\lambda, t) = q_1(t)q_2^{-1}(\lambda)\mathbf{1}(t - \lambda),$$

$$q_1(t) = e^{-\alpha t}, \quad q_2(t) = q_1(t) \int_{t_0}^t q_1^{-2}(\lambda) d\lambda;$$

$$K^\Theta(t_1, t_2) = \begin{cases} q_1(t_2)q_2(t_1) & \text{при } t_1 < t_2; \\ q_1(t_1)q_2(t_2) & \text{при } t_1 > t_2. \end{cases}$$

Выполняя статистическую линейризацию функции  $\Theta_t X_{1t}$  в (25) по известной формуле [8]:

$$\Theta_t X_{1t} \approx m_t^\Theta m_{1t} + K_t^{\Theta X_1} + m_{1t} \Theta_t^0 + m_t^\Theta X_{1t}^0,$$

согласно (28)–(30) приходим к соответствующим уравнениям для безусловных характеристических функций  $\hat{\hat{X}}_t$  и  $\hat{\hat{R}}_t$ , определяющих точность УОФ.

## 7 Заключение

Для наблюдаемых дифференциальных гауссовских СтС НРОП со случайными параметрами в виде МК ИКП, приводимых к дифференциальным уравнениям, разработано методическое обеспечение в виде алгоритмов условно-оптимальной фильтрации и моделирования их точности. Рассмотрена СтС НРОП, приводимая к линейной дифференциальной СтС с мультипликативными шумами. Полученные результаты обобщают [5] для НСОФ. Результаты могут быть использованы для наблюдаемых дифференциальных негауссовских СтС НРОП, приводимых к гауссовским.

Дальнейшее развитие методического обеспечения условно-оптимального оценивания (фильтрации, экстраполяции и интерполяции) для СтС НРОП связано с использованием методов параметризации апостериорных распределений, нелинейных регрессионных моделей, а также комбинированного вероятностного и статистического моделирования.

Важным направлением дальнейших исследований представляется разработка методов условно-оптимальной фильтрации для явных и неявных стохастических функционально-дифференциальных включений [9–14].

## Литература

1. Сеницын И. Н. Аналитическое моделирование и оценивание нестационарных нормальных процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Системы и средства информатики, 2022. Т. 32. № 2. С. 58–71. doi: 10.14357/08696527220206. EDN: YMGERJ.
2. Сеницын И. Н. Аналитическое моделирование и фильтрация нормальных процессов в интегродифференциальных стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Системы и средства информатики, 2021. Т. 31. № 1. С. 37–56. doi: 10.14357/08696527210104. EDN: PLYOSF.
3. Sinitsyn I. N. Analytical modeling and estimation of normal processes defined by stochastic differential equations with unsolved derivatives // J. Mathematics Statistics Research, 2021. Vol. 3. Iss. 1. Art. 139. 7 p. doi: 10.36266/JMSR/139.
4. Сеницын И. Н. Совместная фильтрация и распознавание нормальных процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 85–93. doi: 10.14357/19922264220211. EDN: SMJCBV.
5. Сеницын И. Н. Субоптимальная фильтрация в стохастических системах, не разрешенных относительно производных, со случайными параметрами // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 2–10. doi: 10.14357/19922264240101. EDN: KUWMKJ.
6. Сеницын И. Н. Канонические представления случайных функций. Теория и применения. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2023. 816 с.
7. Пугачёв В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2002. 496 с.
8. Сеницын И. Н. Фильтры Калмана и Пугачёва. — 2-е изд. — М.: Логос, 2007. 776 с.
9. Толстоногов А. А., Финогенко И. А. О функционально-дифференциальных включениях в банаховых пространствах с невыпуклой правой частью // Докл. Акад. наук СССР, 1980. Т. 254. № 1. С. 45–49.
10. Финогенко И. А. К вопросу о решениях функционально-дифференциальных включений // Прикладная математика и пакеты прикладных программ. — Иркутск: СЭИСО АН СССР, 1980. С. 95–107.
11. Финогенко И. А. Свойства множества решений функционально-дифференциальных включений // Краевые задачи. — Пермь: ППИ, 1981. С. 145–149.
12. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981. 448 с.
13. Финогенко И. А. О неявных функционально-дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве // Динамика нелинейных систем. — Новосибирск: Наука, 1983. С. 151–164.
14. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. 280 с.

Поступила в редакцию 30.10.23

# CONDITIONALLY OPTIMAL FILTERING IN STOCHASTIC SYSTEMS WITH RANDOM PARAMETERS AND UNSOLVED DERIVATIVES

I. N. Sinitsyn

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** For observable differential Gaussian stochastic systems (StS) with random parameters in the form of multicomponent integral canonical expansions (MC ICE) and StS with unsolved derivatives (USD), methodological support for synthesis of conditionally optimal filters is presented. A survey in the fields of analytical modeling and sub- and conditionally optimal filtering, extrapolation, and identification is presented. Necessary information concerning MC ICE is given. Special attention is paid to mean square regressive linearization including MC ICE. The stochastic systems with USD reducible to differential are considered. Basic results in normal conditionally optimal filtering (COF) are presented for StS USD reducible to differential. The theory of COF application to StS USD with multiplicative noises is developed. An illustrative example for scalar StS USD reducible to differential is given. For future COF generalization, (i) methods of moments, quasi-moments, and one- and multidimensional densities of orthogonal expansions and (ii) development for stochastic inclusions are recommended.

**Keywords:** regression linearization; stochastic system with unsolved derivatives (StS USD); stochastic process; conditionally optimal filtering (COF)

DOI: 10.14357/19922264240303

EDN: XCXLGD

## References

1. Sinitsyn, I. N. 2022. Analiticheskoe modelirovanie i otsenivanie nestatsionarnykh normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Analytical modeling and estimation of nonstationary normal processors with unsolved derivatives]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 32(2):58–71. doi: 10.14357/08696527220206. EDN: YMGERJ.
2. Sinitsyn, I. N. 2021. Analiticheskoe modelirovanie i fil'tratsiya normal'nykh protsessov v integrodifferentsial'nykh stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Analytical modeling and filtering for integrodifferential systems with unsolved derivatives]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 31(1):37–56. doi: 10.14357/08696527210104. EDN: PLYOSE.
3. Sinitsyn, I. N. 2021. Analytical modeling and estimation of normal processes defined by stochastic differential equations with unsolved derivatives. *J. Mathematics Statistics Research* 3(1):139. 7 p. doi: 10.36266/JMSR/139.
4. Sinitsyn, I. N. 2022. Sovmestnaya fil'tratsiya i raspoznavanie normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Joint filtration and recognition of normal processes in stochastic systems with unsolved derivatives]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):85–93. doi: 10.14357/19922264220211. EDN: SMJCBB.
5. Sinitsyn, I. N. 2024. Suboptimal'naya fil'tratsiya v stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh, so sluchaynymi parametrami [Suboptimal filtering in stochastic systems with random parameters and unsolved derivatives]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):2–10. doi: 10.14357/19922264240101. EDN: KUWMKJ.
6. Sinitsyn, I. N. 2023. *Kanonicheskie predstavleniya sluchaynykh funktsiy. Teoriya i primeneniya* [Canonical expansions of random functions. Theory and application]. Moscow: TORUS PRESS. 816 p.
7. Pugachev, V. S. 2002. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability theory and mathematical statistics]. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit. 496 p.
8. Sinitsyn, I. N. 2007. *Fil'try Kalmana i Pugacheva* [Kalman and Pugachev filters]. 2nd ed. Moscow: Logos. 776 p.
9. Tolstonogov, A. A., and I. A. Finogenko. 1980. On functional-differential inclusions in a Banach space with a nonconvex right-hand side. *Soviet Mathematics Doklady* 22:320–324.
10. Finogenko, I. A. 1980. K voprosu o resheniyakh funktsional'no-differentsial'nykh vklyucheniye [On the issue of solutions of functional-differential inclusions]. *Prikladnaya matematika i pakety prikladnykh programm* [Applied mathematics and application software packages]. Irkutsk: SEISO AN SSSR. 95–107.
11. Finogenko, I. A. 1981. Svoystva mnozhestva resheniy funktsional'no-differentsial'nykh vklyucheniye [Properties of the solution set of functional differential inclusions]. *Kraevye zadachi* [Boundary value problem]. Perm: PPI. 145–149.

12. Kolmanovskiy, V. B., and V. R. Nosov. 1981. *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyykh sistem s posledstviem* [Stability and periodic modes of regulated systems with consequences]. Moscow: Nauka. 448 p.
13. Finogenko, I. A. 1983. O neyavnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniyakh v banakhovom prostranstve [On implicit functional differential equations in a Banach space]. *Dinamika nelineynykh sistem* [Dynamics of nonlinear systems]. Novosibirsk: Nauka. 151–164.
14. Azbelev, N. V., V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatulina. 1991. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of functional differential equations]. Moscow: Nauka. 280 p.

*Received October 30, 2023*

## Contributor

**Sinitsyn Igor N.** (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

# ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ КЛАССА МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ\*

А. В. Борисов<sup>1</sup>, Ю. Н. Куринов<sup>2</sup>, Р. Л. Смелянский<sup>3</sup>

**Аннотация:** Исследован некоторый класс скачкообразных процессов. Их первая блочная компонента представляет собой марковский скачкообразный процесс (МСП) с конечным множеством состояний. Вторая блочная компонента изменяется синхронно с первой и при фиксированной первой компоненте образует последовательность независимых векторов. При этом носители условных распределений второй компоненты могут пересекаться, что не дает возможности точно восстановить значения первой компоненты по наблюдениям второй. Для рассмотренного класса случайных процессов доказано марковское его свойство и получен ряд важных вероятностных характеристик. Выведен инфинитезимальный генератор и сопряженный к нему оператор. Это позволило построить систему уравнений Колмогорова, описывающую эволюцию распределения процесса. Предложено мартингаловое разложение произвольной функции от исследуемого процесса: ее удается характеризовать с помощью системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с мартингалами в правой части. В случае если функции исследуемого процесса имеют конечные моменты второго порядка, получен вид квадратичных характеристик мартингалов в соответствующих разложениях.

**Ключевые слова:** марковский скачкообразный процесс; инфинитезимальный генератор; мартингаловое разложение; стохастическое дифференциальное уравнение

DOI: 10.14357/19922264240304

EDN: XPVTGJ

## 1 Введение

Марковские скачкообразные процессы, включая их управляемые версии, служат математическими моделями большого числа явлений, наблюдаемых в различных областях техники, биологии и медицины, социологии, экономики и пр. [1]. Они также используются при описании более сложных объектов: скрытых марковских моделей и стохастических динамических систем переменной структуры [2, 3].

Для МСП существует собственный развитый математический аппарат [4, 5], позволяющий решать задачи системного анализа применительно к данному классу процессов. Кроме того, при выполнении некоторых необременительных условий эти функции представляют собой семимартингалы с возможностью использования результатов стохастического анализа [6].

При построении моделей чаще используются МСП с конечным или счетным множеством состояний. Это связано с их простотой, наличием решений различных задач оптимального/робастного оценивания и управления состояниями подобных процессов [7], а также набора эффективных

вычислительных алгоритмов, реализующих эти решения. В то же время решения указанных задач для произвольных МСП достаточно сложны для численной реализации [6, 8, 9].

Цель работы заключается в представлении подкласса МСП, обеспечивающего компромисс между общностью и гибкостью для математического моделирования различных явлений, простотой вероятностного описания и решения задач оценивания и управления. Работа имеет следующую организацию. Раздел 2 содержит конструктивное представление класса процессов на примере описания скачкообразного изменения состояния и параметров некоторого телекоммуникационного соединения. В разд. 3 доказано марковское свойство этих процессов, получен инфинитезимальный генератор, а также система уравнений Колмогорова, описывающая эволюцию распределения. Раздел 4 посвящен мартингаловому представлению исследуемого класса МСП и функций от них. Оказывается, что их можно характеризовать с помощью решений линейных систем СДУ с мартингалами в правой части. Раздел 5 содержит заключительные замечания.

\* Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ, проект № 23-Ш03-03. При анализе данных использовалась инфраструктура Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, aborisov@frccsc.ru

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, kurinovurij@gmail.com

<sup>3</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, smel@cs.msu.ru

## 2 Конструктивное описание класса процессов

Для представления класса исследуемых процессов воспользуемся иллюстрацией из области телекоммуникаций [10–14]. Рассмотрим состояние некоторого гетерогенного (проводного/беспроводного) сетевого соединения. Оно описывается блочным вектором  $Z_t \triangleq \text{col}(\theta_t, Y_t)$ . Первая компонента,  $\theta_t$ , определяет качественное состояние соединения и может принимать значения из конечного множества, например:

- $\theta_t = e_1$  — канал, обеспечивающий соединение, загружен умеренно: буфер сетевого устройства — «бутылочного горла» свободен;
- $\theta_t = e_2$  — канал находится в состоянии, предшествующем перегрузке: буфер «бутылочного горла» непуст;
- $\theta_t = e_3$  — перегрузка канала: буфер «бутылочного горла» заполнен полностью;
- $\theta_t = e_4$  — потеря сигнала на беспроводном участке канала.

Вторая компонента,  $Y_t$ , определяет текущие средние числовые параметры соединения, например:

- $Y_t^1$  — значение времени кругового обращения сегмента данных (RTT, round-trip time);
- $Y_t^2$  — значение джиттера;
- $Y_t^3$  — долю потерянных пакетов;
- $Y_t^4$  — пропускную способность, обеспечиваемую соединением.

Траектории процесса  $Z_t$  — кусочно-постоянные функции, и скачки компоненты  $\theta_t$  синхронизированы со скачками  $Y_t$ . Применительно к данному примеру это означает, что со сменой качественного состояния соединения меняются и его числовые параметры и в процессе, пока качественное состояние остается неизменным, параметры соединения также не меняются. Следует отметить, что в случае возвращения соединения в некоторое состояние, ранее уже имевшее место, его числовые параметры могут не совпасть с прошлыми значениями. Например, после возвращения состояния соединения в  $e_1$  значения RTT, джиттера, доли потерянных пакетов и пропускной способности могут отличаться от предыдущих значений параметров на предшествующих промежутках пребывания в состоянии  $e_1$ . При этом по текущему набору параметров  $Y_t$  нельзя сделать однозначный вывод о текущем качественном состоянии соединения  $\theta_t$ : одни и те же значения  $Y_t$  могут соответствовать различным значениям  $\theta_t$ . В этом заключено ключевое

отличие представляемого класса процессов от специальных МСП, исследованных в [15]. Практической целью ставится выделение класса процессов, неформально определяемых как МСП с конечным множеством состояний — вероятностных распределений. Этот класс, конечно, не охватывает все множество МСП [4, 5], однако обладают достаточной степенью общности, чтобы описывать ряд реальных явлений, включающий в себя маневрирование целей [16], скачки параметров финансового рынка [17], изменение состояния и параметров сетевого трафика [18] и пр.

Итак, первый блочный компонент,  $\theta_t$ , представляет собой МСП с множеством состояний

$$\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \dots, e_N\},$$

матрицей интенсивностей переходов

$$\Lambda(t) = \|\Lambda_{ij}(t)\|_{i,j=\overline{1,N}}$$

и начальным распределением

$$p_0 = \text{col}(p_0^1, \dots, p_0^N).$$

Вторая блочная компонента,  $Y_t \in \mathbb{R}^M$ , — кусочно-постоянный процесс, терпящий скачки синхронно с  $\theta_t$ . Если  $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  — последовательность моментов скачков  $\theta_t$ , то при известной траектории  $\theta_t$  последовательность  $\{Y_{\tau_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  составлена из независимых случайных векторов, условное распределение которых определяется вектором

$$\pi(y) = \text{col}(\pi_1(y), \dots, \pi_N(y)),$$

составленным из известных плотностей вероятности на  $\mathbb{R}^M$ :

$$\mathcal{P}\{Y_{\tau_i} \in B \mid \theta_{\tau_i} = e_n\} = \int_B \pi_n(y) dy, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M),$$

$$n = \overline{1, N}.$$

Распределение начального значения  $Y_0$  определяется аналогично с помощью распределения  $\phi(y) = \text{col}(\phi_1(y), \dots, \phi_N(y))$ :

$$\mathcal{P}\{Y_0 \in B \mid \theta_0 = e_n\} = \int_B \phi_n(y) dy, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M),$$

$$n = \overline{1, N}.$$

В [19] показано, что существует канонический базис с фильтрацией  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$ , так называемое пространство Винера–Пуассона, на котором подобные процессы могут быть заданы корректно. Ниже представлены вероятностные свойства этих процессов.

### 3 Марковское свойство и производящий оператор

В дальнейшем изложении используются следующие обозначения:

- $I$  — единичная матрица подходящей размерности;
- $\mathbf{I}(t)$  — единичная ступенчатая функция;
- $\mathbf{I}_D(x)$  — индикаторная функция множества  $D$ ;
- $\mathcal{N}_t$  — число скачков  $\theta_t$ , произошедших на отрезке времени  $[0, t]$ ,
- $\mathcal{T}_n(s, t) \triangleq \mathcal{P} \{ \mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s = 0 | \theta_s = e_n \} = \exp \left( \int_s^t \Lambda_{nn}(u) du \right)$  ( $0 \leq s < t$ ) — условная функция распределения времени ожидания скачка процесса  $\theta_t$  в зависимости от его состояния,  $\mathcal{T}(s, t) \triangleq \text{row} (\mathcal{T}_1(s, t), \dots, \mathcal{T}_N(s, t))$ ;
- $\lambda(t) \triangleq \text{row} (\Lambda_{11}(t), \dots, \Lambda_{NN}(t))$  — строка, составленная из диагональных элементов матрицы  $\Lambda(t)$ ,  $\bar{\Lambda}(t) \triangleq \Lambda(t) - \text{diag} \lambda(t)$ ;
- $\mathcal{P}(s, t) = \|\mathcal{P}_{ij}(s, t)\|_{i,j=\overline{1,N}}$  — матрица переходных вероятностей  $\theta$  на отрезке  $[s, t]$ :

$$\mathcal{P}_{ij}(s, t) \triangleq \mathcal{P} \{ \theta_t = e_j | \theta_s = e_i \};$$

$\mathcal{P}(s, t)$  представляет собой решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathcal{P}'_t(s, t) = \mathcal{P}(s, t)\Lambda(t), \quad 0 \leq s < t, \quad \mathcal{P}(s, s) \equiv I;$$

- любая функция  $f(e, y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  представима в виде  $f(e, y) = \bar{f}(y)e$ , где

$$\bar{f}(y) \triangleq \text{row} (f(e_1, y), \dots, f(e_N, y));$$

- $\mathbf{E}_f^n \triangleq \int_{\mathbb{R}^M} f(y, e_n) \pi_n(y) dy$ ,  $\mathbf{E}_f = \text{col} (\mathbf{E}_f^1, \dots, \mathbf{E}_f^N) = \int_{\mathbb{R}^M} \text{diag} \bar{f}(y) \pi(y) dy$ ;

- любая вероятностная мера  $\mathcal{Q}(\cdot)$ , определенная на  $(\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M, 2^{\mathbb{S}^N} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^M))$ , может быть задана с помощью распределения

$$m(B) = \text{col} (m_1(B), \dots, m_N(B)),$$

где

$$m_n(B) \triangleq \mathcal{Q} \{ \theta = e_n, Y \in B \}.$$

Важнейшим качеством исследуемых процессов выступает марковское свойство.

**Теорема 1.** На вероятностном базисе с фильтрацией  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$  процесс  $Z_t$  обладает марковским свойством. Матрица переходной вероятности

$\mathcal{P}(y, s, B, t) = \|\mathcal{P}_{ij}(y, s, B, t)\|_{i,j=\overline{1,N}}$  ( $\mathcal{P}_{ij}(y, s, B, t) \triangleq \mathcal{P} \{ \theta_t = e_j, Y_t \in B | \theta_s = e_i, Y_s = y \}$ ) имеет вид:

$$\mathcal{P}(y, s, B, t) = \mathbf{I}_B(y) \text{diag} \mathcal{T}(s, t) + \text{diag} \int_B \pi(u) du (\mathcal{P}(s, t) - \text{diag} \mathcal{T}(s, t)). \quad (1)$$

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

В [15] представлен частный случай  $Z_t$ : множества-носители  $\{D_n\}_{n=\overline{1,N}}$  распределений  $\{\pi_n(\cdot)\}_{n=\overline{1,N}}$  и  $\{\phi_n(\cdot)\}_{n=\overline{1,N}}$  не пересекались. В этом случае компоненту  $\theta_t$  можно было восстановить по компоненте  $Y_t$ , и поэтому компонента  $Y_t$ , рассмотренная отдельно, также обладала марковским свойством. В общем же случае  $Y_t$ , рассмотренная в отрыве от  $\theta_t$ , марковским свойством не обладает.

**Теорема 2.** Верны следующие утверждения.

1. Пусть  $f(e, y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченная борелевская функция. Инфинитезимальный генератор  $\mathcal{A}_t$  процесса  $Z_t$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t f(e, y) &\triangleq \\ &\triangleq \lim_{s \downarrow t} \frac{\mathbf{E} \{ f(\theta_s, Y_s) | Y_t = y, \theta_t = e \} - f(e, y)}{s - t} = \\ &= \left[ \bar{f}(y) \text{diag} \lambda(t) + \mathbf{E}_f^\top \bar{\Lambda}^\top(t) \right] e. \end{aligned}$$

2. Пусть  $m(B) = \text{col} (m_1(B), \dots, m_N(B))$  — некоторое вероятностное распределение на  $(\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M, 2^{\mathbb{S}^N} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^M))$ , тогда оператор  $\mathcal{A}_t^*$ , сопряженный к генератору, имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t^* m(B) &= \text{diag} (\lambda(t)) m(B) + \\ &+ \text{diag} \left( \int_B \pi(u) du \right) \bar{\Lambda}^\top(t) m(\mathbb{R}^M). \end{aligned}$$

3. Распределение  $Q_t(B) = \text{col} (Q_t^1(B), \dots, Q_t^N(B))$  процесса  $\text{col} (\theta_t, Y_t)(Q_t^n(B) \triangleq \mathcal{P} \{ \theta_t = e_n, Y_t \in B \})$  определяется решением системы уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_t(B)}{dt} &= \text{diag} (\lambda(t)) Q_t(B) + \\ &+ \text{diag} \left( \int_B \pi(u) du \right) \bar{\Lambda}^\top(t) Q_t(\mathbb{R}^M); \\ Q_0(B) &= \text{diag} \left( \int_B \phi(u) du \right) p_0. \end{aligned}$$

4. Функция переходной вероятности  $\mathcal{P}(y, s, B, t)$  определяется решением системы уравнений:



$$\left. \begin{aligned} P'_t(y, s, B, t) &= P(y, s, B, t) \text{diag } \lambda(t) + \\ &+ \text{diag} \left( \int_B \pi(u) du \right) P(s, t) \bar{\Lambda}(t); \\ P'_t(s, t) &= P(s, t) \Lambda(t), \quad 0 \leq s < t; \\ P(y, s, B, s) &= \mathbf{I}_B(y) I, \quad P(s, s) = I. \end{aligned} \right\} (2)$$

Истинность утверждений 1 и 2 теоремы 2 следует из определений инфинитезимального генератора  $\mathcal{A}_t f(e, y)$  сопряженного оператора

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_t f, m \rangle &= \int_{\mathbb{R}^M} \sum_{n=1}^N \mathcal{A}_t f(e_n, y) m_n(dy) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^M} \sum_{n=1}^N f(e_n, y) \mathcal{A}_t^* m_n(dy) = \langle f, \mathcal{A}_t^* m \rangle. \end{aligned}$$

Истинность утверждения 3 теоремы следует из представления распределения  $Z_t$  с помощью оператора  $\mathcal{A}_t^*$  [5]. Система (2) (утверждение 4 теоремы) может быть получена путем непосредственного дифференцирования переходной вероятности (1).

## 4 Мартингалное представление

Пусть  $f = f(e, y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная функция, у которой

$$\int_{\mathbb{R}^M} \sum_{n=1}^N |f(e_n, y)| (\pi_n(y) + \phi_n(y)) dy < \infty.$$

Для процесса  $f(\theta_t, Y_t)$  верна формула Дынкина: для любых  $0 \leq s < t$  выполнено равенство

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ f(\theta_t, Y_t) - \int_s^t \mathcal{A}_u f(\theta_u, Y_u) du \mid \mathcal{F}_s \right\} = \\ = \mathbb{E} \left\{ f(\theta_t, Y_t) - \int_s^t [\bar{f}(Y_u) \text{diag } \lambda(u) + \right. \\ \left. + E_f^\top \bar{\Lambda}^\top(u)] \theta_u du \right\} = 0 \quad \mathcal{P}\text{-п. н.} \end{aligned}$$

Это означает, что процесс  $f(\theta_t, Y_t)$  допускает разложение

$$\begin{aligned} f(\theta_t, Y_t) &= f(\theta_0, Y_0) + \\ &+ \int_0^t [\bar{f}(Y_u) \text{diag } \lambda(u) + E_f^\top \bar{\Lambda}^\top(u)] \theta_u du + \mu_t^f, \end{aligned}$$

где  $\mu_t^f$  — некоторый  $\mathcal{F}_t$ -согласованный мартингал. Используя это равенство, можно составить конечную замкнутую систему линейных СДУ, описывающую эволюцию процесса  $f(\theta_t, Y_t)$ . Рассмотрим расширенный процесс

$$f_t \triangleq \text{col} \left( \underbrace{\theta_t}_{\triangleq f_t^1}, \underbrace{f(\theta_t, Y_t)}_{\triangleq f_t^2} \right).$$

**Теорема 3.** Процесс  $f_t$  — единственное сильное решение системы линейных СДУ

$$f_t = f_0 + \int_0^t D^f(s) f_s ds + \mu_t^f, \quad (3)$$

где  $\mu_t^f$  —  $\mathcal{F}_t$ -согласованный мартингал;  $D^f(s) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{2N \times 2N}$  — мерная матричнозначная функция

$$D^f(t) \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda^\top(t) & 0 \\ \text{diag } E_f \bar{\Lambda}^\top(t) & \text{diag } \lambda(t) \end{bmatrix}.$$

Если дополнительно

$$\int_{\mathbb{R}^M} \sum_{n=1}^N f^2(e_n, y) (\pi_n(y) + \phi_n(y)) dy < \infty, \quad (4)$$

то  $\mu_t^f$  — квадратично интегрируемый мартингал с квадратичной характеристикой

$$\langle \mu^f, \mu^f \rangle_t = \begin{bmatrix} \langle f^1, f^1 \rangle_t & \langle f^1, f^2 \rangle_t \\ \langle f^1, f^2 \rangle_t^\top & \langle f^2, f^2 \rangle_t \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \langle f^1, f^1 \rangle_t &= \int_0^t [\text{diag} (\Lambda^\top(s) f_s^1) - \Lambda^\top(s) \text{diag} (f_s^1) - \\ &- \text{diag} (f_s^1) \Lambda(s)] ds; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f^1, f^2 \rangle_t &= \\ &= \int_0^t [(\text{diag} (\bar{\Lambda}^\top(s) f_s^1) - \text{diag} (f_s^1) \bar{\Lambda}(s)) \text{diag } E_f - \\ &- \Lambda^\top(s) \text{diag} (f_s^2)] ds; \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f^2, f^2 \rangle_t &= \int_0^t [\text{diag } E_{f^2} \text{diag} (\bar{\Lambda}^\top(s) f_s^1) - \\ &- \text{diag} (f_s^2) \text{diag } \lambda(s) \text{diag} (f_s^2) - \text{diag} (f_s^2) \bar{\Lambda}(s) \text{diag } E_f - \\ &- \text{diag } E_f \bar{\Lambda}^\top(s) \text{diag} (f_s^2)] ds. \quad (7) \end{aligned}$$

Если для функции  $g = g(e, y)$  выполнено условие (4) и для процесса  $g(\theta_t, Y_t)$  верно представление типа (3), то совместная квадратичная характеристика:

$$\langle \mu^f, \mu^g \rangle_t = \begin{bmatrix} \langle f^1, g^1 \rangle_t & \langle f^1, g^2 \rangle_t \\ \langle f^2, g^1 \rangle_t & \langle f^2, g^2 \rangle_t \end{bmatrix},$$

$$\partial e \langle f^1, g^1 \rangle_t = \langle f^1, f^1 \rangle_t; \langle f^1, g^2 \rangle_t = \langle g^1, g^2 \rangle_t; \langle f^2, g^1 \rangle_t = \langle f^2, f^1 \rangle_t;$$

$$\begin{aligned} \langle f^2, g^2 \rangle_t &= \int_0^t \left[ \text{diag } E_{fg} \text{diag } (\bar{\Lambda}^\top(s) f_s^1) - \right. \\ &\left. - \text{diag } (f_s^2) \text{diag } \lambda(s) \text{diag } (g_s^2) - \text{diag } (f_s^2) \bar{\Lambda}(s) \text{diag } E_g - \right. \\ &\left. - \text{diag } E_f \bar{\Lambda}^\top(s) \text{diag } (g_s^2) \right] ds. \quad (8) \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3 приведено в приложении.

## 5 Заключение

В работе представлен класс скачкообразных процессов. Его первая блочная компонента — МСП с конечным множеством состояний  $\mathbb{S}^N$ . Вторая блочная компонента синхронизирована по скачкам с первой и относительно первой блочной компоненты представляет собой последовательность независимых векторов. Условные распределения второй блочной компоненты при фиксированной первой известны. Математическая модель такого рода может трактоваться как МСП с конечным множеством «сложных» состояний — распределений случайных векторов.

Для исследуемого класса процессов удалось получить ряд полезных результатов. Во-первых, эти процессы обладают марковским свойством. Во-вторых, для них получены инфинитезимальный генератор и сопряженный к нему оператор. Эти результаты позволили получить мартингалное разложение функций от исследуемого класса процессов, а также обобщения системы уравнений Колмогорова, описывающей эволюцию как функции переходной вероятности, так и одномерного распределения. В-третьих, в случае если функция от исследуемого процесса имеет конечный второй момент, получены квадратичные характеристики мартингалов в разложении.

Следует особо упомянуть, что произвольные функции процессов  $Z_t$  исследуемого класса удалось выразить через решение конечной системы линейных СДУ. В случае же МСП общего вида для такого описания потребуется более сложная система стохастических интегро-дифференциальных уравнений.

Предложенные процессы планируется использовать в качестве уравнений состояния в стохастических системах наблюдения и решать задачи

оптимальной фильтрации их состояний и параметров по разнородным наблюдениям. Этому будут посвящены последующие работы.

## Приложение

Доказательство теоремы 1. Пусть  $f(\theta_t, Y_t)$  — произвольная ограниченная борелевская функция. Воспользуемся ее представлением в виде  $f(\theta_t, Y_t) = \bar{f}(Y_t)\theta_t$ . Для любых моментов времени  $0 \leq s < t$  верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} E \{ f(\theta_t, Y_t) | \mathcal{F}_s \} &= E \{ \bar{f}(Y_t)\theta_t | \mathcal{F}_s \} = \\ &= E \{ \mathbf{I}(\mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s = 0) \bar{f}(Y_t)\theta_t | \mathcal{F}_s \} + \\ &+ E \{ \mathbf{I}(\mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s > 0) \bar{f}(Y_t)\theta_t | \mathcal{F}_s \} = \bar{f}(Y_s)\theta_s \mathcal{T}(s, t)\theta_s + \\ &+ \sum_{j=1}^N E \{ \mathbf{I}(\mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s > 0) \bar{f}(Y_t)\theta_t | \mathcal{F}_s, \theta_t = e_j, \\ &\mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s > 0 \} \mathcal{P} \{ \mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s > 0, \theta_t = e_j | \mathcal{F}_s \} = \\ &= \bar{f}(Y_s)\theta_s \mathcal{T}(s, t)\theta_s + \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} f(y, e_j) \pi_j(y) dy \times \\ &\times \mathcal{P} \{ \mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s > 0, \theta_t = e_j | \theta_s \} = \left[ f(\theta_s, Y_s) \mathcal{T}(s, t) + \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^N E_f^j \left( \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_{ij}(s, t) e_i^\top - \mathcal{T}_j(s, t) e_j^\top \right) \right] \theta_s = \mathbf{f}(\theta_s, Y_s). \end{aligned}$$

Пусть в момент времени  $s$  выполнены равенства  $\theta_s = e_i$  и  $Y_s = y$ . Рассмотрим произвольные  $e_j \in \mathbb{S}^N$  и  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$  и найдем  $\mathcal{P} \{ \theta_t = e_j, Y_t \in B | \theta_s = e_i, Y_s = y \}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \{ \theta_t = e_j, Y_t \in B | \theta_s = e_i, Y_s = y \} &= \\ &= \mathcal{P} \{ \theta_t = e_j, Y_t \in B, \mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s = 0 | \theta_s = e_i, Y_s = y \} + \\ &+ \mathcal{P} \{ \theta_t = e_j, Y_t \in B, \mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s > 0 | \theta_s = e_i, Y_s = y \} = \\ &= \delta_{ij} \mathcal{T}_i(s, t) \mathbf{I}_B(y) + (1 - \delta_{ij}) \mathcal{P}_{ij}(s, t) \int_B \pi_j(u) du + \\ &+ \delta_{ij} [\mathcal{P}_{ii}(s, t) - \mathcal{T}_i(s, t)] \int_B \pi_i(u) du. \end{aligned}$$

Первое слагаемое соответствует отсутствию скачков процесса  $\theta$  на интервале  $[s, t]$ . Вероятность этого события равна  $\mathcal{T}_i(s, t)$ . Второе слагаемое соответствует переходу  $e_i \rightarrow e_j$  компоненты  $\theta_t$  на  $[s, t]$ , который происходит с вероятностью  $\mathcal{P}_{ij}(s, t)$ . Третье слагаемое соответствует переходу  $e_i \rightarrow e_i$  компоненты  $\theta_t$  на  $[s, t]$  за более чем один скачок. Вероятность этого события равна  $\mathcal{P}_{ii}(s, t) - \mathcal{T}_i(s, t)$ . Формула (1) представляет собой матричную запись последнего выражения. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Система (3) содержит  $2N$  уравнений, из которых первые  $N$  образуют замкнутую систему и описывают мартингалное разложение первой блочной компоненты —  $\theta_t$  — МСП с множеством значений  $\mathbb{S}^N$  [7].

Построим инфинитезимальный оператор одной из оставшихся  $N$  компонент  $e_n^\top f_t^2 = \bar{f}(Y)_t \text{diag } e_n \theta_t$ :

$$A_t(\bar{f}(Y)_t \text{diag } e_n \theta_t) = \left[ \Lambda_{nn}(t) \bar{f}(Y)_t + E_f^n e_n^\top \bar{\Lambda}^\top(t) \right] \theta_t.$$

Инфинитезимальный генератор компоненты  $f_t^2 = f(\theta_t, Y_t) \theta_t$  принимает вид:

$$A_t f_t^2 = \text{diag } E_f \bar{\Lambda}^\top(t) f_t^1 + \text{diag } \lambda(t) f_t^2.$$

Из формулы Дынкина следует, что процесс  $f_t^2 - f_0^2 - \int_0^t A_s f_s^2 ds$  представляет собой  $\mathcal{F}_t$ -согласованный мартингал, что доказывает истинность представления процесса  $f_t$  как решения системы уравнений (3).

Далее докажем истинность формулы (8): формулы (5)–(7) представляют собой ее частные случаи. Для этого воспользуемся тем фактом, что процессы  $Z_t, f(Z_t)$  и  $g(Z_t)$  принадлежат классу специальных семимартингалов, мартингалное разложение которых единственно [6].

Для скалярных процессов  $f(Z_t)$  и  $g(Z_t)$  построим соответствующие векторные процессы  $f_t = \text{col}(f_t^1, f_t^2)$  и  $g_t = \text{col}(g_t^1, g_t^2)$ , описываемые системами типа (3). Из определения этих процессов и формулы Дынкина следует, что

$$f_t^2 (g_t^2)^\top = \text{diag } f_t^2 \text{diag } g_t^2 = \text{diag } f_0^2 \text{diag } g_0^2 + \int_0^t \left[ \text{diag } \lambda(s) \text{diag } f_s^2 \text{diag } g_s^2 + \text{diag } E_{fg} \bar{\Lambda}^\top(s) f_s^1 \right] ds + \mu_t^1,$$

где  $\mu_t^1$  — некоторый  $\mathcal{F}_t$ -согласованный мартингал.

С другой стороны, мартингалное разложение произведения  $f_t^2 (g_t^2)^\top$  может быть получено с помощью обобщенного правила Ито [6]:

$$\begin{aligned} f_t^2 (g_t^2)^\top &= \text{diag } f_0^2 \text{diag } g_0^2 + \int_0^t f_{s-}^2 d(g_{s-}^2)^\top + \int_0^t df_s^2 (g_{s-}^2)^\top + \\ &+ \langle f^2, g^2 \rangle_t + \mu_t^2 = \text{diag } f_0^2 \text{diag } g_0^2 + \\ &+ \int_0^t \left[ \text{diag } f_s^2 \bar{\Lambda}(s) \text{diag } E_g + \text{diag } E_f \bar{\Lambda}^\top(s) \text{diag } g_s^2 + \right. \\ &\left. + 2 \text{diag } \lambda(s) \text{diag } f_s^2 \text{diag } g_s^2 \right] ds + \langle f^2, g^2 \rangle_t + \mu_t^3, \end{aligned}$$

где  $\mu_t^2$  и  $\mu_t^3$  — некоторые  $\mathcal{F}_t$ -согласованные мартингалы. Из единственности разложения следует  $\mathcal{P}$ -п. н. выполненные равенства:

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left[ \text{diag } \lambda(s) \text{diag } f_s^2 \text{diag } g_s^2 + \text{diag } E_{fg} \bar{\Lambda}^\top(s) f_s^1 \right] ds = \\ &= \langle f^2, g^2 \rangle_t + \int_0^t \left[ \text{diag } f_s^2 \bar{\Lambda}(s) \text{diag } E_g + \right. \\ &\left. + \text{diag } E_f \bar{\Lambda}^\top(s) \text{diag } g_s^2 + 2 \text{diag } \lambda(s) \text{diag } f_s^2 \text{diag } g_s^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Отсюда в силу коммутативности диагональных матриц и тождества  $f_t^1 \equiv g_t^1 \equiv \theta_t$  следует истинность равенства (8). Теорема 3 доказана.

## Литература

1. White D. A survey of applications of Markov decision processes // J. Oper. Res. Soc., 1993. Vol. 44. No. 11. P. 1073–1096. doi: 10.1057/jors.1993.181.
2. Ephraim Y., Merhav N. Hidden Markov processes // IEEE T. Inform. Theory, 2002. Vol. 48. No. 6. P. 1518–1569. doi: 10.1109/TIT.2002.1003838.
3. Dong S., Liu M., Wu Z. A survey on hidden Markov jump systems: Asynchronous control and filtering // Int. J. Syst. Sci., 2023. Vol. 54. No. 6. P. 1360–1376. doi: 10.1109/TIT.2002.1003838.
4. Дынкин Е. Марковские процессы. — М.: Наука, 1963. 862 с.
5. Гухман И., Скороход А. Теория случайных процессов. — М.: Наука, 1973. Т. 2. 640 с.
6. Липцер Р., Ширяев А. Теория мартингалов. — М.: Физматлит, 1986. 512 с.
7. Elliott R., Aggoun L., Moore J. Hidden Markov models: Estimation and control. — New York, NY, USA: Springer, 2010. 382 p.
8. Wan C., Davis M. Existence of optimal controls for stochastic jump processes // SIAM J. Control Optim., 1979. Vol. 17. No. 4. P. 511–524. doi: 10.1137/0317037.
9. Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of optimal controls for partially observed jump processes // Acta Appl. Math., 2002. Vol. 74. Iss. 2. P. 155–175. doi: 10.1023/A:1020669212384.
10. Борисов А. Применение алгоритмов оптимальной фильтрации для решения задачи мониторинга доступности удаленного сервера // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 3. С. 53–69. doi: 10.14375/19922264140307. EDN: SMPBCB.
11. Борисов А. Применение методов оптимальной фильтрации для оперативного оценивания состояний сетей массового обслуживания // Автоматика и телемеханика, 2016. Вып. 2. С. 115–141.
12. Борисов А., Босов А., Миллер Г. Моделирование и мониторинг состояния VoIP-соединения // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 2. С. 2–13. doi: 10.14357/19922264160201. EDN: WCBWUH.
13. Borisov A., Bosov A., Miller G., Sokolov I. Partial diffusion Markov model of heterogeneous TCP link: Optimization with incomplete information // Mathematics, 2021. Vol. 9. Art. 1632. 31 p. doi: 10.3390/math9141632.
14. Горшенин А., Горбунов С., Волканов Д. О кластеризации объектов сетевой вычислительной инфраструктуры на основе анализа статистических аномалий в трафике // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 76–87. doi: 10.14357/19922264230311. EDN: ХНТМVI.
15. Борисов А. Анализ и оценивание состояний специальных марковских скачкообразных процессов. I: мар-

- тингальное представление // Автоматика и телемеханика, 2004. Вып. 1. С. 50–65.
16. Rong Li X., Jilkov V. Survey of maneuvering target tracking. Part V. Multiple-model methods // IEEE T. Aero. Elec. Sys., 2005. Vol. 41. No. 4. P. 1255–1321. doi: 10.1109/TAES.2005.1561886.
17. Mamon R., Elliott R. Hidden Markov models in finance: Further developments and applications. — New York, NY, USA: Springer, 2014. Vol. II. 283 p.
18. Dainotti A., Pescapé A., Rossi P., et al. Internet traffic modeling by means of hidden Markov models // Comput. Netw., 2008. Vol. 52. P. 2645–2662. doi: 10.1016/j.comnet.2008.05.004.
19. Ishikawa Y., Kunita H. Malliavin calculus on the Wiener–Poisson space and its application to canonical SDE with jumps // Stoch. Proc. Appl., 2006. Vol. 116. No. 12. P. 1743–1769. doi: 10.1016/j.spa.2006.04.013.

Поступила в редакцию 19.04.24

---

---

## PROBABILISTIC ANALYSIS OF A CLASS OF MARKOV JUMP PROCESSES

A. V. Borisov<sup>1,2</sup>, Yu. N. Kurinov<sup>2</sup>, and R. L. Smeliansky<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>2</sup>M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

**Abstract:** The paper introduces a class of the jump processes. The first compound component represents a Markov jump process with a finite state space. The second compound component jumps synchronously with the first one. Given the first component trajectory, the second component forms a sequence of independent random vectors. The corresponding conditional distributions are known and have intersecting support sets. This makes impossible the exact recovery of the first process component by the second one. The authors prove the Markov property for the considered class of random processes and obtain a collection of their probability characteristics. It includes the infinitesimal generator and its conjugate operator. Their knowledge makes possible the construction of the Kolmogorov equation system describing the evolution of the process probability distribution. Also, a martingale decomposition for an arbitrary function of the considered process was derived. It can be characterized by the solution to a system of linear stochastic differential equations with martingales on the right side. If the functions of the investigated process have finite moments of the second order, one may obtain the quadratic characteristics of martingales.

**Keywords:** Markov jump process; infinitesimal generator; martingale decomposition; stochastic differential equation

**DOI:** 10.14357/19922264240304

**EDN:** XPVTGJ

### Acknowledgments

The work was done with the support of MSU Program of Development, Project No. 23-SCH03-03. The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (СКР “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

### References

- White, D. 1993. A survey of applications of Markov decision processes. *J. Oper. Res. Soc.* 44(11):1073–1096. doi: 10.1057/jors.1993.181.
- Ephraim, Y., and N. Merhav. 2002. Hidden Markov processes. *IEEE T. Inform. Theory* 48(6):1518–1569. doi: 10.1109/TIT.2002.1003838.
- Dong, S., M. Liu, and Z. Wu. 2023. A survey on hidden Markov jump systems: Asynchronous control and filtering. *Int. J. Syst. Sci.* 54(6):1360–1376. doi: 10.1080/00207721.2023.2171710.
- Dynkin, E. 1963. *Markovskie protsessy* [Markov processes]. Moscow: Nauka. 862 p.
- Gikhman, I. I., and A. V. Skorokhod. 1973. *Teoriya sluchaynykh protsessov* [Theory of random processes]. Moscow: Nauka. Vol. 2. 640 p.
- Liptser, R. Sh., and A. N. Shiriyayev. 1989. *Theory of martingales*. New York, NY: Springer. 812 p.
- Elliott, R., L. Aggoun, and J. Moore. 2010. *Hidden Markov models: Estimation and control*. New York, NY: Springer. 382 p.

8. Wan, C., and M. Davis. 1979. Existence of optimal controls for stochastic jump processes. *SIAM J. Control Optim.* 17(4):511–524. doi: 10.1137/0317037.
9. Ceci, C., A. Gerardi, and P. Tardelli. 2002. Existence of optimal controls for partially observed jump processes. *Acta Appl. Math.* 74(2):155–175. doi: 10.1023/A:1020669212384.
10. Borisov, A. 2014. Primenenie algoritmov optimal'noy fil'tratsii dlya resheniya zadachi monitoringa dostupnosti udalennogo servera [Monitoring remote server accessibility: The optimal filtering approach]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 8(3):53–69. doi: 10.14375/19922264140307. EDN: SMPBCB.
11. Borisov, A. V. 2016. Application of optimal filtering methods for online of queueing network states. *Automat. Rem. Contr.* 77(2):277–296. doi: 10.1134/S0005117916020053. EDN: WPMUCUD.
12. Borisov, A., A. Bosov, and G. Miller. 2016. Modelirovanie i monitoring sostoyaniya VoIP-soedineniya [Modeling and monitoring of VoIP connection]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 10(2):2–13. doi: 10.14375/19922264160201. EDN: WCBWUH.
13. Borisov, A., A. Bosov, G. Miller, and I. Sokolov. 2021. Partial diffusion Markov model of heterogeneous TCP link: Optimization with incomplete information. *Mathematics* 9:1632. 31 p. doi: 10.3390/math9141632.
14. Gorshenin, A. K., S. A. Gorbunov, and D. Yu. Volkanov. 2023. O klasterizatsii ob"ektov setevoy vychislitel'noy infrastruktury na osnove analiza statisticheskikh anomalii v trafike [Toward clustering of network computing infrastructure objects based on analysis of statistical anomalies in network traffic]. *Informatika i ee primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):76–87. doi: 10.14375/19922264230311. EDN: XHTMVI.
15. Borisov, A. V. 2004. Analysis and estimation of the states of special jump Markov processes. I. Martingale representation. *Automat. Rem. Contr.* 65(1):44–57. doi: 10.1023/B:AURC.0000011689.11915.24. EDN: MHPDNL.
16. Rong Li, X., and V. Jilkov. 2005. Survey of maneuvering target tracking. Part V. Multiple-model methods. *IEEE T. Aero. Elec. Sys.* 41(4):1255–1321. doi: 10.1109/TAES.2005.1561886.
17. Mamon, R. S., and R. Elliott. 2014. *Hidden Markov models in finance: Further developments and applications*. New York, NY: Springer. Vol. II. 283 p.
18. Dainotti, A., A. Pescapé, P. Rossi, et al. 2008. Internet traffic modeling by means of hidden Markov models. *Comput. Netw.* 52(14):2645–2662. doi: 10.1016/j.comnet.2008.05.004.
19. Ishikawa, Y., and H. Kunita. 2006. Malliavin calculus on the Wiener–Poisson space and its application to canonical SDE with jumps. *Stoch. Proc. Appl.* 116(12):1743–1769. doi: 10.1016/j.spa.2006.04.013.

Received April 19, 2024

## Contributors

**Borisov Andrey V.** (b. 1965) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; aborisov@frcsc.ru

**Kurinov Yuri N.** (b. 2002) — bachelor student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation, kurinovurij@gmail.com

**Smeliansky Ruslan L.** (b. 1950) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, head of department, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; smel@cs.msu.ru

# СТАБИЛИЗАЦИЯ АВТОНОМНОГО ЛИНЕЙНОГО ВЫХОДА МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ НА БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ\*

А. В. Босов<sup>1</sup>

**Аннотация:** Решение задачи оптимального управления линейным выходом стохастической дифференциальной системы на бесконечном горизонте адаптировано для одного частного случая косвенных наблюдений. Роль динамической системы выполняет эргодическая цепь Маркова, а формируемый ею автономный линейный выход обеспечивает косвенные зашумленные наблюдения о состоянии цепи. Цель управления формулируется как стабилизация выхода в положениях, определяемых цепью и периодически изменяющихся при изменениях состояния цепи. Решение, как и в аналогичной задаче с полной информацией, получено как предельная форма оптимального управления в соответствующей задаче с конечным горизонтом. Достаточные условия существования управления оказываются типовыми для линейно-квадратичных задач условиями стационарности, детектируемости и стабилизируемости. Из-за специального вида задачи, обеспечиваемого структурой оптимального фильтра Вонэма, в управлении присутствуют только линейные компоненты, а вся нелинейность ограничена уравнением оценки фильтрации, поэтому условия существования включают только требования к решению автономного уравнения Риккати. Обсуждается численный эксперимент для модели механического привода, использованной в предыдущих исследованиях. Цель эксперимента — показать разницу в использовании оптимального управления и его автономного варианта.

**Ключевые слова:** цепь Маркова с непрерывным временем; фильтр Вонэма; линейная дифференциальная система; оптимальное управление; стабилизация; квадратичный критерий

**DOI:** 10.14357/19922264240305

**EDN:** XVTFLLH

## 1 Введение

Типовым вариантом классической задачи линейно-квадратичного гауссовского (LQG, linear-quadratic-Gaussian) управления [1] можно считать постановку с бесконечным горизонтом управления [2, 3], причем отличий между случаями с полной информацией и косвенными наблюдениями за состоянием системы нет. Обеспечивается это уникальными свойствами оптимальной оценки, описываемой фильтром Калмана–Бьюси [4], или, другими словами, двойственностью задач LQG-управления и фильтрации, которая все вопросы сводит к анализу поведения решения дифференциального уравнения Риккати на бесконечности. В отсутствие линейно-гауссовских условий изучать задачу с бесконечным горизонтом становится сложно из-за трудностей, связанных с записью уравнений для оценки оптимальной фильтрации. Лучшее всего для формирования модели наблюдения могли бы подойти общие уравнения нелинейной фильтрации на основе обновляющих процессов [5], но их конструкция такова, что не дает шансов для прак-

тической реализации. Занимающим промежуточное положение можно считать фильтр Вонэма [6], описывающий оценку состояния непрерывной цепи Маркова по косвенным линейно-гауссовским наблюдениям. Поведение цепи Маркова на бесконечности прекрасно изучено [7], требование эргодичности хорошо согласуется с духом задачи с непрерывным временем. Таким образом, логичным представляется полученное ранее в [8] оптимальное автономное управление в задаче управления линейным выходом стохастической дифференциальной системы на бесконечном горизонте в случае полной информации дополнить оптимальным автономным управлением в задаче стабилизации линейного выхода стохастической дифференциальной системы на бесконечном горизонте в случае косвенных наблюдений за состоянием формирующей выход дискретной цепи Маркова.

## 2 Постановка задачи

На каноническом вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{F}_t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , рассмотрим автоном-

\* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

<sup>1</sup> Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук, ABosov@frcsc.ru

ную линейную дифференциальную стохастическую систему с управляемым вектором выхода  $z_t \in \mathbb{R}^{n_z}$ :

$$dz_t = ay_t dt + bz_t dt + cu_t dt + \sigma dw_t, \\ z_0 = Z, \quad t \in [0, \infty). \quad (1)$$

В отличие от обычной линейной системы траектории  $z_t$  в (1) имеют систематическую составляющую, которую задает марковский скачкообразный процесс  $y_t$  — цепь с конечным числом состояний и значениями в множестве  $\{e_1, \dots, e_{n_y}\}$ , состоящем из единичных координатных векторов в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{n_y}$ . Цепь  $y_t$  предполагается эргодической, поэтому матрица интенсивностей переходов  $\Lambda$  не зависит от времени, предельное распределение обозначается  $\pi_*$ , начальное распределение —  $y_0 = Y$ . Остальные величины в уравнении (1):

- $w_t \in \mathbb{R}^{n_w}$  — стандартный векторный винеровский процесс;
- $Z \in \mathbb{R}^{n_z}$  — гауссовский случайный вектор с известным математическим ожиданием и ковариацией,  $w_t$ ,  $y_t$  и  $Z$  независимы в совокупности;
- $u_t \in \mathbb{R}^{n_u}$  — управление — случайный процесс с конечным вторым моментом;
- $a \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $c \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$  и  $\sigma \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$  — заданные матрицы.

Состояние цепи  $y_t$  предполагается неизвестным, так что  $z_t$  выполняет роль косвенных наблюдений. Соответственно, допустимые управления предполагаются  $\mathcal{F}_t^z$ -измеримыми (через  $\mathcal{F}_t^z$  обозначена  $\sigma$ -алгебра наблюдений и выполнено  $\mathcal{F}_t^z \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ ). Кроме того, с учетом бесконечного времени  $t \in [0, \infty)$  и марковского характера задачи класс  $U_0^\infty$  допустимых управлений сформирован автономными (не зависящими прямо от времени) управлениями с полной обратной связью, т. е. функциями вида

$$u_t = u(z) \in \mathbb{R}^{n_u}, \quad z \in \mathbb{R}^{n_z},$$

в предположении, что соответствующая реализация  $u_t = u(z_t)$  обеспечивает выполнение условий существования решения (1) для  $u \in U_0^\infty$ . Поскольку состояние  $y_t$  от управления  $u_t$  не зависит, а выход  $z_t$  описывается линейным автономным уравнением с винеровским процессом, то данное формальное требование ограничивает допустимые управления процессами второго порядка, что обеспечивает существование решения (1) на любом конечном интервале  $t \in [0, T]$ . Для управления на интервале  $[0, \infty)$  дополнительно потребуются типовые условия стабилизируемости [2, 3], обсуждаемые далее.

