

Информатика и её применения

Том 11 Выпуск 1 Год 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	
И. А. Соколов	2
Аналитическое моделирование широкополосных процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных	
И. Н. Синицын	3
Классификация по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами I: формулы байесовской оценки	
А. В. Борисов	11
Обратимое сжатие данных посредством универсального арифметического кодирования	
А. И. Стефанович, Д. В. Сушко	20
Вероятностные модели оценки устойчивости программ к кратковременным аппаратным сбоям	
С. Л. Френкель, В. Н. Захаров, Б. М. Басок	46
О некоторых математических и программных методах построения структурных моделей информационных потоков	
А. К. Горшенин	58
Многоуровневые модели решения многоклассовых задач распознавания	
А. А. Докукин, В. В. Рязанов, О. В. Шут	69
Алгоритм преобразования одного графа в другой с минимальной ценой	
К. Ю. Горбунов, В. А. Любецкий	79
Индивидуализация процесса обучения в режиме веб-конференции на основе иерархической нечеткой экспертной системы	
А. С. Алексейчук, А. В. Пантелеев	90
Надкорпусная база данных коннекторов: построение системы терминов	
Анна А. Зализняк, И. М. Зацман, О. Ю. Инькова	100
On uniqueness of clearing vectors reducing the systemic risk	
Kh. El Bitar, Yu. Kabanov, and R. Mokbel	109
Informatics and its role for the study of genesis and properties of complex natural systems	
R. B. Seyful-Mulyukov	119
Об авторах	124
Авторский указатель за 2007–2016 гг.	126
Правила подготовки рукописей	154
Requirements for manuscripts	157

Технический редактор *Л. Кокушкина* Художественный редактор *М. Седакова*
Сдано в набор 16.01.17. Подписано в печать 31.03.17. Формат 60 x 84 / 8
Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл.-печ. л. 18,37. Уч.-изд. л. 17,5. Тираж 100 экз.
Заказ № 976

Издательство «ТОРУС ПРЕСС», Москва 121614, ул. Крылатская, 29-1-43
Отпечатано в НИПКЦ «Восход-А» с готовых файлов
Москва 109052, ул. Смирновская, д. 25, стр. 3

Уважаемый читатель!

В 2017 г. исполняется 10 лет со времени выхода в свет первого номера журнала «Информатика и её применения» — научного журнала Российской академии наук, издающегося под научно-методическим руководством Отделения нанотехнологий и информационных технологий Российской академии наук. Учредителем журнала является Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН) (до 2015 г. — Институт проблем информатики РАН).

Необходимость издания такого журнала была вызвана активным развитием информатики и информационных технологий, большой важностью этого научного направления для развития страны, проникновением информационных технологий во все сферы жизни современного общества.

Тематику журнала определяет тот факт, что информатика — это комплексная фундаментальная научная дисциплина, опирающаяся на достижения ряда других наук, в том числе математики, физики, лингвистики и др. Одновременно журнал уделяет большое внимание современным информационным технологиям, являющимся приложениями результатов информатики как фундаментальной науки.

За прошедшие 10 лет (2007–2016 гг.) издано 38 выпусков журнала. В них размещено 452 публикации, в том числе 430 научных статей и 22 информационных публикации (обзоры, рецензии и др.). Среди авторов журнала представители ведущих научных организаций и университетов страны, в том числе Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, ФИЦ ИУ РАН (в том числе ИПИ РАН, ВЦ им. А. А. Дородницына РАН, ИСА РАН), Института точной механики и вычислительной техники им. С. А. Лебедева РАН, Института космических исследований РАН, Института астрономии РАН, ряда институтов Сибирского отделения РАН, МФТИ, МИФИ, Высшей школы экономики, Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербургского государственного политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, Российского университета дружбы народов, Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта, Вологодского государственного университета и др. Публиковались статьи зарубежных авторов, в том числе ученых из Израиля, США, Финляндии, Франции, Швейцарии, Швеции и других стран.

В конце настоящего выпуска журнала помещен указатель статей, опубликованных в томах 1–10 (2007–2016 гг.).

Журнал включен в Российский индекс научного цитирования и в базу данных RSCI Web of Science, перечень ВАК, базу данных CrossRef и информационную систему «Общероссийский математический портал MathNet». С 2015 г. журнал индексируется в библиографической и реферативной базе данных SCOPUS.

Мы всегда будем помнить ушедших из жизни членов редакционного совета и редакционной коллегии журнала: академика С. К. Коровина, профессоров А. В. Печинкина и И. А. Ушакова, которые внесли неоценимый вклад в становление и развитие журнала.

После объединения в 2015 г. трех учреждений Российской академии наук — Института проблем информатики, Вычислительного центра им. А. А. Дородницына и Института системного анализа — в Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН) именно этот Центр стал базовой организацией для издания журнала, что существенно расширило как тематику журнала, так и его возможности по привлечению новых авторов, в том числе и зарубежных.

В настоящее время тематику журнала в первую очередь составляют:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

Эти направления особенно важны в связи с необходимостью решения задач формирования технологической базы инновационного развития, обеспечения научно-технологического прорыва в области создания и развития отечественных информационных и коммуникационных технологий в интересах достижения высокого качества и стабильности систем управления и предоставления услуг в экономической и социальной сферах.

Мы, как и ранее, приглашаем авторов представлять для публикации в журнале статьи как с достижениями в области теоретических проблем информатики, так и с изложением результатов ее практического приложения, а также рецензии на наиболее интересные книжные новинки в области информатики и информационных технологий, объявления о крупнейших международных и всероссийских конференциях, различных научных мероприятиях по этой тематике и другие информационные материалы.

Надеемся, что и в дальнейшем содержание статей, помещаемых в журнале, будет вызывать интерес научной общественности. Редакционный совет, редколлегия и редакция журнала, со своей стороны, сделают все для того, чтобы журнал и впредь своевременно и подробно информировал читателей о новейших достижениях информатики и ее актуальных практических приложениях.

Главный редактор журнала «Информатика и её применения»,
академик РАН

И. А. Соколов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ПРОЦЕССОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ*

И. Н. Сеницын¹

Аннотация: Рассматриваются конечномерные нелинейные стационарные и нестационарные стохастические системы (СтС), не разрешенные относительно производных в условиях широкополосных гауссовских и негауссовских возмущений. Такие СтС описывают поведение многих технических систем информатики и управления. Для аналитического моделирования и оценки чувствительности к параметрам нормальных (гауссовских) нестационарных и стационарных стохастических процессов (СтП) в таких СтС разработаны два метода аналитического моделирования (ММ) на основе метода статистической линеаризации (МСЛ) и метода нормальной аппроксимации (МНА). Приведены типовые нелинейности, не разрешенные относительно производных, а также два тестовых примера. Алгоритмы положены в основу разрабатываемого инструментального программного обеспечения для решения задач надежности и безопасности технических систем.

Ключевые слова: аналитическое моделирование; метод нормальной аппроксимации (МНА); метод статистической линеаризации (МСЛ); нормальный (гауссовский) стохастический процесс (СтП); стохастическая система, не разрешенная относительно производных; чувствительность к параметрам

DOI: 10.14357/19922264170101

1 Введение

Методы аналитического моделирования СтП в нелинейных СтС, разрешенных относительно производных, на основе МСЛ и МНА подробно описаны в [1–7].

Рассмотрим обобщение [4, 5] на случай нелинейных дифференциальных СтС, не разрешенных относительно производных. Такими уравнениями описываются элементы многих технических средств информатики и управления.

В разд. 2 и приложении П1 приведены типовые нелинейности, зависящие от производных, и их статистическая линеаризация.

Раздел 3 содержит изложение ММ на основе МСЛ для негладких нелинейностей. Особое внимание уделено уравнениям чувствительности ММ на основе МСЛ.

В разд. 4 сформулированы некоторые замечания и ММ на основе МНА для гладких нелинейностей.

В приложениях П2 и П3 приведены тестовые примеры, иллюстрирующие применение МСЛ и МНА.

2 Типовые нелинейности, зависящие от производных, и их статистическая линеаризация

Рассмотрим сначала скалярную действительную нелинейность следующего вида:

$$Z_t = \varphi \left(t, \Theta, Y_t, \dot{Y}_t, \dots, Y_t^{(k)}, U_t, \dots, U_t^{(r)} \right). \quad (1)$$

Здесь Θ — определяющие параметры нелинейности; $Y_t = Y(t)$ и $Y_t^{(k)}$ — скалярный СтП и его k -я производная ($k = 1, 2, \dots$); $U_t = U(t)$ и $U_t^{(r)}$ — скалярное стохастическое возмущение и ее r -я производная ($r = 1, 2, \dots$).

Важный класс нелинейностей (1) составляют нелинейности, в которые возмущение U_t и его производные входят аддитивно:

$$Z_t = \varphi^+ \left(t, \Theta, Y_t, \dot{Y}_t, \dots, Y_t^{(k)} \right) + \varphi^- \left(t, \Theta, U_t, \dot{U}_t, \dots, U_t^{(r)} \right). \quad (2)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-07-02244).

¹ Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, sinitsin@dol.ru

Обозначим через

$$X_t = \left[Y_t, \dot{Y}_t, \dots, Y_t^{(k)}, U_t, \dot{U}_t, \dots, U_t^{(r)} \right]^T$$

составной вектор. Тогда при условии конечности ковариационных моментов СтП X_t согласно МСЛ нелинейность (1) допускает следующее приближенное представление:

$$Z_t = \varphi = \varphi(t, \Theta, X_t) \approx \varphi_0 + k_{1x}^\varphi X_t^0. \quad (3)$$

Здесь $\varphi_0 = \varphi_0(t, \Theta, m_t^x, K_t^x)$ и $k_{1x}^\varphi = k_{1x}^\varphi(t, \Theta, m_t^x, K_t^x)$ — векторные и матричные коэффициенты статистической линейризации, определяемые уравнениями:

$$\varphi_0 = M_N[\varphi]; \quad (4)$$

$$k_{1x}^\varphi = \left[\left(\frac{\partial}{\partial m_t^x} \right) \varphi_0 \right]^T, \quad (5)$$

где $X_t^0 = X_t - m_t^x$, $m_t^x = M_N[X_t] = [m_{1t} \dots m_{nt}]^T$, $K_t^x = [k_{pq}] = M_N[X_t^0 X_t^{0T}]^T$ ($p, q = 1, \dots, n$); M_N — символ математического ожидания для n -мерного нормального распределения, $n = k + 1$.

Для векторных нелинейностей векторного аргумента (1) аналогичные представления имеют место для компонент φ_l . В этом случае составной вектор \bar{X}_t будет иметь вид:

$$\bar{X}_t = \left[Y_t^T \dot{Y}_t^T \dots Y_t^{(k)T} U_t^T \dots U_t^{(r)T} \right]^T,$$

где $\dim \bar{X}_t = n_Y(k + 1) + n_U(r + 1)$.

3 Основные результаты

Пусть задана векторная нестационарная дифференциальная СтС, не разрешенная относительно производной СтП Y_t , вида

$$\varphi = \varphi(t, \Theta, Y_t, \dots, Y_t^{(k)}, U_t) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (6)$$

$$\dot{U}_t = a_0^U + a_1^U U_t + b_0^U V_t. \quad (7)$$

Здесь φ — в общем случае негладкая функция относительно $Y_t^{(k)}$; a_0 и a_1^U — векторно-матричные коэффициенты формирующего фильтра (ФФ); V_t — белый (в общем случае негауссовский СтП) шум с нулевым математическим ожиданием и матрицей интенсивностей $\nu_t = \nu^V(t)$. Выделим переменные

$$\bar{Y}'_t = \left[Y_t^T \dot{Y}_t^T \dots Y_t^{(k-1)T} \right]^T = \left[Y_t^T \bar{Y}_{1t}^T \dots \bar{Y}_{k-1,t}^T \right]^T, \\ Y_t^{(k)} = \bar{Y}_{kt},$$

и применим к уравнению (6) МСЛ. В результате получим векторное уравнение:

$$\varphi_0 + k_{1\bar{Y}'_k}^\varphi \bar{Y}'_{kt}{}^0 + k_{1U}^\varphi U_t^0 = 0. \quad (8)$$

Коэффициенты статистической линейризации в (8) будут параметрически зависеть от переменных t и Θ , математических ожиданий $m_t^{\bar{Y}'}$, $m_t^{\bar{Y}'_k}$ и m_t^U , ковариационных и взаимно ковариационных матриц $K_t^{\bar{Y}'}$, $K_t^{\bar{Y}'_k}$, K_t^U , $K_t^{\bar{Y}'\bar{Y}'_k}$, $K_t^{\bar{Y}'U}$ и $K_t^{\bar{Y}'_k U}$. Разделяя в (8) детерминированные и центрированные части, придем с учетом (7) к векторным уравнениям для математических ожиданий

$$\varphi_0 = 0; \quad (9)$$

$$\dot{m}_t^U = a_0^U + a_1^U m_t^U \quad (10)$$

и центрированных переменных

$$k_{1\bar{Y}'_k}^\varphi \bar{Y}'_{kt}{}^0 + k_{1\bar{Y}'_k}^\varphi \bar{Y}'_{kt}{}^0 + k_{1U}^\varphi U_t^0 = 0; \quad (11)$$

$$\dot{U}_t^0 = a_1^U U_t^0 + b_0^U V_t.$$

Полагая

$$\det \left[k_{1\bar{Y}'_k}^\varphi \right] \neq 0, \quad (12)$$

разрешим (11) относительно старшей производной:

$$\bar{Y}'_{kt}{}^0 = Y_t^{(k)0} = - \left(k_{1\bar{Y}'_k}^\varphi \right)^{-1} \left[k_{1\bar{Y}'_k}^\varphi \bar{Y}'_{kt}{}^0 + k_{1U}^\varphi U_t^0 \right]. \quad (13)$$

Введем центрированный составной вектор $X_t^0 = \left[X_t'^0 U_t^0 \right]^T$. Здесь $X_t'^0 = I_k Y_t'^0$, где I_k — единичная матрица. Тогда совокупная система уравнений для центрированных переменных примет следующий вид:

$$\dot{X}_t^0 = a^X X_t^0 + b^X V_t. \quad (14)$$

Здесь введены обозначения для блочных матриц:

$$a^X = \begin{bmatrix} a^{\bar{X}'} & a^{\bar{X}'U} \\ a^{U\bar{X}'} & a^U \end{bmatrix}; \quad b^X = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0^U \end{bmatrix};$$

$$a^{\bar{X}'} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -(k_{1\bar{Y}'_k}^\varphi)^{-1} k_{1\bar{X}'}^\varphi & 0 \end{bmatrix};$$

$$a^{\bar{X}'U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(k_{1\bar{Y}'_k}^\varphi)^{-1} k_{1U}^\varphi \end{bmatrix};$$

$$a^{U\bar{X}'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad a^U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_1^U \end{bmatrix}.$$

Применяя к линейным уравнениям (14) корреляционную теорию линейных СтС [1, 2], придем к следующим обыкновенным дифференциальным

уравнениям для ковариационной матрицы $K_t^X = M_N [X_t^0 X_t^{0T}]$ и матрицы ковариационных функций $K^X(t_1, t_2) = M_N [X_{t_1}^0 X_{t_2}^{0T}]$:

$$\dot{K}_t^X = a^X K_t^X + K_t^X (a^X)^T + b^X \nu (b^X)^T, \quad K_{t_0}^X = K_0^X; \quad (15)$$

$$\frac{\partial K^X(t_1, t_2)}{\partial t_2} = K^X(t_1, t_2) (a_{t_2}^X)^T \quad (16)$$

при начальном условии $K^X(t_1, t_1) = K_{t_1}^X$.