Качество управления  $U_0^\infty$  определяется целевым функционалом следующего вида:

$$J(U_0^\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} J(U_0^T), \quad J(U_0^T) = \\ = \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \|Py_t + Qz_t + Ru_t\|_S^2 dt \right\}, \quad (2)$$

где  $P \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$  и  $S \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  ( $S \geq 0$ ,  $S = S'$ ) — заданные матрицы, весовая функция  $\|x\|_S^2 = x'Sx$ ; единичной матрице  $S = E$  соответствует евклидова норма  $\|x\|_E^2 = |x|^2$ ; «'» — операция транспонирования;  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  — оператор математического ожидания (далее еще используется обозначение  $\mathbb{E}\{\cdot|\mathcal{F}\}$  для условного математического ожидания относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$ ). Кроме того, предполагается выполненным обычное условие невырожденности, в используемых обозначениях принимающее вид  $R'SR > 0$ .

В отношении физического смысла критерия (2) заметим, что цепь  $y_t$ , изменив состояние, некоторое время сохраняет постоянное значение, которое и вносит в уравнение (1) упомянутую систематическую составляющую. Аналогично в целевом функционале присутствуют слагаемые, формируемые «ступеньками» на интервалах постоянства  $y_t$ . Таким образом, (2) формализует цель управления, состоящую в стабилизации выхода  $z_t$  около изменяющихся кусочно-постоянных положений, задаваемых состоянием цепи  $y_t$ . Иными словами, эти положения можно назвать направлениями дрейфа, а целью управления — обеспечение дрейфа выхода системы  $z_t$  в заданном и периодически изменяющемся направлении. Задача состоит, таким образом, в поиске  $(U^*)_0^\infty = \{u^*(z), z \in \mathbb{R}^{n_z}\}$  — допустимого управления, реализации  $u_t^* = u^*(z_t^*)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , которого доставляют минимум квадратичному функционалу  $J(U_0^\infty)$ :

$$(U^*)_0^\infty = \arg \min_{u \in U_0^\infty} J(U_0^\infty). \quad (3)$$

Далее через  $z_t^*$  обозначается решение (1), отвечающее  $u_t^*$  и учитывается, что  $y_t$  от  $u_t$  не зависит.

### 3 Основной результат

Как и в постановке с полной информацией, рассмотренной в [8], здесь также основу для решения (3) обеспечивает решение соответствующей задачи с конечным горизонтом, которое получено в [9]. Ключевую роль в этом решении играет оценка оптимальной фильтрации состояния  $y_t$  по наблюдениям  $\{z_\tau, 0 \leq \tau \leq t\}$ , т. е. условное матема-

тическое ожидание  $\hat{y}_t = \mathbb{E}\{y_t | \mathcal{F}_t^z\}$ , которое задается фильтром Вонэма [2, 10]:

$$d\hat{y}_t = \Lambda' \hat{y}_t dt + (\text{diag}(\hat{y}_t) - \hat{y}_t \hat{y}_t') a' (\sigma \sigma')^{-1} \times \\ \times (dz_t - a \hat{y}_t dt - b z_t dt - c u_t dt), \quad \hat{y}_0 = \mathbb{E}\{Y\}. \quad (4)$$

Для удобства записи функциональную зависимость оценки от наблюдений, определяемую уравнением (4), обозначим  $\hat{y}(z)$ , так чтобы  $\hat{y}_t = \hat{y}(z_t)$ .

Для корректного предельного перехода от постановки с конечным горизонтом к бесконечному времени требуется выполнение ряда условий, объединенных в следующем утверждении.

**Теорема.** *Решение задачи (3) может быть записано в виде*

$$u^*(z) = -\frac{1}{2} (R' S R)^{-1} (c' (2\alpha_* z + \beta_* \hat{y}(z)) + \\ + 2R' S (P \hat{y}(z) + Q z)), \quad (5)$$

где симметричная неотрицательно определенная матрица  $\alpha_* \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  и прямоугольная матрица  $\beta_* \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$  представляют собой решения уравнений

$$\begin{aligned} & (b' - Q' S R (R' S R)^{-1} c') \alpha_* + \\ & + \alpha_* (b - c (R' S R)^{-1} R' S Q) + \\ & + Q' (S - S R (R' S R)^{-1} R' S) Q - \\ & - \alpha_* c (R' S R)^{-1} c' \alpha_* = 0; \quad (6) \end{aligned}$$

$$\beta_* \Lambda' + M_* - N_* \beta_* = 0, \quad (7)$$

где

$$M_* = 2 \left( (a' - P' S R (R' S R)^{-1} c') \alpha_* + \right. \\ \left. + P' (S - S R (R' S R)^{-1} R' S) Q \right);$$

$$N_* = b - c (R' S R)^{-1} R' S Q - c (R' S R)^{-1} c' \alpha_*,$$

если для параметров системы наблюдения  $y_t$ ,  $z_t$  и целевого функционала (2) выполнены следующие условия:

- (1) матрица  $b$  устойчива;
- (2) матрицы  $(K_b, c)$  стабилизируемы,  $K_b = b - c (R' S R)^{-1} R' S Q$ ;
- (3) матрицы  $(K_b', K_Q)$  стабилизируемы;
- (4)  $K_Q = Q' S^{1/2} (E - S^{1/2} R (R' S R)^{-1} R' S^{1/2})$ .

**Доказательство.** Перечисленные в теореме условия обеспечивают существование предельного решения соответствующей (3) задачи с конечным горизонтом, т. е. управления

$$(U^\#)_0^T = \arg \min_{u_t \in U_0^T} J(U_0^T),$$

где  $U_0^T = \{u_t(z, T), z \in \mathbb{R}^{n_z}, t \in [0, T]\}$ . Оптимальное управление  $u_t^\# = u_t^\#(z_t^\#, T)$  получено в [9] в результате разделения задач управления и фильтрации в виде

$$u_t^\# = u_t^\#(z, T) = -\frac{1}{2} (R' S R)^{-1} (c' (2\alpha_t z + \\ + \beta_t \hat{y}(z)) + 2R' S (P \hat{y}(z) + Q z)), \quad (8)$$

где матричные коэффициенты  $\alpha_t = \alpha_t(T) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  и  $\beta_t = \beta_t(T) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$  представляют собой решения задач Коши для уравнения Риккати

$$\begin{aligned} & \frac{d\alpha_t}{dt} + (b' - Q' S R (R' S R)^{-1} c') \alpha_t + \\ & + \alpha_t (b - c (R' S R)^{-1} R' S Q) + \\ & + Q' (S - S R (R' S R)^{-1} R' S) Q - \\ & - \alpha_t c (R' S R)^{-1} c' \alpha_t = 0, \quad \alpha_T = Q' S Q, \quad (9) \end{aligned}$$

и линейного уравнения

$$\frac{d\beta_t}{dt} = \beta_t \Lambda' + M_t - N_t \beta_t = 0, \quad \beta_T = 2Q_T' S_T P_T, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} M_t &= M_t(T) = 2 \left( (a' - P' S R (R' S R)^{-1} c') \alpha_t + \right. \\ & \left. + P' (S - S R (R' S R)^{-1} R' S) Q \right); \\ N_t &= N_t(T) = \\ & = b - c (R' S R)^{-1} R' S Q - c (R' S R)^{-1} c' \alpha_t. \end{aligned}$$

Условия 1–3 теоремы — это условия существования предельного решения уравнения Риккати  $\alpha_* = \lim_{T \rightarrow \infty} \alpha_t(T)$  и оптимального решения в классической задаче линейно-квадратичного гауссовского управления с бесконечным временем (используемые в рассматриваемой задаче обозначения приведены к формулировкам условий теоремы 12.2 из монографии [2]). Отсюда получаем, что существует матрица  $N_* = \lim_{T \rightarrow \infty} N_t(T)$  (предел существует и не зависит от  $t$ , так как  $N_t(T)$  выражается линейно через  $\alpha_t(T)$ ). Более того, эта же теорема утверждает, что матрица  $N_*$  устойчива, что вместе с изначально предполагаемой эргодичностью  $y_t$  дает устойчивость уравнения (10), т. е. существование предельной матрицы  $\beta_*$ , что завершает доказательство.

Отметим, что для предельного перехода  $\beta_* = \lim_{T \rightarrow \infty} \beta_t(T)$  не потребовались дополнительные условия. Это связано со специальным видом нелинейной динамики рассматриваемой системы, заданным фильтром Вонэма (4), а именно: данная модель отвечает частному случаю линейного сноса в задаче управления линейным дифференциальным выходом общего вида, рассмотренному подробно



в [11]. Более того, снос  $\Lambda' \hat{y}_t$  не просто линейный, а аффинный, без свободного члена, что предельно упрощает вид управления и приводит к тому, что для сходимости достаточно эргодичности  $y_t$ .

Также можно заметить, что в [11] решение включает еще и конечный вид функции Беллмана. Нетрудно показать, что эти соотношения можно трансформировать и для рассматриваемой задачи (3), но кроме формального значения практического смысла в них нет.

Наконец, надо отметить, что по сравнению с задачей с полной информацией, рассмотренной в [9], здесь оптимальное управление (5) нелинейным считается лишь формально, а именно: нелинейность управлению  $u^*$  дает только оценка фильтрации  $\hat{y}_t = \hat{y}(z_t)$ . Если же рассматривать управление  $u^*$  как функцию двух переменных  $z_t$  и  $\hat{y}_t$ , то оно оказывается линейным. Такое свойство управления в [12] названо сильным принципом разделения.

#### 4 Численный эксперимент

Для иллюстрации того, как работает оптимальное автономное управление  $u^* = u^*(z)$ , предлагается сравнить его с оптимальным неавтономным управлением  $u_t^\# = u_t^\#(z, T)$ , т.е. проанализировать, как происходит переход системы  $y_t, z_t$  в стационарный режим и как влияет неоптимальность автономного управления на результат на конечном горизонте. Для этого использована детально исследованная в [9] модель простого механического привода

$$\left. \begin{aligned} dx_t &= v_t dt, \quad t \in (0, T], \quad T = 10; \\ dv_t &= ax_t dt + bv_t dt + cy_t dt + hu_t dt + \\ &\quad + \sqrt{g} dw_t. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Цепь имеет размерность  $n_y = 3$ , начальное распределение

$$Y = (1, 0, 0)'; \quad \lambda = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Начальные условия  $x_0$  и  $v_0$  предполагаются независимыми гауссовскими случайными величинами с нулевым средним и дисперсиями  $\sigma_x^2 = \sigma_v^2 = 1$ . Остальные параметры:  $a = -1$ ;  $b = -1/2$ ;  $h = 10$ ;  $g = 0,01$ ;  $c = (c_1, c_2, c_3) = (-1, 0, 1)$ . Устойчивость системы (11) обеспечивается тем, что  $b < 0$

и  $b^2 + 4a = -3,75 < 0$ , поскольку  $b$  и  $b^2 + 4a$  — собственные числа матрицы системы  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ .

Цель управления состоит в отслеживании приводом формируемого цепью дрейфа  $cy_t$ , для чего используется целевой функционал:

$$J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T (|Cy_t - x_t|^2 + R|u_t|^2) dt \right\}, \quad (12)$$

где

$$C = \left( -\frac{c_1}{a}, -\frac{c_2}{a}, -\frac{c_3}{a} \right) = (-1, 0, 1) = c; \quad R = 0,001.$$

Перечисленные параметры формируют самый типовой вариант расчета, когда система (11) обладает устойчивостью, отслеживает дрейф цепи и без управления, т.е. при  $u_t = 0$ , не возникают изучаемые в [9] нюансы в поведении численных реализаций фильтра Вонэма, а само оптимальное управление действует очень эффективно. Для иллюстрации последнего утверждения на рис. 1 наряду с траекториями  $x_t^*$  и  $x_t^{(0)}$ , формируемыми соответственно оптимальным автономным управлением  $u_t^* = u^*(z_t^*)$  и нулевым управлением  $u_t^{(0)} = u^{(0)}(z_t^{(0)}) = 0$ , приведена еще траектория оптимального управления с полной информацией  $u_t^{**} = u^{**}(y_t, z_t^{**})$ , которое вычисляется так же, как управление (8), но с заменой оценки  $\hat{y}_t$  на точное значение  $y_t$  (оптимальность этого управления в задаче с полной информацией и конечным горизонтом доказана в [9]).

Рисунок 1 позволяет качественно оценить эффективность управления приводом и показать высокую точность оценивания состояния цепи. Кроме того, можно видеть, что и неуправляемая система обозначает своей целью слежение за состоянием цепи, т.е. передвижение привода в направлении

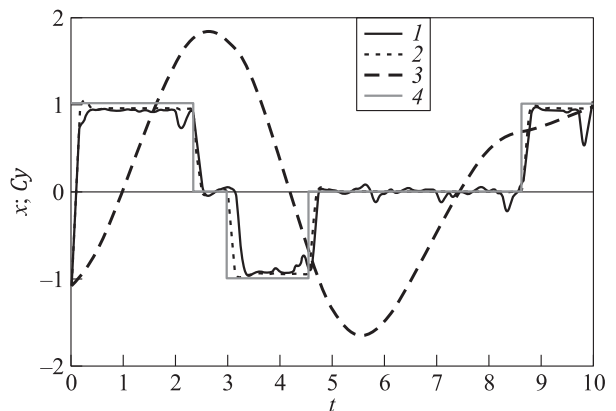
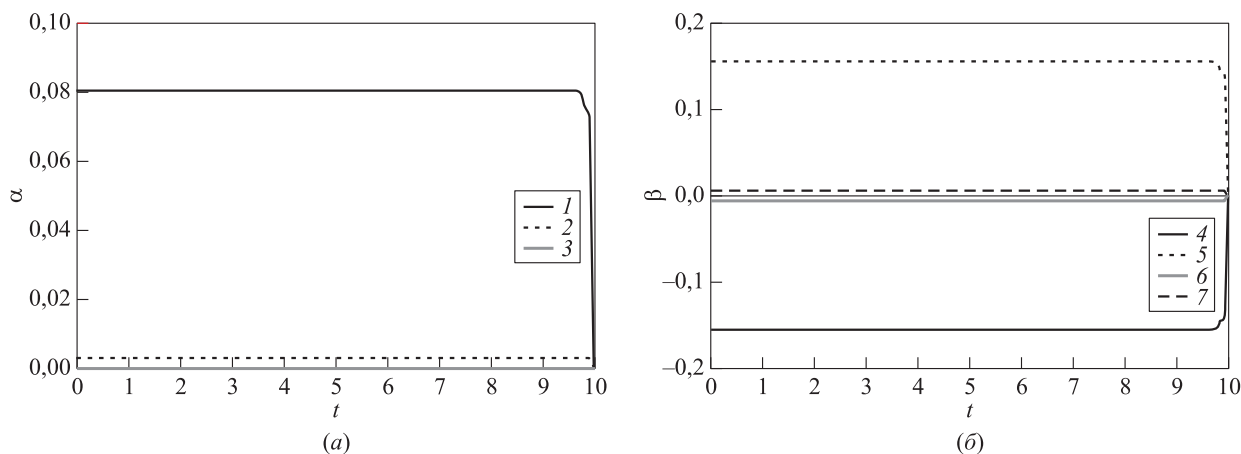


Рис. 1 Типовая траектория положения привода  $x_t$  для управлений  $u_t^*$  (1),  $u_t^{**}$  (2) и  $u_t^{(0)}$  (3); 4 — направление дрейфа  $Cy_t$



**Рис. 2** Формирование  $\alpha_t$  (а) и  $\beta_t$  (б) предельных значений  $\alpha_*$  (а) и  $\beta_*$  (б): 1 –  $(\alpha_t)_{11}$ ; 2 –  $(\alpha_t)_{12}$ ; 3 –  $(\alpha_t)_{22}$ ; 4 –  $(\beta_t)_{11}$ ; 5 –  $(\beta_t)_{13}$ ; 6 –  $(\beta_t)_{21}$ ; 7 –  $(\beta_t)_{23}$

Результаты управления  $J(U_0^T)$

$u_t^{(0)} = 0$	$u_t^* = u^*(z_t^*)$	$u_t^{**} = u^*(y_t, z_t^{**})$	$u_t^\# = u^\#(z_t^\#, T)$	$u_t^\# = u^\#(y_t, z_t^\#, T)$
8,418	1,094	0,654	1,093	0,653

дрейфа, но инерция системы при этом слишком велика, чтобы говорить хоть о какой-то эффективности.

Надо отметить, что траектории на рис. 1 сформированы именно автономным управлением, т. е. вместо коэффициентов  $\alpha_t$  и  $\beta_t$  из (9) и (10) использованы предельные значения  $\alpha_*$  и  $\beta_*$  из (6) и (7). Оказалось, что управления, учитывающие переходный процесс и использующие коэффициенты  $\alpha_t$  и  $\beta_t$ , визуализировать не имеет смысла, так как отличить траектории привода, сформированные автономным и оптимальным управлениями, невозможно. Проиллюстрировать протекание переходного процесса и формирование стационарного режима для автономного управления можно графиками для коэффициентов  $\alpha_t$  и  $\beta_t$  (рис. 2).

Не приведены графики двух элементов матрицы  $\beta_t$ , для которых выполнено  $(\beta_t)_{12} = 0$  и  $(\beta_t)_{22} = 0$ . Можно заметить, что для расчета управления (5) в модели (11) используется только часть элементов  $\alpha_*$  и  $\beta_*$ , а именно: вторые столбцы этих матриц. Это объясняется вырожденностью модели (11) и отсутствием управления в первом уравнении для  $v_t$ , что дает в каноническом виде (1) коэффициент  $c' = (0, h)$ . Это замечание не отменяет значимости остальных элементов  $\alpha_*$  и  $\beta_*$ . Все элементы этих коэффициентов управления не зависят от того, как в модели реализовано аддитивное управление, но все могут оказаться используемыми для стабилизации разных компонентов вектора выхода.

Из графиков, показанных на рис. 2, понятно, что переходный процесс очень быстрый и, по сути, почти на всей моделируемой траектории в любом случае применяется именно оптимальное автономное управление. Для формального подтверждения этого вывода приведена таблица, в которой указаны величины целевой функции (12) для всех типов использованных управлений.

Таким образом, разница по критерию между автономным и оптимальным управлением проявится только в третьем знаке, а с ростом времени, естественно, будет уменьшаться дальше. Отметим, что связано это не только с собственной устойчивостью системы (11), но и с высокой эффективностью управлений  $u_t^\#$  и  $u_t^*$ , которые, решая задачу отслеживания заданного дрейфа, еще и ускоряют (практически выполняют мгновенно) прохождение переходного процесса и переход системы в стационарный режим.

## 5 Заключение

Статья завершает изучение задачи оптимального управления линейным выходом стохастической системы по квадратичному критерию с бесконечным временем. Рассмотренная в [8] постановка этой задачи с полной информацией дополнена вариантом с косвенными наблюдениями. В качестве модели состояния использована эргодическая цепь Маркова. Выбор этого частного случая продик-

тован, во-первых, его практической значимостью, так как марковская цепь представляет исключительно удобный инструмент для описания неконтролируемых внешних воздействий, имеющих скачкообразный характер. Вторая причина носит технический характер. Если бы моделью состояния был произвольный марковский процесс, то на первый план при реализации вышла бы задача фильтрации. Теоретическому исследованию это бы не помешало. Общие уравнения фильтрации позволили бы применить принцип разделения и записать оптимальное автономное управление, выразив его через оптимальную оценку фильтрации. Это хорошо продемонстрировано в ключевой в рассматриваемой области исследований работе [12]. Однако приблизиться к практической реализации такого результата позволил только частный случай марковской цепи, а точнее, оптимальная оценка фильтрации, описываемая фильтром Вонэма. Нелинейная, сложная для компьютерной реализации оценка в рассмотренной постановке обеспечила результат, по сути, укладывающийся в рамки традиционной LQG-задачи, по крайней мере достаточными условиями существования оказались обычные условия стабилизируемости и детектируемости самого известного в теории управления уравнения Риккати.

## Литература

1. *Athans M.* The role and use of the stochastic linear-quadratic-Gaussian problem in control system design // *IEEE T. Automat. Contr.*, 1971. Vol. 16. No. 6. P. 529–552. doi: 10.1109/TAC.1971.1099818.
2. *Wonham W. M.* Linear multivariable control. A geometric approach. — Lecture notes in economics and mathematical systems ser. — Berlin: Springer-Verlag, 1974. Vol. 101. 347 p.
3. *Девис М. Х. А.* Линейное оценивание и стохастическое управление / Пер. с англ. — М.: Наука, 1984. 206 с. (*Davis M. H. A.* Linear estimation and stochastic control. — London: Chapman and Hall, 1977. 224 p.)
4. *Kalman R. E., Bucy R. S.* New results in linear filtering and prediction theory // *J. Basic Eng.* — Т. ASME, 1965. No. 83. P. 95–108. doi: 10.1115/1.3658902.
5. *Луицер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — Серия «Теория вероятностей и математическая статистика». — М.: Наука, 1974. 696 с.
6. *Wonham W. M.* Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering // *SIAM J. Control*, 1965. No. 2. P. 347–369. doi: 10.1137/0302028.
7. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — 2-е изд. — М.: Наука, 1989. 640 с.
8. *Босов А. В.* Управление линейным выходом автономной дифференциальной системы по квадратичному критерию на бесконечном горизонте // *Информатика и её применения*, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 18–25. doi: 10.14357/19922264240103. EDN: UEESFO.
9. *Босов А. В.* Стабилизация и слежение за траекторией линейной системы со скачкообразно изменяющимся дрейфом // *Автоматика и телемеханика*, 2022. № 4. С. 27–46. doi: 10.31857/S0005231022040031.
10. *Elliott R. J., Aggoun L., Moore J. B.* Hidden Markov models: Estimation and control. — New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1995. 382 p. doi: 10.1007/978-0-387-84854-9.
11. *Босов А. В.* Задача управления линейным выходом нелинейной управляемой стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию // *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2021. № 5. С. 52–73. doi: 10.31857/S000233882104003X. EDN: ESNC SX.
12. *Rishel R.* A strong separation principle for stochastic control systems driven by a hidden Markov model // *SIAM J. Control Optim.*, 1994. Vol. 32. P. 1008–1020. doi: 10.1137/S0363012992232233.

Поступила в редакцию 19.03.24

# AUTONOMOUS LINEAR OUTPUT OF THE MARKOV CHAIN STABILIZATION BY SQUARE CRITERION ON AN INFINITE HORIZON

A. V. Bosov

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The solution of the linear output of the stochastic differential system optimal control problem on an infinite horizon is adapted for one particular case of indirect observation. The ergodic Markov chain plays the role of a dynamic system and the autonomous linear output formed by it provides indirect noisy observations on

the state of the chain. The control purpose is formulated as output stabilization in positions determined by the chain and periodically changing with chain state changes. The solution, as in a similar problem with complete information, is obtained as the limit form of optimal control in the corresponding problem with a finite horizon. Sufficient conditions for the control existence turn out to be typical conditions for linear-quadratic problems of structure of the optimal Wonham filter, only linear components are present in the control and all nonlinearity is limited by the equation of the filtering estimate. Due to this, the existence conditions include only the requirements for the autonomous Riccati equation solution. A numerical experiment for the mechanical drive model used in previous studies is discussed. The purpose of the experiment is to show the difference in the use of optimal control and its autonomous version.

**Keywords:** Markov chain with continuous time; Wonham filter; linear differential system; optimal control; stabilization; square criterion

**DOI:** 10.14357/19922264240305

**EDN:** XVTFLLH

## Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (CKP “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

## References

- Athans, M. 1971. The role and use of the stochastic linear-quadratic-Gaussian problem in control system design. *IEEE T. Automat. Contr.* 16(6):529–552. doi: 10.1109/TAC.1971.1099818.
- Wonham, W. M. 1974. *Linear multivariable control. A geometric approach*. Lecture notes in economics and mathematical systems ser. Berlin: Springer-Verlag. 347 p.
- Davis, M. H. A. 1977. *Linear estimation and stochastic control*. London: Chapman and Hall. 224 p.
- Kalman, R., and R. S. Bucy. 1965. New results in linear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng. — T. ASME* 83(1):95–108. doi: 10.1115/1.3658902.
- Liptser, R. S., and A. N. Shiryaev. 1974. *Statistika sluchaynykh protsessov (nelineynaya fil'tratsiya i smezhnye voprosy)* [Statistics of random processes. Nonlinear filtering and related problems]. Seriya “Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika” [Probability theory and mathematical statistics ser.]. Moscow: Nauka. 696 p.
- Wonham, W. M. 1965. Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering. *SIAM J. Control* 2(3):347–369. doi: 10.1137/0302028.
- Shiryayev, A. N. 1989. *Veroyatnost' [Probability]*. 2nd ed. Moscow: Nauka. 640 p.
- Bosov, A. V. 2024. Upravlenie lineynym vykhodom avtonomnoy differentsial'noy sistemy po kvadrachnomu kriteriyu na beskonechnom gorizonte [Autonomous differential system linear output control by square criterion on an infinite horizon]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):18–25. doi: 10.14357/19922264240103. EDN: UEESFO.
- Bosov, A. V. 2022. Stabilization and tracking of the trajectory of a linear system with jump drift. *Automat. Rem. Contr.* 83(4):520–535. doi: 10.1134/S0005117922040026.
- Elliott, R. J., L. Aggoun, and J. B. Moore. 1995. *Hidden Markov models: Estimation and control*. New York, NY: Springer-Verlag. 382 p. doi: 10.1007/978-0-387-84854-9.
- Bosov, A. V. 2021. The problem of controlling the linear output of a nonlinear uncontrollable stochastic differential system by the square criterion. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 60(5):719–739. doi: 10.1134/S1064230721040031. EDN: ESNC SX.
- Rishel, R. 1994. A strong separation principle for stochastic control systems driven by a hidden Markov model. *SIAM J. Control Optim.* 32(4):1008–1020. doi: 10.1137/S0363012992232233.

Received March 19, 2024

## Contributor

**Bosov Alexey V.** (b. 1969) — Doctor of Science in technology, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; avbosov@ipiran.ru

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ ПРИ НЕЛОКАЛЬНОМ ОПИСАНИИ ПОТОКОВ

А. В. Зорин<sup>1</sup>

**Аннотация:** При вероятностном моделировании и анализе сложных управляющих систем массового обслуживания нескольких конфликтных входных потоков в ряде работ успешно применялся подход, одна из черт которого — нелокальное описание различных составных блоков системы. При таком описании часто теряется информация об истинных моментах прихода и ухода требований в системе. Это приводит к сложностям при определении периода занятости — одного из классических показателей качества функционирования. В работе предлагается определение периода занятости управляющей системы массового обслуживания на основе выделения тех моментов наблюдения над системой, в которые очереди достигают нулевого значения. На примере циклического алгоритма обслуживания с фиксированным ритмом переключения и с использованием мартигальной техники находятся эффективные вычислительные формулы для математического ожидания периода занятости отдельной очереди.

**Ключевые слова:** управляющая система массового обслуживания; нелокальное описание блоков; неординарные потоки Пуассона; циклический алгоритм обслуживания; период занятости; многомерная счетная цепь Маркова; мартигал; обобщенная теорема Руше; интерполяционный полином Лагранжа

DOI: 10.14357/19922264240306

EDN: YKSIBJ

## 1 Введение

В настоящее время в теории массового обслуживания рассматривается большое число показателей качества обслуживания, таких как распределение времени ожидания требования, распределения размеров очередей, распределение интервала занятости, вероятность потери требования в системе с потерями и т. д. [1]. В то время как одни характеристики можно без труда относить и к моделям с непрерывным временем, и к моделям с дискретным временем, корректное определение других характеристик может встречать известные затруднения.

Поясним сказанное на примере периода занятости. Период занятости для некоторого прибора (если в системе несколько обслуживающих приборов) определяется как промежуток времени, в начале которого прибор выходит из режима ожидания и начинается обслуживание требования, а окончание этого промежутка совпадает с первым из тех моментов окончания обслуживания, когда ожидающих обслуживания на этом приборе требований больше нет и прибор вынужден перейти в режим ожидания. Для систем в дискретном времени [2–4] вся временная ось разбивается на временные слоты фиксированного размера  $h > 0$  и истинный момент поступления требования не наблюдается. Считается, что требование поступает в конце слота, а его обслуживание может начаться только в следующем временном слоте. Таким образом, период

занятости в модели с дискретным временем будет целым кратным величины  $h$  и будет содержать «ошибку округления» порядка  $h$ .

В монографиях [2, 3] период занятости исследован для простейшей однолинейной системы и системы с конечным числом параллельных приборов с геометрическим входящим потоком; в монографии [4] период занятости изучается для однолинейной системы с произвольным (целочисленным) временем обслуживания. Достаточное представление об истории и современном состоянии этого круга вопросов можно составить также по работам [5–8].

Для построения адекватных математических моделей сложных управляющих систем обслуживания приходится применять так называемое нелокальное задание разных составных блоков системы, таких как входные потоки, потоки насыщения и некоторые другие. Напомним, что потоки насыщения определяются [9] как виртуальные выходные потоки системы при наличии достаточно большого запаса требований в очередях и максимальном использовании возможностей обслуживающего устройства; таким образом, они представляют альтернативу указания закона обслуживания каждого отдельного требования. Понятие нелокального описания потока было введено в работах [10, 11]. Приведем здесь соответствующее определение: пусть  $\{\tau_i^H; i = 0, 1, \dots\}$  — после-

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, andrei.zorin@itmm.unn.ru

довательность моментов наблюдения на оси  $Ot$ ,  $(M, \mathcal{M})$  — измеримое пространство меток,  $\eta_i^H \in \{0, 1, \dots\}$  и  $\nu_i \in M$  суть число требований и метка требований потока  $\Pi$ , поступивших на промежутке  $(\tau_i^H, \tau_{i+1}^H]$ . Неполное (нелокальное) описание потока  $\Pi$  неоднородных требований есть векторная случайная последовательность  $\{(\tau_i^H, \eta_i^H, \nu_i); i = 0, 1, \dots\}$ . Существенное отличие использования нелокального описания от упомянутых ранее моделей в дискретном времени заключается в том, что длительности  $(\tau_i^H - \tau_{i-1}^H)$  промежутков наблюдения могут быть случайными и достаточно большими, а их законы распределения могут существенно меняться в зависимости от состояния системы обслуживания. В частности, оказывается возможным применить понятие нелокального описания для задания свойств процесса обслуживания требований с помощью потока насыщения вместо традиционного указания закона распределения длительности обслуживания каждого отдельного требования.

Использование нелокального описания для входных потоков и для потоков насыщения лишает исследователя информации о точных моментах начала и окончания периода занятости в классическом смысле. Поэтому в данной работе предлагается связать периоды занятости с некоторыми из моментов  $\tau_i^H$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , когда одна или несколько очередей опустошаются. На этом пути удастся вычислить среднее время периода занятости, например для системы обслуживания нескольких конфликтных потоков по алгоритму с циклическим ритмом переключения и фиксированными длительностями фаз. Этот алгоритм часто применяется, например, в задачах управления транспортными потоками на регулируемых перекрестках.

## 2 Общая постановка задачи

Рассмотрим следующую систему массового обслуживания. Имеются  $m < \infty$  входных потоков  $\Pi_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Предположим, что поток  $\Pi_j$  — стационарный, неординарный, без последействия. Требования потока  $\Pi_j$  помещаются в накопитель неограниченного объема. Обслуживающее устройство имеет  $2m$  состояний:  $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}$ . В состоянии  $\Gamma^{(2j-1)}$  обслуживаются только требования потоков  $\Pi_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . В состояниях вида  $\Gamma^{(2j)}$  требования не обслуживаются. Состояния меняются по циклическому алгоритму:  $\dots \rightarrow \Gamma^{(1)} \rightarrow \Gamma^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma^{(2m)} \rightarrow \Gamma^{(1)} \rightarrow \dots$ . Длительность состояния  $\Gamma^{(r)}$  неслучайна и равна  $T_r > 0$ . Закон обслуживания потока задается свойствами потока насыщения: максимально возможное число  $\ell_j \in \{0, 1, \dots\}$  обслуженных требований из очереди  $O_j$  за время  $T_{2j-1}$  в состоянии  $\Gamma^{(2j-1)}$  обслуживающего

устройства и число 0 в любом другом состоянии  $\Gamma^{(r)}$ ,  $r \neq 2j - 1$ .

Будем наблюдать за системой в моменты переключения сигнала светофора. Обозначим эти моменты через  $\tau_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$  (здесь и далее для краткости не будем писать верхнюю букву «н» в обозначении  $\tau_i^H$ ). Пусть  $\tau_0 = 0$ . Обозначим через  $\Gamma_0$  состояние светофора в момент  $\tau_0$ , а через  $\Gamma_i$  — состояние светофора на промежутке  $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ . Далее, пусть  $\kappa_{j,i}$  — число требований в очереди  $O_j$  в момент  $\tau_i$ ,  $\eta_{j,i}$  — число требований потока  $\Pi_j$ , поступивших за промежуток  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ ,  $\xi_{j,i}$  — число требований по потоку насыщения на промежутке  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ . Введем векторы  $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \dots, \eta_{m,i})$  и  $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \dots, \xi_{m,i})$ ,  $i = 0, 1, \dots$ .

Динамика очередей описывается соотношениями:

$$\kappa_{j,i+1} = \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\},$$

$$j = \overline{1, m}; i = 0, 1, \dots$$

Описание входных потоков и потоков насыщения зададим с помощью указания свойств маркированного точечного процесса  $\{(\tau_i, \kappa_i, \nu_i); i = 0, 1, \dots\}$ , где  $\nu_i = \Gamma_i$  — метка требований, поступающих на промежутке  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ . Пусть  $r \oplus 1$  означает  $r + 1$  для  $r < 2m$  и принимает значение 1 для  $r = 2m$ . Пусть далее  $w_j$  и  $y_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , — произвольные целые неотрицательные числа. Тогда при условии  $\nu_i = \Gamma^{(r)}$  вероятность события  $\prod_{j=1}^m \{\eta_{i,j} = w_j, \xi_{i,j} = y_j\}$  независимо от  $\Gamma_0, \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_i$  равна  $\prod_{j=1}^m \varphi_j(w_j; T_{r \oplus 1})$ , если  $y_j = 0$  при  $r \oplus 1 \neq 2j - 1$  и  $y_j = \ell_j$  при  $r \oplus 1 = 2j - 1$ , и эта вероятность равна нулю в остальных случаях. Здесь распределения вероятностей  $\varphi_j(b; u)$ ,  $b = 0, 1, \dots$  ( $u > 0$  рассматривается как параметр), могут браться из разложения производящей функции для простого группового (неординарного) потока [1] следующим образом. Введем производящие функции

$$f_j(z) = \sum_{b=1}^{\infty} g_j(b)z^b; q_j(z; u) = \exp\{\lambda_j u (f_j(z) - 1)\},$$

$$|z| \leq 1, j = \overline{1, m}.$$

Здесь  $\lambda_j > 0$  задает интенсивность поступления групп машин по потоку  $\Pi_j$ ;  $g_j(b)$  есть вероятность того, что группа по потоку  $\Pi_j$  состоит из  $b$  автомашин. Пусть  $f_j(z) \neq 1$  при  $z \neq 1, |z| = 1$ . Тогда

$$\sum_{b=0}^{\infty} z^b \varphi_j(b; u) = q_j(z; u), |z| \leq 1.$$

Введем обозначения:

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_j f_j'(1) = \lambda_j \sum_{b=1}^{\infty} b g_j(b), j = \overline{1, m}.$$

В сделанных предположениях многомерная последовательность  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \dots\}$  при заданном распределении случайного элемента  $(\Gamma_0, \kappa_0)$  будет однородной цепью Маркова, а необходимое и достаточное условие существования стационарного распределения будет иметь следующий вид:

$$\max \left\{ \frac{\bar{\lambda}_1 T}{\ell_1}, \frac{\bar{\lambda}_2 T}{\ell_2}, \dots, \frac{\bar{\lambda}_m T}{\ell_m} \right\} < 1, \quad (1)$$

где  $T = T_1 + T_2 + \dots + T_{2m}$ . Содержательно условие (1) означает, что по каждому потоку среднее число поступающих требований за полный цикл меньше соответствующего потока насыщения. Всюду далее будем предполагать условие стационарности (1) выполненным. Кроме того, каждая из случайных последовательностей  $\{(\Gamma_i, \kappa_{j,i}); i = 0, 1, \dots\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , также представляет собой однородную цепь Маркова, при выполнении условия (1) — положительно возвратную.

### 3 Период занятости

Перейдем теперь к определению понятия периода занятости. Введем поток сигма-алгебр

$$\mathfrak{F}_i = \sigma\{\Gamma_0, \kappa_{1,0}, \eta_{1,0}, \eta_{1,1}, \dots, \eta_{1,i-1}\}.$$

Пусть  $s$  — момент остановки (относительно потока  $\{\mathfrak{F}_i; i = 0, 1, \dots\}$ ) такой, что  $\kappa_{j,s} = 0$ . Введем случайную величину  $\nu(s)$  следующим образом:

$$\nu(s) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \kappa_{j,i} > 0 \text{ для всех } i \geq s+1; \\ \min\{i \geq 1: \kappa_{j,i+s} = 0\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Анализ классического понятия периода занятости приводит к двум возможным определениям. Согласно первому определению назовем *периодом занятости* для очереди  $O_j$  промежутков  $(\tau_s, \tau_{s+\nu(s)})$  при условии  $\kappa_{j,s} = 0$ . Здесь не исключен случай, когда не поступает ни одного требования за следующий такт работы обслуживающего устройства и никакого обслуживания фактически не происходит. Поэтому можно рассмотреть период занятости, начинающийся с  $x = 1, 2, \dots$  требований в очереди  $O_j$ , т. е. распределение случайного промежутка  $(\tau_s, \tau_{s+\nu(s)})$  можно рассматривать при условии  $\kappa_{j,s} = x, x > 0$ . На события  $\{\omega: \Gamma_s = \Gamma^{(r)}\}$  длину этого промежутка можно выразить формулой

$$T_{r\oplus 1} + T_{r\oplus 2} + \dots + T_{r\oplus \nu(s)}.$$

Если при заданных свойствах входных потоков, потоков насыщения и алгоритма управления все

периоды занятости для данной очереди статистически однородны, можно, не уменьшая общности, изучать условное распределение величины  $\nu(s)$  или величины  $\tau_{\nu(s)}$ , положив  $s = 0$  и рассматривая условные распределения при условии  $\kappa_{j,0} = 0$ . Цель данного исследования — вычисление условных средних

$$\mathbb{E} \left( T_{r\oplus 1} + T_{r\oplus 2} + \dots + T_{r\oplus \nu(s)} \mid \left\{ \kappa_{j,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right\} \right).$$

Применяемый ниже мартингалльный метод восходит в работам [12, 13].

Имеют место следующие утверждения. Не уменьшая общности, будем везде далее полагать  $j = 1$ . Ниже  $I(\cdot)$  означает индикатор события, указанного в скобках.

**Теорема 1.** При  $|z| < 1$  последовательность

$$M_i(z) = \begin{cases} z^{\kappa_{1,0}}, & i = 0; \\ z^{\kappa_{1,i} + \sum_{k=0}^{i-1} \min\{\kappa_{1,k} + \eta_{1,k}, \xi_{1,k}\}} \times \\ \times \prod_{k=0}^{i-1} \sum_{r=1}^{2m} \frac{I(\Gamma_k = \Gamma^{(r)})}{\exp\{\lambda_1 T_{r\oplus 1}(f_1(z) - 1)\}}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

представляет собой мартингал относительно потока  $\{\mathfrak{F}_i; i = 0, 1, \dots\}$ .

Доказательство состоит в проверке определения мартингала и здесь не приводится.

Пусть, по определению,  $t(s) = s + \nu(s)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $s$  — момент остановки относительно потока  $\{\mathfrak{F}_i; i = 0, 1, \dots\}$ . Тогда

$$\sum_{r=1}^{2m} \mathbb{E} \left( I(\Gamma_s = \Gamma^{(r)}) \times z^{\xi_{1,s} + \xi_{1,s+1} + \dots + \xi_{1,t(s)} - 2 + \kappa_{1,t(s)} - 1 + \eta_{1,t(s)} - 1} \times \exp\{\lambda_1 (T_{r\oplus 1} + T_{r\oplus 2} + \dots + T_{r\oplus \nu(s)}) (1 - f_1(z))\} \mid \mathfrak{F}_s \right) = z^{\kappa_{1,s}}. \quad (2)$$

**Доказательство.** Поскольку для момента остановки  $s$  случайная величина  $t(s)$  конечна с вероятностью единица (как следствие положительной возвратности), то из теоремы Дуба об опциональной остановке должно следовать равенство  $M_s(z) = \mathbb{E}(M_{t(s)} \mid \mathfrak{F}_s)$ . Поскольку

$$\mathbb{E} (M_{t(s)} \mid \mathfrak{F}_s) = z^{\sum_{k=0}^{s-1} \min\{\kappa_{1,k} + \eta_{1,k}, \xi_{1,k}\}} \times \prod_{k=0}^{s-1} \sum_{r=1}^{2m} \frac{I(\Gamma_k = \Gamma^{(r)})}{\exp\{\lambda_1 T_{r+1}(f_1(z) - 1)\}} \times$$

$$\times \mathbb{E} \left( z^{\sum_{k=s}^{t(s)-1} \min\{\kappa_{1,k} + \eta_{1,k}, \xi_{1,k}\}} \times \prod_{k=s}^{t(s)-1} \sum_{r=1}^{2m} \frac{I(\Gamma_k = \Gamma^{(r)})}{\exp\{\lambda_1 T_{r \oplus 1}(f_1(z) - 1)\}} \Big| \mathfrak{F}_s \right),$$

то

$$z^{\kappa_{1,s}} = \mathbb{E} \left( z^{\sum_{k=s}^{t(s)-1} \min\{\kappa_{1,k} + \eta_{1,k}, \xi_{1,k}\}} \times \prod_{k=s}^{t(s)-1} \sum_{r=1}^{2m} \frac{I(\Gamma_k = \Gamma^{(r)})}{\exp\{\lambda_1 T_{r \oplus 1}(f_1(z) - 1)\}} \Big| \mathfrak{F}_s \right).$$

Во-первых, равенство  $t(s) = i$  влечет  $\kappa_{1,i} = 0$ , откуда  $\kappa_{1,i-1} + \eta_{1,i-1} \leq \xi_{1,i}$ . Для всех  $k, s \leq k < i$ , имеем  $\min\{\kappa_{1,k} + \eta_{1,k}, \xi_{1,k}\} = \xi_{1,k}$ . Значит,

$$\sum_{k=s}^{t(s)-1} \min\{\kappa_{1,k} + \eta_{1,k}, \xi_{1,k}\} = \xi_{1,s} + \xi_{1,s+1} + \dots + \xi_{1,t(s)-2} + \kappa_{1,t(s)-1} + \eta_{1,t(s)-1}.$$

Чтобы окончательно установить равенство (2), остается заметить, что в силу циклического обслуживания значение  $\Gamma_\sigma$  однозначно определяет все последующие состояния среды, поэтому можно избавиться от внутренних сумм по  $r$  в пользу одной внешней суммы.

Чтобы получить практические выводы о периоде занятости, надо в равенстве (2) положить  $s = 0$  и вычислить условные ожидания при условиях  $\{\kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)}\}$ ,  $x = 0, 1, \dots$  и  $r = \overline{1, 2m}$ . Результаты содержатся в следующих ниже теоремах.

**Лемма 1.** Пусть  $u > 0$  и  $\bar{\lambda}_1 u < \ell_1$ . Тогда уравнение

$$z^{\ell_1} = \exp\{\lambda_1 u (f_1(z) - 1)\} \quad (3)$$

имеет  $\ell_1$  решений в круге  $|z| \leq 1$ , причем ровно одно из них  $z = 1$ .

Доказательство. Для доказательства воспользуемся обобщением теоремы Руше из работы [14]. Представим уравнение (3) в виде

$$\theta_1(z) + \theta_2(z) = 0,$$

где

$$\theta_1(z) = z^{\ell_1}; \quad \theta_2(z) = -\exp\{\lambda_1 u (f_1(z) - 1)\}.$$

Необходимо проверить, что

- (1)  $|\theta_1(z)| > |\theta_2(z)|$  для всех  $z \neq 1$  таких, что  $|z| = 1$ ;
- (2)  $\theta_1(1) = -\theta_2(1)$ ;
- (3)  $(\theta_1'(1) + \theta_2'(1))/\theta_1(1) > 0$ .

Пункт 1 следует из неравенств

$$|\theta_2(z)| = e^{-\lambda_1 u} \left| e^{\lambda_1 u f_1(z)} \right| < e^{-\lambda_1 u} e^{\lambda_1 u |f_1(z)|} \leq 1 = |\theta_1(z)|.$$

Пункт 2 тривиален. Для доказательства пункта 3 заметим, что

$$\frac{\theta_1'(1) + \theta_2'(1)}{\theta_1(1)} = \ell_1 - \bar{\lambda}_1 u > 0. \quad \square$$

Для дальнейшего понадобится обозначение

$$\mathcal{T}(r) = \begin{cases} T_{r+1} + T_{r+2} + \dots + T_{2m}, & r = \overline{1, 2m-1}; \\ 0, & r = 2m. \end{cases}$$

**Теорема 3.** Пусть  $x = 1, 2, \dots$ . Пусть, далее,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\ell_1-1}$  — нули уравнения  $z^{\ell_1} = q(z; T)$ , лежащие в круге  $|z| < 1$  и  $\beta_{\ell_1} = 1$ . Введем многочлен

$$L_{x,r}(z) = \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_{\ell_1-1})}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \dots (1 - \beta_{\ell_1-1})} + \sum_{j=1}^{\ell_1-1} (\beta_j)^{x-1} \exp\{\lambda_1 (T_1 + \mathcal{T}(r))(f_1(\beta_j) - 1)\} \frac{z - 1}{\beta_j - 1} \times \prod_{k \neq j} \frac{z - \beta_k}{\beta_j - \beta_k}.$$

Тогда

$$L'_{x,r}(1) = \sum_{j=1}^{\ell_1-1} \frac{1}{1 - \beta_j} + \sum_{j=1}^{\ell_1-1} (\beta_j)^{x-1} \times \exp\{\lambda_1 (T_1 + \mathcal{T}(r))(f_1(\beta_j) - 1)\} \prod_{k \neq j} \frac{1 - \beta_k}{\beta_j - \beta_k};$$

$$\mathbb{E} \left( \kappa_{1,\nu(0)-1} + \eta_{1,\nu(0)-1} \Big| \left\{ \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right\} \right) = 1 + L'_{x,r}(1); \quad (4)$$

$$\mathbb{E} \left( \left[ \frac{\nu(0) - 1}{2m} \right] \Big| \left\{ \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right\} \right) = \frac{x + \bar{\lambda}_1 (T_1 + \mathcal{T}(r)) - 1 - L'_{x,r}(1)}{\ell_1 - \bar{\lambda}_1 T};$$

средний период занятости очереди  $O_1$  при условии  $\{\kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)}\}$  равен

$$\mathbb{E} \left( T_{r \oplus 1} + \dots + T_{r \oplus \nu(0)} \Big| \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right) = T_1 + \mathcal{T}(r) + T \frac{x + \bar{\lambda}_1 (T_1 + \mathcal{T}(r)) - 1 - L'_{x,r}(1)}{\ell_1 - \bar{\lambda}_1 T}. \quad (5)$$

Доказательство. Полагая в равенстве (2)  $s = 0$ , получим:



$$\mathbb{E} \left( z^{\xi_{1,0} + \dots + \xi_{1,\nu(0)-1} + \kappa_{1,\nu(0)-1} + \eta_{1,\nu(0)-1} - \xi_{1,\nu(0)-1}} \times \exp\{\lambda_1(T_{r\oplus 1} + T_{r\oplus 2} + \dots + T_{r\oplus \nu(0)})(1 - f_1(z))\} \Big| \left\{ \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right\} \right) = z^x. \quad (6)$$

На события  $\{\omega: \kappa_{1,0} = x\}$  при  $x > 0$  с вероятностью единица выполняется равенство

$$\xi_{1,0} + \dots + \xi_{1,\nu(0)-1} = \ell_1 \left( \left\lfloor \frac{\nu(0) - 1}{2m} \right\rfloor + 1 \right),$$

где квадратные скобки  $\lfloor \cdot \rfloor$  обозначают целую часть числа. Кроме того, на том же событии при  $x > 0$  с вероятностью единица

$$T_{r\oplus 1} + T_{r\oplus 2} + \dots + T_{r\oplus \nu(0)} = T_1 + T(r) + T \left\lfloor \frac{\nu(0) - 1}{2m} \right\rfloor.$$

В силу определения величины  $\nu(0)$ ,  $\xi_{1,\nu(0)-1} = \ell_1$ . Поэтому равенство (6) примет вид:

$$z^x \exp\{\lambda_1(T_1 + T(r))(f_1(z) - 1)\} = \mathbb{E} \left( z^{\kappa_{1,\nu(0)-1} + \eta_{1,\nu(0)-1}} \times \left( z^{\ell_1} \exp\{\lambda_1 T(1 - f_1(z))\} \right)^{\lfloor (\nu(0)-1)/(2m) \rfloor} \Big| \left\{ \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right\} \right). \quad (7)$$

По лемме 1 уравнение  $z^{\ell_1} = q(z; T)$  имеет ровно  $\ell_1$  заявленных в формулировке теоремы корней  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\ell_1}$  в круге  $|z| \leq 1$ . Перенумеруем корни так, чтобы  $\beta_{\ell_1} = 1$ . Из равенства (7) подстановкой  $z = \beta_j$  находим:

$$(\beta_j)^x \exp\{\lambda_1(T_{r\oplus 1} + \dots + T_{2m} + T_1)(f_1(\beta_j) - 1)\} = \mathbb{E} \left( (\beta_j)^{\kappa_{1,\nu(0)-1} + \eta_{1,\nu(0)-1}} \Big| \left\{ \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right\} \right), \quad j = \overline{1, \ell_1 - 1}. \quad (8)$$

Введем условные вероятности

$$\alpha_k = \mathbb{P} \left( X_{\nu(0)-1} + \eta_{\nu(0)-1} = k \Big| X_0 = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right), \quad k = \overline{0, \ell_1}$$

(зависимость от  $x, r$  подразумевается). Заметим, что  $\kappa_{1,\nu(0)-1} \geq 1$ . Тогда математическое ожидание в правой части равенства (8)

$$\mathbb{E} \left( (\beta_j)^{\kappa_{1,\nu(0)-1} + \eta_{1,\nu(0)-1}} \Big| \left\{ \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right\} \right) = \alpha_1 \beta_j + \alpha_2 (\beta_j)^2 + \dots + \alpha_{\ell_1} (\beta_j)^{\ell_1}.$$

Для определения неизвестных величин  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\ell_1}$  получаем неоднородные линейные уравнения (с присоединенным условием нормировки):

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 \beta_j + \dots + \alpha_{\ell_1} \beta_j^{\ell_1 - 1} &= \\ &= (\beta_j)^{x-1} \exp\{\lambda_1(T_1 + T(r))(f_1(\beta_j) - 1)\}, \\ & \quad j = \overline{1, \ell_1 - 1}; \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\ell_1} &= 1. \end{aligned}$$

Поскольку неизвестные выступают как коэффициенты многочлена степени  $(\ell_1 - 1)$ , принимающего в заданных точках заданные значения, естественно ввести интерполяционный многочлен

$$L_{x,r}(z) = \alpha_1 + \alpha_2 z + \dots + \alpha_{\ell_1} z^{\ell_1 - 1},$$

который с необходимостью будет иметь вид, указанный в формулировке теоремы. Но тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \kappa_{1,\nu(0)-1} + \eta_{1,\nu(0)-1} \Big| \left\{ \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right\} \right) &= \\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + \ell_1 \alpha_{\ell_1} = \frac{d}{dz} (z L_{x,r}(z)) \Big|_{z=1} = \\ &= 1 + L'_{x,r}(1). \end{aligned}$$

Дифференцируя равенство (7) по  $z$  в точке  $z = 1$ , получим:

$$\begin{aligned} x + \bar{\lambda}_1(T_1 + T(r)) &= \\ &= \mathbb{E} \left( \kappa_{1,\nu(0)-1} + \eta_{1,\nu(0)-1} \Big| \left\{ \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right\} \right) + \\ &+ (\ell_1 - \bar{\lambda}_1 T) \mathbb{E} \left( \left\lfloor \frac{\nu(0) - 1}{2m} \right\rfloor \Big| \left\{ \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right\} \right). \end{aligned}$$

Отсюда приходим к равенству (4). Переходя теперь к абсолютному времени, можно записать длительность периода занятости как

$$T_1 + T(r) + T \mathbb{E} \left( \left\lfloor \frac{\nu(0) - 1}{2m} \right\rfloor \Big| \left\{ \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right\} \right).$$

Отсюда получается соотношение (5).

Следующие две теоремы доказываются аналогично.

**Теорема 4.** Пусть при  $r < 2m$  определен полином

$$\begin{aligned} L_{0,r}(z) &= (1 - e^{-\lambda_1 T_{r+1}}) \times \\ &\times \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_{\ell_1 - 1})}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \dots (1 - \beta_{\ell_1 - 1})} + \\ &+ \sum_{j=1}^{\ell_1 - 1} (\beta_j)^{-1} \left( 1 - e^{-\lambda_1 T_{r+1} f_1(\beta_j)} \right) \times \\ &\times \exp\{\lambda_1(T_1 + T(r))(f_1(\beta_j) - 1)\} \frac{z - 1}{\beta_j - 1} \prod_{k \neq j} \frac{z - \beta_k}{\beta_j - \beta_k}. \end{aligned}$$

Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( I(\{\nu(0) > 1\}) \left[ \frac{\nu(0) - 1}{2m} \right] \middle| \right. \\ & \quad \left. \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right) = \\ & = (\ell_1 - \bar{\lambda}_1 T)^{-1} \left( \bar{\lambda}_1 T_{r+1} e^{-\lambda_1 T_{r+1}} + \right. \\ & \quad \left. + \bar{\lambda}_1 (T_1 + \mathcal{T}(r)) (1 - e^{-\lambda_1 T_{r+1}}) - \right. \\ & \quad \left. - (1 - e^{-\lambda_1 T_{r+1}}) - L'_{0,r}(1) \right); \\ & \mathbb{E} \left( T_{r \oplus 1} + \dots + T_{r \oplus \nu(0)} \mid \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right) = \\ & = T_{r+1} e^{-\lambda_1 T_{r+1}} + (T_1 + \mathcal{T}(r)) (1 - e^{-\lambda_1 T_{r+1}}) + \\ & + \mathbb{E} \left( I(\{\nu(0) > 1\}) \left[ \frac{\nu(0) - 1}{2m} \right] \middle| \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right). \end{aligned}$$

**Теорема 5.** Пусть

$$\begin{aligned} L_{0,2m}(z) = & \left( 1 - \right. \\ & \left. - \sum_{b=0}^{\ell_1} \varphi_1(b; T_1) \right) \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_{\ell_1-1})}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \dots (1 - \beta_{\ell_1-1})} + \\ & + \sum_{j=1}^{\ell_1-1} (\beta_j)^{-1} \left( \exp\{\lambda_1 T_1 (f_1(\beta_j) - 1)\} - \right. \\ & \left. - \sum_{b=0}^{\ell_1} \varphi_1(b; T_1) (\beta_j)^b \right) \frac{z - 1}{\beta_j - 1} \prod_{k \neq j} \frac{z - \beta_k}{\beta_j - \beta_k}. \end{aligned}$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( I(\{\nu(0) > 1\}) \left[ \frac{\nu(0) - 1}{2m} \right] \middle| \right. \\ & \quad \left. \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(2m)} \right) = (\ell_1 - \bar{\lambda}_1 T)^{-1} \times \\ & \times \left( \bar{\lambda}_1 T_1 - \sum_{b=0}^{\ell_1} b \varphi_1(b; T_1) - L_{0,2m}(1) - L'_{0,2m}(1) \right); \\ & \mathbb{E} \left( T_{r \oplus 1} + \dots + T_{r \oplus \nu(0)} \mid \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(2m)} \right) = \\ & = T_1 + T \mathbb{E} \left( I(\{\nu(0) > 1\}) \left[ \frac{\nu(0) - 1}{2m} \right] \middle| \right. \\ & \quad \left. \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(2m)} \right). \end{aligned}$$

## 4 Заключение

Для управляющих систем массового обслуживания с несколькими конфликтными потоками интерпретация периода занятости как суммарного времени функционирования до опустошения очереди оказывается продуктивным способом переноса понятия на задачи с дискретным временем.

При этом использование мартингалльной техники позволяет изучить длительность периода занятости очереди при циклическом обслуживании с фиксированным ритмом переключения. По-видимому, данный подход в дальнейшем необходимо опробовать и на более сложных входных потоках и алгоритмах обслуживания.

## Литература

1. *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания. — 2-е изд. — М.: Либроком, 2012. 304 с.
2. *Bruneel H., Kim B.* Discrete-time models for communication systems including ATM. — Norwell: Kluwer Academic Publ., 1993. Vol. 205. 210 p.
3. *Alfa A. S.* Applied discrete-time queues. — 2nd ed. — New York, NY, USA: Springer-Verlag, 2016. 400 p.
4. *Печинкин А. В., Разумчик Р. В.* Системы массового обслуживания в дискретном времени. — М.: Физматлит, 2018. 432 с.
5. *Gergely T., Török T. L.* On the busy period of discrete-time queues // J. Appl. Probab., 1974. Vol. 11. Iss. 4. P. 853–857. doi: 10.2307/3212571.
6. *Chaudhry M. L., Zhao Y. Q.* First-passage-time and busy-period distributions of discrete-time Markovian queues: Geom(n)/Geom(n)/1/N // Queueing Syst., 1994. Vol. 18. P. 5–26. doi: 10.1007/BF01158772.
7. *Foss S., Sapozhnikov A.* On the existence of moments for the busy period in a single-server queue // Math. Oper. Res., 2004. Vol. 29. Iss. 3. P. 592–601. doi: 10.1287/moor.1030.0074.
8. *Brown G. B.* Busy periods of discrete-time queues using the Lagrange implicit function theorem // Oper. Res. Lett., 2021. Vol. 49. P. 650–654. doi: 10.1016/j.orl.2021.06.014.
9. *Федоткин М. А.* Теоретико-множественный подход при анализе дискретных нелинейных систем массового обслуживания // Автоматика и вычислительная техника, 1975. № 2. С. 58–64.
10. *Федоткин М. А.* Неполное описание квазирегенерирующих входных потоков неоднородных требований и транспортные потоки // 4-е Всесоюзное совещание по статистическим методам теории управления. — М.: Наука, 1978. С. 234–236.
11. *Федоткин М. А.* Неполное описание потоков неоднородных требований // Теория массового обслуживания. — М.: МГУ–ВНИИСИ, 1981. С. 113–118.
12. *Baccelli F., Makowski A. M.* Direct martingale argument for stability: The M/G/1 case // Syst. Control Lett., 1985. Vol. 6. P. 181–186. doi: 10.1016/0167-6911(85)90038-6.
13. *Baccelli F., Makowski A. M.* Dynamic, transient and stationary behavior of the M/GI/1 queue via martingales // Ann. Probab., 1989. Vol. 17. Iss. 4. P. 1691–1699.
14. *Klimenok V. L.* On the modification of Rouché’s theorem for the queueing theory problems // Queueing Syst., 2001. Vol. 38. P. 431–434. doi: 10.1023/A:101099928701.

Поступила в редакцию 04.03.24

# TOWARDS A DEFINITION OF A BUSY PERIOD UNDER NONLOCAL DESCRIPTION OF INPUT FLOWS

A. V. Zorine

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Prosp. Gagarina, Nizhni Novgorod 603022, Russian Federation

**Abstract:** In course of a probabilistic modeling and analysis of complex controlled queueing systems with several conflicting input flows, in a series of papers, an approach was successfully applied, one of its features being a nonlocal description of various system building blocks. In this description, some information about true arrival and leave times of customers is lost. It leads to difficulties in defining a busy period but that is one of classic performance metrics for an operating queueing system. In this paper, a controlled queueing system busy period definition is based on selecting those observation instants when queues reach zero level. A cyclic service algorithm with fixed switching times as an example using a martingale technique and effective computational formulas are obtained for the mathematical expectation of busy periods related to individual queues.

**Keywords:** controlled queueing system; nonlocal description of blocks; nonordinary Poisson flows; cyclic service algorithm; busy period; multivariate denumerable Markov chain; martingale; generalized Rouché's theorem; Lagrange interpolation polynomial

**DOI:** 10.14357/19922264240306

**EDN:** YKSIBJ

## References

- Ivchenko, G. I., V. A. Kashtanov, and I. N. Kovalenko. 2012. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. 2nd ed. Moscow: Librokom. 304 p.
- Bruneel, H., and B. Kim. 1993. *Discrete-time models for communication systems including ATM*. Norwell: Kluwer Academic Pubs. Vol. 205. 210 p.
- Alfa, A. S. 2016. *Applied discrete-time queues*. 2nd ed. New York, NY: Springer-Verlag. 400 p.
- Pechinkin, A. V., and R. V. Razumchik. 2018. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya v diskretnom vremeni* [Discrete time queueing systems]. Moscow: Fizmatlit. 432 p.
- Gergely, T., and T. L. Török. 1974. On the busy period of discrete-time queues. *J. Appl. Probab.* 11(4):853–857. doi: 10.2307/3212571.
- Chaudhry, M. L., and Y. Q. Zhao. 1994. First-passage-time and busy-period distributions of discrete-time Markovian queues:  $\text{Geom}(n)/\text{Geom}(n)/1/N$ . *Queueing Syst.* 18:5–26. doi: 10.1007/BF01158772.
- Foss, S., and A. Sapozhnikov. 2004. On the existence of moments for the busy period in a single-server queue. *Math. Oper. Res.* 29(3):592–601. doi: 10.1287/moor.1030.0074.
- Brown, G. B. 2021. Busy periods of discrete-time queues using the Lagrange implicit function theorem. *Oper. Res. Lett.* 49(5):650–654. doi: 10.1016/j.orl.2021.06.014.
- Fedotkin, M. A. 1975. Set-theoretic approach in analyzing discrete nonlinear queueing systems. *Autom. Control Comp. S.* 9(2):50–54.
- Fedotkin, M. A. 1978. Nepolnoe opisaniye kvaziregeneriruyushchikh vkhodnykh potokov neodnorodnykh trebovaniy i transportnye potoki [Incomplete description of quasi-regenerating input flows of nonhomogeneous customers and transport flows]. *4-e Vsesoyuznoye soveshchanie po statisticheskim metodam teorii upravleniya* [4th All-Union Meeting on Statistical Methods of Control Theory]. Moscow: Nauka. 234–236.
- Fedotkin, M. A. 1981. Nepolnoe opisaniye potokov neodnorodnykh trebovaniy [Incomplete description of flows of inhomogeneous customers]. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. Moscow: MGU–VNIISI. 113–118.
- Baccelli, F., and A. M. Makowski. 1985. Direct martingale argument for stability: The  $M/G/1$  case. *Syst. Control Lett.* 6(3):181–186. doi: 10.1016/0167-6911(85)90038-6.
- Baccelli, F., and A. M. Makowski. 1989. Dynamic, transient and stationary behavior of the  $M/GI/1$  queue via martingales. *Ann. Probab.* 17(4):1691–1699.
- Klimenok, V. L. 2001. On the modification of Rouché's theorem for the queueing theory problems. *Queueing Syst.* 38:431–434. doi: 10.1023/A:1010999928701.

Received March 4, 2024

## Contributor

**Zorine Andrei V.** (b. 1978) — Doctor of Science in physics and mathematics, associate professor, head of department, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Prosp. Gagarina, Nizhni Novgorod 603022, Russian Federation; andrei.zorine@itmm.unn.ru

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЕТИ ПРИ ПОВРЕЖДЕНИИ УЗЛОВ

Ю. Е. Малашенко<sup>1</sup>, И. А. Назарова<sup>2</sup>

**Аннотация:** На модели многопользовательской системы связи анализируются изменения показателей функционирования при повреждении отдельных узлов сети. В ходе вычислительных экспериментов отслеживается изменение удельных затрат ресурсов и загрузка ребер при одновременной передаче меж-узловых потоков в поврежденной сети. Для оценки последствий каждого повреждения полученные значения сравниваются с исходными. Для каждого поврежденного узла подсчитывается увеличение удельных затрат на передачу межузловых потоков. Определяется число корреспондентов, оставшихся без связи. Формируется набор гарантированных оценок предельно возможных загрузок ребер сети при любом из повреждений. Подсчитываются усредненные показатели для всех повреждений. На основе агрегированных расчетных показателей строятся итоговые диаграммы для сетей с различными структурными особенностями.

**Ключевые слова:** потоковая модель сети связи; оценка повреждений узлов; загрузка ребер

**DOI:** 10.14357/19922264240307

**EDN:** YUEGZT

## 1 Введение

В последнее время возрос интерес к оценке устойчивости функционирования многопользовательских сетевых систем связи при повреждениях и перегрузках [1]. В рамках предлагаемой в настоящей работе модели обеспечение информационного обмена между узлами-корреспондентами рассматривается как основная функция сети связи, а соответствующие величины потоков — как функциональные характеристики системы [2–4].

Оценка показателей функционирования в поврежденной сети проводится исходя из изменения удельных затрат на передачу потока и загрузки ребер. Вычисляются удельные затраты и загрузка ребер при одновременной передаче межузловых потоков между всеми парами корреспондентов в поврежденной сети. Для оценки последствий каждого повреждения полученные значения сравниваются с исходными. В частности, в качестве оценки ущерба используются: доля пар, для которых соединение в сети отсутствует, и среднее значение относительного увеличения удельных затрат на передачу межузлового потока.

Для получения многокритериальных и гарантированных оценок функционирования поврежденной сети анализируется изменение загрузки ребер при одновременной передаче всех межузловых многопродуктовых потоков. В рамках модели последовательно рассматривается разрушение каждой вершины сети и формируется вектор, характеризующий изменения загрузки всех ребер поврежден-

ной сети. Компоненты указанного вектора подсчитываются как отношение значений загрузки ребра в исходной и поврежденной сетях.

Для всех повреждений на основе лексикографически упорядоченных последовательностей строятся диаграммы, позволяющие получать гарантированные оценки загрузки ребер сети. Далее с помощью агрегированных расчетных показателей строятся недоминируемые многокритериальные оценки ущерба и изменения загрузки при повреждениях, а также итоговые диаграммы. В настоящей работе вычислительные эксперименты проводились в рамках методологии исследования операций [5–7] с использованием методов оптимизации и потокового программирования [8–10].

## 2 Математическая модель

Для описания многопользовательской сетевой системы связи воспользуемся следующей математической записью модели передачи многопродуктового потока. Сеть  $G$  задается множествами  $\langle V, R, U, P \rangle$ : узлов (вершин) сети  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$ ; неориентированных ребер  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$ ; ориентированных дуг  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$ ; пар узлов-корреспондентов  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ . Предполагается, что в сети отсутствуют петли и сдвоенные ребра.

Ребро  $r_k \in R$  соединяет смежные вершины  $v_{n_k}$  и  $v_{j_k}$ . Каждому ребру  $r_k$  ставятся в соответствие две ориентированные дуги  $u_k$  и  $u_{k+E}$  из множества  $U$ .

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, malash09@ccas.ru

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, irina-nazar@yandex.ru

Дуги  $\{u_k, u_{k+E}\}$  определяют прямое и обратное направление передачи потока по ребру  $r_k$  между концевыми вершинами  $v_{n_k}$  и  $v_{j_k}$ . Для каждой вершины  $v_n$  формируется список  $K(n)$  номеров инцидентных ей ребер:  $K(n) = \{k_1, k_2, \dots, k_{a(n)}\}$ , где  $a(n)$  — число инцидентных ребер для  $v_n$ .

В многопользовательской сети  $G$  рассматривается  $M = N(N - 1)$  независимых, невзаимозаменяемых и равноправных межузловых потоков различных видов. Каждой паре узлов-корреспондентов  $p_m$  из множества  $P$  соответствуют: вершина-источник с номером  $s_m$ , из  $s_m$  входной поток  $m$ -го вида поступает в сеть; вершина-приемник с номером  $t_m$ , из  $t_m$  поток  $m$ -го вида покидает сеть. Для каждой вершины  $v_n \in V$ ,  $n = \overline{1, N}$ , в подмножество  $P(v_n)$  входят все пары-корреспонденты, для которых  $v_n$  служит узлом-источником:

$$P(v_n) = \{p_m | s_m = n, t_m \neq n, t_m = \overline{1, N}\},$$

а для каждого  $P(v_n)$  — список номеров  $M(n)$  пар  $p_m$ , входящих в подмножество  $P(v_n)$ :  $M(n) = \{m_1(n), m_2(n), \dots, m_{N-1}(n)\}$ .

Обозначим через  $z_m$  величину *межузлового* потока  $m$ -го вида, поступающего в сеть через узел с номером  $s_m$  и покидающего сеть из узла с номером  $t_m$ ;  $x_{mk}$  и  $x_{m(k+E)}$  — поток  $m$ -го вида, который передается по дугам  $u_k$  и  $u_{k+E}$  согласно направлению передачи,  $x_{mk} \geq 0$ ,  $x_{m(k+E)} \geq 0$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $k = \overline{1, E}$ ;  $S(v_n)$  — множество номеров исходящих дуг, по ним поток покидает узел  $v_n$ ;  $T(v_n)$  — множество номеров входящих дуг, по ним поток поступает в узел  $v_n$ . Состав множеств  $S(v_n)$  и  $T(v_n)$  однозначно формируется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро  $r_k \in R$  соединяет вершины с номерами  $n$  и  $j$ , такими что  $n < j$ . Тогда ориентированная дуга  $u_k = (v_n, v_j)$ , направленная из вершины  $v_n$  в  $v_j$ , считается *исходящей* из вершины  $v_n$  и ее номер  $k$  заносится в множество  $S(v_n)$ , а дуга  $u_{k+E}$ , направленная из  $v_j$  в  $v_n$ , — *входящей* для  $v_n$  и ее номер  $k + E$  помещается в список  $T(v_n)$ . Дуга  $u_k$  является *входящей* для  $v_j$ , и ее номер  $k$  попадает в  $T(v_j)$ , а дуга  $u_{k+E}$  — *исходящей*, и номер  $k + E$  вносится в список исходящих дуг  $S(v_j)$ .

Во всех узлах сети  $v_n \in V$ ,  $n = \overline{1, N}$ , для каждого вида потока должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}; \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$n = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}, x_{mi} \geq 0, z_m \geq 0. \quad (1)$$

Величина  $z_m$  равна входному межузловому потоку  $m$ -го вида, проходящему от источника  $s_m$  к приемнику  $t_m$  пары  $p_m$  при распределении потоков  $x_{mi}$  по дугам сети.

Каждому ребру  $r_k \in R$  приписывается неотрицательное число  $d_k$  — суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру  $r_k$  в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$  — положительные числа  $d_k > 0$ . Вектор  $\mathbf{d}$  определяет следующие ограничения на сумму потоков всех видов, передаваемых по ребру  $r_k$  одновременно:

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E}. \quad (2)$$

Ограничения (1) и (2) задают множество допустимых значений вектора межузловых потоков  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$ :

$$\mathcal{Z}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 \mid \exists \mathbf{x} \geq 0 : (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1), (2)}\}.$$

### 3 Повреждение узлов

При проведении вычислительного эксперимента вначале подсчитываются межузловые потоки в неповрежденной сети  $G(0)$  с пропускными способностями  $d_k(0)$ . Предполагается, что поток одного вида передается одновременно по всем маршрутам, содержащим минимальное число ребер (далее — MER-маршруты, от *англ.* minimum edge route). Для оценки величины «расщепленного» потока для каждой пары узлов  $p_m = (s_m, t_m)$  в сети  $G(0)$  формируется набор  $H_m(1)$  путей, которые далее рассматриваются как MER-маршруты передачи  $m$ -го вида потока:

$$H_m(1) = \{h_m^1(1), h_m^2(1), \dots, h_m^j(1), \dots, h_m^{J_m(1)}(1)\},$$

где  $h_m^j(1)$  — список номеров дуг в  $j$ -м пути в сети  $G(0)$  между узлами  $s_m$  и  $t_m$ ;  $\iota_m(1)$  — число ребер в MER-маршруте  $h_m^j(1)$ ;  $J_m(1)$  — число MER-маршрутов для  $m$ -й пары.

Для каждой пары  $p_m \in P$  по всем MER-маршрутам из  $H_m(1)$  передается единичный межузловой поток  $z_m$  и подсчитываются значения индикаторной функции:

$$\eta_k^j(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in h_m^j(1); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определяются дуговые потоки для пары  $p_m$ :

$$x_{mk}^0(1) = \sum_{j=1}^{J_m(1)} \eta_k^j(m), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}. \quad (3)$$

Межузловой поток по MER-маршрутам (далее — MER-поток)  $z_m^0(1)$  между узлами  $s_m$  и  $t_m$  вычисляется по формулам (1), (3). Рассчитывается нормирующий коэффициент

$$\omega_m^0(1) = \frac{1}{z_m^0(1)}, \quad z_m^0(1) \neq 0, \quad m = \overline{1, M},$$

и дуговые потоки:

$$x_{mk}^0 = \omega_m^0(1)x_{mk}^0(1), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}. \quad (4)$$

При передаче всех потоков  $x_{mk}^0$  по ребрам сети межузловой поток из узла  $s_m$  в узел  $t_m$  равен единице для всех  $p_m \in P$ .

На основании (4) для получения оценки максимального значения равных межузловых потоков формируется и решается задача 1.

**Задача 1.** Найти  $\tilde{\alpha} = \max_{\alpha} \alpha$  при условиях:

$$\alpha \sum_{m=1}^M [x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0] \leq d_k(0), \quad \alpha \geq 0, \quad k = \overline{1, E}.$$

С помощью решения задачи 1 для всех  $p_m \in P$  определяется вектор  $\tilde{z}(\tilde{\alpha})$ , все компоненты которого равны  $\tilde{\alpha}$ , т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{z}_m &= \tilde{\alpha}, \quad m = \overline{1, M}, \\ \tilde{x}_{mk} &= \tilde{\alpha}x_{mk}^0, \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}. \end{aligned}$$

Для каждой пары узлов-корреспондентов  $p_m \in P$ , для полученного допустимого межузлового потока  $\tilde{z}_m$  и соответствующих значений дуговых потоков  $\tilde{x}_{mk}$ ,  $k = \overline{1, 2E}$ , величина

$$\tilde{y}_m = \sum_{k=1}^{2E} \tilde{x}_{mk}, \quad m = \overline{1, M},$$

характеризует результирующую межузловую нагрузку (далее — RI-нагрузка, от *англ.* resulting internodal) на ребра сети при передаче межузлового потока  $\tilde{z}_m$  из узла-источника  $s_m$  в узел-приемник  $t_m$ . Величина  $\tilde{y}_m$  показывает, какая суммарная пропускная способность сети потребуется для передачи дуговых потоков  $\tilde{x}_{mk}$ .

В рамках модели отношение RI-нагрузки и межузлового потока

$$\tilde{w}_m = \frac{\tilde{y}_m}{\tilde{z}_m}, \quad m = \overline{1, M},$$

можно трактовать как удельные *затраты* ресурсов сети при передаче единичного потока  $m$ -го вида между узлами  $s_m$  и  $t_m$  при дуговых потоках  $\tilde{x}_{mk}$ . *Загрузка*

$$\tilde{\Delta}_k = \sum_{m=1}^M [\tilde{x}_{mk} + \tilde{x}_{m(k+E)}]$$

для каждого ребра  $r_k$  подсчитывается на основании всех дуговых потоков  $\tilde{x}_{mk}$  при одновременной передаче всех потоков в сети.

Для оценки последствий повреждения узла  $v_j$  на основе исходной сети  $G(0)$  формируется сеть  $G(v_j)$ , в которой пропускная способность ребер, инцидентных вершине  $v_j$ , полагается равной нулю:

$$d_k(v_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \in K(v_j); \\ d_k(0) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Формально для сети  $G(v_j)$  применяется схема построения MER-маршрутов и согласно (4) строятся дуговые потоки  $\{x_{mk}^j\}$ ,  $k = \overline{1, 2E}$ , для межузловых потоков  $z_m^j$ . Вводятся обозначения:  $P^-(v_j) = \{m_1, m_2, \dots\}$  — список пар, для которых в сети  $G(v_j)$  не существует пути соединения;  $M^-(v_j)$  — число таких пар. Для всех пар  $p_m \in P^-(v_j)$  соответствующие потоки  $z_m^j$  и затраты  $w_m^j$  равны нулю:  $z_m^j = w_m^j = 0$ . Обозначим через  $P^+(v_j)$  список пар, поток между которыми в сети  $G(v_j)$  не равен нулю, т. е. для всех пар из списка  $P^+(v_j)$  выполняется

$$z_m^j = 1, \quad w_m^j \geq w_m(0), \quad m \in P^+(v_j),$$

где  $w_m(0)$  — удельные затраты в исходной сети  $G(0)$  при условии (4).

Пусть  $M^+(v_j)$  — число таких пар в  $P^+(v_j)$ . При этом

$$P = P^+(v_j) \cup P^-(v_j), \quad M = M^+(v_j) + M^-(v_j).$$

Для всех  $m \in P^+(v_j)$  вычисляются  $\varphi_m^j = w_m^j/w_m(0)$ , подсчитывается среднее значение относительного увеличения удельных затрат на передачу межузлового потока  $z_m$  при повреждении узла  $v_j$ :

$$\varphi_+^j = \frac{1}{M^+(v_j)} \left[ \sum_{p_m \in P^+(v_j)} \varphi_m^j \right].$$

Далее определяется доля пар  $p_m$ , для которых путь соединения в сети  $G(v_j)$  отсутствует:

$$\psi_-^j = \frac{M^-(v_j)}{M}.$$

Показатели  $\varphi_+^j$  и  $\psi_-^j$  используются далее в качестве оценки ущерба при повреждении узла  $v_j$ .

Значения  $\varphi_+^j$  и  $\psi_-^j$  вычисляются последовательно для всех узлов  $v_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , упорядочиваются по невозрастанию величины, и строятся диаграммы, которые позволяют анализировать ущерб.

#### 4 Оценка изменения показателей функционирования

Для оценки изменения загрузки ребер при повреждении узла  $v_j$  в каждой сети  $G(v_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , согласно (4) для каждого ребра рассчитывается

$$\theta_k^j = \frac{\Delta_k(v_j)}{\Delta_k(0)}, \quad k = \overline{1, E}.$$

Для получения гарантированных оценок загрузки в поврежденной сети для каждого фиксированного  $j$  в сети  $G(v_j)$  значения  $\theta_k^j$  упорядочиваются по величине от большего к меньшему (по невозрастанию) и перенумеровываются:

$$\{\theta_i^j\} : \theta_i^j \geq \theta_{i+1}^j, \quad i = \overline{1, E-1}.$$

Для каждого фиксированного  $i$  среди всех повреждений во всех сетях  $G(v_j)$  определяются

$$\Theta_i^* = \max_j \theta_i^j, \quad \Theta_i^{**} = \min_j \theta_i^j, \quad i = \overline{1, E}.$$

Набор  $\{\Theta_i^*\}$ ,  $i = \overline{1, E}$ , представляет собой лексикографически упорядоченные верхние оценки загрузки ребер при повреждении узлов  $v_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

Для оценки средних значений загрузки ребер относительно пропускной способности для каждой сети  $G(v_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , вычисляется

$$\nu_k^j = \frac{\Delta_k(v_j)}{d_k(v_j)} \text{ для всех } k = \overline{1, E}, \text{ таких что } d_k(v_j) = d_k(0) > 0,$$

и средняя (относительная) загрузка ребра при различных повреждениях:

$$\nu_k^+ = \frac{1}{N} \left[ \sum_{j=1}^N \nu_k^j \right], \quad k = \overline{1, E}.$$

Для оценки отклонений  $\nu_k^j$  в поврежденной сети  $G(v_j)$ , исходя из начальных  $\nu_k(0) = \Delta_k/d_k(0)$ , определяется среднее значение

$$\delta_k^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[ \sum_{j=1}^N (\nu_k^j - \nu_k(0))^2 \right]^{1/2}, \quad k = \overline{1, E}.$$

#### 5 Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводился на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1. В каждой сети 69 узлов. В ходе вычислительного эксперимента проводилась нормировка, и суммарная пропускная способность в обеих сетях была одинакова:

$$\sum_{k=1}^E d_k(0) = D(0) = 68\,256.$$

На рис. 2 представлены диаграммы изменения удельных затрат  $\varphi_+^j$  и доли пар  $\psi_-^j$  при повреждении узла  $v_j$ . Величины  $\varphi_+^j$  и  $\psi_-^j$  переупорядочены от большего к меньшему и откладываются по вертикальной оси. По горизонтальной оси указаны порядковые номера поврежденных узлов. Кривые 1 на рис. 2 соответствуют средним значениям удельных затрат на передачу межузловых потоков при повреждении узла  $v_j$ . Кривые 2 указывают долю общего числа корреспондентов, для которых не существует пути передачи. При повреждении одного узла пропускная способность от одного до пяти ребер становится равной нулю. В среднем повреждение 3% ребер «разделяет» 3%–4% пар-корреспондентов.

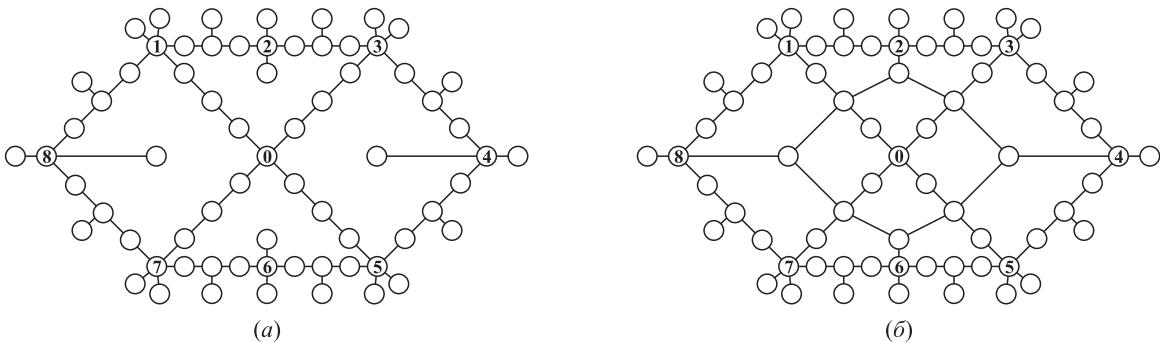
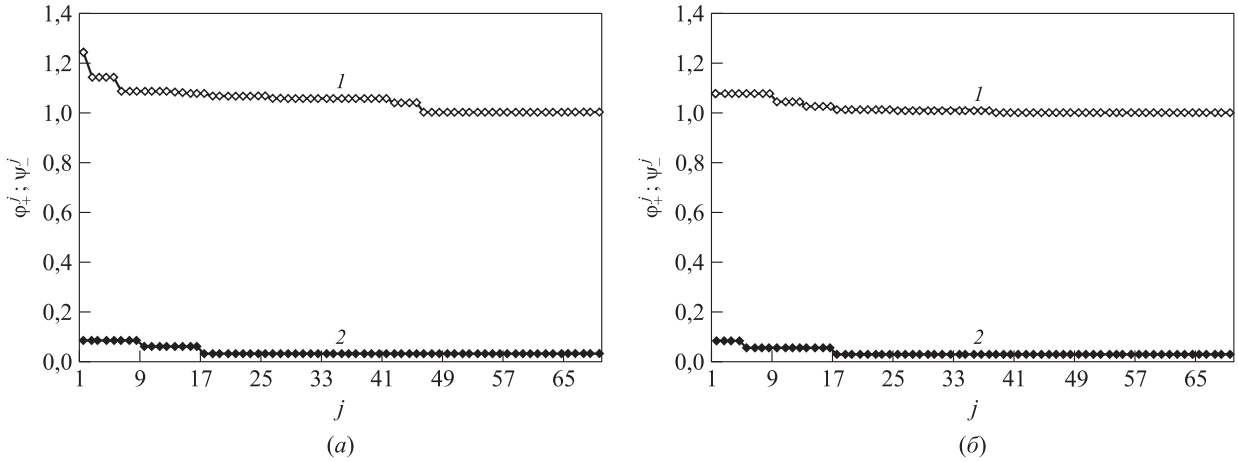


Рис. 1 Базовая (а) и кольцевая (б) сети



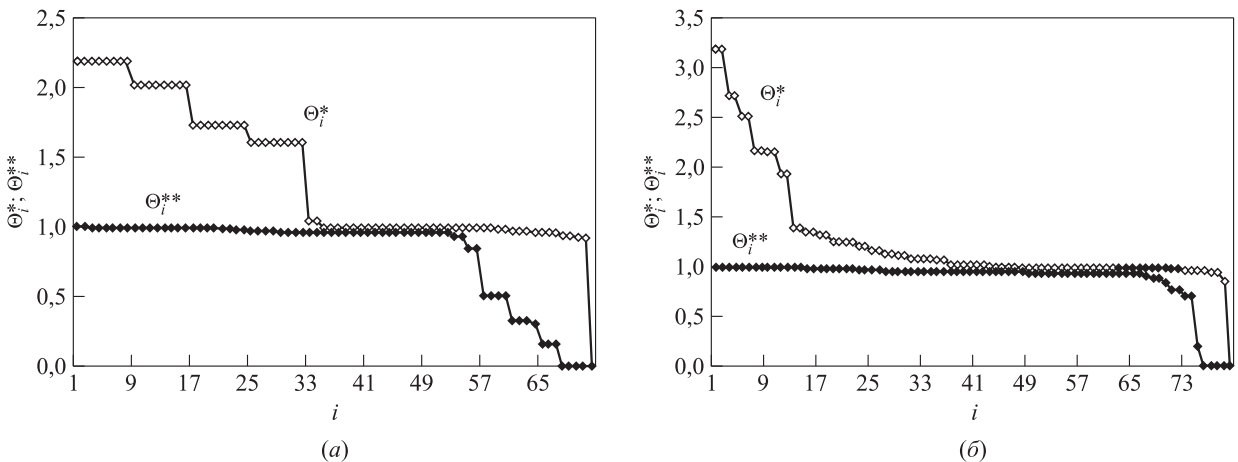
**Рис. 2** Усредненные оценки удельных затрат  $\varphi_+^j$  (1) и доли пар  $\psi^j$  (2) при повреждении узла  $v_j$  в базовой (а) и кольцевой (б) сетях

Из рис. 2, б для кольцевой сети следует, что число повреждений около 20% приводит к росту удельных затрат на 10%. Число «разъединенных» пар-корреспондентов не превышает 3% при 75% повреждений. Для базовой сети (см. рис. 2, а) наличие более 75% повреждений увеличивает удельные затраты более чем на 10%, а более 25% «разъединяют» более 5% пар. В обеих сетях при повреждениях висячих узлов кратчайшие пути для всех корреспондентов остаются неизменными. В результате правые части диаграмм на рис. 2 практически совпадают для номеров узлов более 45 как для кольцевой, так и для базовой сетей.

На рис. 3 для базовой и кольцевой сетей представлены диаграммы значений  $\Theta_i^*$  и  $\Theta_i^{**}$ , которые упорядочены по величине от большего к меньшему, а номера указаны по горизонтальной оси. Кривые, описывающие  $\Theta_i^*$ , служат верхними огибающими

для всех распределений загрузок  $\theta_i^j$  при повреждениях узлов  $v_j$ . По построению  $\Theta_i^*$  можно рассматривать как гарантированные верхние оценки загрузки ребер при разрушении любой вершины графа сети. При повреждении любого узла  $v_j$  лексикографически упорядоченное распределение загрузок ребер — точки  $\theta_i^j$  — лежат ниже линии  $\Theta_i^*$ .

Ступенчатые кривые для ребер с номерами от 1 до 33 соответствуют повреждениям, при которых нагрузка на некоторых ребрах увеличивается в 1,5–2 раза для базовой и в 1,5–3 раза для кольцевой сети. При этом в кольцевой сети «перегрузка» может быть более 300%, но «перегрузка» в 150% может появляться в 2 раза реже, чем в базовой сети. Большие «перегрузки» в кольцевой сети наблюдаются только в нескольких случаях и для небольшого числа ребер. Из сравнения диаграмм на рис. 3 видно, что в базовой сети величины «перегрузок»



**Рис. 3** Гарантированные оценки загрузки ребер при повреждении в базовой (а) и кольцевой (б) сетях



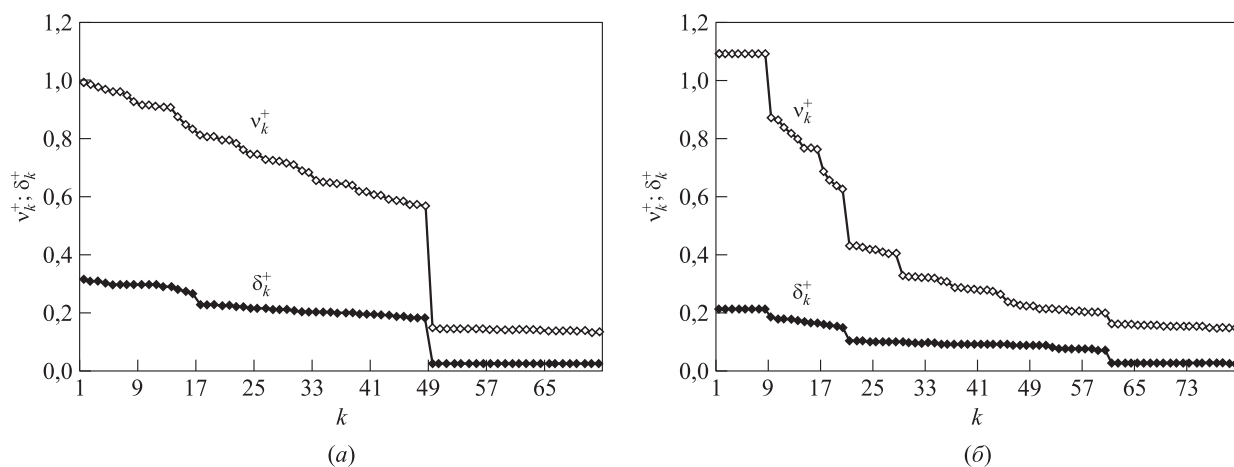


Рис. 4 Усредненная относительная оценка загрузки ребер при повреждениях в базовой (а) и кольцевой (б) сетях

меньше, чем в кольцевой, но они наблюдаются для большего числа ребер. В кольцевой сети большее число маршрутов соединения, кратчайшие пути короче, чем в базовой. Повреждение некоторых центральных узлов резко увеличивает длину кратчайших маршрутов и транзитную нагрузку.

На рис. 3 значения  $\Theta_i^{**}$  формируют нижнюю огибающую для всех распределений  $\theta_i^j$ . Величины  $\Theta_i^{**}$  в 80% случаев почти равны единице, но для пяти ребер как в базовой, так и в кольцевой сетях при разрушении вершины с пятью инцидентными ребрами  $\Theta_i^{**} = 0$ . Значения  $\Theta_i^*$  и  $\Theta_i^{**}$  практически совпадают или близки к единице для ребер, инцидентных висячим вершинам. Нагрузка таких ребер меняется незначительно при выходе из строя большинства вершин сети. В базовой сети больше ребер, ведущих к висячим вершинам, и диаграмма рис. 3, а более «растянутая» и «размытая», в то время как для кольцевой сети на рис. 3, б максимальное значение значительно больше и кривая резко уходит вниз вдоль вертикальной оси. В базовой сети по сравнению с кольцевой удаление узлов влияет на большее число ребер, однако в кольцевой для некоторых ребер возможные перегрузки могут оказаться больше по величине.

На рис. 4 для базовой и кольцевой сетей представлены диаграммы значений  $\nu_k^+$  и  $\delta_k^+$ , которые упорядочены от большего к меньшему, номера указаны по горизонтальной оси;  $\nu_k^+$  служат оценками средней загрузки ребра при различных повреждениях, а  $\delta_k^+$  используются как оценки отклонения загрузок в поврежденной сети от исходных.

Правые части графиков на рис. 4 практически параллельны оси абсцисс и соответствуют ребрам, инцидентным висячим вершинам. Как уже отмечалось выше, нагрузка ребер к висячим вершинам совпадает с исходной при повреждении большинства

узлов и становится равной нулю при разрушении инцидентных висячих вершин.

В базовой сети средняя нагрузка ребер при повреждениях меньше исходной, но отклонения невелики. Для кольцевой сети даже усредненные показатели для некоторых ребер превышают загрузки в исходной сети и разброс значений больше, чем в базовой. В кольцевой сети через центральные узлы проходят много кратчайших маршрутов, и удаление этих вершин приводит к резкому увеличению транзитных потоков за счет возрастания длины путей соединения.

## 6 Заключение

При построении моделей реальных систем, в которых ресурсы ограничены, возникают сложности при описании их функционирования и получении численных результатов. В [11] приводится обзор работ и моделей беспроводных систем связи, основанных на оценке вероятностно-временных характеристик и алгоритмах, пригодных для получения численных результатов. В [12] предложен метод, позволяющий оценить минимальную плотность развертывания базовых станций для обеспечения заданной производительности при поддержке ресурсоемких приложений, требующих чрезвычайно высоких скоростей на уровне радиointерфейса. В [13, 14] рассматриваются задачи синтеза изменения нагрузки на узлы сетевой вычислительной инфраструктуры. Рост нагрузки в реальных системах ведет к необходимости перераспределения ресурсов и перенаправления потоков данных. Предложенные подходы [13, 14] могут быть использованы для оценки потребности в ресурсах при изучении различных телекоммуникационных систем.

Данная работа предлагает один из возможных подходов к принятию решений в условиях реально существующей неопределенности о месте и цели повреждения коммутационных узлов систем связи и управления специального назначения [1]. Анализ влияния каждого повреждения на информационный обмен позволяет получить агрегированный срез данных о взаимосвязи между жесткой комбинаторно-графовой природой сети и множеством векторов, характеризующих изменение нагрузки на сеть при повреждениях. Способ формирования поврежденной сети допускает оценку функциональных характеристик, например в случае стихийных бедствий.

Представленную выше модель можно расценивать как один из вариантов постановки традиционных задач о поиске и определении критических элементов сети, тогда предложенная агрегированная гарантированная оценка ущерба будет служить вариантом постановки [15]. Для поиска критически опасных повреждений [16], который сводится к NP-трудной задаче, в качестве эффективных эвристик для метода ветвей-и-границ подойдут изложенные в данной статье варианты вычисления векторных оценок.

## Литература

1. Пехтерев С. В., Макаренко С. И., Ковальский А. А. Описательная модель системы спутниковой связи Starlink // Системы управления, связи и безопасности, 2022. № 4. С. 190–255. doi: 10.24412/2410-9916-2022-4-190-255. EDN: QMOLDV.
2. Малащенко Ю. Е., Назарова И. А. Анализ критически опасных повреждений сети связи. IV. Многокритериальные оценки уязвимости кластеров // Известия РАН. Теория и системы управления, 2022. № 1. С. 56–66.
3. Малащенко Ю. Е., Назарова И. А. Анализ загрузки многопользовательской сети при расщеплении потоков по кратчайшим маршрутам // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 33–38. doi: 10.14357/19922264230305. EDN: NLUSQJ.
4. Малащенко Ю. Е., Назарова И. А. Сравнительный анализ узловых мультипотоков в многопользовательской сетевой системе // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 40–45. doi: 10.14357/19922264240106. EDN: АКСМСQ.
5. Данскин Дж. М. Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения / Пер. с англ. —

- М.: Сов. радио, 1970. 200 с. (*Danskin J. M. The theory of Max-Min and its application to weapons allocation problems. — Berlin: Springer-Verlag, 1970. 128 p. doi: 10.1007/978-3-642-46092-0.*)
6. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971. 384 с.
  7. Фрэнк Г., Фриш М. Сети, связь и потоки / Пер. с англ. — М.: Связь, 1978. 448 с. (*Frank H., Frisch I. Communication, transmission, and transportation networks. — Addison-Wesley, 1971. 479 p.*)
  8. Йенсен П., Барнес Д. Потокоевое программирование / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1984. 392 с. (*Jensen P. A., Barnes J. W. Network flow programming. — New York, NY, USA: Wiley, 1980. 408 p.*)
  9. Chankong V., Haimes Y. Y. Multiobjective decision making: Theory and methodology. — Mineola, NY, USA: Dover, 2008. 406 p.
  10. Ogryczak W., Luss H., Pioro M., Nace D., Tomaszewski A. Fair optimization and networks: A survey // J. Appl. Math., 2014. Vol. 25. P. 1–25. doi: 10.1155/2014/612018.
  11. Горбунова А. В., Наумов В. А., Гайдамака Ю. В., Самуйлов К. Е. Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 3. С. 48–55. doi: 10.14357/19922264180307. EDN: YAMDIL.
  12. Бесчастный В. А., Острикова Д. Ю., Шоргин С. Я., Молчанов Д. А., Гайдамака Ю. В. Анализ плотности базовых станций 5G NR для предоставления услуг виртуальной и дополненной реальности // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 102–108. doi: 10.14357/19922264220213. EDN: VPIRYN.
  13. Горшенин А. К. О некоторых математических и программных методах построения структурных моделей информационных потоков // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 1. С. 58–68. doi: 10.14357/19922264170105. EDN: YOCMWZ.
  14. Горшенин А. К., Горбунов С. А., Волканов Д. Ю. О классификации объектов сетевой вычислительной инфраструктуры на основе анализа статистических аномалий в трафике // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 76–87. doi: 10.14357/19922264230311. EDN: XHTMVI.
  15. Ponton J., Wei P., Sun D. Weighted clustering coefficient maximization for air transportation networks // European Control Conference Proceedings. — Zurich, 2013. P. 866–871. doi: 10.23919/ECC.2013.6669250.
  16. Kuhnle A., Nguyen N. P., Dinh T. N., Thai M. T. Vulnerability of clustering under nodes failure in complex networks // Social Network Analysis Mining, 2017. Vol. 7. Iss. 1. P. 8–24.

Поступила в редакцию 03.06.24

# ANALYSIS OF NETWORK PERFORMANCE INDICATORS IN CASE OF NODE DAMAGE

Yu. E. Malashenko and I. A. Nazarova

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** On the model of a multiuser communication system, changes in performance indicators are analyzed when network nodes are damaged. In the course of computational experiments, changes in the unit cost of resources and edge loading are monitored while simultaneously transmitting internodal flows in a damaged network. To assess the consequences of each damage, the obtained values are compared with the initial ones. For each damaged node, an increase in the unit cost of transmitting internodal flows is calculated. The number of source-sink pairs left without connection is determined. A set of guaranteed estimates of the maximum possible loads of network edges in case of any damage is formed. The average values for all damages are calculated. Summary diagrams for networks with various structural features are built on the basis of aggregated calculated indicators.

**Keywords:** streaming model of the communication network; node damage assessment; edge loading

**DOI:** 10.14357/19922264240307

**EDN:** YUEGZT

## References

1. Pehterev, S. V., S. I. Makarenko, and A. A. Kovalsky. 2022. Opisatel'naya model' sistemy sputnikovoy svyazi Starlink [Descriptive model of Starlink satellite communication system]. *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti* [Systems of Control, Communication and Security] 4:190–255. doi: 10.24412/2410-9916-2022-4-190-255. EDN: QMOLDV.
2. Malashenko, Yu. E., and I. A. Nazarova. 2022. Analysis of critical damage in the communication network. IV: Multicriteria estimations of cluster vulnerability. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 60(6):956–965. doi: 10.1134/S1064230721060137. EDN: EJPALH.
3. Malashenko, Yu. E., and I. A. Nazarova. 2023. Analiz zagruzki mnogopol'zovatel'skoy seti pri rassheplenii potokov po kratчайshim marshrutam [Multiuser network load analysis by splitting flows along the shortest routes]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):33–38. doi: 10.14357/19922264230305. EDN: NLUSQJ.
4. Malashenko, Yu. E., and I. A. Nazarova. 2024. Sravnitel'nyy analiz uzlovykh mul'tipotokov v mnogopol'zovatel'skoy setevoy sisteme [Analysis of node multi-flows in a multiuser network system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):40–45. doi: 10.14357/19922264240106. EDN: AKCMCQ.
5. Danskin, J. M. 1970. *The theory of Max-Min and its application to weapons allocation problems*. Berlin: Springer-Verlag. 128 p. doi: 10.1007/978-3-642-46092-0.
6. Germeyer, Yu. B. 1971. *Vvedenie v teoriyu issledovaniya operatsiy* [Introduction to operations research theory]. Moscow: Nauka. 384 p.
7. Frank, H., and I. Frisch. 1971. *Communication, transmission, and transportation networks*. Addison-Wesley. 479 p.
8. Jensen, P. A., and J. W. Barnes. 1980. *Network flow programming*. New York, NY: Wiley. 408 p.
9. Chankong, V., and Y. Y. Haimes. 2008. *Multiobjective decision making: Theory and methodology*. Mineola, NY: Dover. 406 p.
10. Ogryczak, W., H. Luss, M. Piore, D. Nace, and A. Tomaszewski. 2014. Fair optimization and networks: A survey. *J. Appl. Math.* S108:1–25. doi: 10.1155/2014/612018.
11. Gorbunova, A. V., V. A. Naumov, Yu. V. Gaydamaka, and K. E. Samuylov. 2018. Resursnyye sistemy massovogo obsluzhivaniya kak modeli besprovodnykh sistem svyazi [Resource queuing systems as models of wireless communication systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(3):48–55. doi: 10.14357/19922264180307. EDN: YAMDIL.
12. Beschastnyi, V. A., D. Yu. Ostrikova, S. Ya. Shorgin, D. A. Moltchanov, and Yu. V. Gaidamaka. 2022. Analiz plotnosti bazovykh stantsiy 5G NR dlya predostavleniya uslug virtual'noy i dopolnennoy real'nosti [Density analysis of mmWave NR deployments for delivering scalable AR/VR video services]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):102–108. doi: 10.14357/19922264220213. EDN: VPIRYN.
13. Gorshenin, A. K. 2017. O nekotorykh matematicheskikh i programmnykh metodakh postroeniya strukturnykh modeley informatsionnykh potokov [On some mathematical and programming methods for construction of structural models of information flows]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(1):58–68. doi: 10.14357/19922264170105. EDN: YOOCMWZ.
14. Gorshenin, A. K., S. A. Gorbunov, and D. Yu. Volkov. 2023. O klasterizatsii ob'ektov setevoy vychislitel'noy infrastruktury na osnove analiza statisticheskikh anomalii v trafike [Toward clustering of network computing infrastructure objects based on analysis of statistical anomalies in network traffic]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):76–87. doi: 10.14357/19922264230311. EDN: XHTMVI.

15. Ponton, J., P. Wei, and D. Sun. 2013. Weighted clustering coefficient maximization for air transportation networks. *European Control Conference Proceedings*. Zurich. 866–871. doi: 10.23919/ECC.2013.6669250.
16. Kuhnle, A., N. P. Nguyen, T. N. Dinh, and M. T. Thai. 2017. Vulnerability of clustering under nodes failure in complex networks. *Social Network Analysis Mining* 7(1): 8–24.

*Received June 3, 2024*

## Contributors

**Malashenko Yuri E.** (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; malash09@ccas.ru

**Nazarova Irina A.** (b. 1966) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; irina-nazar@yandex.ru

# КОРРЕКТНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПО ПРЕЦЕДЕНТАМ: ДСМ-МЕТОД НАД ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ\*

Е. В. Дюкова<sup>1</sup>, Г. О. Масляков<sup>2</sup>, Д. С. Янаков<sup>3</sup>

**Аннотация:** Исследуется логический подход к задаче классификации по прецедентам. Отмечаются различие и связь между двумя известными направлениями логической классификации, а именно направлением, представленным процедурами корректного голосования (Correct Voting Procedures, или CVP), и направлением, базирующимся на идеях ДСМ-метода В. К. Финна. Рассматриваются вопросы усовершенствования классификаторов второго направления на основе использования менее строгого решающего правила и обобщения схемы работы на случай, когда признаковые описания исследуемых объектов — это элементы декартова произведения конечных частично упорядоченных множеств. В разработанных новых моделях ДСМ-классификаторов используются идеи, предложенные ранее при создании аналогичных алгоритмов направления CVP. Приводятся результаты экспериментального исследования на реальных задачах с применением специального линейного упорядочения значений признаков.

**Ключевые слова:** классификация на основе прецедентов; логический классификатор; процедуры корректного голосования; ДСМ-метод; представительный элементарный классификатор; частичный порядок

**DOI:** 10.14357/19922264240308

**EDN:** ZJHDMY

## 1 Введение

Задача классификации по прецедентам является одной из центральных задач машинного обучения [1–3] и имеет важное прикладное значение [4–6]. Под прецедентной (обучающей) информацией понимается совокупность примеров изучаемых объектов, в которой каждый объект представлен в виде числового вектора, полученного на основе измерения или наблюдения ряда его параметров или характеристик, называемых признаками. Каждый пример (обучающий объект или прецедент) приписан к определенному классу объектов. Предполагается, что каждый признак имеет ограниченное множество допустимых значений, которые кодируются целыми числами, и признаковые описания любых двух обучающих объектов, принадлежащих разным классам, не совпадают. Требуется уметь классифицировать новые, не входящие в обучающую выборку объекты.

Исследуется логический подход к рассматриваемой задаче, позволяющий прогнозировать редкие события. Обучение классификатора сводится к поиску в исходных данных информативных фрагментов описаний прецедентов. Такие фрагменты позволяют различать объекты из разных классов и, как правило, имеют содержательное описание в терми-

нах той прикладной области, в которой решается задача. По их наличию в описании распознаваемого объекта решается вопрос о его классификации. Корректность обучения позволяет безошибочно распознавать прецеденты. Наиболее эффективен логический подход в случае целочисленной информации низкой значности, особенно бинарной. При большом числе признаков возникают вычислительные трудности, связанные с необходимостью решать сложные дискретные задачи.