Коэффициенты статистической линеаризации φ_0 и $k_{1\bar{Y}_k}^\varphi$ в (8) зависят от математического ожидания и ковариационной матрицы вектора \bar{Y}_k . Для этого используется уравнение (9) и соотношение

$$\dot{m}_t^{\bar{Y}_k} = m_t^{\bar{Y}_k}. \quad (17)$$

Для определения $K_t^{\bar{Y}_k}$ применяется уравнение (13). В результате получим для него искомое соотношение:

$$\begin{aligned} K_t^{\bar{Y}_k} &= \left[\left(k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right)^{-1} k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right] K_t^{\bar{Y}_k'} \left[\left(k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right)^{-1} k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right]^T + \\ &+ \left[\left(k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right)^{-1} k_{1U}^\varphi \right] K_t^U \left[\left(k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right)^{-1} k_{1U}^\varphi \right]^T + \\ &+ \left[\left(k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right)^{-1} k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right] K_t^{\bar{Y}'U} \left[\left(k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right)^{-1} k_{1U}^\varphi \right]^T + \\ &+ \left[\left(k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right)^{-1} k_{1U}^\varphi \right] K_t^{U\bar{Y}'} \left[\left(k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right)^{-1} k_{1\bar{Y}_k}^\varphi \right]^T. \quad (18) \end{aligned}$$

Таким образом, имеем следующий результат.

Теорема 1. Пусть в нестационарной нелинейной СтС, не разрешенной относительно производных, (6), (7) выполнены следующие условия:

- 1⁰ дисперсии и ковариационные моменты СтП Y_t и их производных до k -го порядка и СтП U_t конечны;
- 2⁰ векторная функция φ в (6) действительна и допускает статистическую линеаризацию по Казакову (8);
- 3⁰ имеет место условие (12).

Тогда в основе МАМ согласно МСЛ лежат уравнения (9), (10), (15) и (16) при условиях (17) и (18).

В стационарном случае, когда $\nu = \nu_*$, $m_t^X = m_*^X$, $K_t^X = K_*^X$ и $K^X(t_1, t_2) = k^X(\tau)$ ($\tau = t_1 - t_2$), уравнения МАМ на основе МСЛ имеют следующий вид:

$$\varphi_{0*} = 0; \quad (19)$$

$$a_*^X K_*^X + K_*^X (a_*^X)^T + b_*^X \nu_* (b_*^X)^T = 0; \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_\tau^X(\tau) &= a_*^X k^X(\tau); \\ k_\tau^X(0) &= K_*^X \quad (\forall \tau > 0); \\ k_\tau^X(\tau) &= k_\tau^X(-\tau)^T \quad (\forall \tau < 0). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 уравнения (6), (7) стационарны и существует ковариационно-стационарный СтП, а матрица a_*^X асимптотически устойчива. Тогда в основе МАМ согласно МСЛ лежат уравнения (19)–(21).

Если для оценки чувствительности МАМ к параметрам Θ , явно входящим в (6), применить метод функций чувствительности первого порядка для $\nabla^\Theta m_t^X$, $\nabla^\Theta K_t^X$ и $\nabla^\Theta K^X(t_1, t_2)$, то в условиях теоремы 1 будем иметь следующие уравнения [8]:

$$\dot{\nabla}^\Theta m_t^X = A_t^m(t, \Theta), \quad \nabla^\Theta m_{t_0}^X = 0; \quad (22)$$

$$\dot{\nabla}^\Theta K_t^X = A_t^K(t, \Theta), \quad \nabla^\Theta K_{t_0}^X = 0; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^\Theta K^X(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= A_{t_1 t_2}^K(t_1, t_2, \Theta), \\ \nabla^\Theta K^X(t_0, t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь функции A получаются путем дифференцирования правых частей уравнений теоремы 1 по параметру Θ .

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда уравнения для первых функций чувствительности будут иметь вид (22)–(24) при условии конечности правых частей.

Аналогичная теорема имеет место в стационарном случае, когда выполнены условия теоремы 2.

Для алгоритмизации МАМ (1)–(3) на основе теорем 1–3 необходимо уметь вычислять интегралы (4), (5). Численные методы описаны в [8, 9]. При этом численное интегрирование уравнений для математических ожиданий и ковариационных моментов должно быть согласовано с вычислением коэффициентов статистической линеаризации.

4 Замечания и обобщения

4.1. Примеры некоторых типовых нелинейностей (1), а также выражения для их коэффициентов статистической линеаризации даны в приложении П1.

4.2. Путем расширения вектора X_t аналогичные теоремы устанавливаются для нелинейностей в (6), в которые входят производные $U_t^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots$).

4.3. Для достаточно гладких нелинейностей в (6) можно применить аналог известного метода «интегрирования посредством дифференцирования»,

если воспользоваться формулами Ито [1, 2] для стохастического дифференцирования сложных функций.

В самом деле, результаты разд. 3 допускают обобщение на случай гладких функций

$$\varphi = \varphi(t, \Theta, Y_t, \dot{Y}_t, \dots, Y_t^{(k)}, U_t) = 0 \quad (25)$$

и нелинейного ФФ вида

$$\dot{U}_t = a^U(t, \Theta, U_t) dt + b^U(t, \Theta, U_t) V_t^U. \quad (26)$$

Здесь $a^U = a^U(t, \Theta, U_t)$ и $b^U(t, \Theta, U_t) - (n^Y \times 1)$ - и $(n^Y \times n^Y)$ -мерные функции; V_t^U — белый шум в строгом смысле [1, 2], допускающий представление

$$V_t^U = \dot{W}_t^U; \\ W_t^U = W_0^U(t, \Theta) + \int_{R_0^q} c^U(\Theta, \rho) P^0(t, \Theta, d\rho),$$

где ν_t — его интенсивность:

$$\nu_t = \nu_t^{W_0} + \int_{R_0^q} c^U(\Theta, \rho) [c^U(\Theta, \rho)]^T \nu_P(t, \Theta, \rho) d\rho;$$

$c^U = c^U(\Theta, \rho)$ — известная векторная функция той же размерности, что и W_t^0 , а интеграл при любом $t \geq t_0$ представляет собой стохастический интеграл по центрированной пуассоновской мере $P^0(t, \Theta, \mathcal{A})$, независимой от W_0 и имеющей независимые значения на попарно непересекающихся множествах; \mathcal{A} — борелевское множество пространства R_0^q с выколотым началом; ν^W, ν^{W_0} и ν^P — интенсивности W_t^U, W_{0t} и P^0 . Уравнение (26) понимается в смысле Ито и имеет единственное решение в среднем квадратическом [1, 2].

Для гладких функций в (25) выполним с уравнениями (25) и (26) следующие преобразования:

- (1) будем дифференцировать сполна по t левые части уравнений (25) по обобщенной формуле Ито [1, 2] до тех пор, пока не появятся производные белого шума. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \dots, \varphi^{(h)} = 0; \quad (27)$$

- (2) введем вектор $Z_t = [Z_t^{\prime T} Z_t^{\prime\prime T}]^T$, составленный из $Z_t' = [Y_t^T \dot{Y}_t^T \dots Y_t^{(k-1)T}]^T$ и вспомогательного вектора Z_t'' , определяемого уравнениями (27);

- (3) в результате придем к уравнениям, разрешенным относительно дифференциалов следующего вида:

$$dZ_t = a^Z dt + b^Z dW_0 + \int_{R_0^q} c^Z P^0(\Theta, t, du),$$

для которых уравнения МНА имеют известный вид [1, 2]:

$$\dot{m}_t^Z = \Phi_t^m(t, \Theta, m_t^Z, K_t^z); \quad m_0^Z = m_{t_0}^Z, \quad (28)$$

$$\dot{K}_t^Z = \Phi_t^K(t, \Theta, m_t^Z, K_t^z); \quad K_0^Z = K_{t_0}^Z, \quad (29)$$

$$\frac{\partial K^Z(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \Phi_{t_1, t_2}^K(t_1, t_2, \Theta, m_{t_2}^Z, K_{t_2}^z), \\ K^Z(t_1, t_2) = K_{t_1}^Z. \quad (30)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Phi_t^m(t, \Theta, m_t^Z, K_t^z) = M_N[a^Z]; \quad (31)$$

$$\Phi_t^K(t, \Theta, m_t^Z, K_t^z) = \Phi_{1t}(t, \Theta, m_t^Z, K_t^z) + \\ + \Phi_{1t}^T(t, \Theta, m_t^Z, K_t^z) + \Phi_{2t}(t, \Theta, m_t^Z, K_t^z); \quad (32)$$

$$\Phi_{1t}(t, \Theta, m_t^Z, K_t^z) = M_N[a^Z(Z_t - m_t^Z)^T]; \quad (33)$$

$$\Phi_{2t}(t, \Theta, m_t^Z, K_t^z) = M_N[\sigma(t, \Theta, Z_t)]; \quad (34)$$

$$\sigma(t, \Theta, Z_t) = \sigma_0(t, \Theta, Z_t) + \\ + \int_{R_0^q} c^Z(t, \Theta, Z_t, u) c^Z(t, \Theta, Z_t, u)^T \nu_P(t, \Theta, du), \\ \sigma_0(t, \Theta, Z_t) = \\ = b^Z(t, \Theta, Z_t) \nu_0(t, \Theta) b^Z(t, \Theta, Z_t)^T; \quad (35)$$

$$\Phi_{t_1, t_2}^K(t_1, t_2, \Theta, m_{t_2}^Z, K_{t_2}^z) = \\ = K^Z(t_1, t_2) (K_{t_2}^Z)^{-1} \Phi_{1t}^T. \quad (36)$$

Таким образом, имеем следующие результаты.

Теорема 4. Пусть для СтС (25), (26) выполнены условия:

- 1^0 правые части уравнений (25) имеют производные по явно входящим переменным $Y_t, \dots, Y_t^{(k)}$ до порядка n_Y^{φ} ;
- 2^0 уравнения (25) совместно с (27) допускают приведение к виду (36) и имеют единственное решение, понимаемое в среднем квадратическом (с.к.).

Тогда уравнения МАМ на основе МНА имеют вид (28)–(30) при условии конечности интегралов (31)–(35).

Аналогичная теорема устанавливается в стационарном случае.

4.4. Для повышения точности МАМ можно воспользоваться известными методами параметризации распределений (моментов, семиинвариантов, ортогональных разложений плотностей, эллипсоидальной аппроксимации и линеаризации и др.), изложенными в [1–3].

4.5. В том случае когда вектор возмущений U_t или нелинейность φ заданы каноническими разложениями, полученные результаты допускают обобщение, если воспользоваться результатами [2, 3].

4.6. Особый интерес представляет развитие МАМ для узкополосных СтП на основе метода гармонического баланса или метода медленно меняющихся амплитуд.

4.7. Полученные результаты допускают непосредственное развитие и для разностных СтС.

5 Заключение

На основе приближенного метода статистической линеаризации разработаны алгоритмы аналитического моделирования векторных широкополосных нормальных процессов в динамических СтС, не разрешенных относительно производных. Получены уравнения МНА для гладких функций (6), нелинейных ФФ и винеровско-пуассоновских шумов. Особое внимание уделено уравнениям чувствительности к параметрам.

В приложении П1 приведены выражения для типовых нелинейностей и коэффициентов статистической линеаризации, а в приложениях П2 и П3 — тестовые примеры.

Алгоритмы положены в основу разрабатываемого инструментального программного обеспечения StS-ANALYSIS'2017 для решения задач надежности и безопасности технических систем.

Приложения

П.1. Приведенные в [4] типовые одно- и многомерные нелинейности, если в качестве одной из переменных выбрать \dot{Y}_t , могут служить моделями нелинейностей, не разрешенных относительно производных.