Одно из основных направлений логической классификации представлено процедурами корректного голосования (CVP). Фундаментальную роль в создании методов CVP сыграли работы С. В. Яблонского, Ю. И. Журавлёва, М. М. Бонгарда и М. Н. Вайнцвайга. В дальнейшем направление CVP развивалось отечественными и зарубежными учеными и наиболее существенное развитие получило в работах представителей школы академика РАН Ю. И. Журавлёва. Другое рассматриваемое направление базируется на идеях ДСМ-метода [7] и представлено в России работами В. К. Финна, С. О. Кузнецова, М. И. Забежайло, Д. И. Игнатова и Д. В. Виноградова. В [8, 9] с использованием понятий CVP приведена общая схема работы логического классификатора, включающая оба указанных направления.

\* Статья публикуется по представлению программного комитета 21-й Всероссийской конференции с международным участием «Математические методы распознавания образов». Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00301, <https://rscf.ru/project/24-21-00301/>.

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, edjukova@mail.ru

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, gleb-mas@mail.ru

<sup>3</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», dmitriyuanakov@gmail.com

Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  — заданное множество признаков;  $H$  — набор из  $r$  различных признаков вида  $H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$ ;  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  — набор, в котором  $\sigma_i, i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , — допустимое значение признака  $x_{j_i}$ . Пару  $(\sigma, H)$  назовем элементарным классификатором (ЭК) ранга  $r$ . Элементарному классификатору  $(\sigma, H)$  поставим в соответствие множество ЭК ранга 1 вида  $(\sigma_i, \{x_{j_i}\})$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , обозначаемое  $Q_{(\sigma, H)}$ .

Пусть  $S = (a_1, \dots, a_n)$  — изучаемый объект (здесь  $a_j, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , — значение признака  $x_j$  для объекта  $S$ ). Будем говорить, что ЭК  $(\sigma, H)$  содержится в  $S$ , если  $a_{j_i} = \sigma_i$  при  $i = 1, 2, \dots, r$ . Элементарный классификатор  $(\sigma, H)$  называется представительным для класса  $K$ , если  $(\sigma, H)$  содержится хотя бы в одном прецеденте из  $K$  и не содержится ни в каком прецеденте не из  $K$ .

Понятие представительного ЭК введено в направлении СVP [10, 11]. Согласно схеме работы логического классификатора, описанной в [8, 9], каждый такой классификатор на этапе обучения задает некоторый частичный порядок на множестве представительных ЭК класса и ищет максимальные относительно заданного порядка элементы этого множества.

В направлении СVP наиболее информативными считаются тупиковые представительные ЭК  $(\sigma, H)$  класса  $K$ , обладающие свойством: любой ЭК  $(\sigma', H')$  класса  $K$ , такой что  $Q_{(\sigma', H')} \subset Q_{(\sigma, H)}$ , не является представительным ЭК класса  $K$ . Решающее правило основано на процедуре «голосования», в которой участвуют найденные тупиковые представительные ЭК классов [11]. Если тупиковый представительный ЭК  $(\sigma, H)$  класса  $K$  содержится в распознаваемом объекте  $S$ , то  $(\sigma, H)$  дает положительную оценку  $\Gamma_K(S, \sigma, H)$  за принадлежность  $S$  к классу  $K$ , которая равна числу прецедентов, в которых содержится  $(\sigma, H)$ . В противном случае  $\Gamma_K(S, \sigma, H) = 0$ . Оценки, поданные тупиковыми представительными ЭК класса  $K$  за принадлежность  $S$  к этому классу, суммируются, и суммарная оценка делится на число прецедентов класса  $K$ . Объект  $S$  относится к классу, получившему наибольшую оценку. Если таких классов несколько, то происходит отказ от распознавания объекта  $S$ .

В ДСМ-методе искомое подмножество представительных ЭК класса  $K$  состоит из ДСМ-представительных ЭК этого класса. Представительный для класса  $K$  ЭК  $(\sigma, H)$  называется ДСМ-представительным, если не существует представительного ЭК  $(\sigma', H')$  класса  $K$  такого, что  $Q_{(\sigma, H)} \subset Q_{(\sigma', H')}$  и  $(\sigma', H')$  содержится в каждом из тех прецедентов, в которых содержится  $(\sigma, H)$ . Распознаваемый объект  $S$  относится к классу  $K$ , если в  $S$  содержит-

ся хотя бы один ДСМ-представительный ЭК этого класса и не содержится ни одного ДСМ-представительного ЭК из других классов. В противном случае происходит отказ от классификации. Основная цель представляемой работы — улучшение качества работы рассматриваемого классификатора за счет изменения слишком строгого решающего правила и модификация усовершенствованной версии ДСМ-метода на случай частично упорядоченных данных.

На базе ДСМ-метода разработан классификатор ДСМ-Г с использованием решающего правила, применяемого в СVP. Новый классификатор модифицирован для работы с описаниями объектов, представляющими собой элементы декартова произведения конечных частично упорядоченных множеств (в этом случае на множествах значений признаков задаются конечные частичные порядки). В предлагаемой модификации ДСМ-метода, названной в работе классификатором ДСМ-Г+, используются идеи, предложенные ранее в [12] при создании аналогичных алгоритмов направления СVP. Актуальность рассматриваемого обобщения обусловлена существованием прикладных задач машинного обучения, качественное решение которых невозможно в рамках классической постановки логического анализа данных. В классическом случае описания объектов это элементы декартова произведения конечных антицепей.

Авторами проведено экспериментальное исследование построенных классификаторов на реальных задачах со специальными линейными порядками на множествах значений признаков. В тестировании также участвовали алгоритмы из СVP и ряд наиболее известных алгоритмов машинного обучения. Результаты счета описаны в разд. 3.

## 2 ДСМ-метод над произведением частичных порядков

Как уже было отмечено во введении, решение прикладных задач классификации не всегда возможно в рамках классических постановок логической классификации, не учитывающих наличие сложных отношений на множествах допустимых значений признаков. В работе [12] предложена более общая постановка логической классификации, нацеленная на решение задач, в которых каждый признак принимает значения из некоторого конечного частично упорядоченного множества чисел и описания объектов — это элементы декартова произведения конечных частично упорядоченных множеств. В такой новой постановке дано более общее понятие ЭК и приведено описание основ-

ных моделей классификаторов направления CVP, в частности алгоритма, основанного на нахождении тупиковых представительных ЭК. В данном разделе аналогичные построения проведены для ДСМ-классификатора.

Пусть исследуемое множество объектов  $M$  представимо в виде  $M = N_1 \cdots N_n$ , где  $N_j, j = \overline{1, n}$ , — конечное множество допустимых значений признака  $x_j$ , на котором задан частичный порядок. Считается, что элемент  $S_1 = (a_1, \dots, a_n)$  множества  $M$  предшествует элементу  $S_2 = (b_1, \dots, b_n)$  множества  $M$ , если  $a_j$  предшествует  $b_j$  при  $j = \overline{1, n}$ . Далее запись  $S_1 \prec S_2$  означает, что  $S_1$  предшествует  $S_2$  и  $S_1 \neq S_2$ .

Будем считать, что каждое множество  $N_j, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , имеет наибольший элемент, т.е. такой элемент, которому предшествует любой элемент из  $N_j$ . Если наибольший элемент в  $N_j$  отсутствует, то  $N_j$  дополним таким элементом.

Пару  $(\sigma, H)$ , где  $H$  — набор из  $r$  различных признаков вида  $H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  — набор, в котором  $\sigma_i, i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , — допустимое значение признака  $x_{j_i}$ , назовем ЭК, если при любом  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  значение  $\sigma_i$  не является наибольшим элементом в  $N_{j_i}$ .

Будем говорить, что ЭК  $(\sigma, H)$ ,  $H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ,  $\sigma_i \in N_{j_i}, i = \overline{1, r}$ , содержится в объекте  $S = (a_1, \dots, a_n)$  из  $M$ , если  $a_{j_i}$  предшествует  $\sigma_i$  в  $N_{j_i}$  при  $i = \overline{1, r}$ . Понятие представительного ЭК, приведенное во введении, полностью переносится на рассматриваемый общий случай.

Пусть  $(\sigma, H)$  — ЭК, в котором  $H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ,  $\sigma_i \in N_{j_i}, i = \overline{1, r}$ . Элементарному классификатору  $(\sigma, H)$  сопоставим набор  $S_{(\sigma, H)} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  из  $M$ , в котором  $\gamma_t = \sigma_i$  при  $t = j_i, i = \overline{1, r}$ , и  $\gamma_t$  — наибольший элемент в  $N_t$  при  $t \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ .

Представительный для класса  $K$  ЭК  $(\sigma, H)$  назовем тупиковым, если любой ЭК  $(\sigma', H')$  такой, что  $S_{(\sigma, H)} \prec S_{(\sigma', H')}$ , не является представительным для класса  $K$ . Поиск ЭК данного вида относится к сложным в вычислительном плане задачам и может быть осуществлен на основе перечисления упорядоченных тупиковых покрытий целочисленной матрицы [12]. Бинаризация данных (см. ниже) позволяет осуществлять поиск тупиковых представительных ЭК класса  $K$  на основе перечисления неприводимых покрытий булевой матрицы, т.е. путем решения хорошо известной дискретной задачи, называемой монотонной дуализацией [13].

Элементарный классификатор  $(\sigma, H)$  назовем ДСМ-представительным для класса  $K$ , если  $(\sigma, H)$  — представительный ЭК для  $K$  и не существует представительного ЭК  $(\sigma', H')$  класса  $K$

такого, что  $S_{(\sigma', H')} \prec S_{(\sigma, H)}$  и  $(\sigma', H')$  содержится в каждом из тех прецедентов, в которых содержится  $(\sigma, H)$ . Через  $\mathcal{P}(K)$  обозначим множество всех ДСМ-представительных ЭК класса  $K$ . Опишем процедуру поиска ЭК из  $\mathcal{P}(K)$  в случае, когда множество значений каждого признака представляет собой либо цепь (на этом множестве задан линейный порядок), либо антицепь.

Рассмотрим признак  $x_j, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , и множество  $N_j = \{a_{j1}, \dots, a_{jk_j}\}$  значений этого признака. Пусть  $a, b \in N_j$ . Положим  $\delta(a, b) = 1$ , если  $a$  предшествует  $b$  в  $N_j$ , иначе  $\delta(a, b) = 0$ . Тогда полученное из исходного новое описание объекта  $S = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_j \in N_j, j = \overline{1, n}$ , будет иметь вид:

$$(\delta(a_1, a_{11}), \dots, \delta(a_1, a_{1k_1}), \dots, \delta(a_n, a_{n1}), \dots, \delta(a_n, a_{nk_n})). \quad (1)$$

Таким образом, объект  $S$  из множества  $M$  может быть описан при помощи  $k_1 + \dots + k_n$  бинарных признаков. Заметим, что признаку  $x_j, j = \overline{1, n}$ , и допустимому значению  $a_{ji} \in N_j, i = \overline{1, k_j}$ , признака  $x_j$  соответствует бинарный признак  $\tilde{x}_t$ , где  $t = i$  при  $j = 1$  и  $t = k_1 + \dots + k_{j-1} + i$  при  $j > 1$ , причем  $\tilde{x}_t$  имеет значение 1 в описании объекта  $S$  тогда и только тогда, когда  $a_j$  предшествует  $a_{ji}$  в  $N_j$ . Признак  $\tilde{x}_t$  и пару  $(x_j, a_{ji})$  назовем родственными. Будем говорить, что признак  $x_j$  порождает признак  $\tilde{x}_t$ . Признак  $\tilde{x}_t$  считается граничным для  $S$ , если  $a_j = a_{ji}$ . Признак  $\tilde{x}_t$  считается вырожденным, если  $a_{ji}$  — наибольший элемент в  $N_j$ .

Отметим, что в классическом варианте каждое множество  $N_j, j = \overline{1, n}$ , — антицепь и преобразование (1) известно как *one-hot* кодирование. В этом случае согласно (1) бинарный признак  $\tilde{x}_t$  имеет значение 1 в описании объекта  $S$  тогда и только тогда, когда  $a_j = a_{ji}$ . При выполнении указанного равенства  $\tilde{x}_t$  будет граничным для  $S$ .

Пусть  $\tilde{X}$  — множество бинарных признаков, полученное в результате применения к исходным данным преобразования (1). Два признака из  $\tilde{X}$  назовем сходными, если они порождены одним признаком из  $X$ . Набору признаков  $\tilde{H}, \tilde{H} \subseteq \tilde{X}, \tilde{H} = \{\tilde{x}_{t_1}, \dots, \tilde{x}_{t_r}\}$ , не содержащему сходных и вырожденных признаков, поставим в соответствие ЭК  $(\sigma, H), H \subseteq X, H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}, \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  такой, что при любом  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  признак  $\tilde{x}_{t_i}$  и пара  $(x_{j_i}, \sigma_i)$  оказываются родственными.

Рассмотрим булеву матрицу  $L_K$ , строки которой представляют собой описания прецедентов из класса  $K$  посредством признаков из  $\tilde{X}$ . Подматрицу матрицы  $L_K$ , образованную описаниями некоторого подмножества прецедентов  $R$  и набором признаков  $\{\tilde{x}_{t_1}, \dots, \tilde{x}_{t_r}\}$ , не содержащим сходных и вырожденных признаков, назовем правильной,

если все ее элементы равны 1, среди признаков  $\tilde{x}_{t_1}, \dots, \tilde{x}_{t_r}$  есть граничный для некоторого прецедента из  $R$  признак и для любого класса  $K', K' \neq K$ , любая подматрица матрицы  $L_{K'}$ , расположенная в столбцах с номерами  $t_1, \dots, t_r$ , содержит элементы, равные 0.

Правильную подматрицу  $L^*$  матрицы  $L_K$  назовем *максимальной*, если любая другая подматрица матрицы  $L_K$ , содержащая  $L^*$ , не является правильной. Нетрудно видеть, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством ДСМ-представительных ЭК класса  $K$  и множеством максимальных правильных подматриц в матрице  $L_K$ .

Таким образом, перечисление ЭК из  $\mathcal{P}(K)$ , так же как и в рассмотренном ранее в [14] случае, когда каждое множество  $N_j, j = \overline{1, n}$ , — антицепь, может быть осуществлено на основе перечисления специальных подматриц матрицы  $L_K$ . Отметим, что эта дискретная перечислительная задача алгоритмически менее сложна, чем задача монотонной дуализации, решаемая при нахождении тупиковых представительных ЭК класса  $K$ .

На этапе распознавания базовый вариант ДСМ-метода действует более строго по сравнению с классификаторами из  $\text{CVP}$  [14], что приводит к большому числу отказов от классификации. На первом этапе для каждого класса  $K$  строится множество  $\mathcal{P}(K)$ . Объект  $S$  относится к классу  $K$ , если  $S$  содержит хотя бы один ЭК из  $\mathcal{P}(K)$  и не содержит ни одного ЭК из  $\mathcal{P}(K'), K' \neq K$ . В противном случае происходит отказ от классификации. В разд. 3 настоящей работы приведены результаты экспериментального исследования, показавшие, что использование решающего правила, применяемого в  $\text{CVP}$ , гарантированно позволяет повысить точность ДСМ-метода. Кроме того, показано, что точность усовершенствованного ДСМ-метода, названного классификатором ДСМ-Г, можно дополнительно повысить за счет задания линейных порядков на множествах значений признаков, полученных на основе анализа встречаемости отдельного значения каждого признака в описаниях прецедентов. Соответствующая модификация алгоритма ДСМ-Г названа классификатором

ДСМ-Г+. Приведем описание используемой в ДСМ-Г+ процедуры линейного упорядочения значений признаков.

Пусть  $R_1(K)$  и  $R_2(K)$  — множества прецедентов из класса  $K$  и не из  $K$  соответственно;  $S = (a_1, \dots, a_n)$  — объект из  $M$ ;  $a \in N_j, j \in \{1, \dots, n\}$ . Положим

$$B_j(S, a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_j = a; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$W_t = 1/|R_t(K)|, t \in \{1, 2\}; \mu_j^{(t)}(a) = W_t \sum_{S \in R_t(K)} B_j(S, a), t \in \{1, 2\}; \mu_j(a) = \mu_j^{(1)}(a) - \mu_j^{(2)}(a)$ . Величина  $\mu_j(a)$  служит оценкой информативности значения  $a$  признака  $x_j$  в классе  $K$  и позволяет установить на множестве значений признака  $x_j$ , встречающихся в описаниях прецедентов из  $K$ , линейный порядок, согласно которому  $a \in N_j$  предшествует  $b \in N_j$ , если  $\mu_j(a) \leq \mu_j(b)$ .

Задание порядка описанным способом эффективно по времени вычислений, но делает классификатор менее чувствительным к выбросам и не гарантирует корректность классификации. Другой очевидный недостаток описанной процедуры линейного упорядочения значений заключается в том, что порядок на множестве значений каждого признака выбирается независимо от выбора порядков для других признаков. Однако проведенные в работе [15] и в настоящей работе экспериментальные исследования свидетельствуют о целесообразности введения указанного порядка.

### 3 Результаты экспериментов

Экспериментальное исследование проводилось на реальных задачах. Рассматривались следующие наборы данных: «Машины» (М); «Крестики-нолики» (КН); «Инсульт» (И); «Неорганические соединения» (НС); «Остеогенная саркома» (ОС). Первые два набора были взяты из репозитория UCI (<https://archive.ics.uci.edu>), а остальные — из репозитория ФИЦ ИУ РАН. В табл. 1 приведены размерности входных данных, включая число признаков до и после бинаризации.

Таблица 1 Описание задач

Датасет	Число признаков		Число объектов	
	До преобразования (1)	После преобразования (1)	Обучающая выборка	Тестовая выборка
М	6	21	1382	346
КН	9	27	766	192
И	81	162	63	16
НС	35	379	116	29
ОС	19	566	213	54



**Таблица 2** Точность классификации и время работы алгоритмов (в секундах)

Датасет	М	КН	И	НС	ОС
ДСМ	0,885 / 0,12	0,830 / 0,55	0,440 / 65,88	0,699 / 0,69	0,492 / 0,42
ДСМ-Г	0,919 / 0,12	<b>0,999</b> / 0,55	0,576 / 65,88	0,862 / 0,69	0,566 / 0,42
ДСМ-Г+	0,995 / 0,07	0,845 / 0,74	0,684 / 13,60	<b>0,945</b> / 283,57	<b>0,977</b> / 2969,18
ТЭК	0,947 / 0,02	0,995 / 0,06	0,657 / 140,13	0,883 / 0,10	0,644 / 0,04
ТЭК+	0,976 / 0,44	0,992 / 1,43	0,607 / 175,92	0,935 / 203,38	0,864 / 325,28
ЛГ	0,791 / <0,01	0,627 / <0,01	<b>0,792</b> / <0,01	0,909 / <0,01	0,690 / 0,01
СЛ	0,998 / 0,12	0,996 / 0,12	0,750 / 0,09	0,916 / 0,09	0,697 / 0,10
ГБ	<b>0,999</b> / 0,1	0,989 / 0,08	0,701 / 0,05	0,902 / 0,06	0,670 / 0,07

В тестировании участвовали базовый ДСМ-классификатор (ДСМ), его модификации ДСМ-Г и ДСМ-Г+, алгоритмы голосования по тупиковым представительным ЭК, именуемые ТЭК и ТЭК+ в случаях антицепей и цепей соответственно, и классические алгоритмы машинного обучения, такие как логистическая регрессия (ЛГ), случайный лес (СЛ) и градиентный бустинг над решающими деревьями (ГБ). Для тестирования логических классификаторов использовались авторские реализации, написанные на языке программирования C++. Тестирование ДСМ-Г+ и ТЭК+ проводилось с линейными порядками на множествах значений признаков, полученными на основе анализа встречаемости отдельного значения признака в описаниях прецедентов (процедура линейного упорядочения описана в разд. 2). Для перечисления ДСМ-представительных ЭК применялся алгоритм Close By One [16].

Результаты счета (средняя точность классификации по показателю ROC AUC (receiver operating characteristic area under the curve) и среднее время работы алгоритмов, полученные на основе случайного 10-кратного разбиения исходной выборки на базовую и тестируемую подвыборки в отношении 4 : 1) приведены в табл. 2. Функционал качества ROC AUC был выбран из-за его устойчивости к несбалансированности выборки.

Нетрудно видеть, что на рассмотренных задачах новый классификатор ДСМ-Г+ показал более высокое качество по сравнению с базовым вариантом ДСМ-метода и на задачах «Остеогенная саркома» и «Неорганические соединения» превзошел все тестируемые алгоритмы. Однако в случае задач большой размерности из-за большого числа порождаемых ДСМ-представительных ЭК алгоритмы ДСМ-Г и ДСМ-Г+ работают существенно дольше, чем другие методы.

Таким образом, экспериментальные данные не позволяют сделать однозначный вывод о выборе конкретного алгоритма классификации при решении практических задач, поскольку ни один из тес-

тируемых алгоритмов классификации не оказался лучшим одновременно и по качеству классификации, и по времени работы. Если прирост в качестве существен, то стоит жертвовать скоростью, и наоборот. В первом случае примером служит задача «Остеогенная саркома», на которой алгоритм ДСМ-Г+ показал качество почти в 98% со временем работы примерно 50 мин. Тестирование алгоритма ДСМ-Г+ на задаче «Неорганические соединения» иллюстрирует второй случай (качество алгоритма ДСМ-Г+ всего на 3% выше, чем у случайного леса, однако время работы гораздо больше).

**Замечание 1.** Алгоритмы ДСМ-Г и ДСМ-Г+ осуществляют поиск ДСМ-представительных ЭК класса  $K$  на основе построения максимальных правильных подматриц булевой матрицы  $L_K$ , строками которой служат описания прецедентов класса  $K$  посредством признаков из  $\tilde{X}$  (см. разд. 2). Для перечисления искоемых подматриц применялся алгоритм Close By One [13]. Этот алгоритм на очередном шаге строит подматрицу  $L^*$  матрицы  $L_K$ , обладающую следующим свойством: в  $L^*$  все элементы равны 1 и любая другая подматрица матрицы  $L_K$ , содержащая  $L^*$ , имеет нулевые элементы. Алгоритм Close By One имеет полиномиальную от размера входа (размера матрицы  $L_K$ ) сложность шага. Поскольку построенная на очередном шаге алгоритма Close By One подматрица не всегда оказывается правильной, на каждом шаге этого алгоритма требуется дополнительная проверка, осуществляемая также за полиномиальное время.

На скорость работы алгоритма Close By One существенно влияет число его шагов, которое, как правило, растет экспоненциально с ростом размера задачи. Общее число шагов этого алгоритма зависит от степени разреженности матрицы  $L_K$  относительно числа единичных элементов. Алгоритм Close By One работает дольше на менее разреженных булевых матрицах, о чем свидетельствуют результаты счета на задачах «И» и «НС». Видно, что время работы алгоритма ДСМ-Г на первой задаче больше, хотя ее размер меньше размера второй за-

дачи. Число ДСМ-представительных ЭК в задаче «И» значительно превышает число ДСМ-представительных ЭК в задаче «НС».

В случае антицепей, в отличие от цепей, чем больше в данных целочисленных признаков с высокой значностью, тем более разрежена матрица  $L_K$ . Это объясняет разницу во времени работы алгоритмов ДСМ-Г и ДСМ-Г+ на задачах НС и ОС (обе задачи содержат признаки высокой значности).

Время счета ДСМ-Г+ на задаче ОС, имеющей после преобразования (1) размер  $213 \times 566$ , не превысило 1 ч (это наибольшее зафиксированное время счета).

Авторами дополнительно проведены эксперименты на случайных булевых матрицах с равновероятным появлением 0 и 1. Если матрица имеет размеры  $100 \times 100$ , то среднее время работы алгоритма Close By One примерно 2 мин. Счет проводился с использованием авторской реализации этого алгоритма на C++.

**Замечание 2.** Коды программ для классификаторов ДСМ, ДСМ-Г и ДСМ-Г+, а также данные, на которых проводились исследования, выложены в открытый доступ (ссылка: [https://gitflic.ru/project/yanakidis/jsm\\_partially\\_ordered](https://gitflic.ru/project/yanakidis/jsm_partially_ordered)).

## 4 Заключение

На основе ДСМ-метода построены новые классификаторы: ДСМ-Г (модель с решающим правилом из CVP) и ДСМ-Г+ (модель с решающим правилом из CVP, ориентированная на работу с частично упорядоченными данными). Проведено экспериментальное исследование на реальных задачах, показавшее, что предложенные классификаторы имеют достаточно хорошее качество, однако при больших размерностях данных могут работать дольше других тестируемых алгоритмов.

## Литература

1. Вапник В. Н., Червоненкис А. Я. Теория распознавания образов. Статистические проблемы обучения. — М.: Наука, 1974. 416 с.
2. Bishop C. M. Pattern recognition and machine learning. — Information science and statistics ser. — New York, NY, USA: Springer, 2006. 778 p.
3. Theodoridis S. Pattern recognition. — 4th ed. — Burlington, MA, USA: Academic Press, 2009. 961 p.
4. Босов А. В., Иванов А. В. Технология классификации типов контента электронного учебника // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 4. С. 63–72. doi: 10.14357/19922264220410. EDN: YERCNH.
5. Архипов П. О., Филиппских С. Л., Цуканов М. В. Разработка новой модели ступенчатой сверточной нейронной сети для классификации аномалий на панорамах // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 50–56. doi: 10.14357/19922264230107. EDN: FHNUPW.
6. Тубольцев В. П., Ланко А. В., Ланко В. А. Непараметрический алгоритм автоматической классификации данных дистанционного зондирования // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 23–31. doi: 10.14357/19922264230404. EDN: MPEWAW.
7. Финн В. К. О возможности формализации правдоподобных рассуждений средствами многозначных логик // Всесоюзн. симпозиум по логике и методологии науки. — Киев: Наукова думка, 1976. С. 82–83.
8. Djukova E., Masliakov G., Djukova A. On the logical classification of integer data // 9th Conference (International) on Information Technology and Nanotechnology Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2023. Art. 10139273. 4 p. doi: 10.1109/ITNT57377.2023.10139273.
9. Дюкова Е. В., Масляков Г. О., Дюкова А. П. Логические методы корректной классификации данных // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 64–70. doi: 10.14357/19922264230309. EDN: OZHXXH.
10. Баскакова Л. В., Журавлёв Ю. И. Модель распознающих алгоритмов с представительными наборами и системами опорных множеств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981. Т. 21. № 5. С. 1264–1275.
11. Дюкова Е. В., Песков Н. В. Поиск информативных фрагментов описаний объектов в дискретных процедурах распознавания // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2002. Т. 42. № 5. С. 741–753.
12. Дюкова Е. В., Масляков Г. О., Прокофьев П. А. О логическом анализе данных с частичными порядками в задаче классификации по прецедентам // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2019. Т. 59. № 9. С. 1605–1616.
13. Дюкова Е. В., Журавлёв Ю. И. Задача монотонной дуализации и ее обобщения: асимптотические оценки числа решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2018. Т. 58. № 12. С. 2153–2168.
14. Gnatyshak D. V., Ignatov D. V., Kuznetsov S. O., Mirkin B. G. Triadic formal concept analysis and triclustering: Searching for optimal patterns // Mach. Learn., 2015. Vol. 101. P. 271–302. doi: 10.1007/s10994-015-5487-y.
15. Дюкова Е. В., Масляков Г. О. О выборе частичных порядков на множествах значений признаков в задаче классификации // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 72–78. doi: 10.14357/19922264210410. EDN: UVJFGF.
16. Кузнецов С. О. Быстрый алгоритм построения всех пересечений объектов из конечной полурешетки // Научно-техническая информация. Сер. 2. Информационные процессы и системы, 1993. № 1. С. 17–20.

Поступила в редакцию 31.03.24

# CORRECT SUPERVISED CLASSIFICATION: JSM-METHOD OVER PRODUCT OF PARTIAL ORDERS

E. V. Djukova<sup>1</sup>, G. O. Masliakov<sup>1</sup>, and D. S. Ianakov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>2</sup>National Research University Higher School of Economics, 20 Myasnitskaya Str., Moscow 101000, Russian Federation

**Abstract:** The authors consider a logical approach to the supervised classification problem. A difference and a connection between two well-known directions of logical classification are noted: the direction represented by Correct Voting Procedures (CVP) and the direction based on the ideas of the JSM-method. The issues of improving the classifiers of the second direction are considered on the basis of using a less strict decisive rule and generalizing a scheme of work in the case when the featured descriptions of the objects under study are the elements of the Cartesian product of finite partially ordered sets. The developed new models of the JSM-classifiers use the ideas proposed earlier when creating similar algorithms for the CVP direction. The results of an experimental study on real-world tasks using a special linear ordering of feature values are presented.

**Keywords:** supervised classification; logical classifier; Correct Voting Procedures; JSM-method; representative elementary classifier; partial order

**DOI:** 10.14357/19922264240308

**EDN:** ZJHDMY

## Acknowledgments

The paper is published on the proposal of the Program Committee of the 21st All-Russian Conference with International Participation “Mathematical Methods for Pattern Recognition.” The research was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 24-21-00301, <https://rscf.ru/project/24-21-00301/>).

## References

- Vapnik, V.N., and A.Ya. Chervonenkis. 1974. *Teoriya raspoznavaniya obrazov. Statisticheskie problemy obucheniya* [Pattern recognition theory (statistical learning problems)]. Moscow: Nauka. 416 p.
- Bishop, C. M. 2006. *Pattern recognition and machine learning*. Information science and statistics ser. New York, NY: Springer-Verlag. 778 p.
- Theodoridis, S. 2009. *Pattern recognition*. 4th ed. Burlington, MA: Academic Press. 961 p.
- Bosov, A. V., and A. V. Ivanov. 2022. Tekhnologiya klassifikatsii tipov kontenta elektronogo uchebnika [Technology for classification of content types of e-textbooks]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(4):63–72. doi: 10.14357/19922264220410. EDN: YERCNH.
- Arkhipov, P.O., S. L. Filippikh, and M. V. Tsukanov. 2023. Razrabotka novoy modeli stupenchatoy svetochnoy neyronnoy seti dlya klassifikatsii anomalii na panoramakh [Development of a new model of step convolutional neural network for classification of anomalies on panoramas]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(1):50–56. doi: 10.14357/19922264230107. EDN: FHNUPW.
- Tuboltsev, V.P., A.V. Lapko, and V.A. Lapko. 2023. Neparаметрический алгоритм автоматической классификации данных дистанционного зондирования [Non-parametric algorithm for automatic classification of remote sensing data]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):23–31. doi: 10.14357/19922264230404. EDN: MPEWAW.
- Finn, V.K. 1976. O vozmozhnosti formalizatsii pravdopodobnykh rassuzhdeniy sredstvami mnogoznachnykh logic [On the possibility of formalizing plausible reasoning by means of multivalued logics]. *Vsesoyuzn. simpozium po logike i metodologii nauki* [All-Union Symposium on the Logic and Methodology of Science]. Kiev: Naukova dumka. 82–83.
- Djukova, E., G. Masliakov, and A. Djukova. 2023. On the logical classification of integer data. *9th Conference (International) on Information Technology and Nanotechnology Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. Art. 10139273. 4 p. doi: 10.1109/ITNT57377.2023.10139273.
- Djukova, E. V., G. O. Maslyakov, and A. P. Djukova. 2023. Logicheskie metody korrektnoy klassifikatsii dannykh [Logical methods of correct data classification]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(3):64–70. doi: 10.14357/19922264230309. EDN: OZHXOX.
- Baskalova, L. V., and Yu. I. Zhuravlev. 1981. A model of recognition algorithms with representative samples and systems of supporting sets. *USSR Comp. Math. Math.* 21(5):189–199. doi: 10.1016/0041-5553(81)90109-9.
- Djukova, E. V., and N. V. Peskov. 2002. Search for informative fragments in descriptions of objects in dis-

- crete recognition procedures. *Comp. Math. Math. Phys.* 42(5):711–723. EDN: LHJOVR.
12. Djukova, E. V., G. O. Masliakov, and P. A. Prokofyev. 2019. On the logical analysis of partially ordered data in the supervised classification problem. *Comp. Math. Math. Phys.* 59(9):1542–1552. doi: 10.1134/S0965542519090082. EDN: KMZRFK.
13. Djukova, E. V., and Y. I. Zhuravlev. 2018. Monotone dualization problem and its generalizations: Asymptotic estimates of the number of solutions. *Comp. Math. Math. Phys.* 58(12):2064–2077. doi: 10.1134/S0965542518120102. EDN: YUPYKW.
14. Gnatyshak, D. V., D. V. Ignatov, S. O. Kuznetsov, and B. G. Mirkin. 2015. Triadic formal concept analysis and triclustering: Searching for optimal patterns. *Mach. Learn.* 101:271–302. doi: 10.1007/s10994-015-5487-y.
15. Djukova, E. V., and G. O. Maslyakov. 2021. O vybore chastichnykh poryadkov na mnozhestvakh znacheniy priznakov v zadache klassifikatsii [On the choice of partial orders on feature values sets in the supervised classification problem]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(4):72–78. doi: 10.14357/19922264210410. EDN: UVJFGF.
16. Kuznetsov, S. O. 1993. Fast algorithm for construction of all intersections of objects from a finite semilattice. *Automatic Documentation Mathematical Linguistics* 27(5): 23–28.

*Received March 31, 2024*

## Contributors

**Djukova Elena V.** (b. 1945) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; edjukova@mail.ru

**Masliakov Gleb O.** (b. 1996) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, junior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; gleb-mas@mail.ru

**Ianakov Dmitrii S.** (b. 2002) — master student, National Research University Higher School of Economics, 20 Myasnitskaya Str., Moscow 101000, Russian Federation; dmitriyianakov@gmail.com

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ И СИЛЬНАЯ СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНКИ РИСКА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ FDR-ПОРОГА В УСЛОВИЯХ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ

М. О. Воронцов<sup>1</sup>, О. В. Шестаков<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматривается подход к решению задачи удаления шума в большом массиве разреженных данных, основанный на методе контроля средней доли ложных отклонений гипотез (False Discovery Rate, FDR). Данный подход эквивалентен процедурам пороговой обработки, обнуляющим компоненты массива, значения которых не превосходят некоторого заданного порога. Наблюдения в модели считаются слабо зависимыми. Для контроля степени зависимости используются ограничения на коэффициент сильного перемешивания и максимальный коэффициент корреляции. В качестве меры эффективности рассматриваемого подхода используется среднеквадратичный риск. Вычислить значение риска можно только на тестовых данных, поэтому в работе рассматривается его статистическая оценка и исследуются ее свойства. Показана асимптотическая нормальность и сильная состоятельность оценки риска при использовании FDR-порога в условиях слабой зависимости в данных.

**Ключевые слова:** пороговая обработка; множественная проверка гипотез; оценка риска

**DOI:** 10.14357/19922264240309

**EDN:** ZOQVTO

## 1 Введение

Во многих прикладных областях возникает задача обработки больших массивов зашумленных данных. Примерами служат задачи обработки изображений с высоким разрешением [1], задачи множественной проверки гипотез, возникающие в исследованиях в области генетики [2], и другие проблемы. В связи с этим рассмотрим модель

$$x_i = \mu_i + z_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\mu_i \in \mathbb{R}$  — «полезные» данные;  $z_i \sim N(0, \sigma^2)$  — шум. Задача заключается в нахождении оценки неизвестного вектора  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  как функции вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и может рассматриваться как задача множественной проверки гипотез о равенстве нулю компонент вектора  $\mu$  [3]. При этом обычно предполагается, что вектор  $\mu$  имеет в определенном смысле «разреженную» структуру, т. е. для «полезных» данных используется «экономное» представление.

В работе [3] для решения рассматриваемой задачи в условиях независимости компонент вектора  $x$  и разреженности вектора  $\mu$  была предложена процедура построения оценки  $\hat{\mu}_F$  вектора  $\mu$ , основанная на методе контроля средней доли ложных отклонений (FDR) гипотез при помощи алгоритма Бенжа-

мини–Хохберга, и было проведено исследование асимптотики ее среднеквадратичного риска. В работах [4, 5] была показана состоятельность и асимптотическая нормальность оценки риска данной процедуры. Аналогичные результаты для других методов построения  $\hat{\mu}_F$  получены в работах [6–8].

В то же время в определенных приложениях, например при анализе полученных в результате использования ДНК-микрочипов данных [9], исследовании геофизических процессов и анализе помех в телекоммуникационных каналах, условие независимости компонент вектора  $x$  может не выполняться. Ранее в работах [10, 11] была исследована асимптотика среднеквадратичного риска оценки  $\hat{\mu}_F$  в случае, когда  $\mu$  принадлежит одному из классов разреженности

$$l_0[\eta] = \{\mu : \|\mu\|_0 \leq \eta n\}, \quad \eta \in (0, 1),$$

$$m_p[\eta] \equiv$$

$$\equiv \left\{ \mu \in \mathbb{R}^n : |\mu|_{(k)} \leq \eta n^{1/p} k^{-1/p}, \quad k = \overline{1, n} \right\},$$

$$p \in (0, 2),$$

а компоненты вектора  $x$  слабо зависимы — имеют достаточно быстро убывающий коэффициент сильного перемешивания [12]

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, m.vtsov@mail.ru

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, oshestakov@cs.msu.ru

$$\alpha(k) = \sup_{1 \leq m \leq n} \alpha(\sigma(x_i, i \leq m), \sigma(x_i, i \geq m+k)),$$

$$k = \overline{1, n-1},$$

где символом  $\sigma(x_i, i \in I)$  обозначена сигма-алгебра, порожденная множеством случайных величин  $\{x_i, i \in I\}$ , а мера  $\alpha(\cdot, \cdot)$  близости двух сигма-алгебр определяется как

$$\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sup_{B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}} |P(BC) - P(B)P(C)|.$$

В настоящей работе показана асимптотическая нормальность и сильная состоятельность оценки риска при применении FDR-процедуры в случае, когда компоненты вектора  $x$  слабо зависимы, а  $\mu$  принадлежит одному из классов разреженности:  $l_0[\eta]$  или  $m_p[\eta]$ .

## 2 Обработка вектора данных с помощью FDR-процедуры

Широким классом методов построения оценки  $\hat{\mu}$  стала пороговая обработка вектора  $x$  с некоторым порогом  $T$ . Различают жесткую пороговую обработку, при которой полагается

$$(\hat{\mu})_i = p_H(x_i, T) \equiv \begin{cases} x_i, & |x_i| > T; \\ 0, & |x_i| \leq T, \end{cases}$$

и мягкую пороговую обработку, для которой

$$(\hat{\mu})_i = p_S(x_i, T) \equiv \begin{cases} x_i - T, & x_i > T; \\ x_i + T, & x_i < -T; \\ 0, & |x_i| \leq T. \end{cases}$$

Среднеквадратичный риск подобных процедур определяется как

$$R(T) = E\|\hat{\mu} - \mu\|^2 = \sum_{i=1}^n E((\hat{\mu})_i - \mu_i)^2. \quad (1)$$

Обозначим через  $T_m$  наилучшее значение порога:

$$T_m : R(T_m) = \min_T R(T).$$

Предложенная в [3] процедура заключается в жесткой пороговой обработке компонент вектора  $x$  с порогом  $\hat{t}_F = \hat{t}_F(x)$ , и ее результат — оценка  $\hat{\mu}_F$  вектора  $\mu$  с компонентами  $(\hat{\mu}_F)_i = p_H(x_i, \hat{t}_F)$ , где

$$\hat{t}_F = \sigma z \left( \frac{q \hat{k}_F}{2n} \right), \quad \hat{k}_F = \max \{k : |x|_{(k)} \geq t_k\},$$

$$t_k = \sigma z \left( \frac{qk}{2n} \right);$$

$z(\alpha)$  — квантиль уровня  $(1 - \alpha)$  стандартного нормального распределения;  $|x|_{(k)}$  —  $k$ -й элемент вектора, получаемого в результате упорядочения вектора  $|x|$  по невозрастанию:

$$|x|_{(1)} \geq |x|_{(2)} \geq \dots \geq |x|_{(n)};$$

$q \in (0; 1)$  — управляющий параметр FDR-метода. Далее полагается, что  $q \equiv q_n$  зависит от  $n$ . В [3] показано, что эта процедура эквивалентна множественной проверке гипотез о равенстве нулю компонент наблюдаемого вектора. Также показано, что с помощью метода штрафных функций данную процедуру можно свести к другим видам пороговой обработки, в частности к мягкой пороговой обработке.

В работах [10, 11] была исследована асимптотика среднеквадратичного риска  $R(\hat{t}_F)$  описанной процедуры в случае, когда компоненты вектора  $x$  слабо зависимы, а  $\mu$  принадлежит классу разреженности  $\Theta_n$ , где  $\Theta_n$  есть  $l_0[\eta_n]$  или  $m_p[\eta_n]$ . Было показано, что  $R(\hat{t}_F)$  асимптотически отличается от минимаксного риска  $\inf_{\hat{\mu} = \hat{\mu}(x)} \sup_{\mu \in \Theta_n} E\|\hat{\mu} - \mu\|^2$  на множитель не более чем логарифмического порядка.

Отметим, что в выражении для среднеквадратичного риска (1) присутствуют неизвестные величины  $\mu_i$ , а потому вычислить  $R(T_m)$  и  $T_m$  не представляется возможным. На практике можно пользоваться, например, следующей оценкой среднеквадратичного риска [13]:

$$\hat{R}(T) = \sum_{i=1}^n F[x_i, T],$$

где

$$F[x_i, T] = \begin{cases} (x_i^2 - \sigma^2) \mathbf{1}(|x_i| \leq T) + \sigma^2 \mathbf{1}(|x_i| > T) & \text{для жесткой пороговой обработки;} \\ (x_i^2 - \sigma^2) \mathbf{1}(|x_i| \leq T) + (\sigma^2 + T^2) \mathbf{1}(|x_i| > T) & \text{для мягкой пороговой обработки.} \end{cases}$$

**Замечание.** При пороговой обработке иногда также используется так называемый универсальный порог  $T_U = \sigma \sqrt{2 \ln n}$ , предложенный в работе [14]. Исследования в [15, 16] показали, что порог  $T_U$  в определенном смысле максимальный, и рассматривать пороги выше него не имеет смысла. Более того, нетрудно показать, что  $t_k < T_U$  для всех  $k$  и всех достаточно больших  $n$ , в связи с чем всюду далее полагается, что порог  $\hat{t}_F$  выбирается на отрезке  $[0; T_U]$ .

### 3 Вспомогательные утверждения

Кроме коэффициента сильного перемешивания  $\alpha(\cdot)$  также понадобится следующее понятие [12].

**Определение.** Максимальным коэффициентом корреляции  $\rho(\cdot)$  компонент вектора  $x$  называется

$$\begin{aligned} \rho(k) &\equiv \rho_n(k) = \\ &= \sup_{1 \leq m \leq n} \rho(\sigma(x_i, i \leq m), \sigma(x_i, i \geq m+k)), \\ & \qquad \qquad \qquad k = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

где мера  $\rho(\cdot, \cdot)$  близости двух сигма-алгебр определяется как

$$\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B}) \\ \eta \in \mathcal{L}^2(\mathcal{C})}} |\text{corr}(\xi, \eta)|.$$

Введем обозначения:

$$T_1 = \sqrt{2 \ln \eta_n^{-p}}; \quad \gamma_n = \frac{1}{\ln \ln n}; \quad \kappa_n = \frac{n \eta_n^p T_1^{-p}}{1 - q_n - \gamma_n};$$

$$\kappa_n^0 = \frac{[n \eta_n]}{1 - q_n - \gamma_n}; \quad \rho^*(k) = \sup_{n \geq k+1} \rho(k), \quad k \in \mathbb{N};$$

$$t_{\kappa_n} = \sigma z \left( \frac{q_n \kappa_n}{2n} \right), \quad t_{\kappa_n^0} = \sigma z \left( \frac{q_n \kappa_n^0}{2n} \right).$$

Следующие два утверждения показывают, что случайный порог  $\hat{t}_F$  в случае  $\mu \in m_p[\eta_n]$  (соответственно  $\mu \in l_0[\eta_n]$ ) с большой вероятностью будет не меньше  $t_{\kappa_n}$  (соответственно  $t_{\kappa_n^0}$ ). Их доказательства приведены в работах [10, 11].

**Лемма 1.** Пусть  $n^{-\delta_1} \leq \eta_n^p \leq n^{-\delta_2}$ ,  $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$ ,  $\liminf q_n \ln n \geq C > 0$ ,  $m \in [1; n/2] \cap \mathbb{N}$ , а  $\alpha(\cdot)$  — коэффициент сильного перемешивания компонент вектора  $x$ . Для некоторого  $N \in \mathbb{N}$  при  $n \geq N$  справедливо

$$\begin{aligned} \sup_{\mu \in m_p[\eta_n]} \mathbb{P}(\hat{k}_F \geq \kappa_n) &\leq 4n \exp \left\{ -\frac{m}{256n} \kappa_n q_n \gamma_n^2 \right\} + \\ &+ 22 \left( 1 + \frac{8n}{\kappa_n q_n \gamma_n} \right)^{1/2} n m \alpha \left( \left[ \frac{n}{2m} \right] \right). \end{aligned}$$

**Лемма 2.** Пусть  $\eta_n \leq b < 1$ ,  $m \in [1; n/2] \cap \mathbb{N}$ , а  $\alpha(\cdot)$  — коэффициент сильного перемешивания компонент вектора  $x$ . Для некоторого  $N \in \mathbb{N}$  при  $n \geq N$  справедливо

$$\begin{aligned} \sup_{\mu \in l_0[\eta_n]} \mathbb{P}(\hat{k}_F \geq \kappa_n^0) &\leq \\ &\leq 4n \exp \left\{ -\frac{(1-b)m}{64n} \kappa_n^0 q_n \gamma_n^2 \right\} + \\ &+ 22 \left( 1 + \frac{4n}{(1-b)\kappa_n^0 q_n \gamma_n} \right)^{1/2} n m \alpha \left( \left[ \frac{n}{2m} \right] \right). \end{aligned}$$

Следующие два утверждения доказаны в [12] и представляют собой аналоги неравенств Хэфдингга и Бернштейна для слабо зависимых случайных величин.

**Лемма 3.** Пусть для набора действительных случайных величин  $X_1, \dots, X_n$  с коэффициентом сильного перемешивания  $\alpha(\cdot)$  выполняется  $\mathbb{E}X_i = 0$ ,  $|X_i| \leq b$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тогда для любого целого числа  $m \in [1; n/2]$  и любого  $\varepsilon > 0$  справедливо

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n X_i \right| > n\varepsilon \right) &\leq 4 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 m}{8b^2} \right\} + \\ &+ 22 \left( 1 + \frac{4b}{\varepsilon} \right)^{1/2} m \alpha \left( \left[ \frac{n}{2m} \right] \right). \end{aligned}$$

**Лемма 4.** Пусть для набора действительных случайных величин  $X_1, \dots, X_k$  с коэффициентом сильного перемешивания  $\alpha(\cdot)$  выполняется  $\mathbb{E}X_i = 0$ ,  $|X_i| \leq b$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Тогда для любого целого числа  $m \in [1; k/2]$  и любого  $\varepsilon > 0$  справедливо

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^k X_i \right| > \varepsilon \right) &\leq 4 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 m}{8v^2 k^2} \right\} + \\ &+ 22 \left( 1 + \frac{4bk}{\varepsilon} \right)^{1/2} m \alpha \left( \left[ \frac{k}{2m} \right] \right), \end{aligned}$$

где  $p = k/(2m)$ :

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{b\varepsilon}{2k} + \\ &+ \frac{2}{p^2} \max_{j \in [0, 2m-1]} \mathbb{E}(([jp] + 1 - jp)X_{[jp]+1} + X_{[jp]+2} + \\ &+ \dots + X_{[(j+1)p]} + ((j+1)p - [(j+1)p])X_{[(j+1)p+1]})^2. \end{aligned}$$

**Замечание.** Если существует такое число  $S > 0$ , что сразу для всех  $i \in [1; k]$  выполняется  $\mathbb{E}X_i^2 \leq S^2$ , то в качестве  $v^2$  можно взять

$$v^2 = \frac{b\varepsilon}{2k} + 8S^2.$$

Доказательство следующего утверждения приведено в работе [3].

**Лемма 5.** Для  $y \leq 0,01$  справедливы представления

$$\begin{aligned} z^2(y) &= 2 \ln y^{-1} - \ln \ln y^{-1} - r_2(y), \\ r_2(y) &\in [1, 8; 3]; \quad (2) \end{aligned}$$

$$z(y) = \sqrt{2 \ln y^{-1}} - r_1(y), \quad r_1(y) \in [0; 1, 5]. \quad (3)$$

## 4 Асимптотическая нормальность оценки риска при применении FDR-процедуры в условиях слабой зависимости

Перейдем к описанию достаточных условий для асимптотической нормальности оценки риска  $\hat{R}(\hat{t}_F)$  в случае  $\mu \in m_p[\eta_n]$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mu \in m_p[\eta_n]$ ,  $\eta_n^p \in [n^{-\delta_1}; n^{-\delta_2}]$ ,  $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$ ; имеются такие константы  $c_1, c_2 > 0$ , что для коэффициента сильного перемешивания  $\alpha(\cdot)$  компонент вектора  $x$  справедливо  $\alpha(k) \leq c_1 k^{-1-(5/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ ;  $q_n < c_3 < 1$ ;  $\liminf q_n \ln n = c_4 > 0$ ; и, кроме того, для максимального коэффициента корреляции  $\rho(\cdot)$  компонент вектора  $x$  справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \geq k+1} \rho(k) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \rho^*(k) = c_5 < \infty.$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{C_\rho \sqrt{2n}} \Rightarrow N(0, 1),$$

где

$$C_\rho = \sigma^2 \sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j)}.$$

Доказательство приводится для метода мягкой пороговой обработки; в случае жесткой пороговой обработки доказательство аналогично. Обозначим

$$U(T) = \hat{R}(T) - \hat{R}(T_m) = \sum_{i=1}^n H_i(T, T_m),$$

где

$$H_i(T, T_m) = F[x_i, T] - F[x_i, T_m].$$

Имеем

$$\begin{aligned} \hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m) + \hat{R}(T_m) - \hat{R}(T_m) &= \\ &= \hat{R}(T_m) - R(T_m) + U(\hat{t}_F). \end{aligned} \quad (4)$$

Покажем, что

$$\frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{C_\rho \sqrt{2n}} \Rightarrow N(0, 1). \quad (5)$$

Повторяя рассуждения из [17–19], можно показать, что  $T_m \geq t_{\kappa_n}$ . Учитывая также  $T_m \leq T_U$ , имеем

$$C\sqrt{\ln n} \leq T_m \leq C'\sqrt{\ln n}$$

для некоторых положительных констант  $C$  и  $C'$ .

В случае мягкой пороговой обработки  $\hat{R}(T_m)$  представляет собой несмещенную оценку  $R(T_m)$ , а при жесткой пороговой обработке и выполнении условий теоремы смещение стремится к нулю при делении на  $\sqrt{n}$  [13].

Для дисперсии числителя (5) имеем:

$$\begin{aligned} D\left(\hat{R}(T_m) - R(T_m)\right) &= \sum_{i=1}^n DF[x_i, T_m] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]). \end{aligned}$$

Поскольку  $\mu \in m_p[\eta_n]$ ,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i:|\mu_i|>1/T_1} DF[x_i, T_m] &\leq \\ &\leq 4(\sigma^2 + T_m^2)^2 n \eta_n^p T_1^p = o(n); \\ \sum_{i,j:\max\{|\mu_i|, |\mu_j|\}>1/T_1,} \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]) &\leq \\ &\leq 16(\sigma^2 + T_m^2)^2 n \eta_n^p T_1^p c_5 = o(n). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Далее, учитывая что  $Dx_i^2 = 2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu_i^2$ , нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \sum_{i:|\mu_i| \leq 1/T_1} DF[x_i, T_m] &= \\ &= \sum_{i:|\mu_i| \leq 1/T_1} Dx_i^2 + o(n) = 2\sigma^4 n + o(n). \end{aligned} \quad (7)$$

Введем обозначение

$$D_n = \left\{ (i, j) : \max\{|\mu_i|, |\mu_j|\} \leq \frac{1}{T_1}, j \neq i \right\}.$$

Для суммы ковариаций аналогично (7) получим

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in D_n} \text{cov}(F[x_i, T_m], F[x_j, T_m]) &= \\ &= \sum_{(i,j) \in D_n} \text{cov}(x_i^2, x_j^2) + o(n). \end{aligned}$$

Воспользуемся тождеством [20]

$$\text{cov}(x_i^2, x_j^2) = 4E x_i E x_j \text{cov}(x_i, x_j) + 2\text{cov}^2(x_i, x_j)$$

для вектора  $(x_i, x_j)$ , имеющего двумерное нормальное распределение. Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in D_n} 4|E x_i E x_j \text{cov}(x_i, x_j)| &\leq 8T_1^{-2} \sigma^2 n c_5 = o(n); \\ \sum_{(i,j) \in D_n} 2\text{cov}^2(x_i, x_j) &= 2\sigma^4 \sum_{(i,j) \in D_n} \text{corr}^2(x_i, x_j). \end{aligned}$$



Более того, поскольку

$$\sum_{\substack{i,j:\max\{|\mu_i|,|\mu_j|\}>1/T_1 \\ j \neq i}} \text{corr}^2(x_i, x_j) \leq 4n\eta_n^p T_1^p c_5 = o(n),$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in D_n} \text{corr}^2(x_i, x_j) &= \\ &= \sum_{j \neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j) + o(n) = c_6 n + o(n), \end{aligned}$$

где

$$c_6 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j) \leq 2c_5.$$

Полагая  $C_\rho = \sigma^2 \sqrt{1 + c_6}$ , получим, наконец,

$$D(\hat{R}(T_m) - R(T_m)) = 2nC_\rho^2 + o(n). \quad (8)$$

Заметим, что из (6), (7) и (8) следует, что

$$\sup_n \frac{\sum_{i=1}^n DF[x_i, T_m]}{V_n^2} < \infty, \quad (9)$$

где

$$V_n^2 = D \sum_{i=1}^n (F[x_i, T_m] - EF[x_i, T_m]).$$

Кроме того, поскольку  $F[x_i, T_m]$  по модулю ограничены величиной  $\sigma^2 + T_m^2$ , выполнено условие Линдберга: для любого  $\varepsilon > 0$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{V_n^2} \sum_{i=1}^n E \left( (F[x_i, T_m] - EF[x_i, T_m])^2 \mathbf{1}(|F[x_i, T_m] - EF[x_i, T_m]| > \varepsilon V_n) \right) \rightarrow 0. \quad (10)$$

Из (8)–(10), очевидного неравенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k+1} \rho(k) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \rho^*(k) < 1$$

и центральной предельной теоремы для сильно перемешанных случайных величин [21] следует (5).

Перейдем к доказательству того, что  $U(\hat{t}_F) n^{-1/2} \xrightarrow{P} 0$ . Всяду далее, не ограничивая общности, полагаем  $\sigma = 1$ . Введем обозначения:

$$S_1(T) = \sum_{i:|\mu_i|>1/T_1} H_i(T, T_m);$$

$$S_2(T) = \sum_{i:|\mu_i|\leq 1/T_1} H_i(T, T_m);$$

$$N_1(a, b) = \sum_{i:|\mu_i|>1/T_1} \mathbf{1}(a < |x_i| \leq b);$$

$$N_2(a, b) = \sum_{i:|\mu_i|\leq 1/T_1} \mathbf{1}(a < |x_i| \leq b);$$

$$Z_l(T) = S_l(T) - ES_l(T), \quad l = 1, 2;$$

$$d_n = \frac{T_U - t_{\kappa_n}}{n};$$

$$T'_j = t_{\kappa_n} + j d_n, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Для произвольного  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P \left( \frac{|U(\hat{t}_F)|}{\sqrt{n}} > 4\varepsilon \right) &\leq P(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) + \\ &+ P \left( \frac{\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |U(T)|}{\sqrt{n}} > 4\varepsilon \right) \leq \\ &\leq P(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) + P \left( \frac{\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |EU(T)|}{\sqrt{n}} > \varepsilon \right) + \\ &+ P \left( \sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |Z_1(T)| > \varepsilon \sqrt{n} \right) + \\ &+ P \left( \sup_{j \in [0, n-1]} |Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n} \right) + \\ &+ P \left( \sup_{\substack{j \in [0, n-1] \\ T \in [T'_j, T'_j + d_n]}} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n} \right). \quad (11) \end{aligned}$$

Заметим, что  $\gamma_n > \ln^{-1} n$ ,  $\kappa_n > n\eta_n^p \ln^{-1} n \geq n^{1-\delta_1} \ln^{-1} n$  и  $q_n > c_4 \ln^{-1} n/2$  для всех достаточно больших  $n$ . Для первого слагаемого в (11) по лемме 1 с  $m = n^{\delta_1} \ln^7 n$  для больших  $n$  имеем

$$\begin{aligned} P(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) &= P(\hat{k}_F \geq \kappa_n) \leq 4ne^{-\ln^2 n} + \\ &+ n^{1+(3/2)\delta_1} \ln^9 n \alpha \left( \left[ \frac{n^{1-\delta_1}}{\ln^7 n} \right] \right) = o(1) \quad (12) \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Для оценки второго слагаемого в (11) заметим, что при  $T \in [t_{\kappa_n}, T_U]$  справедливо

$$EH_i(T, T_m) \leq T_U^2 + 1. \quad (13)$$

Если же кроме  $T \in [t_{\kappa_n}, T_U]$  также выполнено  $|\mu_i| \leq T_1^{-1}$ , то

$$\begin{aligned} |EH_i(T, T_m)| &\leq 2T_U^2 P(|x_i| > t_{\kappa_n}) \leq \\ &\leq 2T_U^2 P(|x_i - \mu_i| > t_{\kappa_n} - T_1^{-1}) \leq \\ &\leq 2T_U^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (t_{\kappa_n} - T_1^{-1})^2 \right\} \leq \\ &\leq 4(\ln n) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( z \left( \frac{q_n \kappa_n}{2n} \right) \right)^2 + t_{\kappa_n} T_1^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

где использовано неравенство

$$2(1 - \Phi(x)) \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x}$$

для  $x \geq 0$  ( $\Phi(x)$  — функция распределения  $N(0, 1)$ ). Рассмотрим выражение в экспоненте. Второе слагаемое не превышает  $1 + o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ , поскольку  $t_{\kappa_n} \leq T_1(1 + o(1))$  при  $\sigma = 1$ , что нетрудно получить из определения  $t_{\kappa_n}$ , представления (3) и ограничения на  $q_n$  из формулировки теоремы. Для первого слагаемого, используя представление (2) и ограничения, наложенные на  $q_n$ , при больших  $n$  получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left( z \left( \frac{q_n \kappa_n}{2n} \right) \right)^2 &\leq -\ln \frac{2n(1 - q_n - \gamma_n)}{q_n n \eta_n^p T_1^{-p}} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln((1 + o(1)) \ln \eta_n^{-p}) + \frac{3}{2} \leq \\ &\leq \ln \frac{c_3}{1 - c_3} + \ln \eta_n^p + \ln T_1^{-p} + \ln T_1 + \frac{3}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Из приведенных соотношений следует, что с некоторой константой  $c_7 = c_7(c_3, p, \delta_1, \delta_2, c_4)$

$$\sup_{\substack{i: |\mu_i| \leq 1/T_1 \\ T \in [t_{\kappa_n}, T_U]}} |EH_i(T, T_m)| \leq c_7 (\ln n)^{(3-p)/2} \eta_n^p. \quad (14)$$

Из (13) и (14) с учетом  $\delta_2 > 1/2$  следует

$$\begin{aligned} \sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |EU(T)| &\leq \\ &\leq n \eta_n^p T_1^p (T_U^2 + 1) + c_7 (\ln n)^{(3-p)/2} n \eta_n^p = o(\sqrt{n}) \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ , а следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  второе слагаемое в (11) обращается в ноль для всех достаточно больших  $n$ .

Далее, поскольку при  $T \leq T_U$  и  $\sigma = 1$

$$|H_i(T, T_m) - EH_i(T, T_m)| \leq 2(T_U^2 + 2), \quad i = \overline{1, n},$$

а число слагаемых в  $Z_1(T)$  не превосходит  $n \eta_n^p T_1^p$ , имеем

$$\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |Z_1(T)| \leq 2n \eta_n^p T_1^p (T_U^2 + 2) = o(\sqrt{n})$$

при  $n \rightarrow \infty$ , а следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  и третье слагаемое в (11) обращается в ноль для всех достаточно больших  $n$ .

Перейдем к оценке четвертого слагаемого в (11). Аналогично (14) можно получить:

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{i: |\mu_i| \leq 1/T_1 \\ T \in [t_{\kappa_n}, T_U]}} DH_i(T, T_m) &\leq \sup_{\substack{i: |\mu_i| \leq 1/T_1 \\ T \in [t_{\kappa_n}, T_U]}} E(H_i(T, T_m))^2 \leq \\ &\leq 2c_7 (\ln n)^{(5-p)/2} \eta_n^p. \quad (15) \end{aligned}$$

По лемме 4 с  $m = \sqrt{n}(\ln n)^3$  и  $k = n - [n \eta_n^p T_1^p]$  для четвертого слагаемого в (11) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \sup_{j \in [0, n-1]} |Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n} \right) &\leq \\ &\leq \sum_{j \in [0, n-1]} \mathbb{P}(|Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n}) \leq \\ &\leq 4n \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 n^{3/2} (\ln n)^3}{n - [n \eta_n^p T_1^p]} / (8(T_U^2 + 2)\varepsilon \sqrt{n} + \right. \\ &\quad \left. + 128c_7 (\ln n)^{(5-p)/2} \eta_n^p (n - [n \eta_n^p T_1^p])) \right\} + \\ &+ 22 \left( 1 + \frac{8(T_U^2 + 2)(n - [n \eta_n^p T_1^p])}{\varepsilon \sqrt{n}} \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times n^{3/2} (\ln n)^3 \alpha \left( \left[ \frac{n - [n \eta_n^p T_1^p]}{2(\ln n)^3 \sqrt{n}} \right] \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Используя ограничения  $n^{-\delta_1} \leq \eta_n^p \leq n^{-\delta_2}$  и  $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$ , из (16) получим для любого  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \sup_{j \in [0, n-1]} |Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n} \right) \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим, наконец, пятое слагаемое в (11)). Заметим, что при  $0 < a < b$  справедливо

$$|Z_2(b) - Z_2(a)| \leq 2|N_2(a, b) - EN_2(a, b)| + n(b^2 - a^2).$$

Полагая  $a = T'_j, b = T \in [T'_j, T'_j + d_n]$  для произвольного  $j \in [0, n-1]$  и учитывая, что

$$(T^2 - (T'_j)^2) = (T - T'_j)(T + T'_j) \leq 2d_n T_U < 2T_U^2 n^{-1};$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T'_j < |x_i| \leq T) &\leq \mathbb{P}(T'_j < |x_i| \leq T'_j + d_n) < \\ &< d_n < T_U n^{-1}, \end{aligned}$$

получим оценку

$$|Z_2(T) - Z_2(T'_j)| \leq 2N_2(T'_j, T) + 3T_U^2.$$

Далее, поскольку  $N_2(T'_j, T) \leq N_2(T'_j, T'_j + d_n)$  и  $EN_2(T'_j, T'_j + d_n) < T_U^2$ , имеем

$$\begin{aligned} \sup_{T \in [T'_j, T'_j + d_n]} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| &\leq \\ &\leq 2|N_2(T'_j, T'_j + d_n) - EN_2(T'_j, T'_j + d_n)| + 5T_U^2. \end{aligned}$$

Аналогично (14) показывается, что

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{i: |\mu_i| \leq 1/T_1 \\ j \in [0, n-1]}} D\mathbf{1}(T'_j < |x_i| \leq T'_j + d_n) &< \\ &< c_7 (\ln n)^{(1-p)/2} \eta_n^p. \quad (17) \end{aligned}$$

Пусть  $n > N(\varepsilon)$  настолько, что

$$\frac{\varepsilon \sqrt{n} - 5T_U^2}{2} > \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{4}.$$

Тогда для пятого слагаемого в (11) по лемме 4 с  $m = \sqrt{n}(\ln n)^2$  и  $k = n - [n\eta_n^p T_1^p]$  имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \sup_{\substack{j \in [0, n-1] \\ T \in [T'_j, T'_j + d_n]}} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n} \right) \leq \\ & \leq \sum_{j \in [0, n-1]} \mathbb{P} \left( |N_2(T'_j, T'_j + d_n) - \mathbb{E}N_2(T'_j, T'_j + d_n)| > \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{4} \right) \leq \\ & \leq 4n \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 n^{3/2} (\ln n)^2}{(n - [n\eta_n^p T_1^p])^{-1}} \right\} (16\varepsilon \sqrt{n} + \\ & + 64c_7 (\ln n)^{(1-p)/2} \eta_n^p (n - [n\eta_n^p T_1^p])) \left. \right\} + \\ & + 22 \left( 1 + \frac{16(n - [n\eta_n^p T_1^p])^{1/2}}{\varepsilon \sqrt{n}} \right) \times \\ & \times n^{3/2} (\ln n)^2 \alpha \left( \left[ \frac{n - [n\eta_n^p T_1^p]}{2(\ln n)^2 \sqrt{n}} \right] \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Используя ограничения  $n^{-\delta_1} \leq \eta_n^p \leq n^{-\delta_2}$  и  $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$ , из (18) получим для любого  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \sup_{\substack{j \in [0, n-1] \\ T \in [T'_j, T'_j + d_n]}} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| > \varepsilon \sqrt{n} \right) \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Таким образом, показано, что для любого  $\varepsilon > 0$  все слагаемые в (11) стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$\frac{|U(\hat{t}_F)|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

что вместе с (5) завершает доказательство теоремы.  $\square$

Следующая теорема дает достаточные условия для асимптотической нормальности оценки риска  $\hat{R}(\hat{t}_F)$  в случае  $\mu \in l_0[\eta_n]$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\mu \in l_0[\eta_n]$ ,  $\eta_n \in [n^{-\delta_1}, n^{-\delta_2}]$ ,  $1/2 < \delta_2 < \delta_1 < 1$ ; имеются такие константы  $c_1, c_2 > 0$ , что для коэффициента сильного перемешивания  $\alpha(\cdot)$  компонент вектора  $x$  справедливо

$$\begin{aligned} \alpha(k) & \leq c_1 k^{-1-(5/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}, \quad k = \overline{1, n-1}; \\ q_n & < c_3 < 1; \quad \liminf q_n \ln n = c_4 > 0; \end{aligned}$$

для максимального коэффициента корреляции  $\rho(\cdot)$  компонент вектора  $x$  справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \geq k+1} \rho(k) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \rho^*(k) = c_5 < \infty.$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{C_\rho \sqrt{2n}} \Rightarrow N(0, 1),$$

где

$$C_\rho = \sigma^2 \sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \text{corr}^2(x_i, x_j)}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. Переменная  $D_n$  теперь определяется как  $D_n = \{(i, j) : |\mu_i| = |\mu_j| = 0, j \neq i\}$ . Условия вида  $|\mu_i| < T_1^{-1}$  (вида  $|\mu_i| \geq T_1^{-1}$ ) заменяются условиями  $\mu_i = 0$  (соответственно  $|\mu_i| > 0$ ). Поскольку  $\mu \in l_0[\eta_n]$ , количество  $i$  таких, что  $|\mu_i| > 0$  (а значит, и число слагаемых в  $Z_1(T)$ ), не превышает  $[n\eta_n]$ .

Для оценки первого слагаемого в (11) используется лемма 2, в которой можно взять, например,  $b = 1/2$ , а для  $\kappa_n^0$  использовать оценку  $\kappa_n^0 > n\eta_n$ . Формулы (14), (15) и (17) принимают вид соответственно

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{i: \mu_i=0 \\ T \in [t_{\kappa_n^0}, T_U]}} |EH_i(T, T_m)| & \leq c_8 (\ln n)^{3/2} \eta_n; \\ \sup_{\substack{i: \mu_i=0 \\ T \in [t_{\kappa_n^0}, T_U]}} DH_i(T, T_m) & \leq 2c_8 (\ln n)^{5/2} \eta_n; \end{aligned}$$

$$\sup_{\substack{i: \mu_i=0 \\ j \in [0, n-1]}} D\mathbf{1}(T'_j < |x_i| \leq T'_j + d_n) < c_8 (\ln n)^{1/2} \eta_n,$$

где  $c_8 = c_8(c_3, \delta_1, \delta_2, c_4)$ . В остальном доказательство аналогично.  $\square$

## 5 Сильная состоятельность оценки риска при применении FDR-процедуры в условиях слабой зависимости

Следующая теорема дает достаточные условия для сильной состоятельности оценки риска  $\hat{R}(\hat{t}_F)$  в случаях  $\mu \in m_p[\eta_n]$  и  $\mu \in l_0[\eta_n]$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\mu \in m_p[\eta_n]$ ,  $\eta_n^p \in [n^{-\delta_1}, n^{-\delta_2}]$  либо  $\mu \in l_0[\eta_n]$ ,  $\eta_n \in [n^{-\delta_1}, n^{-\delta_2}]$ ;  $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$ ; имеются такие константы  $c_1, c_2 > 0$ , что для коэффициента сильного перемешивания  $\alpha(\cdot)$  компонент вектора  $x$  справедливо  $\alpha(k) \leq c_1 k^{-2-(7/2)\delta_1/(1-\delta_1)-c_2}$ ,

$k = \overline{1, n-1}$ ;  $q_n < c_3 < 1$ ;  $\liminf q_n \ln n = c_4 > 0$ .  
Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\hat{R}(\hat{t}_F) - R(T_m)}{n} \rightarrow 0 \text{ п. в.}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (4).

Покажем, что  $(\hat{R}(T_m) - R(T_m))n^{-1} \rightarrow 0$  п. в. при  $n \rightarrow \infty$ . При мягкой пороговой обработке  $E\hat{R}(T_m) = R(T_m)$ , а при жесткой пороговой обработке

$$\begin{aligned} \frac{\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{n} &= \\ &= \frac{\hat{R}(T_m) - E\hat{R}(T_m)}{n} + \frac{E\hat{R}(T_m) - R(T_m)}{n}, \end{aligned}$$

где второе слагаемое стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  [13]. Следовательно, достаточно показать, что  $(\hat{R}(T_m) - E\hat{R}(T_m))n^{-1} \rightarrow 0$  п. в.

Полагая в лемме 3  $X_i = F[x_i, T_m] - EF[x_i, T_m]$ ,  $b = 2(\sigma^2 + T_m^2)$  и  $m = n^{1/4}$  и учитывая ограничения на  $\alpha(\cdot)$  из условия, нетрудно убедиться, что для всех  $n$

$$P\left(\left|\frac{\hat{R}(T_m) - E\hat{R}(T_m)}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{c_5}{n^{1+c_6}},$$

где константы  $c_5, c_6$  положительны. Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{\hat{R}(T_m) - E\hat{R}(T_m)}{n}\right| > \varepsilon\right) < \infty,$$

и по теореме 1.3.4 из [22]

$$(\hat{R}(T_m) - E\hat{R}(T_m))n^{-1} \rightarrow 0 \text{ п. в.}$$

Покажем теперь, что  $U(\hat{t}_F)n^{-1} \rightarrow 0$  п. в. Доказательство проведено для  $\mu \in m_p[\eta_n]$ , в случае  $\mu \in l_0[\eta_n]$  доказательство аналогично. Аналогично формуле (11), для произвольного  $\varepsilon > 0$  в терминах теоремы 1 имеем

$$\begin{aligned} P\left(\frac{|U(\hat{t}_F)|}{n} > 4\varepsilon\right) &\leq P(\hat{t}_F \leq t_{\kappa_n}) + \\ &+ P\left(\frac{\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |EU(T)|}{n} > \varepsilon\right) + \\ &+ P\left(\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |Z_1(T)| > \varepsilon n\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ P\left(\sup_{j \in [0, n-1]} |Z_2(T'_j)| > \varepsilon n\right) + \\ &+ P\left(\sup_{\substack{j \in [0, n-1] \\ T \in [T'_j, T'_j + d_n]}} |Z_2(T) - Z_2(T'_j)| > \varepsilon n\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 1, можно показать, что

$$\sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |EU(T)| = o(n); \quad \sup_{T \in [t_{\kappa_n}, T_U]} |Z_1(T)| = o(n),$$

откуда следует, что второе и третье слагаемые в (19) обращаются в ноль для всех достаточно больших  $n$ .

Для некоторых положительных констант  $c_7$  и  $c_8$  первое, четвертое и пятое слагаемые в (19) не превышают  $c_7 n^{-1-c_8}$  для всех достаточно больших  $n$ , что можно показать с помощью ограничения на  $\alpha(\cdot)$  из условия и рассуждений, аналогичных приведенным при выводе соответственно формул (12), (16) и (18), с тем отличием, что при применении леммы 4 полагается  $m = (\ln n)^3$ .

Из доказанного следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|U(\hat{t}_F)|}{n} > 4\varepsilon\right) < \infty,$$

и по теореме 1.3.4 из [22]  $U(\hat{t}_F)n^{-1} \rightarrow 0$  п. в., что завершает доказательство теоремы.  $\square$

## Литература

1. Krylov V. A., Moser G., Serpico S. B., Zerubia J. False discovery rate approach to unsupervised image change detection // IEEE T. Image Process., 2016. Vol. 25. No. 10. P. 4704–4718. doi: 10.1109/TIP.2016.2593340.
2. Menyhart O., Wetz B., Györfy B. MultipleTesting.com: A tool for life science researchers for multiple hypothesis testing correction // PLoS One, 2021. Vol. 16. No. 6. Art. 0245824. doi: 10.1371/journal.pone.0245824.
3. Abramovich F., Benjamini Y., Donoho D., Johnstone I. Adapting to unknown sparsity by controlling the false discovery rate // Ann. Stat., 2006. Vol. 34. No. 2. P. 584–653. doi: 10.1214/009053606000000074.
4. Засна А. Ю., Шестаков О. В. Состоятельность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR-порогом // Вестник ТвГУ. Сер. Прикладная математика, 2017. Вып. 1. С. 5–16. doi: 10.26456/vtprmk119. EDN: YFYJXT.
5. Palionnaya S. I., Shestakov O. V. Asymptotic properties of MSE estimate for the false discovery rate controlling procedures in multiple hypothesis testing // Mathematics, 2020. Vol. 8. No. 11. Art. 1913. 11 p. doi: 10.3390/math8111913.

6. Шестаков О. В. Анализ несмещенной оценки среднеквадратичного риска метода блочной пороговой обработки // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 2. С. 30–35. doi: 10.14357/19922264210205. EDN: DSQQUAU.
7. Шестаков О. В. Пороговые функции в методах подавления шума, основанных на вейвлет-разложении сигнала // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 3. С. 51–56. doi: 10.14357/19922264210307. EDN: WSEAYG.
8. Шестаков О. В. Несмещенная оценка риска пороговой обработки с двумя пороговыми значениями // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 4. С. 14–19. doi: 10.14357/19922264220403. EDN: DZBVLC.
9. Farcomeni A. Some results on the control of the false discovery rate under dependence // Scand. J. Stat., 2007. Vol. 34. No. 2. P. 275–297. doi: 10.1111/j.1467-9469.2006.00530.x.
10. Воронцов М. О., Шестаков О. В. Среднеквадратичный риск FDR-процедуры в условиях слабой зависимости // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 34–40. doi: 10.14357/19922264230205. EDN: AVJZDX.
11. Воронцов М. О. Анализ среднеквадратичного риска при использовании методов множественной проверки гипотез для выбора параметров пороговой обработки в условиях слабой зависимости // Вестник Московского университета. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2024. № 2. С. 18–24.
12. Bosq D. Nonparametric statistics for stochastic processes: Estimation and prediction. — Lecture notes in statistics ser. — New York, NY, USA: Springer, 1996. Vol. 110. 188 p.
13. Mallat S. A wavelet tour of signal processing. — New York, NY, USA: Academic Press, 1999. 857 p.
14. Donoho D., Johnstone I. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage // Biometrika, 1994. Vol. 81. No. 3. P. 425–455. doi: 10.1093/biomet/81.3.425.
15. Donoho D., Johnstone I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // J. Amer. Stat. Assoc., 1995. Vol. 90. P. 1200–1224.
16. Marron J. S., Adak S., Johnstone I. M., Neumann M. H., Patil P. Exact risk analysis of wavelet regression // J. Comput. Graph. Stat., 1998. Vol. 7. P. 278–309. doi: 10.1080/10618600.1998.10474777.
17. Jansen M. Noise reduction by wavelet thresholding. — Lecture notes in statistics ser. — New York, NY, USA: Springer, 2001. Vol. 161. 217 p.
18. Кудрявцев А. А., Шестаков О. В. Асимптотическое поведение порога, минимизирующего усредненную вероятность ошибки вычисления вейвлет-коэффициентов // Докл. Акад. наук, 2016. Т. 468. № 5. С. 487–491.
19. Кудрявцев А. А., Шестаков О. В. Асимптотически оптимальная пороговая обработка вейвлет-коэффициентов в моделях с негауссовым распределением шума // Докл. Акад. наук, 2016. Т. 471. № 1. С. 11–15.
20. Ерошенко А. А. Статистические свойства оценок сигналов и изображений при пороговой обработке коэффициентов в вейвлет-разложениях: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2015. 82 с.
21. Peligrad M. On the asymptotic normality of sequences of weak dependent random variables // J. Theor. Probab., 1996. Vol. 9. No. 3. P. 703–715. doi: 10.1007/BF02214083.
22. Serfling R. J. Approximation theorems of mathematical statistics. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2002. 371 p.

Поступила в редакцию 21.05.24

---



---

## ASYMPTOTIC NORMALITY AND STRONG CONSISTENCY OF RISK ESTIMATE WHEN USING THE FDR THRESHOLD UNDER WEAK DEPENDENCE CONDITION

М. О. Vorontsov<sup>1,2</sup> and O. V. Shestakov<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

<sup>2</sup>Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

<sup>3</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** An approach to solving the problem of noise removal in a large array of sparse data is considered based on the method of controlling the average proportion of false hypothesis rejections (False Discovery Rate, FDR). This approach is equivalent to threshold processing procedures that remove array components whose values do not exceed some specified threshold. The observations in the model are considered weakly dependent. To control the

degree of dependence, restrictions on the strong mixing coefficient and the maximum correlation coefficient are used. The mean-square risk is used as a measure of the effectiveness of the considered approach. It is possible to calculate the risk value only on the test data; therefore, its statistical estimate is considered in the work and its properties are investigated. The asymptotic normality and strong consistency of the risk estimate are proved when using the FDR threshold under conditions of weak dependence in the data.

**Keywords:** thresholding; multiple hypothesis testing; risk estimate

**DOI:** 10.14357/19922264240309

**EDN:** ZOQVTO

## References

- Krylov, V. A., G. Moser, S. B. Serpico, and J. Zerubia. 2016. False discovery rate approach to unsupervised image change detection. *IEEE T. Image Process.* 25(10):4704–4718. doi: 10.1109/TIP.2016.2593340.
- Menyhart, O., B. Weltz, and B. Györfy. 2021. MultipleTesting.com: A tool for life science researchers for multiple hypothesis testing correction. *PLoS One* 16(6):0245824. doi: 10.1371/journal.pone.0245824.
- Abramovich, F., Y. Benjamini, D. Donoho, and I. M. Johnstone. 2006. Adapting to unknown sparsity by controlling the false discovery rate. *Ann. Stat.* 34(2):584–653. doi: 10.1214/009053606000000074.
- Zaspa, A. Yu., and O. V. Shestakov. 2017. Sostoyatel'nost' otsenki riska pri mnozhestvennoy proverke gipotez s FDR-porogom [Consistency of the risk estimate of the multiple hypothesis testing with the FDR threshold]. *Vestnik TsvGU. Ser.: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Ser. Applied Mathematics] 1:5–16. doi: 10.26456/vtprmk119. EDN: YFYJXT.
- Paliionnaya, S. I., and O. V. Shestakov. 2020. Asymptotic properties of MSE estimate for the false discovery rate controlling procedures in multiple hypothesis testing. *Mathematics* 8(11):1913. 11 p. doi: 10.3390/math8111913.
- Shestakov, O. V. 2021. Analiz nesmeshchenoy otsenki srednekvadrachnogo riska metoda blochnoy porogovoy obrabotki [Analysis of the unbiased mean-square risk estimate of the block thresholding method]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(2):30–35. doi: 10.14357/19922264210205. EDN: DSQQUA.
- Shestakov, O. V. 2021. Porogovye funktsii v metodakh podavleniya shuma, osnovannykh na veyvlet-razlozhenii signala [Thresholding functions in the noise suppression methods based on the wavelet expansion of the signal]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(3):51–56. doi: 10.14357/19922264210307. EDN: WSEAYG.
- Shestakov, O. V. 2022. Nesmeshchennaya otsenka riska porogovoy obrabotki s dvumya porogovymi znacheniyami [Unbiased thresholding risk estimate with two threshold values]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(4):14–19. doi: 10.14357/19922264220403. EDN: DZBVLC.
- Farcomeni, A. 2007. Some results on the control of the false discovery rate under dependence. *Scand. J. Stat.* 34(2):275–297. doi: 10.1111/j.1467-9469.2006.00530.x.
- Vorontsov, M. O., and O. V. Shestakov. 2023. Srednekvadrachnyy risk FDR-protsedury v usloviyakh slaboy zavisimosti [Mean-square risk of the FDR procedure under weak dependence]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):34–40. doi: 10.14357/19922264230205. EDN: AVJZDX.
- Vorontsov, M. O. 2024. RMS risk analysis when using multiple hypothesis testing select parameters of thresholding under conditions of weak dependence. *Moscow University Computational Mathematics Cybernetics* 48:91–97. doi: 10.3103/S027864192470002X.
- Bosq, D. 1996. *Nonparametric statistics for stochastic processes: Estimation and prediction*. Lecture notes in statistics ser. New York, NY: Springer Verlag. Vol. 110. 188 p.
- Mallat, S. 1999. *A wavelet tour of signal processing*. New York, NY: Academic Press. 857 p.
- Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1994. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika* 81(3):425–455. doi: 10.1093/biomet/81.3.425.
- Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1995. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *J. Am. Stat. Assoc.* 90(432):1200–1224. doi: 10.1080/01621459.1995.10476626.
- Marron, J. S., S. Adak, I. M. Johnstone, M. H. Neumann, and P. Patil. 1998. Exact risk analysis of wavelet regression. *J. Comput. Graph. Stat.* 7(3):278–309. doi: 10.1080/10618600.1998.10474777.
- Jansen, M. 2001. *Noise reduction by wavelet thresholding*. Lecture notes in statistics ser. New York, NY: Springer Verlag. Vol. 161. 217 p.
- Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2016. Asymptotic behavior of the threshold minimizing the average probability of error in calculation of wavelet coefficients. *Dokl. Math.* 93(3):295–299. doi: 10.1134/S1064562416030212. EDN: WUMUEV.
- Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2016. Asymptotically optimal wavelet thresholding in the models with non-Gaussian noise distributions. *Dokl. Math.* 94(3):615–619. doi: 10.1134/S1064562416060028. EDN: YUYVUP.
- Eroshenko, A. A. 2015. Statisticheskie svoystva otsenok signalov i izobrazheniy pri porogovoy obrabotke koefitsientov v veyvlet-razlozheniyakh [Statistical properties of signal and image estimates under thresholding of coefficients in wavelet decompositions]. Moscow: MSU. PhD Diss. 82 p.
- Peligrad, M. 1996. On the asymptotic normality of sequences of weak dependent random variables. *J. Theor. Probab.* 9(3):703–715. doi: 10.1007/BF02214083.
- Serfling, R. J. 2002. *Approximation theorems of mathematical statistics*. New York, NY: John Wiley & Sons. 371 p.

Received May 21, 2024

## Contributors

**Vorontsov Mikhail O.** (b. 1996) — PhD student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; mathematician, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; m.vtsov@mail.ru

**Shestakov Oleg V.** (b. 1976) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; leading scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; oshestakov@cs.msu.su

# ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАСТРОЙКЕ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ДЛЯ МОДЕЛИ ИНТЕРВЕНЦИЙ НА ВАЛЮТНОМ РЫНКЕ

П. В. Шнурков<sup>1</sup>, Д. А. Новиков<sup>2</sup>

**Аннотация:** Исследуется проблема оптимизации внешних воздействий (управлений) на процесс изменения цены так называемой бивалютной корзины на валютном рынке Российской Федерации. Теоретической основой используемого подхода послужило решение стохастической задачи о настройке с дискретным временем. На основе проведенного ранее статистического анализа было установлено, что стохастический процесс, характеризующий эволюцию цены бивалютной корзины, при определенных условиях может быть достаточно адекватно описан классической однородной цепью Маркова. Были получены статистические оценки вероятностей перехода указанной цепи. Численно определены необходимые вспомогательные вероятностные характеристики марковской модели. Для различных заданных стоимостных характеристик проведено исследование стационарного стоимостного показателя эффективности управления — средней удельной прибыли. Получены конкретные численные решения соответствующей задачи оптимального управления, которые можно интерпретировать как оптимальные внешние воздействия (интервенции) на исследуемый стохастический процесс.

**Ключевые слова:** стохастические марковские и полумарковские модели управления; задача о настройке с дискретным временем; дробно-линейные интегральные функционалы на дискретных вероятностных распределениях; оптимальное управление в стохастических экономических системах

**DOI:** 10.14357/19922264240310

**EDN:** ZXNZDQ

## 1 Введение

Решение стохастической задачи о настройке для моделей с дискретным и непрерывным временем было впервые в достаточно сжатой форме изложено в работе [1]. Следует отметить, что теоретическую основу этого решения составляют результаты исследования проблемы безусловного экстремума для дробно-линейного интегрального функционала, заданного на множестве конечных наборов вероятностных распределений [2, 3].

В работе [4] была проанализирована проблема создания математических моделей интервенций на товарных и валютных рынках. В этой работе был предложен и теоретически разработан подход к решению проблемы оптимального управления интервенциями на основе стохастической задачи о настройке с дискретным временем. В дальнейшем в статье [5] этот подход был конкретизирован для стохастической модели проведения интервенций на валютном рынке Российской Федерации. В этой статье был подробно описан способ построения соответствующей управляемой полумарковской стохастической модели с дискретным временем. Отметим, что в настоящей работе будут

использованы все основные идеи построения такой модели и сохранены принятые в ней обозначения.

В статье [6] был проведен достаточно обстоятельный анализ реальных процессов, характеризующих цену так называемой бивалютной корзины (доллар—евро) на валютном рынке Российской Федерации в течение 2010–2013 гг. Для этого анализа были использованы методы математической статистики, основными из которых стали методы проверки статистических гипотез. В результате было установлено, что при определенных условиях процесс эволюции цены бивалютной корзины можно достаточно адекватно описывать классической моделью однородной марковской цепи с дискретным временем и дискретным множеством состояний. В указанной работе были также получены статистические оценки вероятностей перехода соответствующих марковских цепей на материале статистических данных, собранных в определенные периоды времени.

В настоящей работе статистические выводы и оценки, полученные в статье [6], используются для выполнения завершающего этапа решения стохастической задачи о настройке с дискретным

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», pshnurkov@hse.ru

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», even.he@yandex.ru



временем. Исходя из известных оценок элементов матрицы вероятностей перехода марковской цепи, получены вспомогательные вероятностные характеристики модели, а именно: матрицы вероятностей поглощения в двух граничных состояниях при определенных условиях на начальные состояния. Далее на основе некоторых достаточно естественных качественных соображений определены стоимостные характеристики модели: доходы при однократном попадании процесса в произвольное фиксированное состояние и затраты, характеризующие управляющее воздействие, т. е. перевод процесса из граничного (поглощающего) состояния во внутреннее. После задания этих вероятностных и стоимостных характеристик появилась возможность использовать теоретический результат, касающийся решения задачи о настройке с дискретным временем. Численное решение задачи определяется точкой достижения глобального максимума заданной функции двух дискретных аргументов, каждый из которых принимает конечное число значений. По своему содержанию эта функция представляет собой стационарное значение средней удельной прибыли, определенное на детерминированных стратегиях управления.

## 2 Основные вероятностные характеристики стохастической модели

Полумарковская стохастическая модель с дискретным временем, на основе которой ставится и решается задача о настройке, подробно описана в работах [1, 4, 5].

Основными стохастическими объектами, составляющими эту модель, являются следующие:

- (1) последовательность независимых однородных цепей Маркова с поглощениями  $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , имеющих одинаковые матрицы переходных вероятностей, которые описывают эволюцию рассматриваемой стохастической системы на периодах времени между внешними воздействиями (управлениями);
- (2) последовательность случайных величин  $\{\hat{\xi}_k\}_{k=0}^{\infty}$ , образующих так называемый основной процесс. Этот процесс конструируется на основе упомянутой выше последовательности поглощающих марковских цепей и описывает эволюцию рассматриваемой стохастической системы на бесконечном интервале времени  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Данный процесс управляется в моменты времени, когда соответствующие

поглощающие цепи Маркова достигают своих граничных поглощающих состояний. По своим вероятностным свойствам основной процесс представляет собой полумарковский управляемый процесс с дискретным временем.

В дальнейшем для определения основных вероятностных характеристик, связанных с рассматриваемой моделью, будем использовать обозначения, введенные в разд. 4 работы [5].

Предположим сначала, что для поглощающих марковских цепей  $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , заданы следующие матричные вероятностные характеристики:

$\mathbf{P}_{00}$  — матрица вероятностей перехода внутри множества допустимых состояний  $\{2, 3, \dots, N\}$ , имеет размерность  $(N - 1) \times (N - 1)$ ;

$\mathbf{P}_{01}$  — матрица вероятностей перехода из допустимых состояний  $\{2, 3, \dots, N\}$  в поглощающие состояния  $\{0, 1\}$  за один шаг цепи, имеет размерность  $(N - 1) \times 2$ ;

$\mathbf{P}_{10}$  — матрица вероятностей перехода из поглощающих состояний  $\{0, 1\}$  в допустимые состояния  $\{2, 3, \dots, N\}$ . Данная матрица нулевая и имеет размерность  $2 \times (N - 1)$ ;

$\mathbf{P}_{11}$  — матрица вероятностей перехода внутри множества поглощающих состояний  $\{0, 1\}$ . Данная матрица единичная, имеет размерность  $2 \times 2$ .

Тогда матрица вероятностей перехода марковской цепи  $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}$  с произвольным номером  $n$  имеет следующую клеточную структуру:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{10} \\ \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{00} \end{pmatrix}.$$

Вероятности перехода основного процесса  $\{\hat{\xi}_k\}_{k=0}^{\infty}$  из граничного состояния  $\{0\}$  во внутренние допустимые состояния задаются вектором

$$\alpha^{(0)} = \left( \alpha_k^{(0)}, k = \overline{2, N} \right), \quad \sum_{k=2}^N \alpha_k^{(0)} = 1,$$

вероятности перехода основного процесса  $\{\hat{\xi}_k\}_{k=0}^{\infty}$  из граничного состояния  $\{1\}$  во внутренние допустимые состояния задаются вектором

$$\alpha^{(1)} = \left( \alpha_k^{(1)}, k = \overline{2, N} \right), \quad \sum_{k=2}^N \alpha_k^{(1)} = 1.$$

Распределения вероятностей  $\alpha^{(0)}$  и  $\alpha^{(1)}$  описывают внешние управляющие воздействия.

Предположим также, что заданы следующие стоимостные характеристики модели.

Обозначим через  $c_l$  доход при однократном пребывании основного процесса  $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$  в состоянии  $l \in \{2, 3, \dots, N\}$  в период свободной эволюции (без внешних воздействий). Пусть  $\bar{c} = (c_l, l \in \{2, 3, \dots, N\})^T$  — вектор-столбец указанных доходов.

Обозначим через  $d_i^{(s)}$  величину затрат, связанных с переводом основного процесса из граничного состояния  $s$  во внутреннее состояние  $i, s \in \{0, 1\}, i \in \{2, 3, \dots, N\}$ . Данные величины характеризуют расходы, необходимые для проведения внешнего воздействия, в результате которого основной процесс указанным образом изменяет свое состояние. В соответствии со своим экономическим содержанием эти величины отрицательные.

Теперь приведем представления для некоторых дополнительных вероятностных и стоимостных характеристик рассматриваемой модели, основываясь на теории поглощающих марковских цепей.

Пусть  $b_{i0}$  и  $b_{i1}$  — вероятности поглощения марковской цепи  $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=0}^\infty, n = 0, 1, 2, \dots$ , в состояниях  $\{0\}$  и  $\{1\}$  соответственно при условии, что в начальный момент времени данный процесс находится в состоянии  $i; \xi_0^{(n)} = i, i \in \{2, 3, \dots, N\}$ .

Пусть, далее,  $r_i$  — математическое ожидание дохода, связанного с поведением марковской цепи  $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=0}^\infty, n = 0, 1, 2, \dots$ , на всем периоде ее эволюции от начального момента до поглощения при условии, что в начальный момент времени данный процесс находится в состоянии  $i; \xi_0^{(n)} = i, i \in \{2, 3, \dots, N\}$ . В рассматриваемой модели предполагается, что доходы, связанные с поведением марковских цепей  $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=0}^\infty, n = 0, 1, 2, \dots$ , определяемые заданными выше параметрами  $\bar{c} = (c_l, l \in \{2, 3, \dots, N\})^T$ , порождают доходы на соответствующих траекториях основного процесса  $\{\hat{\xi}_k\}_{k=0}^\infty$ .

Тогда матрица вероятностей поглощения  $\mathbf{B}$ , состоящая из строк  $(b_{i0}, b_{i1}), i \in \{2, 3, \dots, N\}$ , определяется формулой:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{00})^{-1} \mathbf{P}_{01},$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица размерности  $(N - 1) \times (N - 1)$ .

**Замечание 1.** По своему вероятностному содержанию, матрица  $\mathbf{B}$  является стохастической:

$$b_{i0} + b_{i1} = 1, \quad i \in \{2, 3, \dots, N\}.$$

Вектор  $\bar{r} = (r_i, i \in \{2, 3, \dots, N\})^T$  может быть выражен следующим образом:

$$\bar{r} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{00})^{-1} \bar{c}.$$

Таким образом, для получения последующих результатов, касающихся решения задачи оптимального управления, в рассматриваемой стохастической модели необходимо задать матрицу вероятностей перехода  $\mathbf{P}$ , вектор доходов, характеризующих эволюцию основного процесса на периодах времени без проведения внешних воздействий  $\bar{c}$ , и набор величин  $d_i^{(s)}, i \in \{2, 3, \dots, N\}, s \in \{0, 1\}$ , характеризующих затраты на проведение внешних воздействий или управлений основным процессом. Остальные необходимые вероятностные и стоимостные характеристики определяются на основе приведенных выше аналитических формул.

### 3 Решение проблемы оптимального управления в стохастической полумарковской модели с дискретным временем

В работах [1, 4] доказано следующее утверждение о представлении стационарного стоимостного показателя эффективности в рассматриваемой модели.

**Теорема 1.** *Предположим, что в рассматриваемой стохастической модели выполняются условия:*

$$b_{l,0} > 0, \quad b_{l,1} > 0, \quad l \in \{2, 3, \dots, N\}.$$

Тогда имеет место следующее представление для стационарного стоимостного показателя  $I = I(\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)})$ , который по содержанию представляет собой среднюю удельную прибыль:

$$I = I(\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}) = \frac{\sum_{m_0=2}^N \sum_{m_1=2}^N A(m_0, m_1) \alpha_{m_0}^{(0)} \alpha_{m_1}^{(1)}}{\sum_{m_0=2}^N \sum_{m_1=2}^N B(m_0, m_1) \alpha_{m_0}^{(0)} \alpha_{m_1}^{(1)}}, \quad (1)$$

где

$$A(m_0, m_1) = \left[ d_{m_0}^{(0)} + r_{m_0} \right] b_{m_1,0} + \left[ d_{m_1}^{(1)} + r_{m_1} \right] b_{m_0,1}; \quad (2)$$

$$B(m_0, m_1) = b_{m_0,1} + b_{m_1,0}. \quad (3)$$

**Замечание 2.** Основу доказательства теоремы 1 составляют эргодические теоремы для стоимостных аддитивных функционалов, связанных с полумарковскими случайными процессами. Основное

достаточное условие для применения этих теорем в рассматриваемой полумарковской модели заключается в том, что любая цепь Маркова  $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=0}^\infty$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , описывающая поведение системы на периоде времени при отсутствии внешних воздействий (управлений), должна за конечное время с вероятностью, равной единице, достичь одного из граничных поглощающих состояний. Условия на вероятности поглощения, включенные в формулировку теоремы, обеспечивают выполнение этого требования в усиленной форме.

Из утверждения теоремы 1 следует, что в рассматриваемой стохастической модели стационарный стоимостный показатель эффективности управления  $I(\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)})$ , аналитически определяемый формулами (1)–(3), представляет собой дискретный вариант так называемого дробно-линейного интегрального функционала. В этом варианте функционал определен на множестве пар дискретных вероятностных распределений  $(\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)})$ . Таким образом, задача оптимального управления формулируется в виде экстремальной задачи на максимум для функционала вида (1).

Решение общей задачи о безусловном экстремуме дробно-линейного интегрального функционала, заданного на множестве конечных наборов вероятностных мер, изложено в работах [2, 3]. Отметим также, что применение утверждений об экстремуме дробно-линейного интегрального функционала для решения задачи о настройке описано в работах [1, 4]. В общем варианте решение экстремальной задачи для дробно-линейного интегрального функционала полностью определяется экстремальными свойствами так называемой основной функции, которая представляет собой отношение подынтегральных функций числителя и знаменателя. В дискретном варианте эти подынтегральные функции совпадают с функциями под знаком многомерных сумм, не зависящими от набора вероятностных распределений, по которому осуществляется оптимизация.

Перейдем к анализу особенностей экстремальной задачи для целевого функционала (1). Роли пространств допустимых решений (управлений) играют конечные множества

$$U_0 = U_1 = \{2, 3, \dots, N\}$$

и их декартово произведение

$$U = U_0 \times U_1,$$

которое представляет собой множество пар

$$U = \{(m_0, m_1) : m_0 \in U_0, m_1 \in U_1\}.$$

Дискретные вероятностные распределения

$$\alpha^{(0)} = (\alpha_l^{(0)}, l = \overline{2, N}); \alpha^{(1)} = (\alpha_l^{(1)}, l = \overline{2, N})$$

определены на множествах  $U_0$  и  $U_1$  соответственно. Основная функция дробно-линейного интегрального дискретного функционала  $I(\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)})$  определяется формулой:

$$C(m_0, m_1) = \frac{A(m_0, m_1)}{B(m_0, m_1)}, \quad (4)$$

где функции  $A(m_0, m_1)$  и  $B(m_0, m_1)$  задаются равенствами (2) и (3) соответственно.

Заметим, что в рассматриваемой задаче функция  $C(m_0, m_1)$  определена на конечном множестве значений аргументов  $U$ . Таким образом, данная функция достигает на множестве  $U$  своего минимального и максимального значения (глобальных экстремумов). Напомним также, что в рассматриваемой стохастической модели вероятностные характеристики  $b_{m_0,1}$  и  $b_{m_1,0}$  предполагались строго положительными при всех значениях  $m_0 \in U_0 = \{2, 3, \dots, N\}$ ,  $m_1 \in U_1 = \{2, 3, \dots, N\}$  (см. формулировку теоремы 1 и замечание 2). Отсюда следует, что выполняется условие

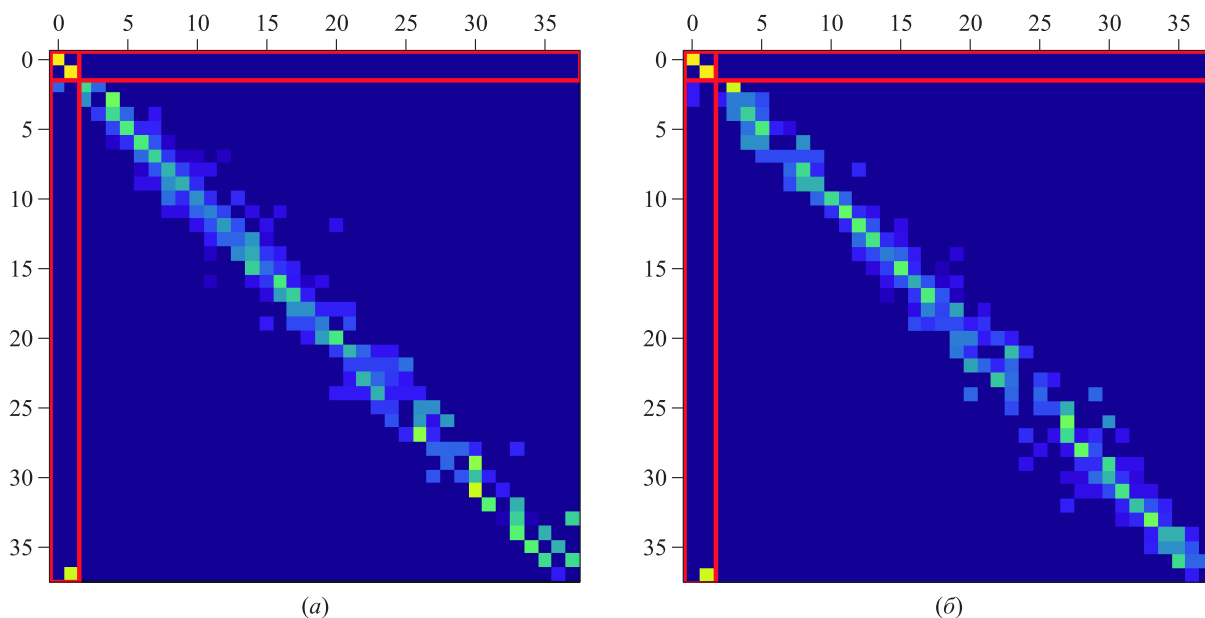
$$B(m_0, m_1) = b_{m_0,1} + b_{m_1,0} > 0, \quad (m_0, m_1) \in U$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы об экстремуме дробно-линейного интегрального функционала, заданного на множестве дискретных вероятностных распределений. В соответствии с этой теоремой решение экстремальной задачи для функционала (1) на максимум существует и достигается на вырожденных дискретных распределениях, сосредоточенных в точках  $m_0^*$  и  $m_1^*$ . При этом  $(m_0^*, m_1^*)$  есть точка, в которой достигается соответствующий глобальный максимум основной функции  $C(m_0, m_1)$ , определяемой формулами (4), (2) и (3).

Таким образом, решение задачи оптимального управления в рассматриваемой стохастической модели представляет собой пару детерминированных значений параметров управления  $(m_0^*, m_1^*)$ , доставляющих максимум явно заданной функции  $C(m_0, m_1)$ .

## 4 Численные решения задачи оптимального управления

**Пример 1.** В этом примере стохастическая полумарковская управляемая модель, в рамках которой рассматривается задача о настройке, строится на базе наблюдений за ценой бивалютной корзины на валютном рынке Российской Федерации в пери-



**Рис. 1** Исходные матрицы  $P$ , полученные в результате оценки: (а) период 11.01.2010–25.09.2011; (б) период 11.01.2012–25.12.2013

од с 11.01.2010 по 25.09.2011. Оценки элементов матрицы вероятностей перехода для поглощающей цепи Маркова получены в работе [6]. В рассматриваемом варианте предполагается, что  $N = 37$ . Таким образом, в соответствующей марковской цепи два состояния  $\{0\}$  и  $\{1\}$  являются граничными и поглощающими, а остальные 36 образуют множество так называемых внутренних невозвратных состояний. В данной работе матрица оценок вероятностей перехода  $P$  преобразована в стандартную форму для поглощающей марковской цепи. Визуализация этой матрицы представлена на рис. 1, а.

Матрица  $V$ , элементами которой служат вероятности поглощения в граничных состояниях  $\{0\}$  и  $\{1\}$  при фиксированных условиях на начальные состояния, приведена на рис. 2, а. Заметим, что элементы этой матрицы удовлетворяют условиям, достаточным для выполнения утверждений теоремы 1 и теоремы об экстремуме дробно-линейного интегрального функционала.

Графики функций, определяющих доходы, получаемые при однократном попадании в каждое состояние, и затраты, связанные с переводом основного процесса из граничных поглощающих состояний во внутренние, представлены на рис. 3, а и 4, а. При определении параметров доходов используется качественное предположение о том, что доходы монотонно возрастают с ростом расстояния от граничного поглощающего состояния до соответствующего внутреннего и достигают максимального значения в середине множества внутренних

состояний. Относительно функций затрат вводится соответствующее предположение, заключающееся в том, что они монотонно возрастают по абсолютной величине с ростом расстояния от граничного поглощающего состояния, откуда переводится основной процесс, до внутреннего состояния, в которое он будет переведен.

Графическое представление основной функции  $C(m_0, m_1)$ , которая определяет оптимальную детерминированную стратегию управления, приведено на рис. 5, а. Максимальное значение функции достигается в точке  $m_0^* = 14, m_1^* = 17$ , соответствующее максимальное значение функции  $C(14; 17) = 1561,433986$ .