В таблице на основе [4] составлены аналитические выражения для некоторых типовых одно- и многомерных нелинейностей. Здесь введены следующие обозначения:

$$h = [h_1 \cdots h_n]^T; |h| = h_1 + \cdots + h_n;$$

$$e_p = \left[0 \cdots \frac{1}{p} \cdots 0 \right];$$

$$k_p = [k_{p1} \cdots k_{pn}] \quad (p = 1, \dots, n)^p; K = [k_{pq}],$$

а через α_h и μ_h обозначены вероятностные начальные и центральные моменты порядка h , $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{e_p} = m_p$. Функцию Лапласа и интеграл от нее возьмем в виде [1, 2, 4]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt; \quad \Phi'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-z^2/2} dt.$$

П.2. Рассмотрим МАМ для одномерной СтС вида:

$$\left. \begin{aligned} \psi(\dot{Y}_t) &= a_0^Y + a_1^Y Y_t + a_1^U U_t; \\ \dot{U}_t &= a_0^U + a_1^U U_t + b_0^U V_t, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Коэффициенты МСЛ для типовых нелинейностей

№	φ	φ_0
1.	\dot{Y}^2	$D_{\dot{Y}}(1 + m_{\dot{Y}}^2 D_{\dot{Y}}^{-1})$
2.	\dot{Y}^3	$D_{\dot{Y}}(3 + m_{\dot{Y}}^2 D_{\dot{Y}}^{-1})$
3.	\dot{Y}^{2n+1}	$\sum_{l=0}^{2n+1} C_{2n+1}^l m_{\dot{Y}}^l \mu_{2n+1-l}$
4.	$\text{sgn } \dot{Y}$	$2\Phi\left(\frac{m_{\dot{Y}}}{\sqrt{D_{\dot{Y}}}}\right)$
5.	$\dot{Y}^2 \text{sgn } \dot{Y}$	$2D_{\dot{Y}} \left[(1 + m_{\dot{Y}}^2 D_{\dot{Y}}^{-1}) \Phi\left(\frac{m_{\dot{Y}}}{\sqrt{D_{\dot{Y}}}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\dot{Y}}}} \exp\left(-\frac{m_{\dot{Y}}^2}{2D_{\dot{Y}}}\right) \right]$
6.	$1(\dot{Y})$	$\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_{\dot{Y}}}{\sqrt{D_{\dot{Y}}}}\right)$
7.	$Y_1^{h_1} \cdots Y_n^{h_n}$ (h_1, \dots, h_n — целые неотрицательные числа: $h = h_1 + \cdots + h_n$)	$\alpha_h = m_p \alpha_{h-e_p} + \sum_{r=1}^n h_r k_{pr} \alpha_{h-e_p-e_r} - k_{pp} \alpha_{h-2e_p},$ $\alpha_0 = 1, \quad \alpha_{e_p} = m_p$

где $\psi(\dot{Y}_t)$ — нелинейная недифференцируемая функция.

Уравнения МАМ на основе МСЛ согласно теореме 1 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 0^Y + a_1^Y m_t^Y + a_1^U m_t^U, \quad \dot{m}_t^Y &= m_t^Y; \\ k_{1\dot{Y}}^\psi(m^{\dot{Y}}, D^{\dot{Y}})\dot{Y}_t^0 &\approx a_1^Y Y_t^0 + a_1^U U_t^0, \quad \dot{U}_t^0 = a_1^U U_t^0 + b_0^U V_t; \\ \dot{D}_t^U &= 2a_1^U D_t^U + (b_0^U)^2 \nu, \\ \dot{D}_t^Y &= 2 \left[a_1^Y (k_{1\dot{Y}}^\psi)^{-1} D_t^Y + a_1^U (k_{1\dot{Y}}^\psi)^{-1} K_t^{UY} \right]; \\ \dot{K}_t^{UY} &= \left[a_1^U + a_1^Y (k_{1\dot{Y}}^\psi)^{-1} \right] K_t^{UY} + a_1^U (k_{1\dot{Y}}^\psi)^{-1} D_t^U; \\ \dot{D}_t^{\dot{Y}} &= \left[a_1^Y (k_{1\dot{Y}}^\psi)^{-1} \right]^2 D_t^Y + \left[a_1^U (k_{1\dot{Y}}^\psi)^{-1} \right]^2 D_t^U + \\ &\quad + 2a_1^Y a_1^U (k_{1\dot{Y}}^\psi)^{-2} K_t^{UY}. \end{aligned}$$

Здесь через $\psi_0 = \psi_0(m^{\dot{Y}}, D^{\dot{Y}})$ и $k_{1\dot{Y}}^\psi(m^{\dot{Y}}, D^{\dot{Y}})$ обозначены коэффициенты статистической линеаризации нелинейности $\psi(\dot{Y}_t)$.

Согласно теореме 2 для стационарного случая, когда $a_0^U = 0$, $\nu = \nu_*$ при условии асимптотической устойчивости матрицы

$$a = \left[a_1^U (k_{1\dot{Y}}^\psi)^{-1} \quad a_1^Y (k_{1\dot{Y}}^\psi)^{-1} \right],$$

уравнения МАМ имеют вид:

$$\psi_0 = 0; \quad (38)$$

$$D_*^U = (b_0^U)^2 \frac{\nu_*}{2a_1^U}; \quad (39)$$

$$(a_1^Y D_*^Y + a_1^U K_*^{UY}) = 0; \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \left[a_1^U + a_1^Y (k_{1\dot{Y}}^\psi)^{-1} \right] K_*^{UY} + a_1^U (k_{1\dot{Y}}^\psi)^{-1} D_*^U &= 0; \quad (41) \\ (k_{1\dot{Y}}^\psi)^2_* D_*^{\dot{Y}} - (a_1^Y)^2 D_*^Y - (a_1^U)^2 D_*^U - 2a_1^Y a_1^U K_*^{UY} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, при $\psi = \text{sgn } \dot{Y}$ и п. 4 таблицы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(m^{\dot{Y}}, D^{\dot{Y}}) &= 2\Phi\left(\frac{m^{\dot{Y}}}{\sqrt{D^{\dot{Y}}}}\right); \\ k_{1\dot{Y}}^\psi(m^{\dot{Y}}, D^{\dot{Y}}) &= \frac{1}{\sqrt{D^{\dot{Y}}}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{m^{\dot{Y}}}{\sqrt{D^{\dot{Y}}}}\right)^2\right]. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Следовательно, в силу (38) и (42) находим:

$$m_*^{\dot{Y}} = 0; \quad k_{1\dot{Y}}^\psi = k_{1\dot{Y}}^\psi(0, D_*^{\dot{Y}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi D_*^{\dot{Y}}}};$$

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

где

$$a_{11} = a_1^U; \quad a_{12} = 0;$$

$$a_{21} = \sqrt{\frac{\pi D_*^{\dot{Y}}}{2}}; \quad a_{22} = a_1^Y \sqrt{\frac{\pi D_*^{\dot{Y}}}{2}}.$$

Условие асимптотической устойчивости матрицы (43) требует соблюдения условий $a_{11}^U < 0$ и $a_{11}^Y < 0$. Стационарные значения D_*^U, D_*^Y, K_*^{UY} находятся из (39)–(41).

П.3. Рассмотрим СтС вида

$$\dot{Y}_t^2 = -\alpha^2 (Y_t^2 - U_t^2), \quad \dot{U}_t = a_0^U + a_1^U U_t + b_0^U V_t.$$

Найдем сначала уравнения МАМ согласно МСМ. Учитывая соотношения

$$X_t^2 \approx \left[(m_t^X)^2 + D_t^X \right] + 2m_t^X X_t^0$$

для $X_t = \{Y_t, \dot{Y}_t, U_t\}$, придем после применения МСЛ к следующим уравнениям для математических ожиданий и центрированных составляющих:

$$(m_t^{\dot{Y}})^2 + D_t^{\dot{Y}} = -\alpha^2 \left[(m_t^Y)^2 - (m_t^U)^2 + D_t^Y - D_t^U \right];$$

$$\dot{m}_t^U = a_0^U + a_1^U m_t^U;$$

$$m_t^{\dot{Y}} \dot{Y}_t^0 = -2\alpha^2 (m_t^Y Y_t^0 - m_t^U U_t^0);$$

$$\dot{U}_t^0 = a_1^U U_t^0 + b_0^U V_t.$$

Применяя уравнения теоремы 1, положив $X_t = [U_t^0 \ Y_t^0]^T$ и обозначив

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} -a_1^U & 0 \\ \alpha^2 m_t^U (m_t^{\dot{Y}})^{-1} & -\alpha^2 m_t^Y (m_t^{\dot{Y}})^{-1} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

придем к следующей взаимосвязанной системе уравнений для $m_t^Y, m_t^{\dot{Y}}, D_t^Y, D_t^U, K_t^{UY}$ и $D_t^{\dot{Y}}$:

$$m_t^{\dot{Y}} = (m_t^Y)^\bullet;$$

$$\begin{aligned} D_t^{\dot{Y}} &= D \left[-\alpha^2 m_t^Y (m_t^{\dot{Y}})^{-1} Y_t^0 + \alpha^2 m_t^U U_t^0 \right] = \\ &= \alpha^4 \left\{ \left[m_t^Y (m_t^{\dot{Y}})^{-1} \right]^2 D_t^Y + \left[m_t^U (m_t^{\dot{Y}})^{-1} \right]^2 D_t^U - \right. \\ &\quad \left. - 2m_t^Y m_t^U (m_t^{\dot{Y}})^{-2} K_t^{UY} \right\}; \quad (44) \end{aligned}$$

$$D_t^U = -2a_1^U D_t^U + b_0^2 \nu, \quad D_{t_0}^U = D_0^U; \quad (45)$$

$$\dot{D}_t^Y = -2\alpha^2 \left[m_t^Y (m_t^{\dot{Y}})^{-1} D_t^Y - m_t^U (m_t^{\dot{Y}})^{-1} K_t^{UY} \right],$$

$$D_{t_0}^Y = D_0^Y; \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_t^{UY} &= \alpha^2 m_t^U (m_t^{\dot{Y}})^{-1} D_t - \\ &- \left[a_1^U + \alpha^2 m_t^Y (m_t^{\dot{Y}})^{-1} \right] K_t^{UY}, \quad K_{t_0}^{UY} = K_0^{UY}. \quad (47) \end{aligned}$$

В стационарном случае, используя теорему 2 при $a_0^U = 0$ и постоянных параметрах α , $a_1^U < 0$, b_0^U и ν^* , находим

$$m_*^U = 0, \quad D_*^U = \frac{b_0^2 \nu^*}{2a_1^U}.$$

При этом моменты m_t^Y , D_t^Y , K_t^{UY} и $D_t^{\dot{Y}}$ нестационарны и определяются из (44)–(47). Последние допускают следующую запись:

$$m_t^{\dot{Y}} = \left(m_t^Y\right)^\bullet;$$

$$\dot{D}_t^Y = \gamma_1 D_t^Y, \quad \gamma_1 = 2\alpha^2 m_t^Y \left(m_t^{\dot{Y}}\right)^{-1}; \quad (48)$$

$$\dot{K}_t^{UY} = \gamma_2 K_t^{UY}, \quad \gamma_2 = -\left[a_1^U + \alpha^2 m_t^Y \left(m_t^{\dot{Y}}\right)^{-1}\right]; \quad (49)$$

$$\left(m_t^{\dot{Y}}\right)^2 + D_t^{\dot{Y}} = -\alpha^2 \left[\left(m_t^Y\right)^2 + D_t^Y - D_t^U\right];$$

$$D_t^{\dot{Y}} = \alpha^4 \left(m_t^Y\right)^2 \left(m_t^{\dot{Y}}\right)^{-2} D_t^Y.$$

В зависимости от знаков γ_1 и γ_2 в (48) и (49) наблюдается эффект убывания или возрастания D_t^Y и K_t^{UY} . При этом дифференциальное уравнения для $m_t^{\dot{Y}}$ в силу (45) и (47) имеет следующий вид:

$$\left(\dot{m}_t^{\dot{Y}}\right)^2 = -\alpha^2 \left(m_t^Y\right)^2 + \alpha^2 D_*^U - \alpha^2 \left[1 + \frac{\alpha^2 \left(m_t^Y\right)^2}{\left(\dot{m}_t^{\dot{Y}}\right)^2}\right] D_t^Y.$$

Таким образом, уравнения для математического ожидания m_t^Y и дисперсии D_t^Y взаимосвязаны и требуют совместного интегрирования. За счет стохастичности параметра U уравнение для m_t^Y будет дифференциальным уравнением 4-го порядка, не разрешенным относительно производной. При отсутствии стохастичности параметра U_t решение для m_t^Y будет гармонической функцией периода $2\pi/\alpha$.

Теперь применим МНА, учитывая, что левая часть первого уравнения (37) является гладкой функцией. Во-первых, продифференцируем сполна по времени левую и правую части первого уравнения (37). Во-вторых, применим формулу Ито для квадратической функции

$$dU_t^2 = \left[2U_t \left(a_0^U + a_1^U U_t\right) + \left(b_0^U\right)^2 \nu\right] dt + 2U_t b_0^U dW_t, \\ \dot{W}_t = V_t.$$

В результате для переменных $Y_t = \bar{Y}_1$, $\dot{Y}_t = \dot{\bar{Y}}_1 = \bar{Y}_2$ и $\bar{Y}_3 = U_t$ получим следующую точную нелинейную систему стохастических уравнений с параметрическим шумом:

$$\dot{Y}_1 = \bar{Y}_2;$$

$$\dot{Y}_2 = -\alpha^2 \bar{Y}_1 + \alpha^2 \left[\frac{\nu}{2} \left(b_0^U\right)^2 + a_0^U \bar{Y}_3 + a_1^U \bar{Y}_3^2\right] Y_2^{-1} + \\ + \alpha^2 b_0^U \bar{Y}_3 Y_2^{-1} V_t;$$

$$\dot{Y}_3 = a_0^U + a_1^U \bar{Y}_3 + b_0^U V_t.$$

Это точная система, она разрешена относительно производных и решается стандартным МНА на основе теоремы 4. В отличие от МАМ по МСЛ, МАМ на основе МНА позволяет рассматривать случай, когда $m_t^Y = 0$.

Литература

1. Пугачёв В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М.: Наука, 1990. 632 с. (*Pugachev V. S., Sinitsyn I. N. Stochastic differential systems. Analysis and filtering.* — Chichester — New York, NY, USA: John Wiley, 1987. 549 p.)
2. Пугачёв В. С., Синицын И. Н. Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2000; 2004. 1000 с.
3. Синицын И. Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009. 768 с.
4. Синицын И. Н., Синицын В. И. Лекции по нормальной и эллипсоидальной аппроксимации распределений в стохастических системах. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2013. 488 с.
5. Синицын И. Н. Параметрическое статистическое и аналитическое моделирование распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Информатика и её применения, 2013. Т. 7. Вып. 2. С. 4–16.
6. Синицын И. Н., Синицын В. И. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными нелинейностями // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 3. С. 2–4.
7. Синицын И. Н., Синицын В. И., Сергеев И. В., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Шоргин В. С. Математическое обеспечение аналитического моделирования стохастических систем со сложными нелинейностями // Системы и средства информатики, 2014. Т. 24. № 3. С. 4–29.
8. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовича, И. Стигана. — М.: Наука, 1979. 832 с.
9. Попов Б. А., Теслер Г. С. Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. — Киев: Наукова думка, 1984. 599 с.

Поступила в редакцию 25.10.16

ANALYTICAL MODELING OF WIDE BAND PROCESSES IN STOCHASTIC SYSTEMS WITH UNSOLVED DERIVATIVES

I. N. Sinitsyn

Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Finite dimensional nonlinear nonstationary and stationary stochastic systems with unsolved derivatives with broadband Gaussian and non-Gaussian noises are considered. Such equations describe technical devices in informatics and control. Two methods of analytical modeling and sensitivity analysis of nonstationary and stationary processes based on the methods of statistical linearization (MSL) and normal approximation (MNA) are developed. Typical nonlinearities with unsolved derivatives and MSL coefficients and test examples are given. The developed analytical modeling algorithms based on MSL are the basis of software tools for modeling reliability and security of technical devices.

Keywords: analytical modeling; method of normal approximation (MNA); method of statistical linearization (MSL); normal (Gaussian) stochastic process; sensitivity to parameters; stochastic system with unsolved derivatives

DOI: 10.14357/19922264170101

Acknowledgments

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 15-07-02244).

References

1. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 1987. *Stochastic differential systems. Analysis and filtering*. Chichester – New York, NY: John Wiley. 549 p.
2. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 2000, 2004. *Teoriya stokhasticheskikh sistem [Stochastic systems. Theory and applications]*. Moscow: Logos. 1000 p.
3. Sinitsyn, I. N. 2009. *Kanonicheskie predstavleniya sluchaynykh funktsiy i ikh primeneniye v zadachakh komp'yuternoy podderzhki nauchnykh issledovaniy [Canonical expansions of random functions and their application to scientific computer-aided support]*. Moscow: TORUS PRESS. 768 p.
4. Sinitsyn, I. N., and V. I. Sinitsyn. 2013. *Lektsii po normal'noy i ellipsoidal'noy approksimatsii raspredeleniy v stokhasticheskikh sistemakh [Lectures on normal and ellipsoidal approximation of distributions in stochastic systems]*. Moscow: TORUS PRESS. 488 p.
5. Sinitsyn, I. N. 2013. *Parametricheskoe statisticheskoe i analiticheskoe modelirovaniye raspredeleniy v nelineynykh stokhasticheskikh sistemakh na mnogoobraznykh [Parametric statistical and analytical modeling of distributions in stochastic systems on manifolds]*. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 7(2):4–16.
6. Sinitsyn, I. N., and V. I. Sinitsyn. 2014. *Analiticheskoe modelirovaniye normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh so slozhnyimi nelineynostyami [Analytical modeling of normal processes in stochastic systems with complex nonlinearities]*. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 8(3):2–4.
7. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, I. V. Sergeev, E. R. Korepanov, V. V. Belousov, and V. S. Shorgin. 2014. *Matematicheskoe obespecheniye analiticheskogo modelirovaniya stokhasticheskikh sistem so slozhnyimi nelineynostyami [Mathematical software for analytical modeling of stochastic systems with complex nonlinearities]*. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 24(3):4–29.
8. Abramovich, M., and I. Stigan, eds. 1979. *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam [Handbook on special functions]*. Moscow: Nauka. 832 p.
9. Popov, B. A., and G. S. Tesler. 1984. *Vychisleniye funktsiy na EVM: Spravochnik [Computing of functions: Handbook]*. Kiev: Naukova dumka. 599 p.

Received October 25, 2016

Contributor

Sinitsyn Igor N. (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

КЛАССИФИКАЦИЯ ПО НЕПРЕРЫВНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ I: ФОРМУЛЫ БАЙЕСОВСКОЙ ОЦЕНКИ*

А. В. Борисов¹

Аннотация: Двухчастная работа посвящена решению задачи оценивания случайного вектора с конечным множеством состояний по непрерывным зашумленным наблюдениям. Особенностью модели является то, что интенсивность шумов в наблюдениях зависит от оцениваемого вектора, что не позволяет применять классические результаты оптимальной нелинейной фильтрации. В первой части статьи искомая оценка получена как в явной интегральной форме, так и в виде решения некоторой стохастической дифференциальной системы со скачкообразными процессами в правой части.

Ключевые слова: байесовская оценка; оптимальная фильтрация; стохастическая дифференциальная система; случайный скачкообразный процесс; мультипликативные шумы

DOI: 10.14357/19922264170102

1 Введение

Задачи оценивания параметров и сигналов по высокочастотным наблюдениям часто возникают в областях навигации [1] и управления в телекоммуникационных системах [2], в сфере торговли ценными бумагами [3] и пр. Использование моделей с непрерывным временем при решении подобных задач выглядит обоснованным и позволяет применять развитый аппарат стохастического анализа [4, 5]. Если интенсивности шумов в наблюдениях зависят от неизвестного параметра/сигнала, то шумы называются *мультипликативными* [6], или *зависящими от состояния* [7]. Оптимальные в среднем квадратическом смысле оценки параметров/состояний в данных системах получены в классе линейных преобразований наблюдений. Абсолютно оптимальные оценки представлены только для достаточно узкого класса систем наблюдения (см., например, [8] и библиографию к ней).

Целью данной работы является решение задачи байесовской классификации случайного вектора по непрерывным косвенным наблюдениям в присутствии винеровских шумов, интенсивность которых зависит от оцениваемого вектора. Предполагается, что множество возможных значений вектора является конечным. Данное условие не является чрезмерно ограничительным. Подобные задачи возникают, например, при выборе внутренней волатильности из некоторого ограниченного множества возможных значений (так называемого *алфавита волатильностей* [9]) на основе име-

ющихся биржевых статистических данных. Другим примером служит классификация состояния физически разнородного (проводного/беспроводного) телекоммуникационного канала по потоку подтверждений успешной передачи пакетов и их потерь [10].

Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит формальную постановку задачи, обсуждение ее особенностей и краткий обзор имеющихся результатов. В разд. 3 изложен основной теоретический результат: формулы искомой оценки и ее локально сглаженного варианта. Обсуждение полученных теоретических результатов представлено в разд. 4.

2 Постановка задачи

Ненаблюдаемый случайный вектор X принимает значения из множества $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \dots, e_N\}$ единичных векторов евклидова пространства \mathbb{R}^N с вероятностями $\{p_n\}_{n=1, \dots, N}$, $p \triangleq \text{col}(p_1, \dots, p_N)$.

M -мерный процесс наблюдений $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ описывается следующей моделью:

$$Y_t = \int_0^t f(X, s) ds + \int_0^t g(X, s) dW_s,$$

где

- $W_t \in \mathbb{R}^M$ — независимый от X векторный стандартный винеровский процесс, характеризующий ошибки наблюдений;

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-07-00677 и 15-37-20611-мол_а_вед).

¹ Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, aborISOV@frcsc.ru

- $f(x, t) : \mathbb{S}^N \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{M \times 1}$ — неслучайная кусочно-непрерывная вектор-функция, характеризующая «план наблюдений»;
- $g(x, t) : \mathbb{S}^N \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{M \times M}$ — неслучайная кусочно-непрерывная матричнозначная функция, характеризующая условную интенсивность шумов в наблюдениях в зависимости от значения вектора X ; g является равномерно невырожденной, т. е.

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{S}^N \\ t \in [0, T]}} g(x, t)g^\top(x, t) \geq \alpha I > 0.$$

Обозначим через $\mathcal{Y}_t \triangleq \sigma\{Y_s : s \in [0, t]\}$ естественный поток σ -алгебр, порожденный наблюдениями Y до момента t включительно.

Задача байесовской классификации вектора X по наблюдениям Y , полученным на отрезке времени $[0, T]$, заключается в нахождении $\hat{X}_T \triangleq \mathbf{E}\{X|\mathcal{Y}_T\}$.

Предложенная задача оценивания имеет ряд особенностей. Пара «оцениваемое состояние — процесс наблюдений» может быть представлена в форме стохастической дифференциальной системы:

$$\left. \begin{aligned} dX_t &= 0, \quad X_0 = X; \\ dY_t &= \sum_{n=1}^N e_n^\top X_t f_t(n) dt + \sum_{n=1}^N e_n^\top X_t g_t(n) dW_t, \\ Y_0 &= 0, \end{aligned} \right\} (1)$$

где

- $f_t(n) : \mathbb{S}^N \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{M \times 1}$ ($n = \overline{1, N}$) — набор неслучайных кусочно-непрерывных вектор-функций;
- $g_t(n) : \mathbb{S}^N \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{M \times M}$ ($n = \overline{1, N}$) — набор равномерно невырожденных неслучайных кусочно-непрерывных матричнозначных функций.

Вид второго слагаемого во втором уравнении (1), описывающем Y_t , вполне соответствует своему названию: *наблюдения с мультипликативными шумами*. Действительно, с формальной точки зрения наблюдения представляют собой произведение полезного сигнала и шума:

$$dY_t = \sum_{n=1}^N e_n^\top X_t (f_t(n) dt + g_t(n) dW_t).$$

В то же время, если интенсивность не зависит от состояния, т. е. $g_t(n) \equiv g_t$, то

$$dY_t = \sum_{n=1}^N e_n^\top X_t f_t(n) dt + g_t dW_t$$

представляет собой классическую модель наблюдений с аддитивными шумами.

Для простоты изложения далее будем считать, что $f_n(t)$ и $g_n(t)$ непрерывны справа и имеют конечные пределы слева.

В такой форме, казалось бы, поставленная задача может быть решена с использованием развитого аппарата мартингального исчисления и известных результатов в области оптимальной фильтрации семимартингала по семимартингалу [11], т. е. построения условных математических ожиданий (УМО) $\hat{X}_T \triangleq \mathbf{E}\{X_T|\mathcal{Y}_T\}$, $T \geq 0$. Однако данная простота обманчива.

Первой сложностью является то, что в исследуемой модели наблюдений поток σ -алгебр $\{\mathcal{Y}_t\}_{t \geq 0}$ не является непрерывным справа [12], т. е. $\bigcap_{s>t} \mathcal{Y}_s \neq \mathcal{Y}_t$. Это обстоятельство не позволяет исследовать \hat{X}_t с помощью стандартных подходов как случайный процесс, согласованный с непрерывным справа потоком σ -алгебр, и вынуждает видоизменить задачу фильтрации как нахождение УМО $\hat{X}_t^+ \triangleq \mathbf{E}\{X_t|\mathcal{Y}_{t+}\}$ относительно «сглаженного потока» $\{\mathcal{Y}_{t+}\}_{t \geq 0}$. Ниже \hat{X}_t^+ будет называться *локально сглаженной оценкой*. В этом свете вопрос о связи локально сглаженных оценок \hat{X}^+ и искомым оценок классификации \hat{X} остается открытым.

В классической постановке [11] интенсивность шумов в наблюдениях является функцией времени и прошлых наблюдений. Это ключевое условие гарантирует совпадение естественного потока σ -алгебр $\{\mathcal{Y}_t\}_{t \in [0, T]}$, порожденного исходным процессом наблюдений, и потока $\{\mathcal{Z}_t\}_{t \in [0, T]} : \mathcal{Z}_t \triangleq \sigma\{Z_s : 0 \leq s \leq t\}$, соответствующего обновляющему процессу, — \mathcal{Y}_t -согласованному мартингалу Z_t :

$$\begin{aligned} Z_t &\triangleq \\ &\triangleq \int_0^t \left(\frac{d\langle Y, Y \rangle_s}{ds} \right)^{-1/2} \left(dY_s - \sum_{n=1}^N e_n^\top \hat{X}_{s-}^+ f_s(n) ds \right), \end{aligned} (2)$$

где $\langle Y, Y \rangle_t$ — предсказуемая квадратическая характеристика наблюдений Y_t . Это совпадение обеспечивает представление искомой оценки фильтрации в форме стохастического интеграла по Z . Второй и главной сложностью рассматриваемой задачи является зависимость интенсивности шумов в наблюдениях Y (1) от оцениваемого состояния X . Она обеспечивает лишь включение $\mathcal{Z}_t \subset \mathcal{Y}_t$. В [13] для случая гладких коэффициентов f и g было доказано тождество:

$$\mathcal{Y}_t \equiv \mathcal{Z}_t \vee \sigma\{\langle Y, Y \rangle_s : 0 \leq s \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Этот результат использовался в [8] и [14] для получения уравнений оценок фильтрации. В указанных работах они были получены лишь для ряда частных случаев систем наблюдения, так как квадратичная характеристика представляет собой процесс с почти наверное (п. н.) дифференцируемыми траекториями без шумов (так называемые «точные наблюдения»), и общие формулы фильтрации [11] для таких систем неприменимы.

Следующий раздел содержит результат решения поставленной задачи как в явной интегральной форме, так и в виде решения некоторой стохастической дифференциальной системы.

3 Формулы байесовского классификатора

Искомая формула классификатора будет получена с помощью процедуры дискретизации по времени непрерывных наблюдений, построения относительно них классификатора и последующего предельного перехода по шагу дискретизации.