**Пример 2.** В данном примере соответствующая полумарковская управляемая модель строится на базе данных наблюдений за ценой бивалютной корзины в период с 01.01.2012 по 01.12.2013. Как и в первом примере, оценки элементов матрицы вероятностей перехода для поглощающей цепи Маркова получены в работе [6]. При этом вновь предполагается, что параметр  $N = 37$ . Визуализация матрицы оценок вероятностей перехода для поглощающей марковской цепи  $P$  представлена на рис. 1, б. Соответствующая матрица оценок вероятностей поглощения  $V$  приведена на рис. 2, б. Заметим, что, как и в предыдущем варианте, элементы этой матрицы удовлетворяют условиям, достаточным для выполнения утверждений теоремы 1 и теоремы об экстремуме дробно-линейного интегрального функционала. Графики функций, определяющих

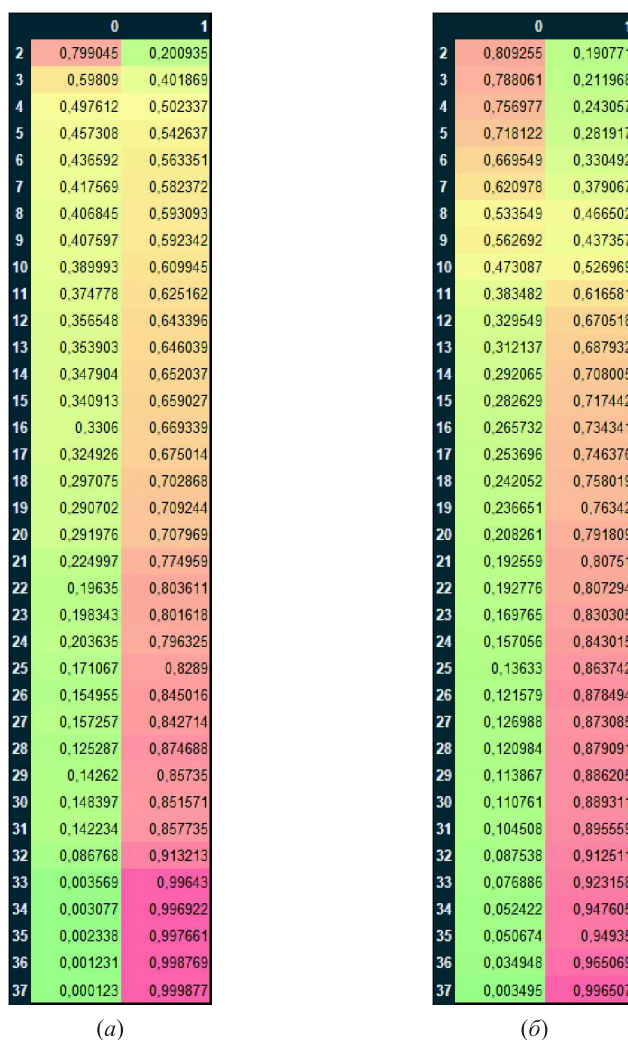


Рис. 2 Матрицы вероятностей поглощения  $V$ : (а) пример 1; (б) пример 2

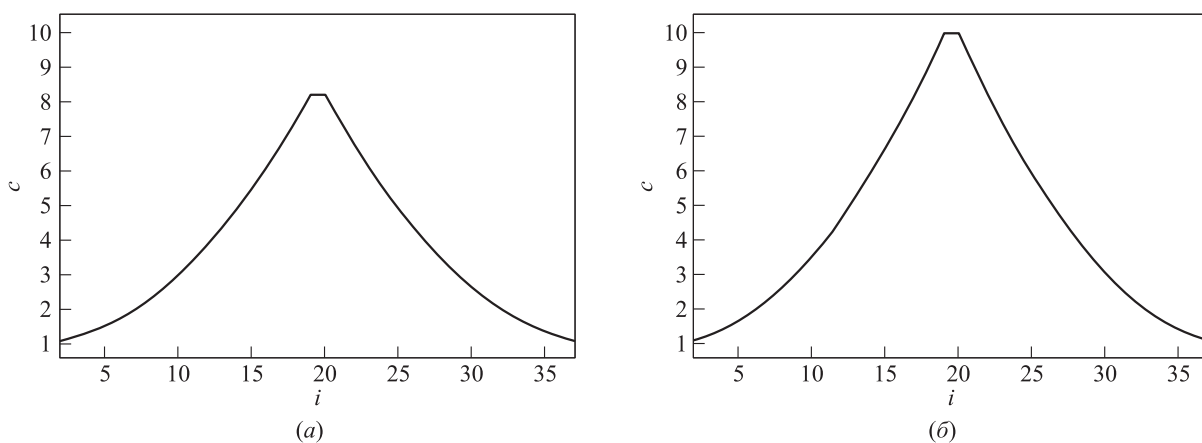
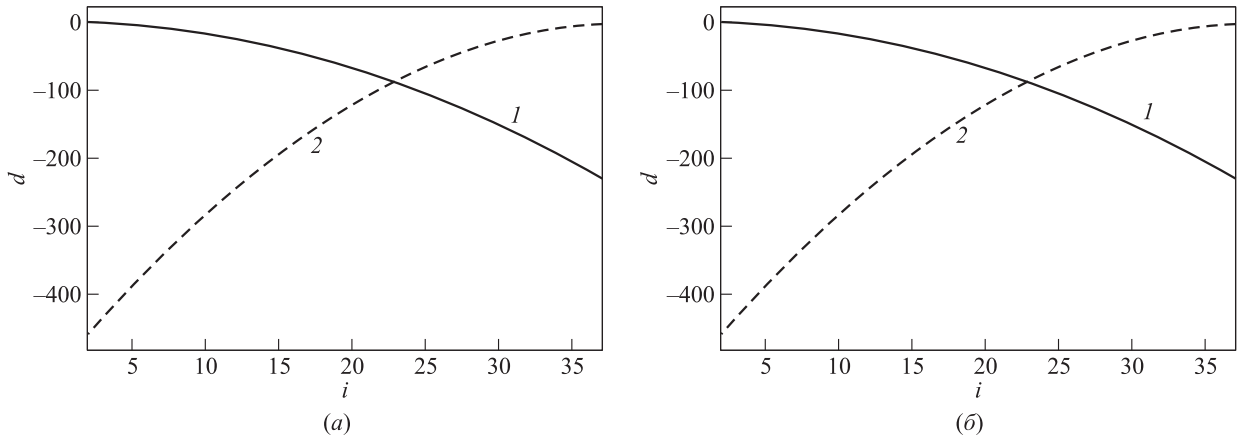
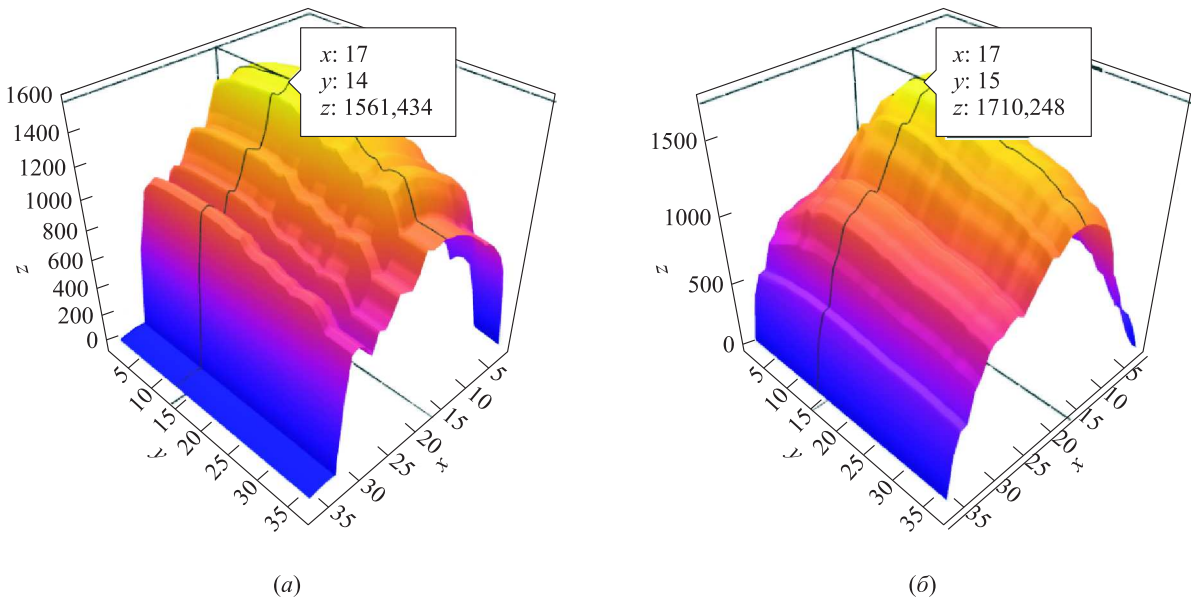


Рис. 3 Графики функции  $c$ , определяющие доходы в каждом состоянии: (а) пример 1; (б) пример 2



**Рис. 4** Графики функций  $d^{(0)}$  (1) и  $d^{(1)}$  (2), определяющих расходы, связанные с переводом основного процесса из граничных состояний во внутренние: (а) пример 1; (б) пример 2



**Рис. 5** Основные функции  $C(m_0, m_1)$ , определяющие решение задачи: (а) пример 1; (б) пример 2

стоимостные характеристики модели, представлены на рис. 3, б и 4, б. Поведение этих функций предполагается аналогичным поведению соответствующих функций в примере 1. Графическое представление основной функции  $C(m_0, m_1)$ , которая определяет оптимальную детерминированную стратегию управления, приведено на рис. 5, б. Максимальное значение функции достигается в точке  $m_0^* = 15, m_1^* = 17$ , соответствующее максимальное значение функции  $C(15; 17) = 1710,247851$ .

## 5 Заключение

Оптимальное управление в задаче о настройке с дискретным временем определено в настоящей

работе лишь для двух вариантов задания исходных параметров модели. Число таких вариантов можно увеличить, рассматривая различные соотношения параметров. Это позволит выявить влияние каждого из них на оптимальное решение. Анализ такого влияния может составить содержание отдельного исследования.

Важное направление дальнейших исследований связано также с расширением круга прикладных задач, для которых могут быть использованы теоретические результаты решения задачи о настройке. Как уже отмечалось в работах [1, 4, 5], стохастические управляемые модели, проблема оптимального управления в которых сводится к одному из вариантов задачи о настройке, возникают в различных

областях техники и экономики. Соответствующее исследование должно иметь комплексный характер, в котором будут существенно использоваться современные методы математической статистики и вычислительной математики.

## Литература

1. *Shnurkov P. V.* Optimal control problem in a stochastic model with periodic hits on the boundary of a given subset of the state set (tuning problem). — Cornell University, 2017. 16 p. arXiv: 1709.03442v1.
2. *Шнурков П. В.* О решении задачи безусловного экстремума для дробно-линейного интегрального функционала на множестве вероятностных мер // Докл. Акад. наук, 2016. Т. 470. № 4. С. 387–392.
3. *Шнурков П. В., Горшенин А. К., Белоусов В. В.* Аналитическое решение задачи оптимального управления полумарковским процессом с конечным множеством состояний // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 4. С. 72–88. doi: 10.14357/19922264160408. EDN: XGSITZ.
4. *Shnurkov P. V., Novikov D. A.* Analysis of the problem of intervention control in the economy on the basis of solving the problem of tuning. — Cornell University, 2018. 15 p. arXiv: 1811.10993.
5. *Шнурков П. В., Новиков Д. А.* О концепции стохастической модели с управлением в моменты выхода процесса на границу заданного подмножества множества состояний // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 3. С. 101–108. doi: 10.14357/19922264200315. EDN: FSLGBJ.
6. *Шнурков П. В., Мигуля М. А.* Некоторые результаты анализа процесса изменения цены бивалютной корзины на основе методов статистики случайных процессов // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 3. С. 16–25. doi: 10.14357/19922264220303. EDN: QGZCHT.

Поступила в редакцию 15.07.24

# NUMERICAL-ANALYTICAL SOLUTION OF THE DISCRETE-TIME TUNING PROBLEM FOR AN INTERVENTION MODEL IN THE FOREIGN EXCHANGE MARKET

P. V. Shnurkov and D. A. Novikov

National Research University “Higher School of Economics,” 34 Tallinskaya Str., Moscow 123458, Russian Federation

**Abstract:** The work examines the problem of optimizing external influences (controls) on the process of changing the price of the so-called bi-currency basket on the foreign exchange market of the Russian Federation. The theoretical basis of the approach used is the solution of a stochastic tuning problem with discrete time. Based on the previous statistical analysis, it was established that the stochastic process characterizing the evolution of the bi-currency basket price, under certain conditions, can be quite adequately described by a classical homogeneous Markov chain. In this case, statistical estimates of the transition probabilities of the specified chain were obtained. Necessary auxiliary probabilistic characteristics of the Markov model are numerically determined. For various given cost characteristics, a study of the stationary cost indicator of management efficiency-average specific profit was conducted. Specific numerical solutions to the corresponding optimal control problem are obtained which can be interpreted as optimal external influences (interventions) on the stochastic process under study.

**Keywords:** stochastic Markov and semi-Markov control models; discrete time tuning problem; fractional linear integral functionals on discrete probability distributions; optimal control in stochastic economic systems

**DOI:** 10.14357/19922264240310

**EDN:** ZXNZDQ

## References

1. Shnurkov, P. V. 2017. Optimal control problem in a stochastic model with periodic hits on the boundary of a given subset of the state set (tuning problem). Cornell University. 16 p. Available at: <https://arxiv.org/abs/1709.03442v1> (accessed July 29, 2024).
2. Shnurkov, P. V. 2016. Solution of the unconditional extremum problem for a linear-fractional integral functional on a set of probability measures. *Dokl. Math.* 94(2):550–554. doi: 10.1134/S1064562416050161. EDN: XFUJKH.
3. Shnurkov, P. V., A. K. Gorshenin, and V. V. Belousov. 2016. Analiticheskoe reshenie zadachi optimal'nogo upravleniya polumarkovskim protsessom s konechnym mnozhestvom sostoyaniy [Analytical solution of the optimal control task of a semi-Markov process with finite set of states]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(4):72–88. doi: 10.14357/19922264160408. EDN: XGSITZ.

4. Shnurkov, P. V., and D. A. Novikov. 2018. Analysis of the problem of intervention control in the economy on the basis of solving the problem of tuning. Cornell University. 15 p. Available at: <https://arxiv.org/abs/1811.10993> (accessed July 29, 2024).
5. Shnurkov, P. V., and D. A. Novikov. 2020. O kontseptsii stokhasticheskoy modeli s upravleniem v momenty vykhoda protsesssa na granitsu zadannogo podmnozhestva mnozhestva sostoyaniy [On the concept of a stochastic model with control at the moments of the process at the border of a presented subset of multiple states]. *Informatika i ee Primeneniya* — *Inform. Appl.* 14(3):101–108. doi: 10.14357/19922264200315. EDN: FSLGBJ.
6. Shnurkov, P. V., and M. A. Migulya. 2022. Nekotorye rezultaty analiza protsesssa izmeneniya tseny bivalyutnoy korziny na osnove metodov statistiki sluchaynykh protsessov [Some results of the analysis of the process of changing the price of a dual currency basket based on random process statistics methods]. *Informatika i ee Primeneniya* — *Inform. Appl.* 16(3):16–25. doi: 10.14357/19922264220303. EDN: QGZCHT.

*Received July 15, 2024*

## Contributors

**Shnurkov Peter V.** (b. 1953) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, National Research University “Higher School of Economics,” 34 Tallinskaya Str., Moscow 123458, Russian Federation; [pshnurkov@hse.ru](mailto:pshnurkov@hse.ru)

**Novikov Daniil A.** (b. 1993) — PhD applicant, National Research University “Higher School of Economics,” 34 Tallinskaya Str., Moscow 123458, Russian Federation; [even.he@yandex.ru](mailto:even.he@yandex.ru)



# БАЗОВАЯ АРХИТЕКТУРА РЕФЛЕКСИВНО-АКТИВНЫХ СИСТЕМ ИСКУССТВЕННЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ АГЕНТОВ\*

С. В. Листопад<sup>1</sup>

**Аннотация:** Статья посвящена разработке базовой архитектуры рефлексивно-активных систем искусственных гетерогенных интеллектуальных агентов (РАСИГИА), включающей типовую функциональную структуру системы и обобщенную архитектуру агентов. Благодаря сочетанию в системе разнородных агентов осуществляется гибридизация различных методов формального представления системы и знаний специалистов, обеспечивается учет инструментальной и функциональной неоднородности возникающих проблем. Рефлексивные возможности агентов позволяют им моделировать других агентов, самих себя и систему в целом, снижая интенсивность конфликтов и длительность выстраивания взаимодействия при изменении состава системы. В результате становится возможной самоорганизация системы в сильном смысле, в ходе которой для каждой новой практической проблемы вырабатывается релевантный ей метод решения.

**Ключевые слова:** рефлексия; рефлексивно-активная система искусственных гетерогенных интеллектуальных агентов; гибридная интеллектуальная многоагентная система; коллектив специалистов

DOI: 10.14357/19922264240311

EDN: UNTQBV

## 1 Введение

Как показано в [1], традиционная субъект-объектная парадигма нерелевантна процессам управления сложными организационными структурами, например логистическими центрами, энергораспределительными или медицинскими организациями. Такие структуры — это не пассивные объекты, а развивающиеся и эволюционирующие сети взаимодействующих субъектов, которые характеризуются целеустремленностью (активностью), рефлексивностью, коммуникативностью, социальной способностью к развитию и т. д. При управлении и автоматизированном решении проблем, возникающих в этих структурах, необходимо рассматривать их как саморазвивающиеся рефлексивно-активные среды [1]. Для этого в [2] в рамках мультиагентной парадигмы [3–5] предложена концепция РАСИГИА как компьютерных моделей коллективов, управляющих сложными организационными структурами. Агенты РАСИГИА — автономные программные сущности, характеризующиеся активностью и реактивностью, способные рассуждать, взаимодействовать и рефлексивировать.

Основы математического моделирования рефлексивных процессов и управления заложены в работах В. А. Лефевра, который рассматривал рефлексив-

сию как способность объекта-исследователя моделировать другие объекты и самого себя, свои действия и мысли [6]. Новиков и Чхартишвили предложили концепцию равновесия в рефлексивных играх [7]. В [8] предложен подход на основе нечеткой логики для формализации рефлексивных процессов врача-эксперта. В [9] рассматривается концепция построения виртуального интеллектуального агента-ассистента, рефлексивно моделирующего своего пользователя. Статья [10] посвящена разработке механизмов самообучения автономных интеллектуальных роботов при построении траектории движения в проблемной среде с препятствиями, неизвестными априори.

В РАСИГИА рефлексивные способности агентов служат для сокращения длительности переговорных процессов в ходе выработки согласованного представления о проблемной области, целях системы и порядке взаимодействия, что позволяет реализовать принцип открытости (способности к привлечению новых агентов из внешней среды) РАСИГИА и ее самоорганизацию в сильном смысле [11].

В настоящей работе представлены типовая функциональная структура и обобщенная архитектура агентов РАСИГИА, разработанные в соответствии с методологией [12] и формализованной моделью системы [2].

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00218, <https://rscf.ru/project/23-21-00218>.

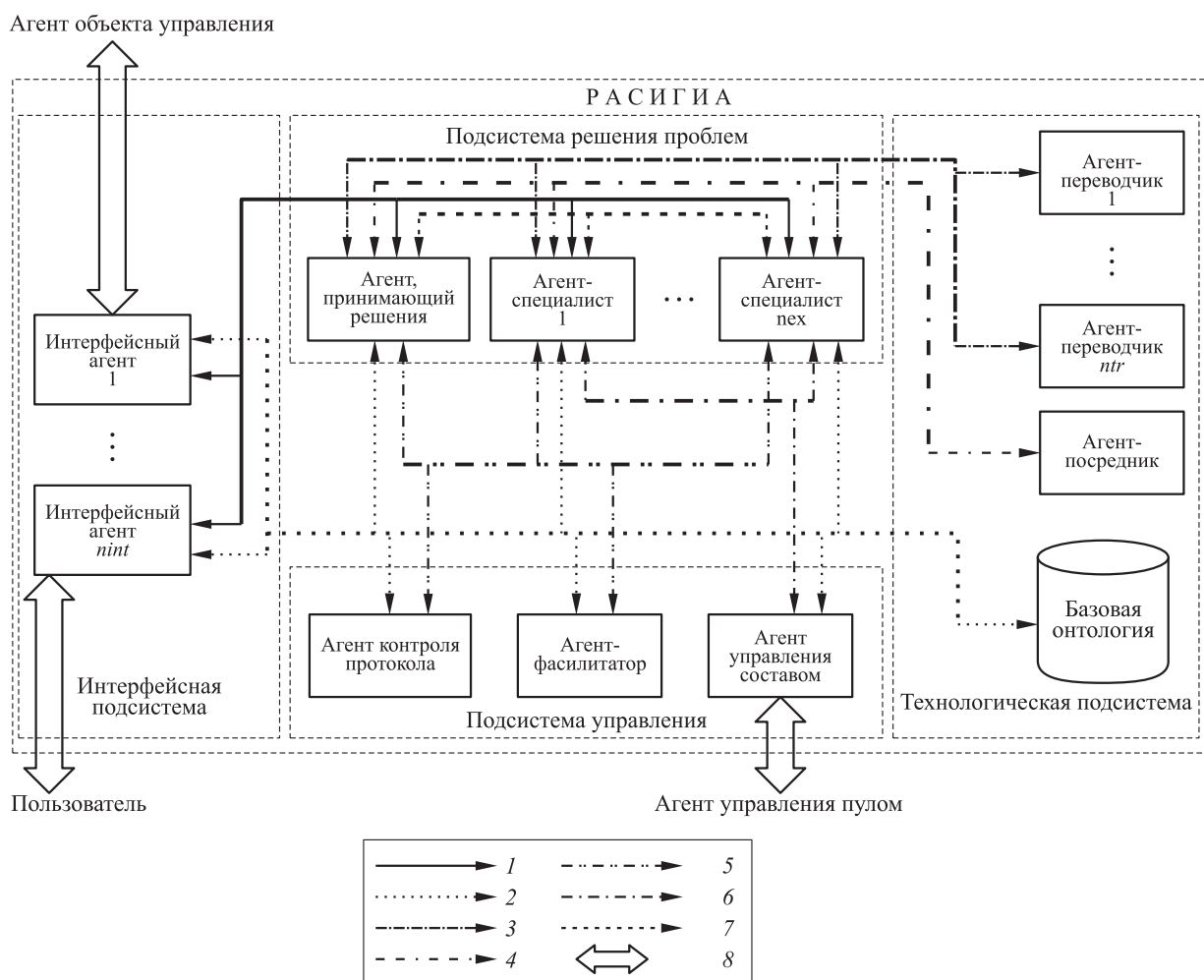
<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, [ser-list-post@yandex.ru](mailto:ser-list-post@yandex.ru)

## 2 Типовая функциональная структура рефлексивно-активных систем искусственных гетерогенных интеллектуальных агентов

Типовая функциональная структура РАСИГИА (рис. 1) описывает подсистемы агентов и их функционал, потоки информации и отношения между ними, а также их взаимодействие с внешней средой, которая рассматривается как многоагентная система более высокого уровня. В то же время

каждый из представленных агентов может быть РАСИГИА более низкого уровня. Предлагаемая структура выступает в качестве основы при разработке системы для конкретной проблемы, в ходе которой специфицируется число и состав агентов, не predetermined в типовой структуре. В рассматриваемой типовой функциональной структуре выделяются четыре подсистемы: интерфейсная, технологическая, управления и решения проблем.

Интерфейсная подсистема — это посредник между агентами системы и ее пользователями, а также объектом управления. Число агентов этой подсистемы может меняться и определяется подходом разработчиков конкретной системы к распре-



**Рис. 1** Типовая функциональная структура РАСИГИА: 1 — отношения агентов (запросы информации, помощи в решении задач, передача результатов их решения); 2 — взаимодействие (получение сведений из модели, обновление модели) агентов с базовой онтологией; 3 — отношения агентов (запросы перевода сообщений с одного языка кодирования сообщений на другой); 4 — отношения агентов (запросы имен и адресов агентов с заданными возможностями); 5 — отношения фасилитации, инициализирующие процессы согласования целей, моделей предметной области и протоколы взаимодействия агентами подсистемы решения проблем; 6 — отношения управления составом агентов-специалистов; 7 — отношения рефлексии агентов подсистемы решения проблем; 8 — отношения агентов с внешней средой

делению функционала между агентами и спецификой проблемы или класса проблем, для решения которых строится РАСИГИА. Интерфейсный агент запрашивает у пользователя входные данные и представляет результат решения проблемы. Кроме того, он может обеспечивать настройку системы пользователем и визуализировать происходящие в ней процессы [13]. Взаимодействие РАСИГИА с объектом управления также осуществляется через агентов интерфейсной подсистемы, которые получают информацию о его состоянии и выдают управляющие воздействия через программные интерфейсы.

Элементы и агенты технологической подсистемы предоставляют служебные функции другим агентам системы. Агенты-переводчики включаются в процесс передачи сообщений между парой агентов, если они не поддерживают единый язык и не могут общаться между собой напрямую. Агент-посредник предоставляет службу «желтых страниц», т.е. выполняет сопоставление способностей и имен агентов, обладающих ими. Базовая онтология — технологический элемент РАСИГИА, обеспечивающий понимание агентами семантики сообщений друг друга в рамках базовой коммуникации по согласованию собственных онтологий, построенных на ее основе, целей и протокола решения проблемы.

Агенты подсистемы управления обеспечивают эффективное взаимодействие остальных агентов РАСИГИА и ее самоорганизацию. Агент контроля протокола отслеживает и контролирует соблюдение договоренностей агентов по выработке и корректировке согласованного протокола решения проблемы. Агент-фасилитатор обеспечивает эффективную совместную работу агентов подсистемы решения проблем, в частности оценивает текущую ситуацию (определяет стадию коллективной работы, отношения между агентами, проявляющиеся макроуровневые процессы и т.п.) в ней, инициирует действия агентов, стимулирующие или способствующие разрешению возникающих между ними конфликтов [14]. Агент управления составом системы привлекает в подсистему решения проблем агентов из пула во внешней среде, моделируя методы подбора специалистов в реальные коллективы [15], а также исключает агентов из состава РАСИГИА, помещая их в пул. Таким образом, он обеспечивает динамику состава агентов, развитие РАСИГИА и ее релевантность очередной проблеме.

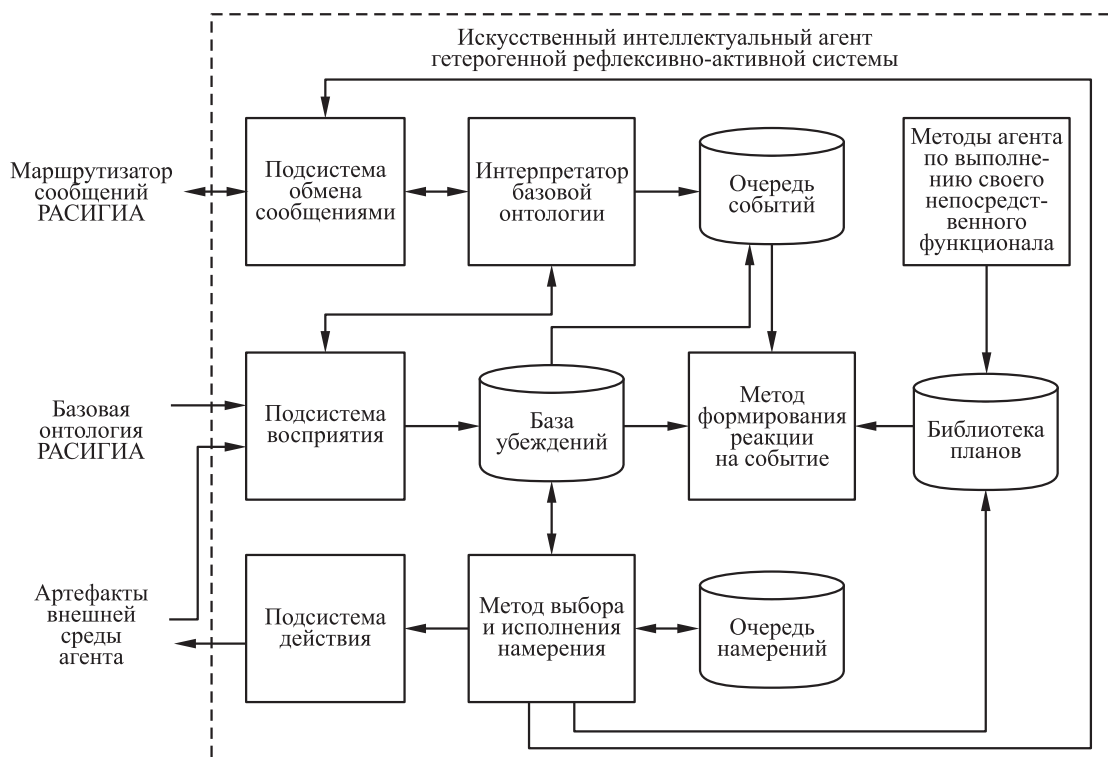
Подсистема решения проблем предназначена для компьютерного моделирования групповой работы специалистов за круглым столом над решением проблемы. Эта подсистема обеспечивает выполнение принципа необходимого разнообразия

за счет моделирования рассуждений специалистов разных направлений и использования различных методов решения проблемы. Агент, принимающий решения, получив необходимую для решения проблемы информацию от интерфейсного агента, выполняет декомпозицию проблемы на подпроблемы, распределяет их между агентами-специалистами, собирает и оценивает предложенные ими решения проблемы в целом или ее частей, формирует результат работы системы путем выбора одного из предложенных решений проблемы в целом или интеграции решений подпроблем. Агент-специалист, моделируя рассуждения реального специалиста, решает подпроблему или проблему целиком в зависимости от поручений агента, принимающего решения. Агенты этой подсистемы могут создаваться разными разработчиками, что потенциально приводит к различиям и противоречиям их онтологий и целей. Однако благодаря рефлексивному моделированию рассуждений друг друга обеспечивается снижение интенсивности конфликтов и длительности переговоров. В этом смысле рефлексия агентов служит средством координации и синхронизации, позволяющим им для эффективного решения проблемы согласовывать собственные онтологии, цели и варианты протокола решения проблемы по запросу агента-фасилитатора.

### 3 Обобщенная архитектура искусственного интеллектуального агента гетерогенной рефлексивно-активной системы

Архитектура агента — это схема, описывающая состав, структуру и взаимосвязь функций-блоков, реализуемых агентом, обеспечивающая выполнение им своего предназначения, в частности реализацию роли или множества ролей, для которых он проектируется [2]. Для каждой функции-блока указывается метод или алгоритм, реализующий ее. Если таковые отсутствуют, они должны быть разработаны в рамках следующей стадии методологии построения РАСИГИА [12]. Архитектура агента разрабатывается с учетом формальной модели РАСИГИА [2] и самого агента, а также функциональной структуры системы (см. рис. 1).

В соответствии с микроуровневой моделью [2], описывающей состав и структуру искусственного интеллектуального агента гетерогенной рефлексив-



**Рис. 2** Обобщенная архитектура искусственного интеллектуального агента гетерогенной рефлексивно-активной системы

но-активной системы, минимально необходимое множество действий агента может быть представлено следующим образом:

$$ACT^{ag} = ACT_{msg}^{ag} \cup ACT_{inc}^{ag} \cup ACT_{com}^{ag},$$

где  $ACT_{msg}^{ag}$  — множество стандартных для всех агентов служебных действий по получению и передаче сообщений, их интерпретации и составлению;  $ACT_{inc}^{ag}$  — множество действий агента по выполнению своего непосредственного функционала, например перевод сообщений с одного языка передачи сообщений на другой в случае агента-переводчика или отслеживание информации о возможностях агентов агентом-посредником;  $ACT_{com}^{ag}$  — множество допустимых последовательностей действий агента, получаемых в результате корректной интеграции элементарных действий.

Обобщенная архитектура агента, реализующая рассмотренное множество действий, схематически представлена на рис. 2.

Подсистема восприятия отслеживает состояние артефактов во внешней среде агента, которые подразделяются на артефакты РАСИГИА (базовая онтология) и артефакты ее внешней среды. В терминах платформы JaCaMo [16], на которой реализуется РАСИГИА, и ее составной части —

подсистемы CArtAgO — под артефактом понимается функционально-ориентированная вычислительная абстракция, предоставляющая услуги агентам для использования в их основной деятельности [17] посредством множества публично доступных функций и наблюдаемых свойств, на которые может подписаться агент [18]. В случае изменения свойства артефакта, на которое подписан агент, ему отправляется соответствующее оповещение. Оповещения обрабатываются подсистемой восприятия агента, которая при его получении формирует список перцептов (восприятий) и модифицирует базу убеждений агента. Если агенту требуется интерпретировать какой-либо концепт из сообщений других агентов, он может сделать это, используя публичные функции артефакта, реализующего базовую онтологию РАСИГИА.

База убеждений агента — это хранилище представлений агента о своей внешней среде, т.е. о РАСИГИА и ее внешней среде. База убеждений модифицируется либо в результате наблюдения изменений во внешней среде с использованием подсистемы восприятия, либо в результате рассуждений агента и исполнения намерений соответствующим методом. При каждой корректировке базы убеждений генерируется событие, которое может быть внешним, вызванным в результате измене-

ния базы убеждений подсистемой восприятия, или внутренним, порождаемым методом выбора и исполнения намерения (в этом случае фиксируется также намерение, вызвавшее событие). База убеждений реализуется стандартными средствами платформы JaCaMo и ее составной части — подсистемы Jason [19].

Подсистема обмена сообщениями обеспечивает коммуникацию с другими агентами посредством маршрутизатора сообщений. Последний представляет собой подсистему программной платформы JaCaMo, обеспечивающую корректную доставку сообщений их адресатам. При получении сообщения от другого агента подсистема обмена сообщениями помещает его в очередь. В каждом цикле рассуждений агент выбирает первое сообщение из очереди и обрабатывает его. Отправка сообщений другим агентам через маршрутизатор сообщений РАСИГИА выполняется по запросу метода выбора и исполнения намерения, при этом для формирования семантически правильного сообщения используется интерпретатор базовой онтологии. Подсистема обмена сообщениями реализуется стандартными средствами подсистемы Jason платформы JaCaMo, которая поддерживает приоритизацию и фильтрацию.

Интерпретатор базовой онтологии, получая тело сообщения от подсистемы обмена сообщениями, с использованием базовой онтологии выполняет его семантический анализ, формирует события, содержащие сгенерированные в результате анализа программные объекты, и помещает их в очередь. При поступлении запроса от подсистемы обмена сообщениями интерпретатор базовой онтологии генерирует семантически корректное тело сообщения в соответствии с намерением, инициировавшим запрос.

Очередь событий — это буфер, содержащий упорядоченное множество пар «изменение–намерение». В качестве «изменения» может выступать изменение убеждений как в результате восприятия внешней среды (в этом случае вторая часть пары — «намерение» — остается пустой) самим агентом или посредством других агентов, так и в результате выполнения соответствующих «намерений». Порядок следования событий может быть настроен разработчиком агента в зависимости от источника и времени их возникновения.

Метод формирования реакции на событие выбирает из очереди первое ожидающее событие, генерирует релевантное ему намерение с использованием библиотеки планов, помещая последнее в очередь намерений. В соответствии с данным методом из библиотеки планов выбираются все планы, имеющие инициирующее событие, которое

можно объединить с выбранным событием в соответствии с механизмом объединения, принятым подсистемой Jason платформы JaCaMo. Из найденных планов выбираются те, контекстная часть которых соответствует текущим убеждениям агента [19]. Если такие планы не найдены, выбранное событие перемещается в конец очереди для последующей повторной обработки. Если же осталось более одного плана, для дальнейшей обработки выбирается первый в соответствии с порядком, в котором планы записаны в исходном коде агента, иначе выбирается единственный план. Выбранный план становится намерением и помещается в очередь намерений.

Библиотека планов содержит алгоритмы действий агента для реакции на возникающие события в определенной ситуации. План состоит из тела и заголовка, в котором, в свою очередь, выделяются инициирующее событие и контекст, определяющие условия исполнения плана. Иницирующее событие плана описывает множество реальных событий, для которых план должен использоваться. Если инициирующее событие плана соответствует реальному, план считается актуальным и в случае истинности контекста с учетом текущих убеждений агента становится кандидатом на выполнение. Тело плана — это последовательность инструкций (формул), позволяющая успешно обработать событие, инициировавшее план. Инструкции в теле плана могут представлять собой вызов функций на языке Java, в частности, реализующих методы агента по выполнению своего непосредственного функционала, прямые действия по изменению объектов внешней среды или отправке сообщений, а также действия по генерации убеждений или планов.

Блок «методы агента по выполнению своего непосредственного функционала» представляет собой множество функции на языке Java, которые могут быть вызваны из тела плана. В частности, функция может запускать на исполнение РАСИГИА более низкого уровня, для которой агент выступает в качестве «обертки», взаимодействуя с ней через ее интерфейсных агентов и реализуя таким образом принцип иерархичности.

Очередь намерений — упорядоченный список планов, принятых к выполнению и ставших намерениями, или их частей. В общем случае в очереди намерений агента находятся более одного намерения в наборе намерений, каждое из которых конкурирует за «внимание» агента. В каждом цикле рассуждений агентом выполняется одна инструкция (формула) намерения, после чего оно перемещается в конец очереди. В результате организуется псевдопараллельное исполнение всех планов, принятых к исполнению. Очередь намерений реали-

зуется стандартными средствами подсистемы Jason платформы JaCaMo.

Метод выбора и исполнения намерения использует в своей работе стандартную функцию выбора намерения подсистемы Jason, которая поддерживает приоритизацию. Метод выбирает первое намерение в очереди, удаляет его из очереди, выполняет одну его инструкцию. Инструкция может содержать вызов функций на языке Java, действия по изменению объектов внешней среды, отправке сообщений, генерации убеждений или планов. Исполненная инструкция удаляется из состава намерения. Если после этого инструкций не осталось, намерение считается выполненным и удаляется из очереди, в противном случае скорректированное намерение вставляется в ее конец.

Подсистема действия предназначена для изменения состояния артефактов во внешней среде агента с использованием их публично доступных функций.

## 4 Заключение

В работе представлены функциональная структура и обобщенная архитектура агентов РАСИГИА, реализующие основные принципы построения таких систем в соответствии с методологией [12]. В частности, благодаря динамическому составу и разнообразию агентов подсистемы решения проблемы обеспечивается учет неоднородности и изменчивости проблемы. Предложенная типовая архитектура агента реализует такие его свойства, как автономность, активность, реактивность, коммуникативность, рефлексивность, способность к моделированию предметной области и целеполаганию. Агент РАСИГИА может представлять собой систему агентов более низкого уровня, что обеспечивает принцип иерархичности и позволяет рассматривать проблему на разных уровнях представления. Механизмы рефлексивного управления, используемые агентами, обеспечивают гомеостаз системы благодаря согласованию агентами собственных целей, онтологий и протоколов. За счет открытого характера РАСИГИА и механизмов рефлексивного управления в системе возникает самоорганизация агентов в сильном смысле [11], без централизованного управления этим процессом одним из них.

## Литература

1. *Lepskiy V.* Evolution of cybernetics: Philosophical and methodological analysis // *Kybernetes*, 2018. Vol. 47. Iss. 2. P. 249–261. doi: 10.1108/K-03-2017-0120.
2. *Листонад С. В.* Моделирование рефлексивных процессов в коллективах специалистов, решающих проблемы за круглым столом // *Моделирование неравновесных, адаптивных и управляемых систем: Мат-лы XXVI Всеросс. семинара.* — Красноярск: ИВМ СО РАН, 2023. С. 57–66.
3. *Тарасов В. Б.* От многоагентных систем к интеллектуальным организациям: философия, психология, информатика. — М.: Эдиториал УРСС, 2002. 348 с.
4. *Городецкий В. И., Карсаев О. В., Самойлов В. В., Серебряков С. В.* Инструментальные средства для открытых сетей агентов // *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2008. № 3. С. 106–124.
5. *Wooldridge M.* An introduction to multiagent systems. — New York, NY, USA: Wiley, 2009. 484 p.
6. *Левфевр В. А.* Конфликтующие структуры. — М.: Советское радио, 1973. 158 с.
7. *Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Рефлексия и управление: математические модели. — М.: Физматлит, 2012. 412 с.
8. *Kobrinskii B.* Expert reflection in the process of diagnosis of diseases at the extraction of knowledge // 4th Research Conference (International) “Information Technologies in Science, Management, Social Sphere and Medicine” Proceedings. — Advances in computer science research ser. — Shenzhen: Atlantis Press, 2017. Vol. 72. P. 321–323. doi: 10.2991/itsmssm-17.2017.66.
9. *Смирнов И. В., Панов А. И., Скрынник А. А., Чистова Е. В.* Персональный когнитивный ассистент: концепция и принципы работы // *Информатика и её применения*, 2019. Т. 13. Вып. 3. С. 105–113. doi: 10.14357/19922264190315. EDN: QQSTUK.
10. *Мелехин В. Б., Хачумов В. М., Хачумов М. В.* Самообучение автономных интеллектуальных роботов в процессе поисково-исследовательской деятельности // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 78–83. doi: 10.14357/19922264230211. EDN: SOFDKW.
11. *Serugendo G. D. M., Gleizes M.-P., Karageorgos A.* Self-organization in multiagent systems // *Knowl. Eng. Rev.*, 2005. Vol. 20. Iss. 2. P. 165–189. doi: 10.1017/S0269888905000494.
12. *Листонад С. В.* Жизненный цикл методологии построения рефлексивно-активных систем искусственных гетерогенных интеллектуальных агентов // *Информатика и её применения*, 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 84–91. doi: 10.14357/19922264240112. EDN: GUAMVE.
13. *Румовская С. Б., Кириков И. А.* Метод визуального представления конфликтов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // *Информатика и её применения*, 2020. Т. 14. Вып. 4. С. 77–82. doi: 10.14357/19922264200411. EDN: MXQMLK.
14. *Листонад С. В., Кириков И. А.* Метод на основе нечетких правил для управления конфликтами агентов

- в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 66–72. doi: 10.14357/19922264230109. EDN: DCWSOQ.
15. Румовская С. Б. Подходы к подбору специалистов при организации коллективного решения проблем // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 96–103. doi: 10.14357/19922264230214. EDN: VJWNOE.
  16. Boissier O., Bordini R. H., Hubnerand J., Ricci A. Multi-agent oriented programming: Programming multi-agent systems using JaCaMo. — Intelligent robotics and autonomous agents ser. — Cambridge, MA, USA: The MIT Press, 2020. 264 p.
  17. Freitas A., Panisson A. R., Hilgert L. W., Meneguzzi F., Vieira R., Bordini R. H. Integrating ontologies with multi-agent systems through CArtaGO artifacts // IEEE/WIC/ACM Conference (International) on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015. P. 143–150. doi: 10.1109/WI-IAT.2015.116.
  18. Ricci A., Piunti M., Viroli M. Environment programming in multi-agent systems: An artifact-based perspective // Auton. Agent. Multi-Ag., 2011. Vol. 23. Iss. 2. P. 158–192. doi: 10.1007/s10458-010-9140-7.
  19. Bordini R. H., Hübner J. F., Wooldridge M. Programming multi-agent systems in AgentSpeak using Jason. — Chichester: Wiley-Interscience, 2007. 304 p.

Поступила в редакцию 24.06.24

## BASIC ARCHITECTURE OF REFLEXIVE-ACTIVE SYSTEMS OF ARTIFICIAL HETEROGENEOUS INTELLIGENT AGENTS

S. V. Listopad

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The paper is devoted to the development of the basic architecture of reflexive-active systems of artificial heterogeneous intelligent agents including a standard functional structure of the system and a generalized architecture of agents. Due to the combination of heterogeneous agents in the system, it hybridizes various specialists’ knowledge and methods of formal representation of the systems taking into account the instrumental and functional heterogeneity of emerging problems. The reflexive capabilities of agents allow them to model other agents, themselves, and the system as a whole reducing the intensity of conflicts and the duration of building interaction when the composition of the system changes. As a result, self-organization of the system in a strong sense becomes possible during which for each new practical problem, a solution method relevant to it is developed.

**Keywords:** reflection; reflexive-active system of artificial heterogeneous intelligent agents; hybrid intelligent multiagent system; team of specialists

**DOI:** 10.14357/19922264240311

**EDN:** UNTQBV

### Acknowledgments

The work was supported by the Russian Science Foundation, project No. 23-21-00218 (<https://rscf.ru/project/23-21-00218>).

### References

1. Lepskiy, V. 2018. Evolution of cybernetics: Philosophical and methodological analysis. *Kybernetes* 47(2):249–261. doi: 10.1108/K-03-2017-0120.
2. Listopad, S. V. 2023. Modelirovanie reflektivnykh processov v kollektivakh spetsialistov, reshayushchikh problemy za kruglym stolom [Modeling reflexive processes in teams of specialists solving problems at a round table]. *Modelirovanie neravnovesnykh, adaptivnykh i upravlyemykh sistem: Mat-ly XXVI Vseross. seminara* [Modeling of nonequilibrium, adaptive and controlled systems: 26th National Workshop]. Krasnoyarsk: IVM SO RAN. 57–66.
3. Tarasov, V. B. 2002. *Ot mnogoagentnykh sistem k intellektual'nym organizatsiyam: filosofiya, psikhologiya, informatika* [From multiagent systems to intelligent organizations: Philosophy, psychology, and computer science]. Moscow: Editorial URSS. 348 p.
4. Gorodetskii, V. I., O. V. Karsaev, V. V. Samoilov, and S. V. Serebryakov. 2008. Development tools for open agent networks. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 47(3):429–446. doi: 10.1134/S1064230708030131. EDN: LLHPLJ.
5. Wooldridge, M. 2009. *An introduction to multiagent systems*. New York, NY: Wiley. 484 p.
6. Lefebvre, V. A. 1973. *Konfliktuyushchie struktury* [Conflicting structures]. Moscow: Soviet Radio. 158 p.

7. Novikov, D. A., and A. G. Chkhartishvili. 2012. *Refleksiya i upravlenie: matematicheskie modeli* [Reflexion and control: Mathematical models]. Moscow: Fizmstlit. 412 p.
8. Kobrinskii, B. 2017. Expert reflection in the process of diagnosis of diseases at the extraction of knowledge. *4th Research Conference (International) "Information Technologies in Science, Management, Social Sphere and Medicine" Proceedings*. Advances in computer science research ser. Shenzhen: Atlantis Press. 72:321–323. doi: 10.2991/itsmssm-17.2017.66.
9. Smirnov, I. V., A. I. Panov, A. A. Skrynnik, and E. V. Chistova. 2019. Personal'nyy kognitivnyy assistent: kontseptsiya i printsiipy raboty [Personal cognitive assistant: Concept and key principals]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(3):105–113. doi: 10.14357/19922264190315. EDN: QQSTUK.
10. Melekhin, V. B., V. M. Khachumov, and M. V. Khachumov. 2023. Samoobucheniye avtonomnykh intellektual'nykh robotov v protsesse poiskovo-issledovatel'skoy deyatel'nosti [Self-learning of autonomous intelligent robots in the process of search and explore activities]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):78–83. doi: 10.14357/19922264230211. EDN: SOFDKW.
11. Serugendo, G. D. M., M.-P. Gleizes, and A. Karageorgos. 2005. Self-organization in multiagent systems. *Knowl. Eng. Rev.* 20(2):165–189. doi: 10.1017/S0269888905000494.
12. Listopad, S. V. 2024. Zhiznennyy tsikl metodologii postroeniya reflektivno-aktivnykh sistem iskusstvennykh heterogennykh intellektual'nykh agentov [Life cycle of methodology for constructing reflexive-active systems of artificial heterogeneous intelligent agents]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(1):84–91. doi: 10.14357/19922264240112. EDN: GUAMVE.
13. Rumovskaya, S. B., and I. A. Kirikov. 2020. Metod vizual'nogo predstavleniya konfliktov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Conflict visual representation method in hybrid intelligent multiagent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(4):77–82. doi: 10.14357/19922264200411. EDN: MXQMLK.
14. Listopad, S. V., and I. A. Kirikov. 2023. Metod na osnove nechetkikh pravil dlya upravleniya konfliktami agentov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Fuzzy rules based method for agent conflict management in hybrid intelligent multiagent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(1):66–72. doi: 10.14357/19922264230109. EDN: DCWSOQ.
15. Rumovskaya, S. B. 2023. Podkhody k podboru spetsialistov pri organizatsii kollektivnogo resheniya problem [Selection of specialists in the organization of collective solving problems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):96–103. doi: 10.14357/19922264230214. EDN: VJWNOE.
16. Boissier, O., R. H. Bordini, J. Hubnerand, and A. Ricci. 2020. *Multi-agent oriented programming: Programming multi-agent systems using JaCaMo*. Intelligent robotics and autonomous agents ser. Cambridge, MA: The MIT Press. 264 p.
17. Freitas, A., A. R. Panisson, L. Hilgert, F. Meneguzzi, R. Vieira and R. H. Bordini. 2015. Integrating ontologies with multi-agent systems through CArTAgo artifacts. *IEEE/WIC/ACM International Conference on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology Proceedings*. 143–150. doi: 10.1109/WI-IAT.2015.116.
18. Ricci, A., M. Piunti, and M. Viroli. 2011. Environment programming in multi-agent systems: An artifact-based perspective. *Auton. Agent. Multi-Ag.* 23(2):158–192. doi: 10.1007/s10458-010-9140-7.
19. Bordini, R. H., J. F. Hьbner, and M. Wooldridge. 2007. *Programming multi-agent systems in AgentSpeak using Jason*. Chichester: Wiley-Interscience. 304 p.

Received June 24, 2024

## Contributor

**Listopad Sergey V.** (b. 1984) — Candidate of Science (PhD) in technology, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; ser-list-post@yandex.ru



# МОДЕЛЬ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ЗНАНИЯ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕКСТОВ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ\*

Д. О. Добровольский<sup>1</sup>, И. М. Зацман<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматривается проблемно-ориентированная модель извлечения языкового знания из параллельных текстов как ключевой теоретический компонент концепции лексикографической информационной системы (ЛГИС), обеспечивающей интеграцию электронных двуязычных словарей и параллельных корпусов. Предлагаемый подход к решению проблемы интеграции учитывает появление новых значений слов и устойчивых словосочетаний, которое обусловлено приобретением нового знания экспертами, фиксирующими эти значения, в результате семантического анализа регулярно пополняемых корпусных текстовых данных. Предлагаемая модель описывает взаимодействие компьютерных и экспертных процессов, в том числе поиск фрагментов параллельных текстов как потенциальных источников нового языкового знания, его извлечение экспертами из текстов и представление в ЛГИС. Основанием для построения проблемно-ориентированной модели служит спиральная модель генерации знания, которую в 1991 г. предложил Икуджиро Нонака. Цель статьи состоит в описании стадий построения модели извлечения языкового знания, используемой при проектировании ЛГИС.

**Ключевые слова:** лексикографическая информационная система; параллельные тексты; спиральная модель генерации знания; проблемно-ориентированная модель

DOI: 10.14357/19922264240312

EDN: NDNPCF

## 1 Введение

Лексикографическая информационная система, проектируемая в ФИЦ ИУ РАН, предназначена для решения актуальной, но нерешенной проблемы интеграции электронных двуязычных словарей и параллельных корпусов, учитывающей регулярное пополнение корпусов новыми текстовыми данными. Этап создания концепции этой системы предполагает решение комплекса вопросов, одни из которых относятся к лингвистике, другие — к информатике. Ключевым теоретическим компонентом концепции ЛГИС служит проблемно-ориентированная модель информатики поэтапного извлечения языкового знания из параллельных текстов.

Теоретическим основанием ее построения в данной статье служит спиральная модель генерации знания, которую в 1991 г. предложил Икуджиро Нонака [1]. В спиральной модели определены две категории знания: явное (explicit) и неявное (tacit). В каждой из них знание делится на индивидуальное и коллективное. Таким образом, в этой модели определены четыре вида знания (индивидуальное явное и неявное, коллективное явное и неявное).

В модели также определены четыре экспертных процесса преобразования этих четырех видов знания [2].

Для решения проблемы интеграции электронных двуязычных словарей и параллельных корпусов в спиральную модель генерации знания необходимо добавить цифровую среду компьютерных кодов для хранения и обработки текстов электронных словарей и корпусов. Как будет показано ниже, ее добавление происходит на одной из первых стадий построения проблемно-ориентированной модели извлечения языкового знания. Описанию этой и других стадий построения такой модели и посвящена данная статья.

## 2 Исходные данные

В процессе построения проблемно-ориентированной модели учитывались следующие исходные данные, сформулированные лингвистами. Во-первых, реальные употребления лексических единиц в текстах параллельного корпуса во всем их смысле многообразии в проектируемой системе необходимо сопоставить с релевантными элементами

\* Исследование выполнено в ФИЦ ИУ РАН за счет гранта Российского научного фонда № 24-18-00155, <https://rscf.ru/project/24-18-00155>, с использованием с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

<sup>1</sup> Институт русского языка Российской академии наук; Институт языкознания Российской академии наук; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, dm-dbrv@yandex.ru.

<sup>2</sup> Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, izatsman@yandex.ru

словарных статей двуязычного словаря. Центральной оказывается при этом проблема многозначности лексических единиц. Если слова и устойчивые словосочетания (далее — фраземы), обладающие только одним значением, позволяют постулировать связь между элементом словарной статьи и релевантными корпусными примерами на уровне леммы, то все многозначные лексические единицы требуют соотнесения корпусных данных со словарной информацией на уровне конкретных значений таких лексических единиц [3, 4]. Игнорирование многозначности дает результаты, неудовлетворительные с точки зрения современных представлений об эффективности ресурсов, предполагающих интеграцию словарной информации с корпусными данными.