Введем в рассмотрение последовательность вложенных двоичных разбиений отрезка $[0, T]$, порожденных множествами точек T^K , $K \in \mathbb{N}$:

$$T^K \triangleq \{\tau_k^K\}_{k=0,2^K} : \tau_k^K \triangleq kh_K, \quad h_K \triangleq \frac{T}{2^K};$$

соответствующие наборы дискретизованных наблюдений:

$$\begin{aligned} \Delta Y_k^K \triangleq Y_{\tau_k^K} - Y_{\tau_{k-1}^K} &= \int_{\tau_{k-1}^K}^{\tau_k^K} \sum_{n=1}^N e_n^\top X_s f_s(n) ds + \\ &+ \int_{\tau_{k-1}^K}^{\tau_k^K} \sum_{n=1}^N e_n^\top X_s g_s(n) dW_s, \quad k = \overline{1, 2^K}, \end{aligned}$$

и семейство вложенных σ -алгебр $\{\mathcal{Y}^K\}_{K \in \mathbb{N}}$: $\mathcal{Y}^K \triangleq \sigma\{\Delta Y_k^K, k = \overline{1, 2^K}\}$. Так как процесс Y_t является сепарабельным, то $\mathcal{Y}^K \uparrow \mathcal{Y}_T$ при $K \rightarrow \infty$ и по теореме Леви о мартингальной сходимости [15]

$$\widehat{X}^K \triangleq \mathbf{E}\{X|\mathcal{Y}^K\} \rightarrow \mathbf{E}\{X|\mathcal{Y}_T\} = \widehat{X}_T \quad \mathcal{P}\text{-п. н.}$$

При условии $X = e_n$ наблюдения $\{\Delta Y_k^K\}_{k=1, 2^K}$ представляют собой независимые в совокупности гауссовские случайные векторы

$$\Delta Y_k^K \sim \mathcal{N}(h_K F_k^K(n), h_K G_k^K(n)),$$

где

$$\begin{aligned} F_k^K(n) &\triangleq \frac{1}{h_K} \int_{\tau_{k-1}^K}^{\tau_k^K} f_s(n) ds; \\ G_k^K(n) &\triangleq \frac{1}{h_K} \int_{\tau_{k-1}^K}^{\tau_k^K} g_s(n) g_s^\top(n) ds. \end{aligned}$$

Тогда компоненты $\widehat{X}^K(n) \triangleq \mathbf{P}\{X = e_n | \mathcal{Y}^K\}$ вектора \widehat{X}^K определяются формулой:

$$\widehat{X}^K(n) = \frac{\widetilde{X}^K(n)}{\sum_{\ell=1}^N \widetilde{X}^K(\ell)}, \quad (3)$$

где $\|x\|_A^2 \triangleq x^\top A x$, $|A| \triangleq \det A$, а $\widetilde{X}^K(n)$ — ненормированная условная вероятность события $\{\omega : X(\omega) = e_n\}$ относительно σ -алгебры \mathcal{Y}^K :

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^K(n) \triangleq p_n \exp \left\{ -\frac{1}{2h_K} \sum_{k=1}^{2^K} \left[\ln |G_k^K(n)| h_K + \right. \right. \\ \left. \left. + \|\Delta Y_k^K - h_K F_k^K(n)\|_{(G_k^K(n))^{-1}}^2 \right] \right\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Процесс $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ является квадратично интегрируемым семимартингалом с предсказуемой характеристикой:

$$\begin{aligned} \langle Y, Y \rangle_t &= Y_t Y_t^\top - \int_0^t Y_s dY_s^\top - \int_0^t dY_s Y_s^\top = \\ &= \int_0^t \sum_{n=1}^N e_n^\top X_s g_s(n) g_s^\top(n) ds. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} G_k^K(\omega) &\triangleq h_K^{-1} \left(\langle Y, Y \rangle_{\tau_k^K} - \langle Y, Y \rangle_{\tau_{k-1}^K} \right); \\ G_t(n) &\triangleq g_t(n) g_t^\top(n); \\ G_t(\omega) &\triangleq \sum_{i=1}^N e_i^\top X_t g_t(i) g_t^\top(i); \\ \mathbf{G}_t(n) &\triangleq \int_0^t g_s(n) g_s^\top(n) ds. \end{aligned}$$

Следующее утверждение определяет решение задачи байесовской идентификации в интегральной форме.

Лемма 1. Байесовский классификатор вектора X по непрерывным наблюдениям $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ определяется формулами $(n = \overline{1, N})$:

$$\widehat{X}_T(n) = \frac{\widetilde{X}_T(n)}{\sum_{\ell=1}^N \widetilde{X}_T(\ell)}, \quad (5)$$

где $\widetilde{X}_T(n)$ — ненормированная условная вероятность события $\{\omega : X(\omega) = e_n\}$ относительно \mathcal{Y}_T :

$$\widetilde{X}_T(n) = \begin{cases} p_n \exp \left\{ \int_0^T \left[f_s^\top(n) G_s^{-1}(n) dY_s - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \|f_s(n)\|_{G_s^{-1}(n)}^2 ds \right] \right\}, & (6) \\ \text{если } \langle Y, Y \rangle_t \equiv \mathbf{G}_t(n), t \in [0, T]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство леммы 1 приведено в приложении.

Очевидно, что утверждение леммы 1 остается верным в случае, когда дискретный случайный вектор X имеет счетное множество значений.

Для нахождения формулы для \widehat{X}_T^+ необходимо вновь воспользоваться теоремой Леви:

$$\widehat{X}_T^+ = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \widehat{X}_{T+\Delta} \quad \mathcal{P}\text{-п. н.}$$

Для упрощения выкладок далее будем оперировать ненормированной условной вероятностью \widetilde{X}_T : необходимая корректировка формул для \widehat{X}_T проводится очевидным образом. Для $n = \overline{1, N}$ определим случайные моменты времени

$$\xi(n) \triangleq \begin{cases} \inf \{t \geq 0 : \mathbf{G}_t(n) \neq \langle Y, Y \rangle_t\}; \\ +\infty, & \text{если } \mathbf{G}_t(n) \equiv \langle Y, Y \rangle_t \text{ для } \forall t \geq 0; \end{cases} \quad (7)$$

нелучайные моменты $u(\ell, n)$ ($\ell \neq n$)

$$u(\ell, n) \triangleq \begin{cases} \inf \{t \geq 0 : \mathbf{G}_t(\ell) \neq \mathbf{G}_t(n)\}; \\ +\infty, & \text{если } \mathbf{G}_t(\ell) \equiv \mathbf{G}_t(n) \text{ для } \forall t \geq 0; \end{cases}$$

множество $\Xi \triangleq \{u(\ell, n)\}_{\substack{\ell, n: \\ \ell \neq n}}$ и набор процессов

$$\mathcal{I}_t(n) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } t < \xi(n); \\ 0, & \text{если } t \geq \xi(n). \end{cases}$$

Наборы $\Xi(n) \triangleq \{u(\ell, n)\}_{\ell \neq n}$ определяют возможные значения случайных моментов $\xi(n)$; при этом множество $\Xi \setminus \{+\infty\}$ является множеством разрывности потока $\{\mathcal{Y}_t\}_{t \geq 0}$, т.е. $\mathcal{Y}_t \neq \mathcal{Y}_{t+}$ для $\forall t \in \Xi \setminus \{+\infty\}$.

Процессы $\mathcal{I}_t(n)$, очевидно, являются \mathcal{Y}_{t+} -сгласованными и имеют *càdlàg*-траектории, являющиеся кусочно-постоянными функциями на \mathbb{R}_+ , терпящими не более одного скачка. При этом величина скачка равна -1 .

Формула (6) для $\widetilde{X}_{T+\Delta}(n)$ может быть переписана в виде:

$$\widetilde{X}_{T+\Delta}(n) = p_n \exp \left\{ \int_0^{T+\Delta} \left[f_s^\top(n) G_s^{-1}(n) dY_s - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \|f_s(n)\|_{G_s^{-1}(n)}^2 ds \right] \right\} \mathcal{I}_{T+\Delta}(n).$$

Используя непрерывность справа процесса $\mathcal{I}_t(n)$, можно получить формулу для \widetilde{X}_T^+ :

$$\widetilde{X}_T^+(n) = p_n \exp \left\{ \int_0^T \left[f_n^\top(s) G_s^{-1}(n) dY_s - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \|f_n(s)\|_{G_s^{-1}(n)}^2 ds \right] \right\} \mathcal{I}_T(n). \quad (8)$$

Необходимо также отметить, что на промежутке $(0, \xi(n))$ производная $d\langle Y, Y \rangle_t/dt$ существует почти всюду (п.в.) по мере Лебега и также п.в. верны равенства:

$$\frac{d\langle Y, Y \rangle_t}{dt} = G_t(\omega), \quad G_t(\omega) \equiv G_t(n).$$

Поэтому формула (8) может быть переписана в виде:

$$\widetilde{X}_T^+(n) = p_n \exp \left\{ \int_0^T \left[f_n^\top(n) \left(\frac{d\langle Y, Y \rangle_s}{ds} \right)^{-1} dY_s - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \|f_n(n)\|_{(d\langle Y, Y \rangle_s/ds)^{-1}}^2 ds \right] \right\} \mathcal{I}_T(n). \quad (9)$$

Следующее утверждение представляет локально сглаженные оценки фильтрации \widehat{X}_t^+ в форме решения некоторой стохастической дифференциальной системы.

Теорема 1. Ненормированные условные вероятности $\{\widetilde{X}_t^+(n)\}_{n=\overline{1, N}, t \geq 0}$ являются единственным решением системы:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^+(n) = & p_n \mathcal{I}_0(n) + \\ & + \int_0^t \tilde{X}_s^+(n) f_s^\top(n) \left(\frac{d\langle Y, Y \rangle_s}{ds} \right)^{-1} dY_s + \\ & + \sum_{s \leq t} \tilde{X}_{s-}^+(n) \Delta \mathcal{I}_s(n). \end{aligned} \quad (10)$$

Нормированные условные вероятности $\{\hat{X}_t^+(n)\}_{n=\overline{1, N}}$, $t \geq 0$, являются единственным решением системы:

$$\begin{aligned} \hat{X}_t^+(n) = & p_n \mathcal{I}_0(n) + \int_0^t \hat{X}_s^+(n) \left(f_s^\top(n) - \right. \\ & \left. - \sum_{\ell=1}^N \hat{X}_{s-}^+(\ell) f_s^\top(\ell) \right) \left(\frac{d\langle Y, Y \rangle_s}{ds} \right)^{-1/2} dZ_s + \\ & + \sum_{s \leq t} \hat{X}_{s-}^+(n) \left(\frac{1 + \Delta \mathcal{I}_s(n)}{1 + \sum_{\ell=1}^N \hat{X}_{s-}^+(\ell) \Delta \mathcal{I}_s(\ell)} - 1 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где Z_t — обновляющий процесс (2).

Доказательство теоремы 1 представлено в приложении.

Лемма 1 и теорема 1 позволяют определить взаимосвязь между оценками \hat{X}_t и \hat{X}_t^+ . Прежде всего, для любых $t > 0$ равенство $\hat{X}_{t-}^+ \equiv \hat{X}_t$ верно \mathcal{P} -п. н. Более того, $\hat{X}_t^+ = \hat{X}_t$ \mathcal{P} -п. н. для любого $t > 0$, за исключением моментов $u(n, \ell)$ ($n, \ell = \overline{1, N}$, $n \neq \ell$). В моменты $\xi(\ell)$ оценка \hat{X}_t^+ может быть получена из \hat{X}_{t-} с помощью следующего преобразования ($n = \overline{1, N}$):

$$\hat{X}_{\xi(\ell)}^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi(\ell) = \xi(n); \\ \frac{\hat{X}_{\xi(\ell)-}(n)}{1 - \sum_{m: \xi(m) = \xi(\ell)} \hat{X}_{\xi(\ell)-}(m)}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Наконец, данные утверждения дают возможность сформулировать условия идентифицируемости, гарантирующие точное восстановление вектора X по зашумленным наблюдениям на интервале $[0, T]$.

Следствие 1. Если существует такое время t^* : $0 \leq t^* < +\infty$, что

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{n=1}^N \mathcal{I}_{t^*}(n) = 1 \right\} = 1,$$

то для любого $t \geq t^*$ \mathcal{P} -п. н. верно равенство $\hat{X}_t^+ = X$.

4 Заключение

Первая часть двухчастной работы представляет теоретическое решение задачи байесовской классификации по непрерывным наблюдениям в присутствии мультипликативных шумов. Выведена явная форма оценки. Далее путем незначительной модификации порядка получения наблюдений (т. е. заменяя исходный поток σ -алгебр \mathcal{Y}_t его локально сглаженным вариантом \mathcal{Y}_{t+}) исходная задача оценивания корректно сводится к определению условного математического ожидания относительно непрерывного справа потока σ -алгебр. Несмотря на то что доступные наблюдения имеют п. н. непрерывные траектории, локально сглаженные оценки представляют собой решения стохастических дифференциальных систем со скачкообразными процессами в правой части. Статья содержит аналитические формулы, определяющие вид этих систем и скачкообразных процессов. Однако непосредственная аппроксимация скачкообразных процессов с помощью исходных наблюдений приводит к недопустимо высоким вычислительным ошибкам. Для их избежания необходима специальная численная процедура реализации предложенной оценки. Разработке этой процедуры и посвящена вторая часть работы.

Полученный теоретический результат в области оценивания позволяет сделать важный практический вывод. Наличие в наблюдениях мультипликативных шумов является положительным фактором. Любой сколь угодно короткий интервал таких наблюдений позволяет точно идентифицировать отдельные компоненты или даже весь вектор X . В то же время, если наблюдения содержат невырожденные аддитивные шумы, то любой сколь угодно длинный интервал наблюдений не дает возможности точного восстановления X .

Приложение

Доказательство леммы 1. Перепишем формулу (4) в виде:

$$\tilde{X}^K(n) = p_n \exp \left\{ -\frac{1}{2h_K} \left[J_1^K(n) + J_2^K(n) - J_3^K(n) + J_4^K(n) \right] \right\}, \quad (12)$$

где

$$J_1^K(n) = \sum_{k=1}^{2^K} \ln |G_k^K(n)| h_K;$$

$$J_2^K(n) = h_K \sum_{k=1}^{2^K} \|F_k^K(n)\|_{(G_k^K(n))^{-1}}^2 h_K;$$

$$J_3^K(n) = 2h_K \sum_{k=1}^{2^K} (F_k^K(n))^\top (G_k^K(n))^{-1} \Delta Y_k^K;$$

$$J_4^K(n) = \sum_{k=1}^{2^K} \|\Delta Y_k^K\|_{(G_k^K(n))^{-1}}^2.$$

Имеет место сходимость неслучайных последовательностей:

$$J_1^K(n) \rightarrow \int_0^T \ln |G_s(n)| ds;$$

$$\sum_{k=1}^{2^K} \|F_k^K(n)\|_{(G_k^K(n))^{-1}}^2 h_K \rightarrow \int_0^T \|f_s(n)\|_{G_s^{-1}(n)}^2 ds$$

при $K \rightarrow \infty$, причем

$$J_1^K(n) = \int_0^T \ln |G_s(n)| ds + O(h_K);$$

$$J_2^K(n) = h_K \int_0^T \|f_s(n)\|_{G_s^{-1}(n)}^2 ds + O(h_K^2).$$

Согласно [15] имеет место сильная сходимость

$$\sum_{k=1}^{2^K} (F_k^K(n))^\top (G_k^K(n))^{-1} \Delta Y_k^K \rightarrow \int_0^T f_s^\top(n) G_s^{-1}(n) dY_s$$

при $K \rightarrow \infty$, причем [12]

$$\mathbf{E} \left\{ \left\| J_3^K(n) - 2h_K \int_0^T f_s^\top(n) G_s^{-1}(n) dY_s \right\|^2 \right\} = O(h_K^3).$$

Вновь согласно [12] имеет место сильная сходимость

$$J_4^K(n) \rightarrow \int_0^T \sum_{i=1}^N e_i^\top X_s \operatorname{tr} (G_s(i) G_s^{-1}(n)) ds = \int_0^T \operatorname{tr} (G_s(\omega) G_s^{-1}(n)) ds$$

при $K \rightarrow \infty$, причем

$$\mathbf{E} \left\{ \left(J_4^K(n) - \int_0^T \operatorname{tr} (G_s(\omega) G_s^{-1}(n)) ds \right)^2 \right\} = O(h_K).$$

Таким образом,

$$\tilde{X}^K(n) = p_n \exp \left\{ -\frac{1}{2h_K} [J_1^K(n) + J_2^K(n) - J_3^K(n) + J_4^K(n)] \right\} = p_n \exp \left\{ -\frac{1}{2h_K} \int_0^T [\ln |G_s(n)| + \operatorname{tr} (G_s(\omega) G_s^{-1}(n)) - M] ds \right\} + \phi^K(n) \Bigg\}, \quad (13)$$

где $\phi^K(n) \rightarrow 0$ \mathcal{P} -п. н. ($n = \overline{1, N}$), причем

$$\mathbf{E} \left\{ (\phi^K(n))^2 \right\} = O(h_K).$$

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{M \times M}$ — множество $M \times M$ -мерных матриц A , имеющих положительные след и определитель, и $A_0 \in \mathcal{D}$ — некоторая фиксированная матрица. Рассмотрим функцию:

$$R(A) \triangleq \ln |A| + \operatorname{tr} (A A_0^{-1}).$$

Используя свойства дифференцирования скалярной функции матричного аргумента [16], легко показать, что

$$\operatorname{Argmin}_{A \in \mathcal{D}} R(A) = \{A_0\}, \quad \min_{A \in \mathcal{D}} R(A) = \ln |A_0| + M. \quad (14)$$

Пусть \mathfrak{D} — множество $M \times M$ -мерных матричнозначных функций $A(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathcal{D}$ с кусочно-непрерывными компонентами, $A_0(t) \in \mathfrak{D}$ и $\mathbf{R}(A(\cdot))$ — критерий оптимальности:

$$\mathbf{R}(A(\cdot)) \triangleq \int_0^T (\ln |A(s)| + \operatorname{tr} (A(s) A_0^{-1}(s))) ds.$$

Из (14) следует, что

$$\min_{A(\cdot) \in \mathfrak{D}} \mathbf{R}(A(\cdot)) = \int_0^T (\ln |A_0(s)| + M) ds, \quad (15)$$

а также

$$A(\cdot) \in \operatorname{Argmin}_{A(\cdot) \in \mathfrak{D}} \mathbf{R}(A(\cdot)),$$

если $A(t) = A_0(t)$ п. в. по мере Лебега на $[0, T]$.

Подставим (13) в (3), разделим числитель и знаменатель на величину $\exp\{-1/(2h_K)\} \int_0^T [\ln |G_s(\omega)| + M] ds$ и перепишем (12) в виде:

$$\hat{X}^K(n) = p_n \exp \left\{ -\frac{1}{2h_K} \int_0^T \left[\ln \frac{|G_s(n)|}{|G_s(\omega)|} + \operatorname{tr} (G_s(\omega) G_s^{-1}(n)) - M \right] ds + \eta(n) + \phi_n^K(h_K) \right\} / \left(\sum_{\ell: \mathbf{G}_t(\ell) \equiv (Y, Y)_T} p_\ell \exp \{ \eta(\ell) + \phi_\ell^K(h_K) \} + \sum_{j: \mathbf{G}_t(j) \neq (Y, Y)_T} p_j \exp \left\{ -\frac{1}{2h_K} \int_0^T \left[\ln \frac{|G_s^K(j)|}{|G_s^K(\omega)|} + \operatorname{tr} (G_s(\omega) G_s^{-1}(j)) - M \right] ds \right\} \right).$$

Согласно (15),

$$\int_0^T \left[\ln \frac{|G_s(n)|}{|G_s(\omega)|} + \text{tr} (G_s(\omega)G_s^{-1}(n)) - M \right] ds = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle Y, Y \rangle_T \equiv \mathbf{G}_T(n), \quad t \in [0, T]; \\ > 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда искомый сильный предел существует и имеет вид:

$$\widehat{X}_T(n) = \lim_{K \rightarrow \infty} \widehat{X}^K(n) = \begin{cases} \frac{p_n e^{\eta(n)}}{\sum_{\ell: \mathbf{G}_t(\ell) \equiv \langle Y, Y \rangle_t} p_\ell e^{\eta(\ell)}}, & \text{если } \langle Y, Y \rangle_t \equiv \mathbf{G}_t(n), \quad t \in [0, T]; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

т. е. соответствует формулам (5) и (6).

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Перепишем (9):

$$\widehat{X}_t^+(n) = p_n e^{\eta_t(n)} \mathcal{I}_t(n);$$

$$\eta_t(n) = \int_0^t \left(f_s^\top(n) G_s^{-1}(\omega) dY_s - \frac{1}{2} \|f_s(n)\|_{G_s^{-1}(\omega)}^2 ds \right)$$

и применим обобщенную формулу Ито с учетом определения и свойств процесса $\mathcal{I}_t(n)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_t^+(n) &= p_n \mathcal{I}_0(n) + \int_0^t \left(p_n e^{\xi_{s-}(n)} \mathcal{I}_{s-}(n) d\eta_s(n) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} p_n e^{\xi_{s-}(n)} \mathcal{I}_{s-}(n) \|f_s(n)\|_{G_s^{-1}(\omega)}^2 ds \right) + \\ &+ \sum_{s \leq t} p_n e^{\xi_{s-}(n)} \Delta \mathcal{I}_s(n) = p_n \mathcal{I}_0(n) + \\ &+ \int_0^t p_n e^{\xi_{s-}(n)} \mathcal{I}_{s-}(n) f_s^\top(n) G_s^{-1}(\omega) dY_s + \\ &+ \sum_{s \leq t} p_n e^{\xi_{s-}(n)} \mathcal{I}_{s-}(n) \Delta \mathcal{I}_s(n) = \\ &= p_n \mathcal{I}_0(n) + \int_0^t \widetilde{X}_{s-}^+(n) f_s^\top(n) G_s^{-1}(\omega) dY_s + \\ &+ \sum_{s \leq t} \widetilde{X}_{s-}^+(n) \Delta \mathcal{I}_s(n). \end{aligned}$$

С учетом того, что $\widetilde{X}_{s-}^+(n) = \widehat{X}_s^+(n)$ п.в. по мере Лебега на $[0, t]$, истинность представления (10) доказана.

Рассмотрим функцию

$$r_n(x_1, \dots, x_N) \triangleq \frac{x_n}{\sum_{\ell=1}^N x_\ell},$$

тогда условная вероятность выражается с помощью формулы:

$$\widehat{X}_t^+(n) = r_n(\widetilde{X}_t^+).$$

Верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t^+(n) &= p_n \mathcal{I}_0(n) + \sum_{\ell=1}^N \int_0^t \frac{\partial r_n}{\partial x_\ell} \Big|_{\widetilde{X}_{s-}^+} d\widetilde{X}_s^+(\ell) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2 r_n}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\widetilde{X}_{s-}^+} d\langle \widetilde{X}^+(i), \widetilde{X}^+(j) \rangle_s^c + \\ &+ \sum_{s \leq t} \left(r_n(\widetilde{X}_s^+) - r_n(\widetilde{X}_{s-}^+) - \sum_{\ell=1}^N \frac{\partial r_n}{\partial x_\ell} \Big|_{\widetilde{X}_{s-}^+} \Delta \widetilde{X}_s^+(\ell) \right) = \\ &= p_n \mathcal{I}_0(n) + \sum_{\ell=1}^N \int_0^t \frac{\partial r_n}{\partial x_\ell} \Big|_{\widetilde{X}_{s-}^+} d\widetilde{X}_s^{+c}(\ell) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2 r_n}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\widetilde{X}_{s-}^+} d\langle \widetilde{X}^+(i), \widetilde{X}^+(j) \rangle_s^c + \\ &+ \sum_{s \leq t} \left(r_n(\widetilde{X}_s^+) - r_n(\widetilde{X}_{s-}^+) \right) = p_n \mathcal{I}_0(n) + \\ &+ \int_0^t \widehat{X}_{s-}^+(n) \left(f_s^\top(n) - \sum_{\ell=1}^N \widehat{X}_{s-}^+(\ell) f_s^\top(\ell) \right) \left(\frac{d\langle Y, Y \rangle_s}{ds} \right)^{-1} \times \\ &\times \left(dY_s - \sum_{\ell=1}^N f_s(\ell) \widehat{X}_s^+(\ell) ds \right) + \\ &+ \sum_{s \leq t} \left(\frac{\widetilde{X}_{s-}^+(n)(1 + \Delta \mathcal{I}_s(n))}{\sum_{\ell=1}^N \widetilde{X}_{s-}^+(\ell)(1 + \Delta \mathcal{I}_s(\ell))} - \frac{\widetilde{X}_{s-}^+(n)}{\sum_{\ell=1}^N \widetilde{X}_{s-}^+(\ell)} \right) = \\ &= p_n \mathcal{I}_0(n) + \int_0^t \widehat{X}_{s-}^+(n) \left(f_s^\top(n) - \sum_{\ell=1}^N \widehat{X}_{s-}^+(\ell) f_s^\top(\ell) \right) \times \\ &\times \left(\frac{d\langle Y, Y \rangle_s}{ds} \right)^{-1/2} dZ_s + \\ &+ \sum_{s \leq t} \widehat{X}_{s-}^+(n) \left(\frac{1 + \Delta \mathcal{I}_s(n)}{1 + \sum_{\ell=1}^N \widetilde{X}_{s-}^+(\ell) \Delta \mathcal{I}_s(\ell)} - 1 \right). \end{aligned}$$

С учетом того, что $\widehat{X}_{s-}^+(n) = \widehat{X}_s^+(n)$ п.в. по мере Лебега на $[0, t]$, истинность представления (11) также доказана. Существование и единственность сильного решения уравнений (10) и (11) обеспечивается выполнением стандартных условий [11].

Теорема 1 доказана.

Литература

1. Bar-Shalom Y., Li X., Kirubarajan T. Estimation with applications to tracking and navigation: Theory, algorithms and software. — New York, NY, USA: John Wiley, 2004. 548 p.
2. Liu S., Başar T., Srikant R. TCP-Illinois: A loss- and delay-based congestion control algorithm for high-speed networks // Perform. Evaluation, 2008. Vol. 65. No. 6. P. 417–440.

3. *Aït-Sahalia Y., Jacod J.* High-frequency financial econometrics. — Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2014. 688 p.
4. *Whitt W.* Stochastic-process limits: An introduction to stochastic-process limits and their application to queues. — New York, NY, USA: Springer, 2002. 602 p.
5. *Elliott R. J., Malcolm W. P., Tsoi A. H.* Robust parameter estimation for asset price models with Markov modulated volatilities // *J. Econ. Dyn. Control*, 2003. Vol. 27. No. 8. P. 1391–1409.
6. *Rajasekaran P., Satyanarayana N., Srinath M.* Optimum linear estimation of stochastic signals in the presence of multiplicative noise // *IEEE Trans. Aero. Elec. Sys.*, 1971. Vol. 7. No. 5. P. 462–468.
7. *McLane P. J.* Optimal linear filtering for linear systems with state-dependent noise // *Int. J. Control*, 1969. Vol. 10. No. 1. P. 41–51.
8. *Crisan D., Kouritzin M., Xiong J.* Nonlinear filtering with signal dependent observation noise // *Electron. J. Probab.*, 2009. Vol. 14. P. 1863–1883.
9. *Cvitanic J., Rozovskii B., Zaliapin I.* Numerical estimation of volatility values from discretely observed diffusion data // *J. Comput. Financ.*, 2006. Vol. 9. No. 4. P. 1–36.
10. *Panda M., Vu H. L., Mandjes M., Pokhrel S. R.* Performance analysis of TCP NewReno over a cellular last-mile: Buffer and channel losses // *IEEE Trans. Mobile Comput.*, 2015. Vol. 14. No. 8. P. 1629–1643.
11. *Луицер П. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. — М.: Наука, 1986. 512 с.
12. *Стоянов Й.* Контрпримеры в теории вероятностей / Пер. с англ. — М.: МЦНМО, 2014. 296 с. (*Stoyanov J.* Counterexamples in probability. — New York, NY, USA: John Wiley, 1987. 313 p.)
13. *Takeuchi Y., Akashi H.* Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise // *Automatica*, 1985. Vol. 21. No. 3. P. 303–313.
14. *Joannides M., LeGland F.* Nonlinear filtering with continuous time perfect observations and noninformative quadratic variation // 36th IEEE Conference on Decision and Control Proceedings. — New York, NY, USA: IEEE, 1997. P. 1645–1650.
15. *Луицер П. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974. 512 с.
16. *Магнус Я. Р., Нейдеккер Х.* Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике / Пер. с англ. — М.: Физматлит, 2002. 496 с. (*Magnus J., Neudecker H.* Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. — New York, NY, USA: John Wiley, 1988. 424 p.)

Поступила в редакцию 5.12.16

CLASSIFICATION BY CONTINUOUS-TIME OBSERVATIONS IN MULTIPLICATIVE NOISE I: FORMULAE FOR BAYESIAN ESTIMATE

A. V. Borisov

Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The two-part paper is devoted to the estimation of a finite-state random vector given the continuous-time noised observations. The key feature is that the observation noise intensity is a function of the estimated vector that makes useless the known results in the optimal filtering. The estimate is obtained both in the explicit integral form and as a solution to a stochastic differential system with some jump processes in the right-hand side.

Keywords: Bayesian estimate; optimal filtering; stochastic differential system; random jump process; multiplicative noise

DOI: 10.14357/19922264170102

Acknowledgments

The work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (projects Nos. 15-37-20611 and 16-07-00677).