Безусловно, даже не учитывающие многозначность информационные ресурсы оказываются полезными для эмпирически ориентированных лингвистических исследований, но предоставляемые ими данные требуют от пользователя большой и сложной дополнительной работы. Так, например, устроен проект Берлинско-Бранденбургской академии наук DWDS (Digitales Wörterbuch der deutschen Sprache) [<https://www.dwds.de>]<sup>1</sup>. Этот ресурс предполагает возможность перехода от леммы словарной статьи к примерам из разных корпусов, интегрированных в структуру ресурса, однако система не позволяет найти примеры, иллюстрирующие конкретное значение данного слова. Этим DWDS принципиально отличается от результатов, которые ожидается получить в ходе проектирования ЛГИС. Еще одно важное отличие — ориентированность DWDS на один язык, а не на пару языков, как в проектируемой системе.

Во-вторых, авторы двуязычных словарей уже давно используют параллельные корпуса для сбора материала и эмпирической проверки своих гипотез, касающихся межязыковой эквивалентности. Ценность параллельных корпусов определяется тем, что в лингвистике этап сбора исходного материала считается наиболее трудоемким и наименее творческим, а параллельные корпуса позволяют значительно сэкономить время и силы для творческого этапа создания словарей [6, 7].

При этом онлайн-связи созданных двуязычных словарей с параллельными корпусами, которые служили источниками исходного материала, в настоящее время отсутствуют. Параллельные корпуса постоянно пополняются новыми текстами, в которых можно обнаружить новые значения слов и фразем. Однако при этом отсутствуют методы и средства оперативного обновления словарей по

корпусным данным. В настоящее время проблема установления связей между электронными двуязычными словарями и параллельными корпусами (далее — проблема интеграции) находится на стадии поиска концептуальных подходов к их интеграции на уровне значений.

В-третьих, эксперименты, проведенные с использованием ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН, показали, что обнаружение нового языкового знания обуславливает и формирование дефиниций новых значений слов и фразем, и пересмотр уже существующих дефиниций [8, 9].

Таким образом, в процессе построения проблемно-ориентированной модели извлечения языкового знания из текстов параллельных корпусов учитываются:

- потенциальная многозначность лексических единиц;
- необходимость установления онлайн-связей электронных двуязычных словарей с текстами параллельных корпусов;
- обнаружение экспертами нового языкового знания, формирование ими дефиниций новых значений слов и фразем, а также пересмотр уже существующих дефиниций.

### 3 Стадии построения проблемно-ориентированной модели

В работе [10] соотнесены базовые понятия информатики, включенные в иерархию Акоффа [11] (данные, информация, знание), с объектами проектируемой ЛГИС. В интересах описания процессов извлечения из текстов параллельных корпусов новых значений исследуемых языковых единиц в статье различаются два вида объектов этой системы, относящихся в иерархии Акоффа к понятию «данные»: *сенсорно воспринимаемые* и *цифровые*, а также два вида объектов, относящихся в ней к понятию «информация»: *сенсорно воспринимаемая* и *цифровая*. В системе кроме знания рассматриваются еще два ментальных объекта. Во-первых, это *концепты* слов, так как одно и то же знание в разных языках членится на значения (концептуальные единицы), как правило, по-разному. Во-вторых, это ментальные образы сенсорно воспринимаемых текстовых данных, на основе которых и формируется знание в процессе их интерпретации (далее — *ментальные данные*) [12]. Таким образом,

<sup>1</sup>Об общих принципах построения этого ресурса см. [5].



Рис. 1 Спиральная модель [1] (эта диаграмма взята из работы [13])

последние служат промежуточной сущностью между сенсорно воспринимаемыми данными и знанием, извлекаемым из текстов параллельных корпусов ЛГИС. Выполненная детализация базовых понятий информатики позволила систематизировать взаимные трансформации перечисленных объектов проектируемой системы [10].

Используя результаты детализации и систематизации, опишем шесть стадий построения проблемно-ориентированной модели на основе спиральной модели (рис. 1). Отметим, что в результате первых трех стадий получается абстрактная модель извлечения знания, которая, как и спиральная модель, не зависит от решаемой проблемы и предметной области. Эта абстрактная модель ранее получила название *цифровой спиральной модели* [14].

Как было отмечено выше, в спиральной модели, на основе которой строится ее цифровая версия, определены четыре вида знания, а также четыре процесса их преобразования, выполняемых экспертами: социализация–экстернализация–сочетание–интернализация (Socialization–Externalization–Combination–Internalization, далее кратко — SECI). По определению этой модели, каждый виток спирали генерации знания включает в себя последовательность следующих процессов: социализация → экстернализация → сочетание → интернализация → социализация (как начало следующего витка спирали).

Согласно К. Братиану [15], спиральная модель (= модель SECI) не содержит время в явном виде

в качестве переменной. Модель содержит время неявно, поскольку для любого преобразования оно требуется, но это абстрактное время без какой-либо возможности его измерения<sup>1</sup>.

### 3.1 Цифровая спиральная модель: три стадии построения

**Стадия 1.** В классическую спиральную модель [1] добавим моменты времени начала и завершения каждого процесса витка спирали. Это даст возможность фиксировать динамику извлечения знания. На этой же стадии построения вносятся следующее изменение в систему терминов: явное знание спиральной модели и та информация, которая является представлением неявного знания (если эксперты смогли это сделать) и которая может быть воспринята органами чувств, считаются *синонимами*.

**Стадия 2.** Повернем рис. 1 на 90 градусов по часовой стрелке и добавим следующие пять понятий (рис. 2):

- *ментальная среда*, которая включает в себя неявные знания спиральной модели;
- *сенсорно воспринимаемая среда* (кратко — информационная среда), которая включает в себя явные знания (= сенсорно воспринимаемая информация) спиральной модели;
- *цифровая среда* компьютерных кодов;

<sup>1</sup> В статье К. Братиану для спиральной модели используется второе ее название, SECI model: “The SECI model does not contain *time* as an explicit variable. [...] The model contains time implicitly since any transformation needs time, but it is a generic time without any possibility of measuring it” [15, p. 186].

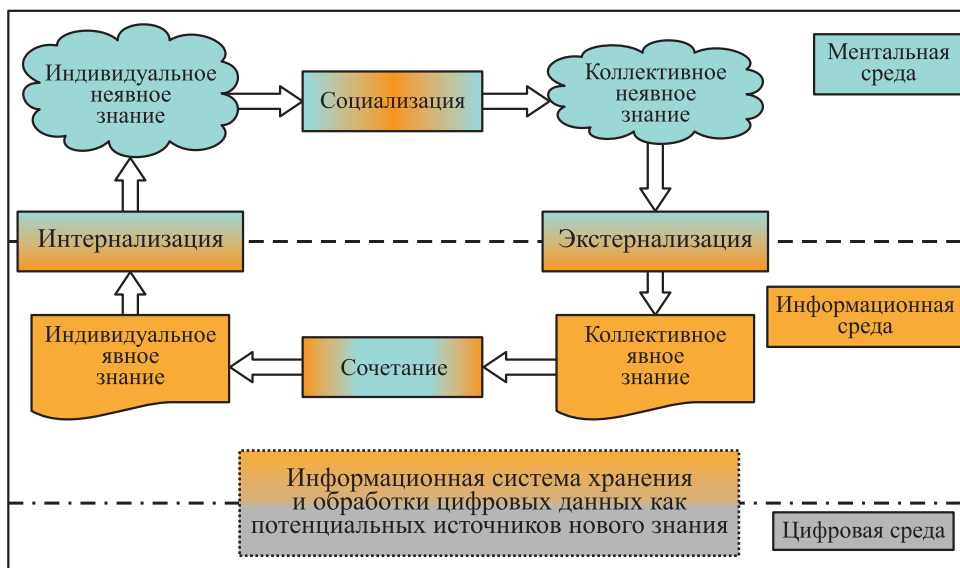


Рис. 2 Три среды и две границы между ними (моменты времени начала и завершения процессов не указаны)

- *верхняя граница*, на которой происходит преобразование неявного знания в сенсорно воспринимаемую информацию;
- *нижняя граница*, на которой сенсорно воспринимаемые данные и информация кодируются в компьютерах и происходит декодирование.

Эти две границы разделяют сущности второго этапа построения на три категории: *ментальная* для неявного знания, *информационная* для сенсорно воспринимаемого явного знания и *цифровая* для компьютерных кодов. На этой же стадии определим положение четырех процессов преобразования видов знания спиральной модели следующим образом. Процессы интернализации и экстернализации начинаются и заканчиваются в разных средах. Поэтому поместим их на границе между ментальной и информационной средами (см. рис. 2).

Процесс социализации разместим в ментальной среде, так как его начальный и конечный виды знания относятся к ней. По этой же причине процесс сочетания разместим в информационной среде. Такое размещение процессов в этих средах соответствует именно начальному и конечному видам знания без учета видов знания, которые служат *промежуточными* в этих процессах (см. рис. 2).

**Стадия 3.** На этой стадии спиральная модель объединяется с моделью информационной системы хранения и обработки цифровых данных как потенциальных источников нового знания, и в результате получается цифровая спиральная модель. На этой же стадии постулируется, что в общем случае эта

система включает следующие компоненты. Во-первых, она должна содержать цифровые потенциальные источники нового знания, которое извлекается экспертами в процессе их последующего семантического анализа. Во-вторых, она имеет в своем составе базу индивидуальных знаний (БИЗ), которая заполняется экспертами персонально, и базу коллективных знаний (БКЗ)<sup>1</sup>, которая заполняется экспертами в результате согласования концептов их индивидуального извлеченного знания (рис. 3).

В ЛГИС фиксируется состав экспертов, согласовавших свои концепты. Другими словами, для любого коллективного концепта известен перечень договорившихся между собой экспертов о его дефиниции. И, в-третьих, она *в общем случае* включает базу искусственных нейронных сетей (БИНС), для обучения которых процессам извлечения нового знания из данных большого объема используется БКЗ (см. рис. 3). Однако необходимость использования БИНС в информационной системе хранения и обработки цифровых данных решается на последующих стадиях построения модели исходя из конкретной решаемой задачи.

На рис. 3 показана цифровая спиральная модель, полученная после завершения трех стадий ее построения на основе ее классической версии [1, 2]. У этих двух спиральных моделей (классической и цифровой) есть три общих свойства. Во-первых, они практически не зависят от предметной области, в которой необходимо генерировать новые знания. Во-вторых, в них различается индивидуальное и коллективное знание. И, в-третьих, эти

<sup>1</sup> Базы индивидуальных и коллективных знаний планируется разделять только на концептуальном и логическом этапах проектирования ЛГИС. Физически это будет одна база с разделением в ней индивидуального и коллективного знания.

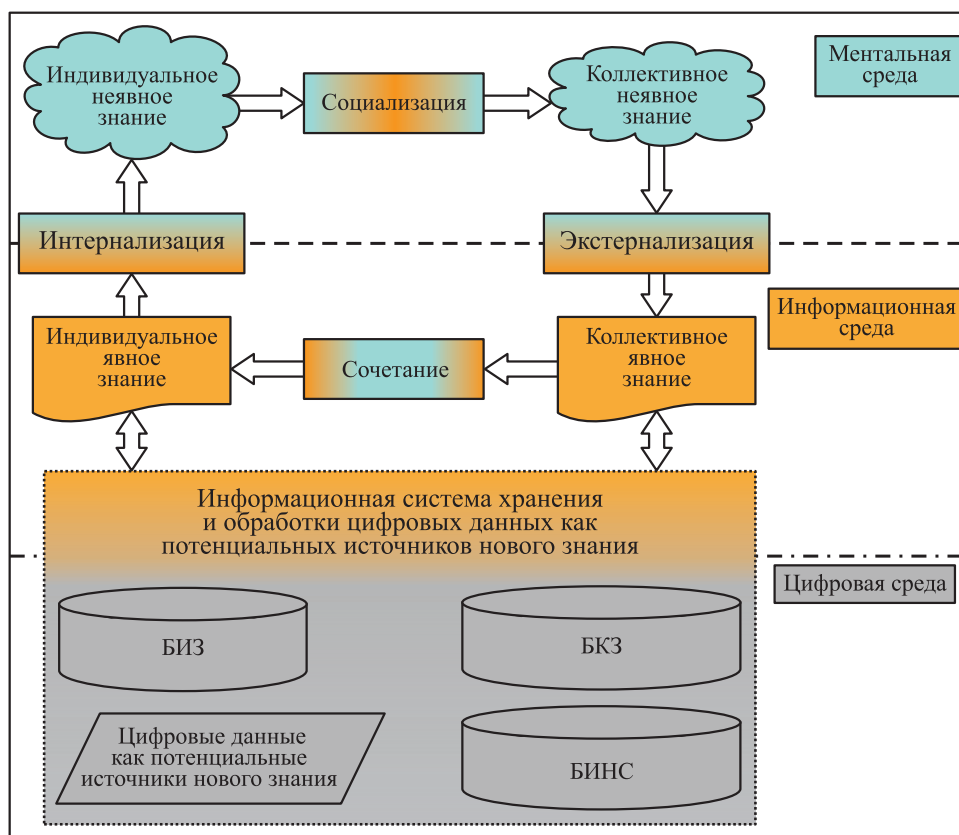


Рис. 3 Цифровая спиральная модель

модели имеют в своем составе процесс социализации индивидуального знания, сформированного одним экспертом, т.е. генерацию коллективного знания группой экспертов, а также процесс экстернализации неявного знания.

### 3.2 Проблемно-ориентированная модель: три стадии построения

Основой проектирования ЛГИС служит проблемно-ориентированная модель, построение которой выполняется в три стадии на основе цифровой спиральной модели (с четвертой по шестую).

**Стадия 4.** Цифровая спиральная модель предполагает наличие цифровых данных как потенциальных источников нового знания, необходимых для решения поставленной задачи, но не содержит их конкретного описания. Построение проблемно-ориентированной модели начинается на этой стадии с описания конкретного массива цифровых данных, включающего исследуемые языковые единицы и их контексты. В проектируемой системе используется массив немецко-русских параллельных текстов из Национального корпуса русского языка, который в настоящее время служит одним из наиболее полных и регулярно пополняемых ис-

точников нового языкового знания для решаемой проблемы интеграции.

На этой же стадии в модель извлечения знания в ЛГИС добавляются немецкий и русский языки, используемые в проектируемой системе. В последующих версиях системы возможно увеличение числа или изменение набора используемых языков.

В ЛГИС новое знание извлекается только экспертами. Поэтому для построения проблемно-ориентированной модели нет необходимости в БИНС, которая не используется в ЛГИС. На этой же стадии фиксируются те процессы модели, в которых используются вербальные знаковые системы (отмечены зеленым цветом на рис. 4).

**Стадия 5.** Любая компьютерная система предполагает использование таблиц кодирования символов. Поэтому проблемно-ориентированная модель должна включать в себя два следующих процесса: оцифровку для кодирования и визуализацию для декодирования (см. рис. 4). Добавление этих процессов происходит на пятой стадии ее построения.

**Стадия 6.** Чтобы извлекать новые знания из текстовых данных, проблемно-ориентированная модель должна включать в себя еще четыре процесса: поиск контекстов исследуемой языковой еди-

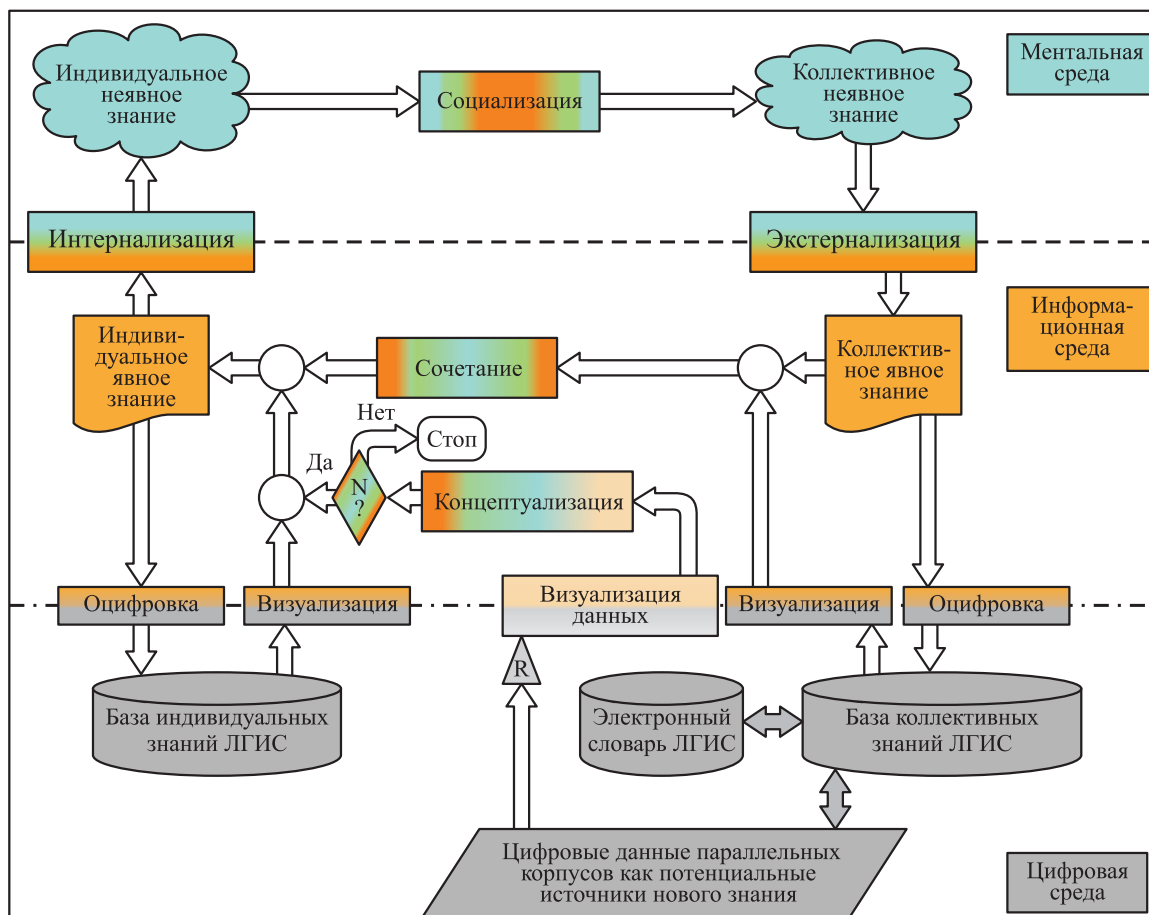


Рис. 4 Проблемно-ориентированная модель извлечения знания в ЛГИС

ницы в цифровых данных параллельного корпуса как потенциальных источников нового знания (процесс поиска обозначен треугольником с буквой R на рис. 4), *визуализация* цифровых данных (т.е. декодирование текстовых данных параллельного корпуса, которые хранятся в ЛГИС в цифровой форме, что обозначено прямоугольником со словами «визуализация данных»), *концептуализация* (после визуализации цифровых данных) и *определение новизны* концепта, т.е. извлеченного значения исследуемой языковой единицы, сформированного экспертом в процессе семантического анализа найденных цифровых данных (процесс определения новизны обозначен ромбом с буквой N и вопросительным знаком на рис. 4). Отметим, что процесс визуализации цифровых данных отличается от двух смежных процессов визуализации: первый визуализирует текстовые данные параллельного корпуса, а смежные с ним процессы визуализации декодируют информацию из БИЗ и БКЗ.

На двух последних процессах остановимся подробнее. После визуализации цифровых данных каждого текстового фрагмента с контекстом ис-

следуемой языковой единицы, найденного в корпусе, эксперт анализирует его, чтобы определить, с каким значением этой единицы (из тех, что есть в электронном словаре) соотносить ее употребление в анализируемом контексте. Если в словаре уже есть такое значение, то оно не признается новым для словаря (см. скругленный прямоугольник со словом «Стоп» на рис. 4, обозначающий завершение обработки только этого фрагмента, а не всего процесса извлечения знания).

Эксперт может обнаружить в текстовом фрагменте новое значение исследуемой языковой единицы, которого нет в словаре. Если обнаружено новое значение (см. слово «да» на рис. 4), то сначала эксперт формирует его дефиницию, которая вместе с фрагментом передается на вход процесса интернализации. Одновременно она оцифровывается и записывается этим экспертом в базу индивидуальных знаний ЛГИС, а дефиниция, согласованная в процессе обсуждения нового значения, оцифровывается и записывается в БКЗ и электронный словарь ЛГИС. При этом сохраняется связь дефиниции нового значения исследуемой языковой

единицы с тем текстовым фрагментом параллельного корпуса, из которого оно было извлечено. Связи по значениям между словарем, БКЗ и параллельным корпусом обозначены на рис. 4 двойными серыми стрелками. Связь процесса определения новизны со словарем не показана, чтобы не усложнять рис. 4. Отметим, что от процесса интернализации до процесса сочетания включительно четыре процесса проблемно-ориентированной модели совпадают с классической спиральной моделью [1, 2]. По этой причине эти четыре процесса в статье не рассматриваются.

Процессы определения новизны и концептуализации выполняются на границе между ментальной и информационной средами с использованием знаковых систем (отмечены в этих процессах зеленым цветом). Эти процессы помещены в информационную среду. Такое размещение именно в этой среде обусловлено тем, что к ней относятся начальный и конечный объекты этих процессов.

Таким образом, добавление четырех процессов (поиск, визуализация цифровых данных, концептуализация и определение новизны) становится шестой и завершающей стадией построения проблемно-ориентированной модели.

## 4 Заключение

В результате первых трех стадий построения получается довольно абстрактная модель, которая, как и классическая спиральная модель, не зависит от решаемой проблемы и предметной области, что дает возможность отнести ее к теоретическому ядру информатики. В результате последующих трех стадий получается проблемно-ориентированная модель, нацеленная на решение конкретной задачи.

В статье такой задачей выступает проектирование ЛГИС для решения актуальной проблемы интеграции электронных двуязычных словарей и параллельных корпусов. Предлагаемый подход к интеграции словаря и корпуса условно обозначен в модели на рис. 4 двойными серыми стрелками. Словарь и корпус связаны не напрямую, а через БКЗ. Если словарь содержит только последнюю версию дефиниции значения исследуемой языковой единицы, то в базе хранятся еще и предыдущие варианты описания ее значения, что дает возможность исследовать динамику лингвистического знания [16].

Интеграция электронных двуязычных словарей и параллельных корпусов имеет большое значение для развития современной лингвистики. Для современного состояния исследований характерен пере-

ход от моделей, ориентированных на общие правила, работающие в «идеальных условиях», к учету и объяснению всего многообразия способов реального употребления языка (empirical turn). Отсюда следует, что и словарные описания, традиционно игнорирующие «маргинальные случаи», перестраиваются на представление лексического материала, полученное на основе подходов, основанных на реальном употреблении языка (usage-based approaches). С этой точки зрения ЛГИС, интегрирующая словарные описания с корпусными данными, — это новый шаг в выработке современных способов представления знания о языке. Особенно новым представляется учет многозначности описываемых языковых единиц и выход за пределы какого-то одного конкретного языка. Сопоставление данных двух разных языков (в данном случае немецкого и русского) как на уровне словарного представления, так и на уровне корпусного материала — существенный шаг вперед по сравнению с имеющимися на сегодня отечественными и зарубежными исследованиями в этой области.

## Литература

1. Nonaka I. The knowledge-creating company // Harvard Bus. Rev., 1991. Vol. 69. No. 6. P. 96–104.
2. Нонака И., Такеучи Х. Компания — создатель знания / Пер. с англ. — М.: Олимп-бизнес, 2003. 384 с. (Nonaka I., Takeuchi H. The knowledge-creating company. — Oxford, NY, USA: Oxford University Press, 1995. 284 p.)
3. Добровольский Д. О., Зализняк Анна А. Немецкие конструкции с модальными глаголами и их русские соответствия: проект надкорпусной базы данных // Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии: По мат-лам Междунар. конф. «Диалог». — М.: РГГУ, 2018. Вып. 17(24). С. 172–184.
4. Зацман И. М. Проблемно-ориентированная актуализация словарных статей двуязычных словарей и медицинской терминологии: сопоставительный анализ // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 1. С. 94–101. doi: 10.14357/19922264210113. EDN: DMCMSK.
5. Klein W., Geyken A. Das Digitale Wörterbuch der Deutschen Sprache (DWDS) // Lexicographica, 2010. Vol. 26. No. 2010. P. 79–96. doi: 10.1515/9783110223231.1.79.
6. Добровольский Д. О. Корпус параллельных текстов и сопоставительная лексикология // Труды Института русского языка им. В. В. Виноградова, 2015. Вып. 6. С. 413–449. EDN: VJQBHP.
7. Гончаров А. А. Аннотирование параллельных корпусов: подходы и направления развития // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 81–87. doi: 10.14357/19922264230411. EDN: GDKDOZ.
8. Гончаров А. А., Зацман И. М., Кружков М. Г. Эволюция классификаций в надкорпусных базах дан-

- ных // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 4. С. 108–116. doi: 10.14357/19922264200415. EDN: GKWBZT.
9. Гончаров А. А., Зацман И. М., Кружков М. Г. Представление новых лексикографических знаний в динамических классификационных системах // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 1. С. 86–93. doi: 10.14357/19922264210112. EDN: OPEFXW.
10. Зацман И. М. Трансформации объектов первого и второго порядка в лексикографической информационной системе // Информатика и её применения, 2024. Т. 18. Вып. 2. С. 82–91. doi: 10.14357/19922264240211. EDN: VZTGVV.
11. Ackoff R. From data to wisdom // J. Applied Systems Analysis, 1989. Vol. 16. P. 3–9.
12. Зацман И. М. Данные, информация и знание в научной парадигме информатики // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 116–125. doi: 10.14357/19922264230115. EDN: CWIROJ.
13. Wierzbicki A., Nakamori Y. Basic dimensions of creative space // Creative space: Models of creative processes for knowledge civilization age / Eds. A. Wierzbicki, Y. Nakamori. — Heidelberg: Springer Verlag, 2006. P. 59–90.
14. Zatsman I. Digital spiral model of knowledge creation and encoding its dynamics // 18th Forum (International) on Knowledge Asset Dynamics Proceedings. — Matera, Italy: Arts for Business Institute, 2023. P. 581–596. [https://www.researchgate.net/publication/371303696\\_Digital\\_Spiral\\_Model\\_of\\_Knowledge\\_Creation\\_and\\_Encoding\\_its\\_Dynamics](https://www.researchgate.net/publication/371303696_Digital_Spiral_Model_of_Knowledge_Creation_and_Encoding_its_Dynamics).
15. Bratianu C. A strategic view on the knowledge dynamics models used in knowledge management // 20th European Conference on Knowledge Management Proceedings. — Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd., 2019. Vol. 1. P. 185–192.
16. Гончаров А. А., Зацман И. М., Кружков М. Г., Лоцилова Е. Ю. Отражение эволюции лексикографических знаний в динамических классификационных системах // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 41–49. doi: 10.14357/19922264210406. EDN: MGORMY.

Поступила в редакцию 13.07.24

## A MODEL FOR EXTRACTING KNOWLEDGE FROM PARALLEL TEXTS OF A LEXICOGRAPHIC INFORMATION SYSTEM

D. O. Dobrovol'skij<sup>1,2,3</sup> and I. M. Zatsman<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Vinogradov Russian Language Institute of the Russian Academy of Sciences, 18/2 Volkhonka Str., Moscow 119019, Russian Federation

<sup>2</sup>Institute of Linguistics of the Russian Academy of Sciences, 1-1 Bolshoy Kislovsky Lane, Moscow 125009, Russian Federation

<sup>3</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The problem-oriented model of extracting linguistic knowledge from parallel texts is considered to be a key theoretical component for creating a lexicographic information system that provides integration of electronic bilingual dictionaries and parallel corpora. The proposed approach to solving the integration problem takes into account the emergence of new meanings of words and phrasemes which is due to the acquisition of new knowledge by experts who discover these meanings as a result of semantic analysis of regularly updated corpus data. The proposed model describes the human–computer interaction including the search for fragments of parallel texts as potential sources of new linguistic knowledge, its extracting by experts from texts, and representation in the lexicographic information system. The basis for building the problem-oriented model is the spiral model of knowledge generation which was proposed by Ikujiro Nonaka in 1991. The purpose of the paper is to describe the stages of building the model for discovering linguistic knowledge used in the lexicographic information system design.

**Keywords:** lexicographic information system; parallel texts; spiral model of knowledge generation; problem-oriented model

**DOI:** 10.14357/19922264240312

**EDN:** NDNPCF

### Acknowledgments

The study was funded by the Russian Science Foundation, project No. 24-18-00155, <https://rscf.ru/project/24-18-00155>. The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (СКР “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).



## References

1. Nonaka, I. 1991. The knowledge-creating company. *Harvard Bus. Rev.* 69(6):96–104.
2. Nonaka, I., and H. Takeuchi. 1995. *The knowledge-creating company*. Oxford, NY: Oxford University Press. 284 p.
3. Dobrovolskiy, D. O., and Anna A. Zaluzniak. 2018. Nemetskie konstruktivnyye modal'nyye glagoly i ikh russkie sootvetstviya: proekt nadkorporatsionnoy bazy dannykh [German constructions with modal verbs and their Russian correlates: A supracorpora database project]. *Computer Linguistic and Intellectual Technologies: Conference (International) "Dialog" Proceedings*. Moscow: Russian State University for the Humanities. 17(24):172–184.
4. Zatsman, I. M. 2021. Problemno-oriyentirovannaya aktualizatsiya slovarnykh statey dvuyazychnykh slovarey i meditsinskoy terminologii: sopolozhnyy analiz [Problem-oriented updating of dictionary entries of bilingual dictionaries and medical terminology: Comparative analysis]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(1):94–101. doi: 10.14357/19922264210113. EDN: DMCMSK.
5. Klein, W., and A. Geyken. 2010. Das Digitale Wörterbuch der Deutschen Sprache (DWDS). *Lexicographica* 26(2010):79–96. doi: 10.1515/9783110223231.1.79.
6. Dobrovolskiy, D. O. 2015. Korpus parallel'nykh tekstv i sopolozhnyy leksikologiya [The corpus of parallel texts and contrastive lexicology]. *Trudy Instituta russkogo yazyka im. V. V. Vinogradova* [Proceedings of the V. V. Vinogradov Russian Language Institute] 6:413–449. EDN: VJQBHP.
7. Goncharov, A. A. 2023. Annotirovanie parallel'nykh korpusov: podkhody i napravleniya razvitiya [Parallel corpus annotation: Approaches and directions for development]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):81–87. doi: 10.14357/19922264230411. EDN: GDKDOZ.
8. Goncharov, A. A., I. M. Zatsman, and M. G. Kruzhkov. 2020. Evolyutsiya klassifikatsiy v nadkorporatsionnykh bazakh dannykh [Evolution of classifications in supracorpora databases]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(4):108–116. doi: 10.14357/19922264200415. EDN: GKWBZT.
9. Goncharov, A. A., I. M. Zatsman, and M. G. Kruzhkov. 2021. Predstavlenie novykh leksikograficheskikh znaniy v dinamicheskikh klassifikatsionnykh sistemakh [Representation of new lexicographical knowledge in dynamic classification systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(1):86–93. doi: 10.14357/19922264210112. EDN: OPEFXW.
10. Zatsman, I. M. 2024. Transformatsii ob"ektov pervogo i vtorogo poryadka v leksikograficheskoy informatsionnoy sisteme [Object transformations of the first and second order in a lexicographic information system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 18(2):82–91. doi: 10.14357/19922264240211. EDN: VZTGVV.
11. Ackoff, R. 1989. From data to wisdom. *J. Applied Systems Analysis* 16(1):3–9.
12. Zatsman, I. M. 2023. Dannye, informatsiya i znanie v nauchnoy paradigme informatiki [On the scientific paradigm of informatics: Data, information, and knowledge]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(1):116–125. doi: 10.14357/19922264230115. EDN: CWIROJ.
13. Wierzbicki, A. P., and Y. Nakamori. 2006. Basic dimensions of creative space. *Creative space: Models of creative processes for knowledge civilization age*. Eds. A. P. Wierzbicki and Y. Nakamori. Berlin: Springer Verlag. 59–90.
14. Zatsman, I. 2023. Digital spiral model of knowledge creation and encoding its dynamics. *18th Forum (International) on Knowledge Asset Dynamics Proceedings*. Matera, Italy: Arts for Business Institute. 581–596. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/371303696\\_Digital\\_Spiral\\_Model\\_of\\_Knowledge\\_Creation\\_and\\_Encoding\\_its\\_Dynamics](https://www.researchgate.net/publication/371303696_Digital_Spiral_Model_of_Knowledge_Creation_and_Encoding_its_Dynamics) (accessed July 30, 2024).
15. Bratianu, C. 2019. A strategic view on the knowledge dynamics models used in knowledge management. *20th European Conference on Knowledge Management Proceedings*. Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd. 1:185–192.
16. Goncharov, A. A., I. M. Zatsman, M. G. Kruzhkov, and E. Yu. Loshchilova. 2021. Otrazhenie evolyutsii leksikograficheskikh znaniy v dinamicheskikh klassifikatsionnykh sistemakh [Capturing evolution of lexicographic knowledge in dynamic classification systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(4):41–49. doi: 10.14357/19922264210406. EDN: MGORMY.

Received July 13, 2024

## Contributors

**Dobrovolskiy Dmitriy O.** (b. 1953) — Doctor of Science in philology, principal scientist, Vinogradov Russian Language Institute of the Russian Academy of Sciences, 18/2 Volkhonka Str., Moscow 119019, Russian Federation; principal scientist, Institute of Linguistics of the Russian Academy of Sciences, 1-1 Bolshoy Kislovsky Lane, Moscow 125009, Russian Federation; principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; dm-dbrv@yandex.ru

**Zatsman Igor M.** (b. 1952) — Doctor of Science in technology, head of department, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; izatsman@yandex.ru

# ПРИНЦИПЫ АННОТИРОВАНИЯ ИМПЛИЦИТНЫХ ЛОГИКО-СЕМАНТИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕКСТАХ\*

А. А. Гончаров<sup>1</sup>, П. В. Ярошенко<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматривается проблема аннотирования имплицитных логико-семантических отношений (ЛСО). Проанализирован мировой опыт аннотирования имплицитных ЛСО. Представлены подходы, ориентированные на (1) анализ глобальной структуры текста; (2) анализ локальной структуры текста; (3) унификацию данных, размеченных в рамках различных теорий, и разработку единого стандарта аннотирования. Предложены принципы аннотирования имплицитных ЛСО в параллельных текстах, т. е. в качестве объекта аннотирования выступает переводное соответствие (пара фрагментов текста оригинала и перевода). Рассматривались такие переводные соответствия, где в русскоязычном тексте показатели ЛСО отсутствуют, а в тексте на другом языке, напротив, имеются. С учетом специфики имплицитных ЛСО сформулированы следующие принципы их аннотирования: (1) необходимо выделять границы аргументов ЛСО (обеспечивается наглядность и удобство анализа); (2) признаки блоков текста должны образовывать иерархическую структуру (обеспечивается удобство работы с большим числом признаков); (3) если признак блока текста имеет лексический показатель, то этот показатель должен быть выделен (обеспечивается более высокая обоснованность решений разметчика).

**Ключевые слова:** лингвистическое аннотирование; дискурсивные отношения; логико-семантические отношения; имплицитность; параллельные тексты

DOI: 10.14357/19922264240313

EDN: NPXQNX

## 1 Введение

В настоящее время одним из наиболее актуальных направлений в области обработки естественного языка стал анализ языковых единиц, более протяженных, чем предложение. Нередко в качестве единицы анализа выступает текст в целом. Сложность такого анализа очевидна: текст имеет многоуровневую структуру, где, с одной стороны, существуют различные связи между единицами каждого из уровней, а с другой стороны, связи между единицами разных уровней (кратко о внутритекстовых связях см. [1, с. 98–99], подробнее [2]). Эта особенность делает разработку принципов и средств дискурсивного аннотирования текста нетривиальной задачей.

Принципы дискурсивного аннотирования корпусов разрабатываются исходя из выбранного создателями корпуса теоретического подхода к описанию структуры дискурса. Чаще всего рассматриваются два уровня разметки — глобальный и локальный (подробнее о противопоставлении локальной и глобальной структуры дискурса см. [3, с. 49–50; 4, с. 30–35]). В первом случае более пристальное внимание уделяется анализу об-

щей структуры документа, во втором — анализу отношений между единицами, не слишком удаленными друг от друга с точки зрения линейного расположения (как правило, это предложения или клаузы).

Важность создания дискурсивно аннотированных корпусов сложно переоценить: размеченные тексты используются в том числе и для глубокого обучения в качестве тренировочной выборки при решении различных задач по извлечению информации из текста [5]. Особую ценность представляет накопление размеченных данных на разных языках: так, в [6] отмечается, что большое число исследований осуществляется на материале английского языка, в то время как размеченных данных для других языков, в частности для китайского, не хватает.

Отдельная проблема заключается в том, что при изучении какого-либо конкретного феномена, относящегося к уровню дискурса, возникает необходимость сочетать «общую» разметку с разметкой, отражающей результаты анализа проявлений этого — находящегося в центре внимания — феномена. К подобным феноменам можно отнести и **имплицитные ЛСО** — такие отношения, как противопоставление, причина, условие, следование во

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-28-00527, <https://rscf.ru/project/24-28-00527/>.

<sup>1</sup> Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук, a.gonch48@gmail.com

<sup>2</sup> Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук, polina.iaroshenko@yandex.ru

времени и др., которые чаще всего устанавливаются между отдельными предложениями или же между простыми предложениями в составе сложного и при этом не имеют показателя. Так, в примере «Он не смог прийти вовремя, потому что начальник задержал его на работе» содержится эксплицитное ЛСО причины (выражено при помощи *потому что*), а в примере «Он не смог прийти вовремя, начальник задержал его на работе» — имплицитное (ничем не выражено).

Цель настоящей статьи — с учетом мирового опыта сформулировать принципы аннотирования имплицитных ЛСО, которые обеспечили бы возможность создания представительной выборки размеченных примеров таких ЛСО на русскоязычном материале, подходящей как для чисто лингвистических исследований, так и для использования при создании средств автоматической обработки текста.

## 2 Мировой опыт аннотирования имплицитных логико-семантических отношений

### 2.1 Имплицитные логико-семантические отношения и анализ глобальной структуры текста

Наиболее известной теорией, ориентированной на анализ глобальной структуры текста, представляется теория риторической структуры (Rhetorical Structure Theory, RST [7]). Согласно RST, текст представляет собой единый дискурсивный объект, все элементы которого связаны между собой *риторическими* (в терминах RST) отношениями. Следовательно, одним из результатов применения этой теории должна стать схема анализируемого текста, отражающая то, как он организован. Наличие или отсутствие показателей отношений, связывающих части текста, в классической версии RST не принималось во внимание. Позднее, с началом создания корпусов, размеченных в соответствии с принципами RST, интерес адептов этой теории к показателям риторических отношений повысился, однако фрагменты, где показателей не было, практически не исследовались: в пособиях по аннотированию не использовался даже термин «имплицитное» отношение [8, 9]. С другой стороны, тот факт, что в центре внимания находились не показатели, а непосредственно отношения, способствовал тому, что аргументы отношений выделялись исключительно исходя из семантики.

В соответствии с принципами RST размечен русскоязычный корпус Ru-RSTreebank [10] (об этапах создания корпуса см. [11, с. 128–150]).

Таким образом, применительно к аннотированию имплицитных ЛСО к недостаткам глобального подхода к анализу структуры текста следует отнести (1) интерес к структуре текста в целом и (2) игнорирование показателей внутритекстовых отношений и, соответственно, фактов их отсутствия; а к достоинствам подхода — сугубо семантические основания для выделения аргументов отношения.

### 2.2 Имплицитные логико-семантические отношения и анализ локальной структуры текста

Говоря об исследованиях, ориентированных на анализ локальной структуры текста, в качестве наиболее известного примера, по всей видимости, стоит назвать Пенсильванский дискурсивно аннотированный корпус (Penn Discourse Treebank, PDTB). Он задумывался с целью аннотировать не глобальную структуру текста, а коннекторы и выражаемые ими отношения (*дискурсивные* в терминах PDTB) [12, с. 1]. Именно это обусловило большее внимание создателей корпуса к фрагментам, в которых коннектор отсутствовал. В соответствии с исходной целью они разделили коннекторы на эксплицитные и имплицитные. Если понятие эксплицитного коннектора не ново, то понятие имплицитного коннектора (*implicit connective*) нуждается в уточнении. Имплицитным в подходе PDTB считается коннектор, который отсутствует в исходном тексте, но был добавлен туда разметчиком при аннотировании как наиболее подходящий по смыслу. Важно, что добавление коннектора не должно приводить к семантической избыточности [13, с. 1200–1201]. Именно фрагменты, куда можно добавить коннектор, содержат, согласно последним версиям PDTB, имплицитные дискурсивные отношения.

Подобная ориентированность на коннекторы повлекла за собой еще один недостаток подхода — размывание семантической природы аргументов отношения и использование синтаксических характеристик анализируемого фрагмента для выделения аргументов. Так, сами разработчики PDTB при описании третьей версии корпуса в [14, с. 11–12] отмечают, что недостатком PDTB-2 было, в частности, то, что аргументы имплицитных ЛСО всегда определялись исключительно исходя из линейного порядка (вне зависимости от симметричности отношения). Как следствие, в примерах с одним и тем же ЛСО аргументы могли выделяться по-разному, что усложняло работу с получаемой

выборкой. Однако решение этой проблемы, предложенное в PDTB-3, не кажется оптимальным: чтобы избежать повторного аннотирования материала, авторы предлагают определять аргументы семантически только в рамках сложноподчиненных предложений. В сложносочиненных предложениях и на границе между предложениями единственным критерием, обуславливающим выбор меток «аргумент 1» или «аргумент 2», остается линейный порядок.

Таким образом, применительно к аннотированию имплицитных ЛСО к достоинствам локального подхода к анализу структуры текста следует отнести интерес к связям между единицами дискурса, не слишком удаленным друг от друга с точки зрения линейного расположения; а к недостаткам — (1) излишнюю ориентированность на показатели ЛСО и (2) опору на синтаксис при выделении аргументов отношения.

### 2.3 Имплицитные логико-семантические отношения и разработка средств аннотирования, не привязанных к теории

Ряд исследователей заявляют о необходимости разработки системы аннотирования, которая могла бы применяться вне зависимости от выбранного теоретического подхода. В [15, с. 43–47] подчеркивается важность сопоставления различных способов аннотирования дискурсивных корпусов, чтобы впоследствии найти оптимальный способ «переводить» разметку, выполненную в рамках одного подхода, таким образом, чтобы этот же материал можно было использовать при работе с другими подходами (“translate existing annotations from one framework to another”). В статье [16] рассматриваются возможные принципы унификации разметки как глобальной структуры дискурса, так и дискурсивных отношений (в рамках RST, теории сегментной репрезентации дискурса и подхода создателей PDTB).

Тенденция к большей универсальности прослеживается и в области разработки приложений для аннотирования дискурса. Например, при создании приложения TIARA [17] разработчики руководствовались следующими принципами: понятный интерфейс; простота использования приложения; функция проверки полноты; фиксация и сохранение действий разметчиков (*annotation tracking*); возможность адаптировать приложение под свои цели. Разметку можно осуществлять на четырех уровнях,

первый из которых более общий, а остальные можно охарактеризовать как специализированные.

Как отмечается в [17], приложения, которые можно использовать для разных видов лингвистического аннотирования, зачастую не вполне подходят для разметки структуры дискурса. Об этом свидетельствует, к примеру, документация таких инструментов, как BRAT [18], WebAnno [19] и INCEpTION [20]. На основании этого можно констатировать, что создание принципов аннотирования имплицитных ЛСО и приложений для поддержки такого аннотирования на сегодняшний день остается актуальным направлением работы.

## 3 Предлагаемые принципы аннотирования имплицитных логико-семантических отношений

Отправной точкой для разработки предлагаемых в настоящей статье принципов аннотирования имплицитных ЛСО стала, во-первых, классификация ЛСО, предложенная О. Ю. Иньковой и представленная в работе [21], и, во-вторых, концепция надкорпусных баз данных (НБД), разработанная коллективом исследователей из ФИЦ ИУ РАН [22–24]. Кроме того, были учтены все предложения по совершенствованию функционала для аннотирования текстов, перечисленные в [25]. Материалом исследования послужили параллельные тексты, в которых были найдены пары фрагментов оригинала и перевода, где в русскоязычном тексте показатели ЛСО отсутствуют, а в тексте на другом языке, напротив, имеются<sup>1</sup>. Таким образом, результатом работы разметчика оказывается не аннотированный фрагмент с имплицитным ЛСО, а **аннотированное переводное соответствие** (АПС). Для хранения АПС создана **НБД ЛСО**, а для формирования АПС и последующей работы с ними разработан пользовательский интерфейс (веб-приложение)<sup>2</sup>.

Основные структурные элементы АПС с имплицитными ЛСО совпадают с элементами АПС, создаваемых в ходе исследования других языковых единиц:

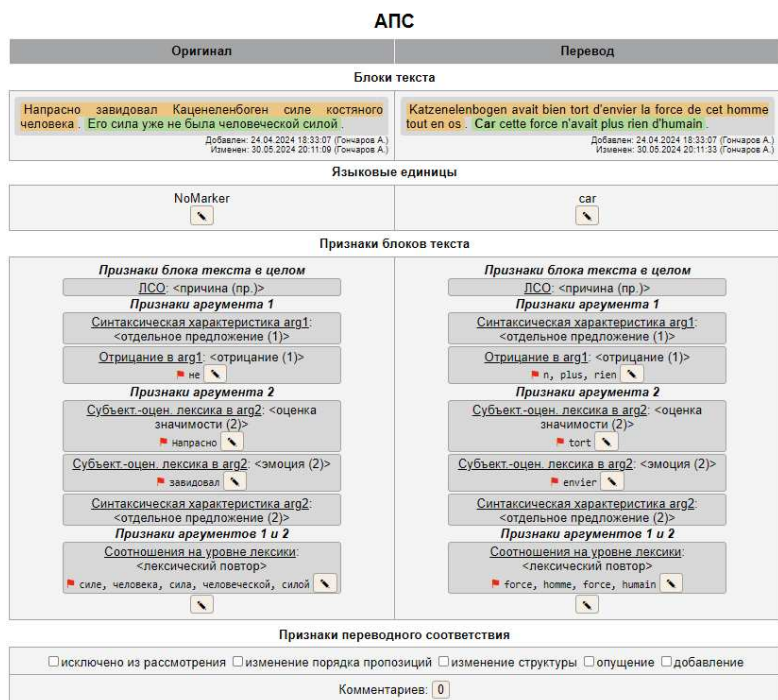
- (1) **блоки текста оригинала и перевода**, в которых, при наличии, выделено вхождение изучаемой языковой единицы и варианта ее перевода, если изучается единица языка оригинала, или вхождение изучаемой языковой единицы и стимула ее перевода, если изучается единица языка перевода;

<sup>1</sup> На текущем этапе работы рассматриваются исключительно примеры ЛСО, имеющих два аргумента (бинарных).

<sup>2</sup> Рисунки 1 и 2 представляют собой скриншоты, сделанные в этом приложении.



**Рис. 1** Разметка аргументов ЛСО. (Источник примера: [А. С. Пушкин. Капитанская дочка (1836) | La fille du capitaine (пер. L. Viardot; 1853)].)



**Рис. 2** Пример АПС с имплицитным ЛСО в оригинале и эксплицитным в переводе (Источник примера: [В. С. Гроссман. Жизнь и судьба (ч. 3) (1960) | Vie et Destin (part. 3) (пер. А. Berelowitch; 1980)].)

- (2) **наборы признаков блоков текста;**
- (3) **набор признаков переводного соответствия.**

Однако специфика имплицитных ЛСО как объекта исследования оказала значительное влияние на внутреннее устройство этих элементов. Несмотря на значимые результаты, полученные в ходе изучения эксплицитных ЛСО и их показателей с использованием НБД коннекторов, и разнообразие задач, решаемых с ее помощью (см., напр., [26–31]), а также результаты, полученные с использованием надкорпусной базы данных иерархии ЛСО [32], накопленный в ходе этих исследований опыт не мог быть использован для работы с имплицитными ЛСО в неизменном виде. Для того чтобы АПС

содержало достаточный объем сведений об имплицитном ЛСО, предлагаются следующие принципы аннотирования:

- (1) должны быть выделены границы аргументов исследуемого ЛСО (обеспечивается наглядность и удобство анализа);
- (2) признаки блоков текста должны образовывать иерархическую структуру (обеспечивается удобство работы с большим числом признаков);
- (3) если признак блока текста имеет лексический показатель, этот показатель должен быть выделен (обеспечивается более высокая обоснованность решений разметчика).

Принимая во внимание обозначенные принципы, рассмотрим более детально каждый из структурных элементов АПС с имплицитным ЛСО.

### 3.1 Блоки текста оригинала и перевода

Объем блоков текста оригинала и перевода должен быть необходимым и достаточным для анализа ЛСО. Внутри каждого блока текста необходимо выделить аргументы анализируемого ЛСО — отрезки текста, связанные при помощи этого ЛСО — и присвоить им метки «аргумент 1» и «аргумент 2» соответственно<sup>1</sup>. Для наглядности каждый аргумент выделяется цветом. Так, в примере на рис. 1 зеленым в обоих случаях выделен аргумент 1 (в переводе ЛСО причины выражено показателем *car*), а оранжевым — аргумент 2.

Как видно, обозначенные принципы обеспечивают единство подхода к ЛСО, будь они эксплицитными или имплицитными (ср. подразд. 2.2 выше).

### 3.2 Признаки блоков текста оригинала и перевода

После того как были выделены аргументы ЛСО, можно перейти к основному этапу аннотирования — выявлению признаков блоков текста. В первую очередь признаки делятся на группы в зависимости от того, к какой именно части блока текста они относятся. Рассмотрим более детально, что входит в каждую из групп.

#### 3.2.1 Признаки блока текста в целом

Включают признаки, указывающие на тип ЛСО (например, *причина, противопоставление*).

#### 3.2.2 Признаки, относящиеся к одному из аргументов

Признаки, описывающие синтаксическую характеристику аргумента: в том случае, если аргумент представляет собой отдельное предложение, несколько предложений или вставную конструкцию, это отмечается в АПС; если же аргумент является клаузой, то меток не ставится.

Признаки, указывающие на то, что аргумент содержит какие-либо лексические единицы, значимые для анализа ЛСО: отрицание; некоторые

формы глагольного наклонения; показатели модальности; субъективно-оценочную лексику.

#### 3.2.3 Признаки, относящиеся к обоим аргументам

Включают признаки, указывающие на некоторые типы соотношения аргументов на лексическом уровне, значимые для анализа ЛСО: разметчик может указать на наличие синонимов, лексического повтора и др. К этой же группе относятся признаки, свидетельствующие о наличии некоторых знаков препинания между аргументами.

Таким образом, признаки блока текста весьма разнородны. Обязательным для каждого блока текста остается только выбор ЛСО, в то время как все остальные признаки отмечаются при необходимости. Однако если выбран признак, имеющий лексические показатели (например, признак наличия субъективно-оценочной лексики в каком-либо из аргументов), разметчик обязан указать, о каких именно лексических единицах идет речь.

### 3.3 Признаки переводного соответствия

Разметчик может присвоить переводному соответствию следующие признаки:

- (1) «исключено из рассмотрения» — АПС не должно приниматься во внимание при работе с выборкой размеченных данных (например, в случае очевидно ошибочного перевода);
- (2) «изменение порядка пропозиций» — в переводе изменен линейный порядок единиц с пропозициональным содержанием (т. е. смысловых частей);
- (3) «изменение структуры» — в переводе изменена структура блока текста оригинала;
- (4) «опущение» — в переводе нет соответствия для части блока текста оригинала;
- (5) «добавление» — в оригинале нет соответствия для части блока текста перевода.

Признаки (3)–(5) присваиваются только в тех случаях, если соответствующие характеристики значимы для анализа ЛСО.

На рис. 2 представлен пример готового АПС. В верхней части рисунка приведены блоки текста,

<sup>1</sup> Выбор нужной метки, с учетом опыта [33], для асимметричных отношений осуществляется исходя из семантики аргумента (линейный порядок не учитывается), а для симметричных — напротив, исключительно из линейного порядка аргументов. Например, для ЛСО причины (асимметричное ЛСО) меткой «аргумент 1» всегда обозначается тот, который содержит причину того, что описано во втором аргументе, а для ЛСО противопоставления (симметричное ЛСО) меткой «аргумент 1» обозначается тот, который находится в тексте линейно раньше, чем второй аргумент отношения. Следует отметить, что такое разграничение представляет собой некоторое упрощение, так как примеры из текстов на естественном языке показывают, что даже те отношения, которые считаются симметричными, не всегда допускают возможность перестановки аргументов без изменения смысла.

где цветами выделены аргументы ЛСО, а в переводе полужирным выделен показатель ЛСО. Ниже — метки, указывающие на языковые единицы, выражающие анализируемое ЛСО (в оригинале «NoMarker», так как ЛСО имплицитно, в переводе «car»). Затем приводятся признаки блоков текста, которые могут быть значимы для анализа ЛСО. Так, указано, что (1) оба аргумента в обоих языках представляют собой отдельные предложения; (2) оба аргумента 1 содержат показатели отрицания; (3) оба аргумента 2 содержат субъективно-оценочную лексику; (4) как в оригинале, так и в переводе связь между аргументами поддерживается лексическими повторами. Признаки переводного соответствия отсутствуют.

## 4 Заключение

В статье с учетом мирового опыта были сформулированы принципы аннотирования имплицитных ЛСО. Было показано, что предложенные принципы обеспечивают комплексный подход к анализу имплицитных ЛСО и позволяют в дальнейшем создать представительную выборку размеченных примеров. Размеченные данные такого типа могут использоваться как в лингвистических исследованиях, так и в области автоматической обработки текстов в качестве обучающего множества.

## Литература

1. Гончаров А. А. Классификации внутритекстовых отношений: основания и принципы структурирования // Вопросы языкознания, 2021. № 3. С. 97–119. doi: 10.31857/0373-658X.2021.3.97-119. EDN: OKPZEI.
2. Stede M. Discourse processing. — San Rafael, CA, USA: Morgan & Claypool Pubs., 2012. 155 p.
3. Hobbs J. R. Literature and cognition. — Stanford, CA, USA: CSLI, 1990. 193 p.
4. Кибрик А. А. Анализ дискурса в когнитивной перспективе: Дис. . . . докт. филол. наук. — М.: Ин-т языкознания РАН, 2003. 90 с.
5. Xiang W., Wang B. A survey of implicit discourse relation recognition // ACM Comput. Surv., 2023. Vol. 55. Iss. 12. 34 p. doi: 10.1145/3574134.
6. Jiang D., He J. Tree framework with BERT word embedding for the recognition of Chinese implicit discourse relations // IEEE Access, 2020. Vol. 8. P. 162004–162011. doi: 10.1109/ACCESS.2020.3019500.
7. Taboada M., Mann W. C. Rhetorical structure theory: Looking back and moving ahead // Discourse Stud., 2006. Vol. 8. Iss. 3. P. 423–459. doi: 10.1177/146144560606188.
8. Carlson L., Marcu D. Discourse tagging reference manual, 2001. ISI Technical Report ISI-TR-545. 87 p. <https://www.isi.edu/content/tr/tr-545.pdf>.
9. Das D., Taboada M. RST Signalling Corpus annotation manual, 2014. [https://www.sfu.ca/~mtaboada/docs/publications/RST\\_Signalling\\_Corpus\\_Annotation\\_Manual.pdf](https://www.sfu.ca/~mtaboada/docs/publications/RST_Signalling_Corpus_Annotation_Manual.pdf).
10. Pisarevskaya D., Ananyeva M., Kobozeva M., Nasedkin A., Nikiforova S., Pavlova I., Shelepov A. Towards building a discourse-annotated corpus of Russian // Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии. — М.: РГГУ, 2017. Вып. 16. Т. 1. С. 201–212.
11. Смирнов И. В. Интеллектуальный анализ текстов на основе методов разноуровневой обработки естественного языка. — М.: ФИЦ ИУ РАН, 2023. 356 с.
12. Prasad R., Miltsakaki E., Dinesh N., Lee A., Joshi A., Webber B. L. The Penn Discourse TreeBank 1.0 Annotation Manual. — IRCS technical reports ser. — The PDTB Research Group, 2006. 54 p. <https://catalog.ldc.upenn.edu/docs/LDC2008T05/papers/pdtb-1.0-annotation-manual.pdf>.
13. Prasad R., Webber B., Joshi A. The Penn Discourse Treebank: An annotated corpus of discourse relations // Handbook of linguistic annotation / Eds. N. Ide, J. Pustejovsky. — Dordrecht: Springer Science + Business Media, 2017. P. 1197–1217. doi: 10.1007/978-94-024-0881-2\_45.
14. Webber B., Prasad R., Lee A., Joshi A. The Penn Discourse Treebank 3.0: Annotation Manual, 2019. <https://catalog.ldc.upenn.edu/docs/LDC2019T05/PDTB3-Annotation-Manual.pdf>.
15. Zufferey S., Degand L. Connectives and discourse relations. Key topics in semantics and pragmatics. — Cambridge: Cambridge University Press, 2024. 268 p.
16. Fu Y. Towards unification of discourse annotation frameworks // 60th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics Proceedings. — Dublin: Association for Computational Linguistics, 2022. P. 132–142. doi: 10.18653/v1/2022.acl-srw.12.
17. Putra J. W. G., Matsumura K., Teufel S., Tokunaga T. TIARA 2.0: An interactive tool for annotating discourse structure and text improvement // Lang. Resour. Eval., 2023. Vol. 57. P. 5–29. doi: 10.1007/s10579-021-09566-0.
18. Brat rapid annotation tool. <https://brat.nlplab.org/index.html>.
19. WebAnno. A flexible, web-based and visually supported system for distributed annotations. <https://webanno.github.io/webanno>.
20. INCEption. A semantic annotation platform offering intelligent assistance and knowledge management. <https://inception-project.github.io>.
21. Инькова О. Ю. Логико-семантические отношения: проблемы классификации // Связность текста: ме-реологические логико-семантические отношения. — М.: ЯСК, 2019. С. 11–98.

22. Зацман И., Кружков М., Лоцилова Е. Методы и средства информатики для описания структуры неоднословных коннекторов // Структура коннекторов и методы ее описания. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2019. С. 205–230. doi: 10.30826/SEMANTICS19-06. EDN: YVAJWN.
23. Гончаров А. А., Инькова О. Ю., Кружков М. Г. Методология аннотирования в надкорпусных базах данных // Системы и средства информатики, 2019. Т. 29. № 2. С. 148–160. doi: 10.14357/08696527190213. EDN: GNDCJE.
24. Кружков М. Г. Концепция построения надкорпусных баз данных // Системы и средства информатики, 2021. Т. 31. № 3. С. 101–112. doi: 10.14357/08696527210309. EDN: UMWNIU.
25. Гончаров А. А. Аннотирование параллельных корпусов: подходы и направления развития // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 81–87. doi: 10.14357/19922264230411. EDN: GDKDOZ.
26. Семантика коннекторов: контрастивное исследование / Под ред. О. Ю. Иньковой. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2018. 368 с.
27. Структура коннекторов и методы ее описания / Под ред. О. Ю. Иньковой. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2019. 316 с. EDN: VVIINM.
28. Гончаров А. А., Инькова О. Ю. Методика поиска имплицитных логико-семантических отношений в тексте // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 3. С. 97–104. doi: 10.14357/19922264190314. EDN: MWGFJW.
29. Нуриев В. А., Зацман И. М. Редуцирование спектра моделей перевода в надкорпусных базах данных // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 2. С. 119–126. doi: 10.14357/19922264200217. EDN: EBUTTA.
30. Гончаров А. А., Инькова О. Ю. Извлечение знаний о средствах выражения логико-семантических отношений при помощи Надкорпусной базы данных // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 2. С. 96–103. doi: 10.14357/19922264210214. EDN: GRPWIB.
31. Инькова О. Ю., Кружков М. Г. Структурированные определения дискурсивных отношений в Надкорпусной базе данных коннекторов // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 27–32. doi: 10.14357/19922264210404. EDN: EZJXVI.
32. Дурново А. А., Инькова О. Ю., Попкова Н. А. Принципы описания показателей логико-семантических отношений и их иерархии // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 52–59. doi: 10.14357/19922264220207. EDN: NPFTOH.
33. Bunt H., Prasad R. ISO DR-Core (ISO 24617-8): Core concepts for the annotation of discourse relations // 12th Joint ACL-ISO Workshop on Interoperable Semantic Annotation Proceedings. — Portorož, Slovenia, 2016. P. 45–54.

Поступила в редакцию 12.07.24

---

---

## IMPLICIT LOGICAL-SEMANTIC RELATIONS IN PARALLEL TEXTS: ANNOTATION PRINCIPLES

A. A. Goncharov and P. V. Iaroshenko

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The problem of implicit logical-semantic relations (LSRs) annotation is considered. The state-of-the-art in the annotation of implicit LSRs is analyzed. The approaches focused on (i) analysis of the global discourse structure; (ii) analysis of the local discourse structure; and (iii) unification of the data annotated within different frameworks and development of a unified annotation standard are presented. The principles for annotating implicit LSRs in parallel texts are proposed, i. e., target of annotation is a translated correspondence (a pair of fragments from the original and translated texts). Translation correspondences illustrating implicit–explicit mismatch have been studied, i. e., where LSR markers are absent in the Russian text while in the text in another language, on the contrary, they are present. Taking into account the specificity of implicit LSRs, the following principles of their annotation were formulated: (i) it is necessary to determine the boundaries of LSR arguments (to ensure clarity and convenience of analysis); (ii) features of text blocks should form a hierarchical structure (to ensure convenience of using a large number of features); and (iii) if a feature of a text block has a lexical marker, this marker should be indicated (to ensure better justification of the annotator’s decisions).

**Keywords:** linguistic annotation; discourse relations; logical-semantic relations; implicitness; parallel texts

**DOI:** 10.14357/19922264240313

**EDN:** NPXQNX



## Acknowledgments

The research was supported by the Russian Science Foundation, project No.24-28-00527 (<https://rscf.ru/en/project/24-28-00527/>).

## References

- Goncharov, A. A. 2021. Klassifikatsii vnutritekstovyykh ot-nosheniy: osnovaniya i printsipy strukturirovaniya [Classifications of intratextual relations: Bases and structuring principles]. *Voprosy yazykoznaniiya* [Topics in the Study of Language] 3:97–119. doi: 10.31857/0373-658X.2021.3.97-119. EDN: OKPZEI.
- Stede, M. 2012. *Discourse processing*. San Rafael, CA: Morgan & Claypool Pubs. 155 p.
- Hobbs, J. R. 1990. *Literature and cognition*. Stanford, CA: CSLI. 193 p.
- Kibrik, A. A. 2003. Analiz diskursa v kognitivnoy perspektive [Discourse analysis in cognitive perspective]. Moscow: Institute of Linguistics RAS. D.Sc. Diss. 90 p.
- Xiang, W., and B. Wang. 2023. A survey of implicit discourse relation recognition. *ACM Comput. Surv.* 55(12):258. 34 p. doi: 10.1145/3574134.
- Jiang, D., and J. He. 2020. Tree framework with BERT word embedding for the recognition of Chinese implicit discourse relations. *IEEE Access* 8:162004–162011. doi: 10.1109/ACCESS.2020.3019500.
- Taboada, M., and W. Mann. 2006. Rhetorical structure theory: Looking back and moving ahead. *Discourse Stud.* 8(3):423–459. doi: 10.1177/146144560606188.
- Carlson, L., and D. Marcu. 2001. Discourse tagging reference manual. ISI Technical Report ISI-TR-545. 87 p. Available at: <https://www.isi.edu/content/tr/tr-545.pdf> (accessed August 2, 2024).
- Das, D., and M. Taboada. 2014. RST Signalling Corpus annotation manual. Available at: [https://www.sfu.ca/~mtaboada/docs/publications/RST\\_Signalling\\_Corpus\\_Annotation\\_Manual.pdf](https://www.sfu.ca/~mtaboada/docs/publications/RST_Signalling_Corpus_Annotation_Manual.pdf) (accessed August 2, 2024).
- Pisarevskaya, D., M. Ananyeva, M. Kobozeva, A. Nasedkin, S. Nikiforova, I. Pavlova, and A. Shelepov. 2017. Towards building a discourse-annotated corpus of Russian. *Komp'yuternaya lingvistika i intellektual'nye tekhnologii* [Computational linguistics and intellectual technologies]. Moscow: RSUH. 16(1):201–212.
- Smirnov, I. V. 2023. *Intellektual'nyy analiz tekstov na osnove metodov raznouronvnoy obrabotki estestvennogo yazyka* [Intelligent text analysis based on multilevel natural language processing methods]. Moscow: FRC CSC RAS. 354 p.
- Prasad, R., E. Miltsakaki, N. Dinesh, A. Lee, A. Joshi, and B. L. Webber. 2006. The Penn Discourse TreeBank 1.0 annotation manual. IRCS technical reports ser. The PDTB Research Group. 54 p. Available at: <https://catalog.ldc.upenn.edu/docs/LDC2008T05/papers/pdtb-1.0-annotation-manual.pdf> (accessed August 2, 2024).
- Prasad, R., B. Webber, and A. Joshi. 2017. The Penn Discourse Treebank: An annotated corpus of discourse relations. *Handbook of linguistic annotation*. Eds. N. Ide and J. Pustejovsky. Dordrecht: Springer Science + Business Media. 1197–1217. doi: 10.1007/978-94-024-0881-2\_45.
- Webber, B., R. Prasad, A. Lee, and A. Joshi. 2019. The Penn Discourse Treebank 3.0: Annotation manual. Available at: <https://catalog.ldc.upenn.edu/docs/LDC2019T05/PDTB3-Annotation-Manual.pdf> (accessed August 2, 2024).
- Zufferey, S., and L. Degand. 2024. *Connectives and discourse relations. Key topics in semantics and pragmatics*. Cambridge: Cambridge University Press. 268 p.
- Fu, Y. 2022. Towards unification of discourse annotation frameworks. *60th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics Proceedings*. Dublin: Association for Computational Linguistics. 132–142. doi: 10.18653/v1/2022.acl-srw.12.
- Putra, J. W. G., K. Matsumura, S. Teufel, and T. Tokunaga. 2023. TIARA 2.0: An interactive tool for annotating discourse structure and text improvement. *Lang. Resour. Eval.* 57:5–29. doi: 10.1007/s10579-021-09566-0.
- Brat rapid annotation tool. Available at: <https://brat.nlplab.org/index.html> (accessed August 2, 2024).
- WebAnno. A flexible, web-based and visually supported system for distributed annotations. Available at: <https://webanno.github.io/webanno> (accessed August 2, 2024).
- INCEpTION. A semantic annotation platform offering intelligent assistance and knowledge management. Available at: <https://inception-project.github.io> (accessed August 2, 2024).
- Inkova, O. Yu. 2019. Logiko-semanticheskie otnosheniya: problemy klassifikatsii [Logical-semantic relations: Classification problems]. *Svyaznost' teksta: mereologicheskie logiko-semanticheskie otnosheniya* [Text coherence: Mereological logical semantic relations]. Moscow: LRC Publishing House. 11–98.
- Zatsman, I., M. Kruzhhkov, and E. Loshchilova. 2019. Metody i sredstva informatiki dlya opisaniya struktury neodnoslovnnykh konnektorov [Methods and means of informatics for multiword connectives structure description]. *Struktura konnektorov i metody ee opisaniya* [Connectives structure and methods of its description]. Ed. O. Yu. Inkova. Moscow: TORUS PRESS. 205–230. doi: 10.30826/SEMANTICS19-06. EDN: YVAJWN.
- Goncharov, A. A., O. Yu. Inkova, and M. Kruzhhkov. 2019. Metodologiya annotirovaniya v nadkorporusnykh bazakh dannykh [Annotation methodology of supracorpora databases]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 29(2):148–160. doi: 10.14357/08696527190213. EDN: GNDCJE.
- Kruzhhkov, M. 2021. Kontseptsiya postroeniya nadkorporusnykh baz dannykh [Conceptual framework for supracorpora databases]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 31(3):101–112. doi: 10.14357/08696527210309. EDN: UMWNIU.

25. Goncharov, A. A. 2023. Annotirovanie parallel'nykh korpusov: podkhody i napravleniya razvitiya [Parallel corpus annotation: Approaches and directions for development]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):81–87. doi: 10.14357/19922264230411. EDN: GDKDOZ.
26. Inkova, O. Yu., ed. 2018. *Semantika konnektorov: kontrastivnoe issledovanie* [Semantics of connectives: A contrastive study]. Moscow: TORUS PRESS. 368 p.
27. Inkova, O. Yu., ed. 2019. *Struktura konnektorov i metody ee opisaniya* [Connectives structure and methods of its description]. Moscow: TORUS PRESS. 316 p. EDN: VVIINM.
28. Goncharov, A. A., and O. Yu. Inkova. 2019. Metodika poiska implitsitnykh logiko-semanticheskikh otnosheniy v tekste [Methods for identification of implicit logical-semantic relations in texts]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(3):97–104. doi: 10.14357/19922264190314. EDN: MWGFJW.
29. Nuriev, V. A., and I. M. Zatsman. 2020. Redutsirovaniye spektra modeley perevoda v nadkorporusnykh bazakh dannykh [Reducing the spectrum of translation models in supracorpora databases]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(2):119–126. doi: 10.14357/19922264200217. EDN: EBUTTA.
30. Goncharov, A. A., and O. Yu. Inkova. 2021. Izvlechenie znaniy o sredstvakh vyrazheniya logiko-semanticheskikh otnosheniy pri pomoshchi nadkorporusnoy bazy dannykh [Extracting knowledge about means of expression of logical-semantic relations from the supracorpora database]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(2):96–103. doi: 10.14357/19922264210214. EDN: GRPWIB.
31. Inkova, O. Yu., and M. G. Kruzhkov. 2021. Strukturnirovannyye opredeleniya diskursivnykh otnosheniy v Nadkorporusnoy baze dannykh konnektorov [Structured definitions of discourse relations in the Supracorpora Database of Connectives]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(4):27–32. doi: 10.14357/19922264210404. EDN: EZJXVI.
32. Durnovo, A. A., O. Yu. Inkova, and N. A. Popkova. 2022. Printsipy opisaniya pokazately logiko-semanticheskikh otnosheniy i ikh ierarkhii [Principles of describing markers of logical-semantic relations and their hierarchy]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(2):52–59. doi: 10.14357/19922264220207. EDN: NPFTOH.
33. Bunt, H., and R. Prasad. 2016. ISO DR-Core (ISO 24617-8): Core concepts for the annotation of discourse relations. *12th Joint ACL-ISO Workshop on Interoperable Semantic Annotation Proceedings*. Portorož, Slovenia. 45–54.

Received July 12, 2024

## Contributors

**Goncharov Alexander A.** (b. 1994) — scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; a.gonch48@gmail.com

**Iaroshenko Polina V.** (b. 1994) — Candidate of Science (PhD) in philology, scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; polina.iaroshenko@yandex.ru

# APPLYING COMPUTER-ASSISTED TOOLS TO LITERARY TRANSLATION: THE CASE OF PUNCTUATION

V. A. Nuriev<sup>1</sup>

**Abstract:** The article highlights the opportunities that the integration of computer-assisted tools into the literary translator’s workbench provides in navigating the complexities of interlingual punctuation asymmetry. Across natural languages, punctuation principles can vary, which results in differences in the punctuation repertoire and its usage rules. For literary translators, understanding these differences is essential to accurately convey the artistic integrity of the source text. While interlingual punctuation asymmetry has long been studied, modern advancements in computer and language sciences, particularly, the corpus-based approach, offer new theoretical and practical insights that can greatly enhance the translation process. This approach allows for a deeper understanding of punctuation nuances leading to more informed translation choices and decisions. Thus, the article contributes to the recent trend of applying computer-assisted tools to literary translation.

**Keywords:** computer-assisted literary translation; punctuation; asymmetry between languages; corpus-based translation studies; parallel corpus; English; French; Russian

**DOI:** 10.14357/19922264240314

**EDN:** MFTPWK

## 1 Introduction

Existing scholarship has a twofold understanding of punctuation: as a system of symbols employed in written speech and as a set of rules that regulate the functioning of this system. The purpose of punctuation marks is to make the written text clearer and convey certain traits of oral speech through graphic means. Often, this purpose — to convey a certain orality in the written text — causes the discussions about punctuation principles to gravitate to the predominance of rhythm and melody. In many countries, such as Russia, France, and others, the training of radio and TV presenters follows this principle grounded in auditory analogies between punctuation marks and pause and intonation [1, 2]. However, rhythm, melody, and punctuation do not always correlate casting doubt on the consistency and appropriateness of this principle. Furthermore, different natural languages may use the same punctuation marks differently.

Notably, in punctuation usage, European languages fall into two groups [3]. The first one has a communicative system of punctuation: the use of punctuation depends on the meaning of a given message (French, English, Italian, etc.). The second group is characterized by a morpho-syntactic (grammatical) system, i. e., the use of punctuation is defined by the formal grammatical parsing of the sentence (German, Czech, Polish, Russian, etc.).

Alongside encoded in rules and quite clear-cut preferences, there are ‘oscillation zones’ in punctuation where variability becomes possible opening up new

stylistic opportunities. While individual punctuation has not yet attracted a considerable amount of research attention, some studies have explored this question. For example, in [4], I. Serça approaches punctuation as an art and shows how some writers use it unconventionally. In [5], L. C. Mitchell also sees punctuation preferences as a distinct manifestation of individual style.

The individual dimension of punctuation reveals itself in writers’ reflections that vividly portray one’s personal attitude toward a given punctuation mark. Kurt Vonnegut advises not to use semicolons as they represent “absolutely nothing” [6, p. 30]. Julien Gracq has problems with colons, because they have “an active function of elimination” and “mark the place of a mini-collapse in discourse” [7, p. 258]. Alexander Genis thinks that the ellipsis is “almost always” needless [8, p. 131]. Camille Laurens does not conceive of literature without parentheses both arguing that they “inject the necessary oxygen into the text — doubt, hesitation, detail,” and dubbing them “the apotheosis of nuance” [9].

All this sums up, firstly, to the conclusion about the significance of punctuation for the literary translator’s work and, secondly, to the question of whether modern computer and language sciences have methods and tools that would simplify this work and lead to more informed translation choices.

Furthermore, in its following parts, the article contributes to a growing trend of applying computer-assisted tools to literary translation. For more information on this trend see the recent collective volume *Computer-assisted literary translation* [10].

<sup>1</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, nurieff.v@gmail.com

## 2 Punctuation in Translation Studies: Introducing the Corpus-Based Approach

Historically, research on interlingual punctuation asymmetry has been closely connected with literary translation. The 1919 Soviet translation requirements, favoring “objective accuracy even in the smallest details,” declare that “all the punctuation choices of the author must be sacredly preserved by the translator” [11, p. 23]. In 1937, after the critical analysis of translations from French, M. Stolyarov advances these ideas paying special attention to punctuation and putting accuracy at the forefront. According to him, the sentence-final punctuation in translation should follow the original intent as much as possible, especially when the translated writer shows a strong inclination to meticulously construct a paragraph. Within-sentence punctuation should also serve to preserve the stylistic integrity of the source text, although here the placement of punctuation marks strongly depends on the rules of the target language. The task of the translator, therefore, is to study the role that the writer assigns to punctuation in their artistic mastery [12, p. 252].

Both Stolyarov’s and Chukovsky’s observations, valuable as they might be, remain largely speculative without relying on statistics or big data. More recent works do not attempt at systematization either; however, they touch upon some critical aspects of punctuation study. In [13], two chapters are devoted to punctuation. It demonstrates how Andrei Sinyavsky expands the semantic and expressive potential of punctuation marks. For instance, the ellipsis<sup>1</sup> tends to convey reticence, suspension, and tension, and in his work, it becomes a politically charged sign of unreliability, circumspection, fear, (self-)censorship. Sometimes, English translations omit these ellipses in a tangible desire to normalize and adjust the translated text to the expectations of the target language and audience [13, p. 130–140].

This argument aligns with findings of K. Malmkjær in [14] where the contrastive analysis involving 9 English versions of Hans Christian Andersen’s *The steadfast tin soldier* is performed. She identifies punctuation differences in the source and target languages and then shows how translators in their efforts to normalize (and simplify) syntactic structure mostly disregard the author’s punctuation manner, even though it contributes to the narrative. Yet, these observations are still very limited: only one example is thoroughly examined.

Some scholars in their studies of punctuation focus on a given mark and its specific functions. In so doing, K. Seagal argues that the Russian ellipsis can convey an emotional subtext: he compares Mikhail Sholokhov’s

*The fate of a man* and its two English translations (by H. C. Stevens and R. Daglish) to reveal the role of the ellipsis in Sholokhov’s writing and how the writer’s punctuation style is interpreted in translation. In the original story, there are 76 ellipses and its English versions contain 33 and 17 ellipses. Their number significantly diminished (by 2.3 times in Stevens’s version and by 4.5 times in Daglish’s one, respectively), which, according to the author, indicates the reticence of the English language to openly show emotions [15, p. 47] and the oppressive influence of the target punctuation.

A pivotal contrastive study of punctuation is [16]. It analyzes the comparative use of punctuation marks in Russian and English newspaper editorials. For each language, the corpus totals 20,000 words. The corpora are compiled manually and the number of punctuation marks is calculated using the MS Word search and replace function. Results show that the comma, colon, and dash are used more often in Russian. The data are verified in the corpora of literary texts where again these punctuation marks are found to occur more frequently in Russian. Nonetheless, their frequency is lower in the newspaper corpus for both languages. Furthermore, taking the most frequent mark, the colon, as an example, the author identifies the reasons for interlingual asymmetry in its use and suggests guidelines for its translation from Russian into English. Evidently, the design of this study has some shortcomings — the corpora of a very limited size, a small repertoire of genres, etc. [16, p. 137–162]. At the same time, it is the first study to have adopted, albeit in its embryonic form, the corpus-based method to examine cross-linguistic discrepancies in the use of punctuation marks, which allowed for processing a significantly larger data set compared to the pre-corpus era.

So far, contrastive punctuation studies remain on the periphery of academic scholarship: there are very few such works (see [17–20, p. 121–150]). Yet, this field of research has recently seen some distinct changes resulting, for instance, in the publication of the collective volume *Comparative punctuation* [21].

## 3 Corpus Applications in Literary Translation: The Case of Punctuation

If one asks a practicing translator whether they see any perceived benefits of academic advances in the computer-assisted research, corpus-based approach, and contrastive punctuation studies, the answer is not immediately obvious. Translators do not always feel the

<sup>1</sup>In the specialized literature on punctuation, the ellipsis is also referred to as suspensions or suspension points.

need to learn modern research methods or master the latest information tools. Though, it is difficult to deny that punctuation asymmetry between languages sometimes causes struggles in literary translation, which may be illustrated by the words of the eminent French translator A. Coldéfy-Faucard from her speech at the 2020 International Congress of Translators in Moscow: “Oh, those dashes of Russian literature! < . . . > Starting in the 20th century, dashes became more commonly used in French literature but still much less than in Russian. How should we understand and translate these dashes?”<sup>1</sup>

To answer this question, the translator needs a broad knowledge of punctuation in both the source and target languages. Nevertheless, close reading, inherent to literary translation, often does not provide this knowledge. Recent advances in computer and language sciences may help to gain it: corpus-based methods and the latest information tools enable ‘distant reading’<sup>2</sup> — a computer-assisted quantitative analysis of information (on punctuation marks, for instance) that would otherwise be challenging to obtain. Distant reading gives translators the opportunity to ‘distance’ themselves from the text they are working on. Studying a given phenomenon in large electronic text corpora allows one to check it against general trends and to see its specificity (for more on this, see [24]).

In so doing, B. Blatt collects big data to test the literary canon and elicit whether celebrated writers consistently follow their own writing advices [25]. Not only does he look at individual preferences but also tries to paint a bigger picture — to see whether books in general (the classics and the bestsellers) share a given trait. Thus, the American writer Elmore Leonard once insisted on using no more than two or three exclamation points per 100,000 words of prose. The entirety of his literary career includes 45 novels and 3.4 mln words. As it turns out, in his works, he used 1,651 exclamation points, which is 16 times as many as he recommended. If he had followed his own advice, he would have been allowed only 102 exclamation points overall. Yet, compared to his many fellow writers, Leonard’s usage of exclamation points is quite moderate. Furthermore, his overall frequency of this punctuation mark (49 per 100,000 words) ranks first lowest, ahead of Ernest Hemingway (59 per 100,000 words) and John Updike (88 per 100,000 words). On the other end of the spectrum, with career usages of 844, 929, and 1005 per 100,000 words, are Sinclair Lewis, Tom Wolfe, and James Joyce, respectively [25, p. 84–85]. Blatt rightfully argues that many style guides

support Leonard’s disdain for the exclamation point. They caution against its overuse: it should stress only the moments of a text that deserve extra attention. With additional statistical evaluations, Blatt discerns a general trend: in English prose, amateur writers use this punctuation mark much more than professionals [25, p. 88–90] and its abundance remains a sign of either a distinct style or an insufficient writing experience. It is to note that in his text processing, Blatt uses Python and NLTK (Natural Language Toolkit) and he relies predominantly on the straightforward procedure of counting words or punctuation.

Another tool for distant reading in literary translation may be supra-corpora databases (SCDs) that stock parallel sub-corpora of the Russian National Corpus [26]. Since 2013, they have been developed at the FRC CSC RAS. With the aid of these databases, users may collect and process large data sets: the French parallel sub-corpus alone exceeds 7.5 mln words. To investigate a given phenomenon, bilingual examples are automatically extracted from the text corpus. These examples are then analyzed, annotated, and saved by the user in the database. The SCDs have extensive search capabilities, including the ability to search for punctuation marks (for more on this, see [27, 28]). More particularly, the SCDs help to clarify what often goes unnoticed or unclear, with some translators making transformative choices that, from a certain normative perspective, may seem unusual.

Speaking once more about the dynamics of punctuation usage, let us look at the Russian version<sup>3</sup> of the internationally acclaimed French novel *Réparer les vivants* (2014) by Maylis de Kerangal. The source text uses zero ellipses, and the target text has as much as 24 of them. Nonetheless, before jumping to any conclusions, it is necessary to collect some additional statistics. The data from the Frantext corpus [29]<sup>4</sup> show that French uses only 3.5 ellipses per 1,000 words, whereas according to the data from [30, p. 378]<sup>5</sup>, Russian uses 10.6 ellipses per 1,000 words. In de Kerangal’s original novel, the ellipsis is absent, which is clearly the stylistically significant choice made by the author, widely known for her scrupulous writing. In the Russian translation, this punctuation mark is used at a rate of 0.4 per 1,000 words, which is approximately 26.5 times less frequently than in contemporary Russian literature. Here, its number approaches zero but does not equal zero leaving some room to question translation choices. Should the translator accurately mirror the author’s restraint toward the

<sup>1</sup> See also reflections on the translation of punctuation marks in [22, p. 140–156].

<sup>2</sup> In [23], F. Moretti coined the term *distant reading*.

<sup>3</sup> Made by Yu. Kotova and published in 2015.

<sup>4</sup> It totals 159 mln words.

<sup>5</sup> In [30], the corpus is compiled manually and totals 22,7 mln words. The Russian National Corpus, the largest monolingual Russian corpus, does not provide the ability to search for the ellipsis. Thus, the data on the use of this punctuation mark in Russian are taken from this work.

ellipsis, keeping the original ratio of individual preferences to common usage? The answer might lie in further quantitative analysis of the writer's other works to discern more clearly her punctuation preferences.

In other words, the SCDs and, more generally, the corpus-based tools enable translators to determine if there is a punctuation usage asymmetry between the source and target languages. They help to learn how to deal with punctuation differentiations by studying samples from both monolingual and parallel corpora. Therefore, corpus data become a reliable source of specifically targeted knowledge: by their means, one can identify the translation patterns for a given language pair and translation direction. In this way, modern corpus technologies provide a blueprint of translation possibilities that go far beyond punctuation to encompass every linguistic element that contributes to writing. Moreover, the corpus tools are helpful in research on individual translation decisions and constraints. Such is the case, to take a notable example, of the renowned Soviet translator N. Gal', who, in her translation of *Little Prince* (1943) by Antoine de Saint-Exupéry, went against the general trend, decreasing the original number of ellipses from 189 to 165.

## 4 Concluding Remarks

The role of punctuation marks in literary translation is quite evident. Alongside other elements, punctuation is responsible for the artistic integrity of the source text, and the translator lacking sufficient understanding of interlingual punctuation differences may distort this integrity. Modern computer-assisted tools and, more specifically, corpus resources provide literary translators with broad opportunities to verify and expand existing punctuation knowledge. The obtained data highlight the need to continue research in the field of contrastive punctuation. This will help to better define functional asymmetries between the same punctuation marks in different languages, which, in turn, will lead to better translation choices: it would be easier to decide if the source text allows the translator to follow a regular program or if there is a need for some specific decision.

## Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (CKP “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow). The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-28-00548).

## References

1. Lyashenko, B. 2007. *Khochu k mikrofonu: professional'nye sovety diktoru* [I want to go to the microphone: Professional advices for the announcer]. Moscow: Aspekt Press. 125 p. EDN: SUESBX.
2. Lehtinen, M. 2007. L'interprétation prosodique des signes de ponctuation: L'exemple de la lecture radiophonique de l'Étranger d'Albert Camus. *L'Information Grammaticale* 113:23–31.
3. Shcherba, L. 1935. Puntuatsiya [Punctuation]. *Literaturnaya entsiklopediya* [Literary encyclopedia]. Moscow: OGIZ RSFSR. 9:366–370. Available at: <http://feb-web.ru/feb/litenc/encyclp/le9/le9-3661.htm> (accessed August 27, 2024).
4. Serça, I. 2012. *Esthétique de la ponctuation*. Paris, France: Gallimard. 320 p.
5. Mitchell, L. C. 2020. *Mark my words: Profiles of punctuation in modern literature*. New York, London: Bloomsbury Academic. 192 p.
6. Vonnegut, K. 2005. *A man without a country*. New York, NY: Seven Stories Press. 74 p.
7. Gracq, J. 1980. *En lisant, en écrivant*. Mayenne, France: José Corti. 302 p.
8. Genis, A. 1999. *Dovlatov i okrestnosti. Filologicheskii roman* [Dovlatov and surroundings. Philological novel]. Moscow: VAGRIUS. 304 p.
9. Laurens, C. 2014. Parenthèse(s). *La Licorne* 52. Available at: <http://licorne.edel.univ-poitiers.fr/index.php?id=5828> (accessed July 29, 2024).
10. Rothwell, A., A. Way, and R. Youdale, eds. 2024. *Computer-assisted literary translation*. Abingdon, New York: Routledge. 302 p.
11. Chukovsky, K. 1919. Perevody prozaicheskie [Prose translations]. *Printsipy khudozhestvennogo perevoda* [Principles of literary translation]. Peterburg: Vsemirnaya literatura. 7–24.
12. Stolyarov, M. 1937. Iskusstvo perevoda khudozhestvennoy prozy [The art of translating fiction]. *Literaturnyy kritik* [Literary Critic] 5-6:242–254.
13. May, R. 1994. *The translator in the text: On reading Russian literature in English*. Evanston, IL: Northwestern University Press. 209 p.
14. Malmkjær, K. 1997. Punctuation in Hans Christian Andersen's stories and in their translations into English. *Non-verbal communication and translation: New perspectives and challenges in literature, interpretation and the media*. Ed. F. Poyatos. Amsterdam, Philadelphia: John Benjamins Publishing Co. 151–162. doi: 10.1075/btl.17.13mal.
15. Seagal, K. Ya. 2014. Puntuatsiya kak sredstvo sozdaniya emotsional'nogo podteksta (na materiale rasskaza M. A. Sholokhova “Sud'ba cheloveka” i ego perevodov na angliyskiy yazyk) [Punctuation as a means of creating of emotional subtext (on the material of the M. A. Sholokhov's story “The fate of a man” and its translations into English)]. *Izvestiya RAN. Ser. literaturny*

- i yazyka* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Studies in Literature and Language] 73(6):38–50. EDN: TEQTBF.
16. Bystrova-McIntyre, T. 2007. Looking at the overlooked: A corpora study of punctuation use in Russian and English. *Transl. Interpret. Stu.* 2(1):137–162. doi: 10.1075/tis.2.1.04bys.
  17. Wöllin, L. 2018. Punctuation: Providing the setting for translation? *Stud. Neophilol.* 90(1):37–49. doi: 10.1080/00393274.2018.1531254.
  18. Brusasco, P., and E. Corino. 2020. Translating punctuation. *Translating and comparing languages: Corpus-based insights*. Eds. S. Granger and M.-A. Lefer. Louvain-la-Neuve, Belgium: Presses universitaires de Louvain. 101–122.
  19. Nádvorníková, O. 2020. The use of English, Czech and French punctuation marks in reference, parallel and comparable web corpora: A question of methodology. *Linguist. Prag.* 30(2):30–50. doi: 10.14712/18059635.2020.1.2.
  20. Youdale, R. 2020. *Using computers in the translation of literary style: Challenges and opportunities*. London, New York: Routledge. 242 p.
  21. Rössler, P., P. Besl, and A. Saller, eds. 2021. *Vergleichende Interpunktion — comparative punctuation*. Berlin, Boston: De Gruyter. 454 p.
  22. Babkov, V. O. 2022. *Igra slov: praktika i ideologiya khudozhestvennogo perevoda* [Play on words: Practice and ideology of literary translation]. Moscow: AST, Corpus. 140–156.
  23. Moretti, F. 2013. *Distant reading*. London, U.K.: Verso. 254 p.
  24. Nuriyev, V. A. 2022. Perevodcheskiy analiz teksta s primeneniem informatsionnykh resursov: redutsirovanie spektra modeley perevoda v nadkorporusnykh bazakh dannykh [Computer-assisted textual analysis in translation: Reducing the spectrum of translation models in supracorpora databases]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(3):68–74. doi: 10.14357/19922264220309. EDN: UUWKDZ.
  25. Blatt, B. 2017. *Nabokov's favorite word is mauve: What the numbers reveal about the classics, bestsellers, and our own writing*. New York, NY: Simon & Schuster. 84–85.
  26. Nuriyev, V. A., and V. I. Karpov. 2023. Metodologiya korpusno-orientirovannogo issledovaniya v oblasti kontrastivnoy punktuatsii [Methodology of the corpus-based studies in the field of contrastive punctuation]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(2):90–95. doi: 10.14357/19922264230213. EDN: VBOZAO.
  27. Natsional'nyy korpus russkogo yazyka [Russian National Corpus]. Available at: <https://ruscorpora.ru> (accessed July 29, 2024).
  28. Nuriyev, V. A., and M. G. Kruzhkov. 2023. Korpusnye dannye pri kontrastivnom izuchenii punktuatsii [The parallel corpora perspective on studying contrastive punctuation]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 33(1):14–23. doi: 10.14357/08696527230102. EDN: JOUMFY.
  29. Inkova, O., and N. Popkova. 2017. Statistical data as information source for linguistic analysis of Russian connectors. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(3):123–131. doi: 10.14357/19922264170314. EDN: ZGIGJZ.
  30. Zaliznyak, Anna A., I. M. Zatsman, and O. Yu. Inkova. 2017. Nadkorporusnaya baza dannykh konnektorov: postroyeniye sistemy terminov [Supracorpora database on connectives: Term system development]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(1):100–108. doi: 10.14357/19922264170109. EDN: YOCCMYN.
  31. Frantext. Available at: <https://www.frantext.fr> (accessed July 29, 2024).
  32. Mukhin, M. Yu. 2019. Statisticheskaya dinamika mnogotochiya. Pozavchera... Vchera... Segodnya... [Statistical dynamics of ellipsis. The day before yesterday... Yesterday... Today...]. *Fenomen nezavershennogo* [The phenomenon of the unfinished]. Eds. T. A. Snigireva and A. V. Podchinenov. 2nd ed. Ekaterinburg: Ural University Pubs. 373–384. doi: 10.15826/B978-5-7996-2470-5.16.

Received July 5, 2024

## Contributor

**Nuriev Vitaly A.** (b. 1980) — Doctor of Science (PhD) in philology, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; [nurieff.v@gmail.com](mailto:nurieff.v@gmail.com)

# КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ПУНКТУАЦИОННОГО КОМПОНЕНТА В ХУДОЖЕСТВЕННОМ ПЕРЕВОДЕ\*

В. А. Нуриев

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,  
nurieff.v@gmail.com

**Аннотация:** Представлен обзор возможностей применения современных компьютерных инструментов для решения проблем межъязыковой пунктуационной асимметрии в художественном переводе. Принципы пунктуирования не обладают универсальностью: в разных естественных языках репертуар знаков препинания неодинаков, как и правила их расстановки. Литературному переводчику знание межъязыковых пунктуационных различий необходимо: пунктуационная составляющая наравне со всеми прочими отвечает за целостность исходного замысла, и переводчик, не имея достаточного представления о межъязыковых пунктуационных расхождениях, может эту целостность нарушить. Межъязыковые различия в употреблении знаков препинания регистрируются в научных работах давно, однако сейчас корпусно-ориентированный подход позволяет выйти на новый уровень теоретического и практического обобщения. В статье демонстрируется, как информатика и современные компьютерные ресурсы могут обеспечить обработку пунктуационного наполнения в литературном переводе. Ранее исследований, всецело сфокусированных на данном аспекте, не было. Таким образом, настоящее исследование вносит вклад в развитие нового направления, которое разрабатывает способы интеграции компьютерных инструментов в художественный перевод с целью всесторонней оптимизации переводческой деятельности.

**Ключевые слова:** художественный перевод с применением компьютерных инструментов; пунктуация; межъязыковая асимметрия; корпусное переводоведение; параллельный корпус; английский; русский; французский

DOI: 10.14357/19922264240314

EDN: MFTPWK

## Литература

1. *Ляшенко Б.* Хочу к микрофону: профессиональные советы диктору. — М.: Аспект Пресс, 2007. 125 с. EDN: SUESBX.
2. *Lehtinen M.* L'interprétation prosodique des signes de ponctuation : L'exemple de la lecture radiophonique de l'Étranger d'Albert Camus // L'Information Grammaticale, 2007. No. 113. P. 23–31.
3. *Щерба Л.* Пунктуация // Литературная энциклопедия. — М.: ОГИЗ РСФСР, 1935. Т. 9. С. 366–370. <http://feb-web.ru/feb/litenc/encyclop/le9/le9-3661.htm>.
4. *Serça I.* Esthétique de la ponctuation. — Paris, France: Gallimard, 2012. 320 p.
5. *Mitchell L. C.* Mark my words: Profiles of punctuation in modern literature. — New York, London: Bloomsbury Academic, 2020. 192 p.
6. *Vonnegut K.* A man without a country. — New York, NY, USA: Seven Stories Press, 2005. 74 p.
7. *Gracq J.* En lisant, en écrivant. — Mayenne, France: José Corti, 1980. 302 p.
8. *Генис А.* Довлатов и окрестности. Филологический роман. — М.: ВАГРИУС, 1999. 304 с.
9. *Laurens C.* Parenthèse(s) // La Licorne, 2014. No. 52. <http://licorne.edel.univ-poitiers.fr/index.php?id=5828>.
10. Computer-assisted literary translation / Eds. A. Rothwell, A. Way, R. Youdale. — Abingdon, New York: Routledge, 2024. 302 p.
11. *Чуковский К.* Переводы прозаические // Принципы художественного перевода. — Петербург: Всемирная литература, 1919. С. 7–24.
12. *Столяров М.* Искусство перевода художественной прозы // Литературный критик, 1937. № 5-6. С. 242–254.
13. *May R.* The translator in the text: On reading Russian literature in English. — Evanston, IL, USA: Northwestern University Press, 1994. 209 p.
14. *Malmkjær K.* Punctuation in Hans Christian Andersen's stories and in their translations into English // Nonverbal communication and translation: New perspectives and challenges in literature, interpretation and the media / Ed. F. Poyatos. — Amsterdam, Philadelphia: John Benjamins Publishing Co., 1997. P. 151–162. doi: 10.1075/btl.17.13mal.
15. *Сигал К. Я.* Пунктуация как средство создания эмоционального подтекста (на материале рассказа М. А. Шолохова «Судьба человека» и его переводов на английский язык) // Известия РАН. Серия литературы и языка, 2014. Т. 73. № 6. С. 38–50. EDN: TEQTBF.

\* Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 23-28-00548) с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).



16. *Bystrova-McIntyre T.* Looking at the overlooked: A corpora study of punctuation use in Russian and English // *Transl. Interpret. Stu.*, 2007. Vol. 2. No. 1. P. 137–162. doi: 10.1075/tis.2.1.04bys.
17. *Wollin L.* Punctuation: Providing the setting for translation? // *Stud. Neophilol.*, 2018. No. 90. Sup. 1. P. 37–49. doi: 10.1080/00393274.2018.1531254.
18. *Brusasco P., Corino E.* Translating punctuation // *Translating and comparing languages: Corpus-based insights* / Eds. S. Granger, M.-A. Lefer. — Louvain-la-Neuve, Belgium: Presses universitaires de Louvain, 2020. P. 101–122.
19. *Nádvorníková O.* The use of English, Czech and French punctuation marks in reference, parallel and comparable web corpora: A question of methodology // *Linguist. Prag.*, 2020. Vol. 30. Iss. 2. P. 30–50. doi: 10.14712/18059635.2020.1.2.
20. *Youdale R.* Using computers in the translation of literary style: Challenges and opportunities. — London, New York: Routledge, 2020. 242 p.
21. *Vergleichende Interpunktion — comparative punctuation* / Eds. P. Rössler, P. Besl, A. Saller. — Berlin, Boston: De Gruyter, 2021. 454 p.
22. *Бабков В. О.* Игра слов: практика и идеология художественного перевода. — М.: АСТ, Corpus, 2022. С. 140–156.
23. *Moretti F.* Distant reading. — London, U.K.: Verso, 2013. 254 p.
24. *Нуриев В. А.* Переводческий анализ текста с применением информационных ресурсов: редуцирование спектра моделей перевода в надкорпусных базах данных // *Информатика и её применения*, 2022. Т. 16. Вып. 3. С. 68–74. doi: 10.14357/19922264220309. EDN: UUWKDZ.
25. *Blatt B.* Nabokov’s favorite word is mauve: What the numbers reveal about the classics, bestsellers, and our own writing. — New York, NY, USA: Simon & Schuster, 2017. P. 84–85.
26. *Нуриев В. А., Карнов В. И.* Методология корпусно-ориентированного исследования в области контрастной пунктуации // *Информатика и её применения*, 2023. Т. 17. Вып. 2. С. 90–95. doi: 10.14357/19922264230213. EDN: VBOZAO.
27. Национальный корпус русского языка (НКРЯ). <https://ruscorpora.ru>.
28. *Нуриев В. А., Кружков М. Г.* Корпусные данные при контрастивном изучении пунктуации // *Системы и средства информатики*, 2023. Т. 33. № 1. С. 14–23. doi: 10.14357/08696527230102. EDN: JOUMFY.
29. *Inkova O., Popkova N.* Statistical data as information source for linguistic analysis of Russian connectors // *Информатика и её применения*, 2017. Т. 11. Вып. 3. С. 123–131. doi: 10.14357/19922264170314. EDN: ZGIGJZ.
30. *Зализняк Анна А., Зацман И. М., Инькова О. Ю.* Надкорпусная база данных коннекторов: построение системы терминов // *Информатика и её применения*, 2017. Т. 11. Вып. 1. С. 100–108. doi: 10.14357/19922264170109. EDN: YOСMYN.
31. Frantext. <https://www.frantext.fr>.
32. *Мухин М. Ю.* Статистическая динамика многоточия. Позавчера... Вчера... Сегодня... // *Феномен незавершенного* / Под ред. Т. А. Снигиревой, А. В. Подчинова. — 2-е изд. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. С. 373–384. doi: 10.15826/B978-5-7996-2470-5.16.

Поступила в редакцию 05.07.2024

**Борисов Андрей Владимирович** (р. 1965) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

**Босов Алексей Вячеславович** (р. 1969) — доктор технических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Воронцов Михаил Олегович** (р. 1996) — аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; математик Московского центра фундаментальной и прикладной математики

**Вышинский Леонид Леонидович** (р. 1941) — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Гончаров Александр Анатольевич** (р. 1994) — научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Добровольский Дмитрий Олегович** (р. 1953) — доктор филологических наук, главный научный сотрудник Института русского языка Российской академии наук; главный научный сотрудник Института языкознания Российской академии наук; главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Дюкова Елена Всеволодовна** (р. 1945) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Зацман Игорь Моисеевич** (р. 1952) — доктор технических наук, заведующий отделом Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Зорин Андрей Владимирович** (р. 1978) — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории вероятностей и анализа данных Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

**Куринов Юрий Николаевич** (р. 2002) — студент бакалавриата кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

**Листопад Сергей Викторович** (р. 1984) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Малашенко Юрий Евгеньевич** (р. 1946) — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Масляков Глеб Олегович** (р. 1996) — кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Назарова Ирина Александровна** (р. 1966) — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Новиков Даниил Андреевич** (р. 1993) — соискатель ученой степени кандидата наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

**Нуриев Виталий Александрович** (р. 1980) — доктор филологических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Синицын Игорь Николаевич** (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; профессор кафедры «Мехатроника и теоретическая механика» Московского авиационного инсти-

тута (национального исследовательского университета)

**Смелянский Руслан Леонидович** (р. 1950) — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой автоматизации систем вычислительных комплексов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

**Флёров Юрий Арсениевич** (р. 1942) — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Шестаков Олег Владимирович** (р. 1976) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского

государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; ведущий научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

**Шнурков Петр Викторович** (р. 1953) — кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

**Янаков Дмитрий Спартакович** (р. 2002) — магистрант Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

**Ярошенко Полина Владимировна** (р. 1994) — кандидат филологических наук, научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

---

## Правила подготовки рукописей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

---

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации предоставленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.
3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам. Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.
5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.
6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или ЛАТЭХ (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи необязательно.

7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 10 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны оформления представлены в интернете:

[http://www.ipiran.ru/journal/template\\_iiep\\_ssi\\_2024.zip](http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip)

8. Статья должна содержать следующую информацию на *русском и английском языках*:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием почтового адреса организации и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:  
[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp) и  
[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01\\_eng/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp);
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами;
- источники финансирования работы (ссылки на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.).

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний. Если источник имеет DOI и/или EDN, то их необходимо указывать.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала;
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://www.translit.net/ru/bgn/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Ниже приведены примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”.

**Описание статьи из журнала:**

Zagurenko, A. G., V. A. Korotovskikh, A. A. Kolesnikov, A. V. Timonov, and D. V. Kardymon. 2008. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizayna gidrorazryva plasta [Technical and economic optimization of the design of hydraulic fracturing]. *Neftyanoe hozyaystvo [Oil Industry]* 11:54–57.

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

**Описание статьи из электронного журнала:**

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

**Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):**

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.

**Описание материалов конференций:**

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

**Описание книги (монографии, сборники):**

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Latyshev, V. N. 2009. *Tribologiya rezaniya. Kn. 1: Friksionnye protsessy pri rezanii metallov* [Tribology of cutting. Vol. 1: Frictional processes in metal cutting]. Ivanovo: Ivanovskii State Univ. 108 p.

**Описание переводной книги** (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (*Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. Vibration problems in engineering. — 4th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 1974. 521 p.*)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. New York: Wiley. 521 p.

**Описание неопубликованного документа:**

Laturov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004 (unpubl.). *Geologiya i dobycha (NGT GiD)* [Geology and production (NGT GiD)]. Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198.

**Описание интернет-ресурса:**

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

**Описание диссертации или автореферата диссертации:**

Semenov, V. I. 2003. *Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyy tor* [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. Moscow. D.Sc. Diss. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. *Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa* [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

**Описание ГОСТа:**

GOST 8.586.5-2005. 2007. *Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv* [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publs. 10 p.

**Описание патента:**

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. *Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya* [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- указывать в тексте письма название статьи, авторов и журнал, в который направляется статья;
- использовать attach (присоединение);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

12. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

**Адрес редакции журнала «Информатика и её применения»:**  
Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН  
Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05  
e-mail: [iiep@frccsc.ru](mailto:iiep@frccsc.ru) (Стригина Светлана Николаевна)  
<http://www.ipiran.ru/journal/issues/>

---

## Requirements for manuscripts submitted to Journal “Informatics and Applications”

---

Journal “Informatics and Applications” (Inform. Appl.) publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of informatics and its applications.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

The topics covered include the following areas:

- theoretical fundamentals of informatics;
- mathematical methods for studying complex systems and processes;
- information systems and networks;
- information technologies; and
- architecture and software of computational complexes and networks.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

**Agreement on the transfer of rights to publish:**

*“We, the undersigned authors of the manuscript “. . . ”, pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Informatics and Applications” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations.*

*Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).*

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If the authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved for publication. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.
7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 10 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site:

[http://www.ipiran.ru/journal/template\\_iiep\\_ssi\\_2024.zip](http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip).

8. The articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author’s name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format (see site):

[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp) and

[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01\\_eng/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp);

- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae;
  - indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.  
Important! Keywords must not be sentences; and
  - Acknowledgments.
9. References. Russian references have to be presented both in English translation and Latin transliteration (refer <http://www.translit.net/ru/bgn/>).
- Please take into account the following examples of Russian references appearance:
- Article in journal:**  
Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.
- Journal article in electronic format:**  
Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).
- Article from the continuing publication (collection of works, proceedings):**  
Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy "stal'-kompozit" [Experimental study of the strength of joints "steel-composite"]. *Trudy MGTU "Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem" [Bauman MSTU "Mathematical Modeling of Complex Technical Systems" Proceedings]*. 593:125–130.
- Conference proceedings:**  
Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi" [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]*. Moscow. 267–272.
- Books and other monographs:**  
Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem [Operation of turbine generators with direct cooling]*. Moscow: Energy Publs. 352 p.
- Dissertation and Thesis:**  
Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.
- State standards and patents:**  
GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publs. 10 p.  
Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.
- References in Latin transcription are presented in the original language.  
References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets. All items from the reference list should be cited.
10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.
11. Submissions of files by e-mail must include:
- the journal title and author's name in the "Subject" field;
  - the article title, authors' names, and the journal title, whereto the paper is being submitted, in the text of the email;
  - an article and additional materials have to be attached using the "attach" function; and
  - an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.
12. "Informatics and Applications" journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

**Editorial Board address:**

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia  
Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05  
e-mail: [iiep@frccsc.ru](mailto:iiep@frccsc.ru) (to Svetlana Strigina)  
<http://www.ipiran.ru/english/journal.asp>