References

1. Bar-Shalom, Y., X. Li, and T. Kirubarajan. 2004. *Estimation with applications to tracking and navigation: Theory, algorithms and software*. New York, NY: John Wiley. 548 p.
2. Liu, S., T. Başar, and R. Srikant. 2008. TCP-Illinois: A loss-and delay-based congestion control algorithm

- for high-speed networks. *Perform. Evaluation* 65(6): 417–440.
3. Ait-Sahalia, Y. and J. Jacod. 2014. *High-frequency financial econometrics*. Princeton, NJ: Princeton University Press. 688 p.
 4. Whitt, W. 2002. *Stochastic-process limits: An introduction to stochastic-process limits and their application to queues*. New York, NY: Springer. 602 p.
 5. Elliott, R. J., W. P. Malcolm, and A. H. Tsoi. 2003. Robust parameter estimation for asset price models with Markov modulated volatilities. *J. Econ. Dyn. Control* 27(8):1391–1409.
 6. Rajasekaran, P., N. Satyanarayana, and M. Srinath. 1971. Optimum linear estimation of stochastic signals in the presence of multiplicative noise. *IEEE Trans. Aero. Elec. Sys.* 7(5):462–468.
 7. McLane, P. J. 1969. Optimal linear filtering for linear systems with state-dependent noise. *Int. J. Control* 10(1):41–51.
 8. Crisan, D., M. Kouritzin, and J. Xiong. 2009. Nonlinear filtering with signal dependent observation noise. *Electron. J. Probab.* 14:1863–1883.
 9. Cvitanič, J., B. Rozovskii, and I. Zaliapin. 2006. Numerical estimation of volatility values from discretely observed diffusion data. *J. Comput. Financ.* 9(4):1–36.
 10. Panda, M., H. L. Vu, M. Mandjes, and S. R. Pokhrel. 2015. Performance analysis of TCP NewReno over a cellular last-mile: Buffer and channel losses. *IEEE Trans. Mobile Comput.* (8):1629–1643.
 11. Liptser, R. Sh., and A. N. Shiriyayev. 1989. *Theory of martingales*. New York, NY: Springer. 812 p.
 12. Stoyanov, J. 1987. *Counterexamples in probability*. New York, NY: John Wiley. 313 p.
 13. Takeuchi, Y., and H. Akashi. 1985. Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise. *Automatica* 21(3):303–313.
 14. Joannides, M., and F. LeGland. 1997. Nonlinear filtering with continuous time perfect observations and noninformative quadratic variation. *36th IEEE Conference on Decision and Control Proceedings*. New York, NY: IEEE. 1645–1650.
 15. Liptser, R. Sh., and A. N. Shiriyayev. 2001. *Statistics of random processes: I. General theory*. Berlin: Springer. 427 p.
 16. Magnus, J., and H. Neudecker. 1988. *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. New York, NY: John Wiley. 424 p.

Received December 5, 2016

Contributor

Borisov Andrey V. (b. 1965) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; aborisov@frccsc.ru

ОБРАТИМОЕ СЖАТИЕ ДАННЫХ ПОСРЕДСТВОМ УНИВЕРСАЛЬНОГО АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОДИРОВАНИЯ

А. И. Стефанович¹, Д. В. Сушко²

Аннотация: Рассмотрен общий подход к задаче обратимого сжатия, т. е. сжатия без потерь, цифровых данных, основанный на универсальном арифметическом кодировании данных с неизвестной статистикой. Для описания данных используется модель источника с вычислимой последовательностью состояний. В рамках этого подхода сформулированы задачи, решение которых для данных конкретного типа позволяет получить конкретные методы и алгоритмы сжатия. В качестве объекта исследования рассмотрены данные компьютерной томографии. Предложены два метода обратимого сжатия томограмм. Первый предполагает кодирование ошибок предсказания, второй — кодирование компонент двумерного дискретного вейвлет-преобразования. Проведено подробное исследование этих методов, построены эффективные алгоритмы их реализации и получены индивидуальные оценки скорости кодирования алгоритмов. Представлены результаты сравнения скоростей кодирования томограмм построенными алгоритмами и алгоритмами стандарта JPEG 2000. Результаты демонстрируют высокое качество построенных алгоритмов, а также свидетельствуют о больших потенциальных возможностях рассмотренного подхода в целом.

Ключевые слова: обратимое сжатие данных; сжатие без потерь; универсальное кодирование; арифметическое кодирование; компьютерная томограмма

DOI: 10.14357/19922264170103

1 Введение

На протяжении последних нескольких десятилетий наблюдается бурный рост объема цифровых данных, накапливаемых в результате проведения различных научных экспериментов, медицинских исследований и т. д. Необходимость долгосрочного хранения (архивации) и обмена такими данными делают задачу их сжатия (кодирования в целях уменьшения объема данных) актуальной современной задачей. Во многих случаях важным дополнительным требованием к процедуре сжатия является ее обратимость (т. е. отсутствие искажений, или потеря при кодировании). Это требование в случае данных медицинских исследований часто продиктовано соображениями законодательного характера, а в случае данных научных исследований — высокой стоимостью и трудоемкостью эксперимента и/или уникальностью данных.

В настоящей работе рассмотрен общий метод (общий подход), предназначенный для решения задачи обратимого сжатия цифровых данных. Данный метод, основанный на использовании универсального арифметического кодирования, впервые был предложен в работе [1]. Построение в рамках

общего подхода некоторого конкретного метода, предназначенного для сжатия данных определенного типа, связано с необходимостью решить ряд задач по адаптации общего метода к таким данным. Постановки соответствующих задач приведены в работе.

В качестве объекта исследования в работе используются данные компьютерной томографии (томограммы). Для данных указанного типа в рамках общего подхода построены два различных метода сжатия. В работе проведено подробное исследование этих методов, предложены эффективные алгоритмы их реализации и получены индивидуальные оценки скорости кодирования (степени сжатия) этих алгоритмов.

Поскольку томограммы представляют собой изображения, их обратимое сжатие может быть осуществлено альтернативным способом в рамках группы методов стандарта JPEG 2000. В ходе проведенных исследований было осуществлено сжатие томограмм посредством эталонной реализации (Jasper) стандарта JPEG 2000 и произведено сравнение скоростей кодирования алгоритмов JPEG 2000 и эффективных алгоритмов, предложенных в работе. Данное сравнение продемонстрировало, во-

¹Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, astefanovich@ipiran.ru

²Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, dsushko@ipiran.ru

первых, качество разработанных алгоритмов и, во-вторых, высокий потенциал общего метода в целом.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 приведены необходимые сведения об арифметическом кодировании, описана общая схема универсального кодирования и в общем виде сформулированы задачи, решение которых необходимо при адаптации общего метода универсального кодирования к конкретному типу данных. Раздел 3 содержит краткую информацию о том, что представляют собой компьютерные томограммы. В разд. 4 общая схема универсального кодирования адаптирована таким образом, чтобы ее можно было применить для сжатия значений ошибок предсказания компьютерной томограммы. Основным результатом раздела является построение метода сжатия, основанного на кодировании ошибок предсказания, и построение эффективных оценок скорости кодирования метода. В разд. 5 аналогичные результаты получены для метода сжатия, ориентированного на кодирование значений компонент дискретного вейвлет-преобразования томограммы. В заключение приведено сравнение эффективности построенных методов и методов JPG 2000.

2 Универсальное арифметическое кодирование

В настоящем разделе приведено описание общей схемы предлагаемого метода универсального арифметического кодирования. Обозначены постановки основных задач, решение которых обеспечивает эффективное применение этой схемы для сжатия данных конкретного типа.

2.1 Арифметическое кодирование

Приведем сведения об арифметическом кодировании в необходимом для дальнейшего изложения объеме. Подробному рассмотрению арифметического кодирования посвящена, например, работа [2].

Пусть $\mathcal{A} = \{a\}$ — некоторое конечное множество (алфавит), состоящее из $A \doteq |\mathcal{A}|$ элементов, и пусть $\mathbf{x} = \{x_n\}$, $n = 0, \dots, N-1$, — подлежащая кодированию последовательность элементов множества \mathcal{A} . Процесс кодирования заключается в последовательном просмотре всех значений x_n , вычислении кодовой вероятности $Q(\mathbf{x})$ (положительного вещественного числа, не превышающего единицы) и формировании по этой кодовой вероятности двоичного кодового слова (результата сжатия) длины $L(\mathbf{x})$ битов:

$$L(\mathbf{x}) = \left\lceil -\frac{\log_2 Q(\mathbf{x})}{2} \right\rceil + 1 \leq -\log_2 Q(\mathbf{x}) + 2. \quad (1)$$

Здесь и далее $[\cdot]_-$ — целая часть числа. Вычисление кодовой вероятности осуществляется рекуррентно. Начальная кодовая вероятность выбирается равной единице ($Q_{-1} = 1$). В момент поступления на вход кодера очередного значения x_n кодеру должно быть известно (задано заранее и/или сформировано в процессе кодирования предыдущих элементов) условное кодовое распределение вероятностей $\{q_n(a|x_{n-1}, \dots, x_0), a \in \mathcal{A}\}$. Условное кодовое распределение — это набор неотрицательных вещественных чисел, таких что

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} q_n(a|x_{n-1}, \dots, x_0) = 1; \quad (2)$$

кроме того, равенство $q_n(a|x_{n-1}, \dots, x_0) = 0$ для некоторого конкретного значения a допустимо только в том случае, если выполнение равенства $x_n = a$ невозможно априори. Шаг рекурсии заключается в умножении текущей кодовой вероятности на условную кодовую вероятность значения x_n :

$$\begin{aligned} Q_n(x_0, \dots, x_n) &= \\ &= Q_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) q(x_n|x_{n-1}, \dots, x_0). \end{aligned}$$

Результатом выполнения N шагов рекурсии является вычисление кодовой вероятности всей последовательности:

$$Q(\mathbf{x}) = \prod_{n=0}^{N-1} q_n(x_n|x_{n-1}, \dots, x_0). \quad (3)$$

Детали процедуры формирования кодового слова по кодовой вероятности не принципиальны для рассмотрения и опускаются.

Восстановление исходных данных по кодовому слову осуществляется декодером последовательно и без задержки. В момент восстановления очередного значения x_n декодеру уже известны все предыдущие значения $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ и, кроме того, должно быть известно условное кодовое распределение $\{q_n(a|x_{n-1}, \dots, x_0), a \in \mathcal{A}\}$, использованное ранее в процессе кодирования. Это позволяет декодеру восстановить значение x_n .

Таким образом, ключевую роль в процессе арифметического кодирования играют условные кодовые распределения вероятностей $\{q_n(a|x_{n-1}, \dots, x_0), a \in \mathcal{A}, n = 0, \dots, N-1\}$, выбор которых определяет длину кодового слова, т. е. степень сжатия исходных данных. При этом построение условных кодовых распределений, обеспечивающих получение возможно более коротких кодовых слов для входных данных с неизвестной (не полностью известной) статистикой, — задача универсального кодирования.

2.2 Статистическая модель

В качестве статистической модели исходных данных используем так называемую модель *источника с вычислимой последовательностью состояний*. В основе модели лежит следующее предположение: вероятность того, что значение x_n очередного элемента последовательности равна заданному значению $a \in \mathcal{A}$, зависит только от значений τ предшествующих элементов последовательности, т.е. $p(x_n = a) = p(x_n | x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau})$. Пусть \mathcal{S} — некоторое подмножество множества $\mathcal{A}^\tau = \underbrace{\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}_\tau$.

Назовем $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}^\tau$ состоянием (источника), если

$$p(x_n | x'_{n-1}, \dots, x'_{n-\tau}) = p(x_n | x''_{n-1}, \dots, x''_{n-\tau}) \\ \forall (x'_{n-1}, \dots, x'_{n-\tau}), (x''_{n-1}, \dots, x''_{n-\tau}) \in \mathcal{S}.$$

Для условного распределения вероятностей, соответствующего состоянию \mathcal{S} , используем обозначение $p(a|\mathcal{S})$. Множество состояний $\mathfrak{S} = \{\mathcal{S}\}$ назовем полным множеством независимых состояний, если

$$\bigcup_{\mathcal{S} \in \mathfrak{S}} \mathcal{S} = \mathcal{A}^\tau; \quad \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'' = \emptyset \quad \forall \mathcal{S}', \mathcal{S}'' \in \mathfrak{S}.$$

Все рассматриваемые далее множества состояний являются полными и независимыми.

Название модели — модель источника с вычислимой последовательностью состояний — связано со следующей возможной ее интерпретацией. Элементы последовательности $\mathbf{x} = \{x_n\}$ один за другим «порождаются» источником данных, который в каждый «момент времени n » находится в некотором состоянии \mathcal{S} из множества состояний источника \mathfrak{S} ; при этом $p(x_n = a) = p(x_n|\mathcal{S})$. Для краткости можно говорить об элементе x последовательности, «порожденном» источником в состоянии \mathcal{S} , как об элементе состояния \mathcal{S} и записывать это в виде $x \in \mathcal{S}$.

В соответствии с принятой моделью данных естественно использовать общее условное кодовое распределение вероятностей $\{q(a|\mathcal{S}), a \in \mathcal{A}\}$ при кодировании-декодировании всех значений, «порождаемых» источником в каждом отдельном состоянии. Всего в процессе кодирования используется $S \doteq |\mathfrak{S}|$ различных условных кодовых распределений вероятностей (по числу состояний источника). Поскольку арифметическое кодирование осуществляется последовательно, а декодирование — последовательно и без задержки, в момент кодирования-декодирования очередного значения все предыдущие значения уже известны как кодеру, так и декодеру. Поэтому как кодер, так и декодер в состоянии вычислить текущее состояние источника и использовать соответствующее условное кодовое распределение.

Скоростью кодирования (средней скоростью кодирования) V называется отношение длины кодового слова $L(\mathbf{x})$ к числу элементов N кодируемой последовательности; единица измерения скорости кодирования — бит/пиксель (б/п). С учетом принятых предположений из формул (1) и (3) с точностью до малого члена порядка $\sim 2/N$ имеем:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{\mathcal{S} \in \mathfrak{S}} \frac{N(\mathcal{S})}{N} \sum_{x \in \mathcal{A}} \frac{N(x|\mathcal{S})}{N(\mathcal{S})} [-\log_2 q(x|\mathcal{S})], \quad (4)$$

где $N(\mathcal{S})$ — число элементов в состоянии \mathcal{S} ; $N(x|\mathcal{S})$ — число элементов в состоянии \mathcal{S} , принимающих значение x ; внешняя сумма берется по всем состояниям источника; внутренняя сумма — по всем встречающимся в данном состоянии значениям. Если использовать соглашение о том, что $0 \cdot \log 0 = 0$, то внутреннюю сумму можно распространить на все множество значений \mathcal{A} . Действительно, в силу предъявляемых к условным кодовым вероятностям требований равенство $q(x|\mathcal{S}) = 0$ влечет $N(x|\mathcal{S}) = 0$.

Величины $N(\mathcal{S})/N$ ($\mathcal{S} \in \mathfrak{S}$) и $N(x|\mathcal{S})/N(\mathcal{S})$ ($x \in \mathcal{S}, \mathcal{S} \in \mathfrak{S}$) образуют соответственно частотное распределение для состояний и условные частотные распределения значений в состояниях. Используя для этих величин обозначения $f(\mathcal{S})$ и $f(x|\mathcal{S})$, перепишем формулу (4) для скорости кодирования в виде:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{\mathcal{S} \in \mathfrak{S}} f(\mathcal{S}) V(\mathbf{x}|\mathcal{S}), \quad (5)$$

где $V(\mathbf{x}|\mathcal{S})$ — скорость кодирования подпоследовательности элементов состояния \mathcal{S} , или скорость кодирования состояния \mathcal{S} :

$$V(\mathbf{x}|\mathcal{S}) = \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|\mathcal{S}) [-\log_2 q(x|\mathcal{S})]. \quad (6)$$

Формулу для скорости кодирования состояния можно тождественно переписать в виде суммы двух слагаемых:

$$V(\mathbf{x}|\mathcal{S}) = H(\mathbf{x}|\mathcal{S}) + R(\mathbf{x}|\mathcal{S}), \quad (7)$$

где

$$H(\mathbf{x}|\mathcal{S}) = \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|\mathcal{S}) [-\log_2 f(x|\mathcal{S})]; \quad (8)$$

$$R(\mathbf{x}|\mathcal{S}) = \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|\mathcal{S}) \left[-\log_2 \frac{q(x|\mathcal{S})}{f(x|\mathcal{S})} \right]. \quad (9)$$

Первое слагаемое $H(\mathbf{x}|\mathcal{S})$ — это *квазиэнтропия* (или эмпирическая энтропия) состояния. Квазиэнтропия не зависит от условного кодового распределения и, очевидно, является неотрицательной ($H(\mathbf{x}|\mathcal{S}) \geq 0$). Рассмотрим второе слагаемое

$R(\mathbf{x}|\mathcal{S})$ — избыточность кодирования состояния. Учитывая справедливое для всех $\alpha > 0$ элементарное неравенство

$$-\log_2(\alpha) \geq 1 - \alpha, \quad (10)$$

обращающееся в равенство только в случае $\alpha = 1$, имеем:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}|\mathcal{S}) &= \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|\mathcal{S}) \left[-\log_2 \frac{q(x|\mathcal{S})}{f(x|\mathcal{S})} \right] \geq \\ &\geq \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|\mathcal{S}) \left[1 - \frac{q(x|\mathcal{S})}{f(x|\mathcal{S})} \right] = \\ &= \sum_{x \in \mathcal{A}} [f(x|\mathcal{S}) - q(x|\mathcal{S})] = 0, \end{aligned}$$

т. е. $R(\mathbf{x}|\mathcal{S}) \geq 0$, причем $R(\mathbf{x}|\mathcal{S}) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x|\mathcal{S}) = q(x|\mathcal{S})$. Таким образом, показано, что квазиэнтропия состояния — это минимальная скорость кодирования состояния, которая достигается при обращении в нуль избыточности, т. е. при использовании частотных вероятностей в качестве кодовых вероятностей. Подставляя теперь (7) в (5), получаем скорость кодирования (всей последовательности) в виде суммы двух неотрицательных слагаемых:

$$V(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x}), \quad (11)$$

равных

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathcal{S} \in \mathfrak{S}} f(\mathcal{S}) H(\mathbf{x}|\mathcal{S}) \equiv \\ &\equiv \sum_{\mathcal{S} \in \mathfrak{S}} f(\mathcal{S}) \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|\mathcal{S}) [-\log_2 f(x|\mathcal{S})]; \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathcal{S} \in \mathfrak{S}} f(\mathcal{S}) R(\mathbf{x}|\mathcal{S}) \equiv \\ &\equiv \sum_{\mathcal{S} \in \mathfrak{S}} f(\mathcal{S}) \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|\mathcal{S}) \left[-\log_2 \frac{q(x|\mathcal{S})}{f(x|\mathcal{S})} \right], \quad (13) \end{aligned}$$

которые суть квазиэнтропия и избыточность кодирования (всей последовательности) соответственно. При этом квазиэнтропия не зависит от условных кодовых распределений и представляет собой минимальную скорость кодирования, которая достигается при обращении в нуль избыточности, т. е. при использовании частотных вероятностей в качестве кодовых вероятностей.

Обычно при решении практических задач сжатия данных множество состояний неизвестно. Более того, как правило, невозможно даже установить, насколько описанная выше модель источника адекватна реальным данным. При таком положении вещей данное выше определение состояний

становится совершенно неконструктивным и бесполезным с практической точки зрения. Поэтому определим состояния по-новому, взяв за основу условные кодовые вероятности, а именно: будем по определению считать состоянием подмножество $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}^\tau$ такое, что значения x_n всех тех элементов последовательности, которым предшествуют элементы последовательности со значениями $\{x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}\} \in \mathcal{S}$, кодируются одним общим кодовым условным распределением $q(a|\mathcal{S})$. Таким образом, состояние характеризуется тем, что все значения его элементов кодируются одним распределением. При этом формулы (5)–(13), разумеется, остаются в силе, а задача универсального кодирования может быть сформулирована как задача выбора множества состояний \mathfrak{S} и задача построения совокупности условных кодовых вероятностей $\{q(a|\mathcal{S})\}$ ($a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{S} \in \mathfrak{S}$) для выбранного множества состояний.

2.3 Выбор множества состояний

Рассмотрим первую задачу универсального кодирования — выбор множества состояний. Вообще говоря, эта задача должна решаться отдельно для каждого типа исходных данных на основе имеющейся априорной информации и/или принятой модели данных. Существуют, однако, некоторые общие соображения. Квазиэнтропия состояния не зависит от кодовых вероятностей и определяется только частотными вероятностями значений в данном состоянии. Соответственно, квазиэнтропия зависит только от множества состояний \mathfrak{S} в целом. Естественно попытаться выбрать состояния так, чтобы минимизировать квазиэнтропию. При этом следует с самого начала иметь в виду, что возможна ситуация, когда квазиэнтропия мала, но избыточность (также зависящая от множества состояний) недопустимо велика и, как следствие, недопустимо велика и скорость кодирования. Описанная ситуация, например, заведомо имеет место в том случае, когда число состояний велико (сравнимо по величине с количеством отсчетов исходных данных).

Рассмотрим множества $\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{S}'' \subset \mathcal{A}^\tau$ такие, что $\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'' = \emptyset$, $\mathcal{S}' \cup \mathcal{S}'' = \mathcal{S}$. Снова используя неравенство (10), имеем:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{S}) H(\mathbf{x}|\mathcal{S}) &= f(\mathcal{S}) \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|\mathcal{S}) [-\log_2 f(x|\mathcal{S})] = \\ &= f(\mathcal{S}') \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|\mathcal{S}') [-\log_2 f(x|\mathcal{S}')] + \\ &+ f(\mathcal{S}'') \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|\mathcal{S}'') [-\log_2 f(x|\mathcal{S}')] = \\ &= f(\mathcal{S}') H(\mathbf{x}|\mathcal{S}') + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + f(S') \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|S') \left[-\log_2 \frac{f(x|S)}{f(x|S')} \right] + \\
 & \quad + f(S'') H(\mathbf{x}|S'') + \\
 & \quad + f(S'') \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x|S'') \left[-\log_2 \frac{f(x|S)}{f(x|S'')} \right] \geq \\
 & \geq f(S') \left\{ H(\mathbf{x}|S') + \sum_{x \in \mathcal{A}} [f(x|S') - f(x|S)] \right\} + \\
 & + f(S'') \left\{ H(\mathbf{x}|S'') + \sum_{x \in \mathcal{A}} [f(x|S'') - f(x|S)] \right\} = \\
 & = f(S') H(\mathbf{x}|S') + f(S'') H(\mathbf{x}|S'') .
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{x}|S) & \geq \\
 & \geq f(S'|S) H(\mathbf{x}|S') + f(S''|S) H(\mathbf{x}|S'') , \quad (14)
 \end{aligned}$$

где $f(S'|S) = f(S')/f(S)$ и $f(S''|S) = f(S'')/f(S)$ — условные частотные вероятности состояний S' и S'' соответственно, а равенство имеет место только в том случае, если $f(x|S) \equiv f(x|S') \equiv f(x|S'')$. Таким образом, установлено, что квазиэнтропия является выпуклой функцией: при разбиении любого состояния квазиэнтропия не увеличивается. Поэтому критерием выбора множества S в качестве состояния может служить условие

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{x}|S) - \min_{S' \subset S} \{ f(S'|S) H(\mathbf{x}|S') + \\
 + f(S \setminus S'|S) H(\mathbf{x}|S \setminus S') \} < \varepsilon ,
 \end{aligned}$$

в котором значение $\varepsilon > 0$ должно быть выбрано исходя из практических требований.

Квазиэнтропия всей последовательности зависит от множества состояний: $H(\mathbf{x}) \equiv H(\mathbf{x}, \mathfrak{S})$. Если зафиксировать общее число состояний S , то величина

$$\hat{H}^S(\mathbf{x}) = \min_{\mathfrak{S}: |\mathfrak{S}|=S} H(\mathbf{x}, \mathfrak{S}) \quad (15)$$

представляет собой оптимальную (при заданном числе состояний) квазиэнтропию, а соответствующее множество $\hat{\mathfrak{S}}$ — оптимальное множество, которое естественно использовать в качестве множества состояний при кодировании.

Из неравенства (14) сразу следует, что оптимальная квазиэнтропия $\hat{H}^S(\mathbf{x})$ при увеличении числа состояний S не возрастает. Это позволяет использовать условие

$$\hat{H}^S(\mathbf{x}) - \hat{H}^{S+1}(\mathbf{x}) < \varepsilon$$

как критерий для определения числа состояний. При этом конкретное значение $\varepsilon > 0$ должно выбираться исходя из практических требований.

Проверка любого из приведенных выше условий связана с перебором всех подмножеств множества \mathcal{A}^τ , что, как правило, не может быть реализовано на практике уже в случае $\tau = 2$. Поэтому сказанное может рассматриваться лишь как «общее направление движения»: указанные критерии должны быть адаптированы к конкретному типу данных с привлечением априорной информации и дополнительных гипотез.

2.4 Построение кодовых распределений

Выше было показано, что минимальная скорость кодирования для заданного множества состояний достигается тогда и только тогда, когда $q(x|S) \equiv f(x|S)$ для всех состояний, т.е. в качестве условных кодовых распределений используются условные частотные распределения. Условные частотные распределения $f(x|S)$ априори не известны, но могут быть вычислены кодером по исходным данным \mathbf{x} , что позволяет использовать упрощенное комбинаторное кодирование.

Кодовое слово комбинаторного кода состоит из двух частей. Первая часть (преамбула) содержит значения $N(x|S)$ для всех $x \in \mathcal{A}$, $S \in \mathfrak{S}$, которые вычисляются в процессе кодирования. Длина преамбулы равна $S(A-1)(\log_2 N + 1)$ бит. Вторая часть — результат арифметического кодирования последовательности $\mathbf{x} = \{x_n\}$ с помощью частотных распределений $f(x|S)$. Получив кодовое слово, декодер выделяет преамбулу, «считывает» значения $N(x|S)$ и вычисляет $N(S)$ — суммы $N(x|S)$ по всем $x \in \mathcal{A}$. В результате становятся известными частотные распределения $f(x|S)$, использовавшиеся при кодировании, что позволяет однозначно декодировать вторую часть кодового слова и восстановить исходную последовательность.

Избыточность описанной процедуры комбинаторного кодирования определяется длиной преамбулы, т.е. длиной данных, которые должны быть дополнительно переданы декодеру, и равна

$$R = R_T = \frac{S(A-1)(\log_2 N + 1)}{N} . \quad (16)$$

При больших значениях A величина (16) недопустимо велика. Действительно, при $S = 5$, $A = 2^{12}$ и $N = 512^2$ имеем $R_T \sim 1,4$ б/п.

Отметим, что в общем случае (без каких-либо дополнительных предположений относительно исходных данных) использование более совершенных по сравнению с комбинаторным кодированием методов позволяет уменьшить избыточность приблизительно в два раза; это, однако, не решает проблему.

Приступим к рассмотрению впервые предложенного в работе [1] метода построения кодовых распределений, который представляет собой, по существу, некоторую модификацию метода комбинаторного кодирования.

Без ограничения общности можно считать, что множество \mathcal{A} состоит из идущих подряд целых чисел. В основе метода лежит следующее предположение: для любых исходных данных частотные распределения $f(x|\mathcal{S})$ представляют собой достаточно «гладкие» функции (точнее, отсчеты достаточно «гладких» функций).

Основная идея метода заключается в том, чтобы аппроксимировать соответствующие распределения простыми аналитическими функциями из заранее выбранного класса, такого что каждая функция класса однозначно определяется значениями некоторого небольшого числа параметров. Кодер использует значения построенных аппроксимирующих функций в качестве кодовых распределений, а для передачи необходимой информации декодеру достаточно передать значения параметров, определяющих эти функции. При этом избыточность R_T , связанная с передачей декодеру дополнительной информации, кардинально уменьшается, но появляется избыточность арифметического кодирования $R(x)$ (см. формулы (11) и (7)), поскольку теперь кодовые вероятности не равны частотным вероятностям. Величина $R(x)$ определяется качеством аппроксимации и в конечном счете адекватностью используемого основного предположения.

Перейдем теперь к более детальному рассмотрению предлагаемого метода. Обычно одна простая аналитическая функция не обеспечивает приемлемой точности аппроксимации частотных распределений $f(x|\mathcal{S})$ на всем множестве \mathcal{A} . Поэтому разобьем все множество \mathcal{A} на диапазоны, состоящие из идущих подряд целых чисел, с тем чтобы использовать в каждом диапазоне свою аппроксимирующую функцию. Такое разбиение задается, разумеется, границами диапазонов. Пусть $\mathcal{I} = [a_B, a_E]$, $a_B \leq a_E$, — отдельный диапазон; $a_E - a_B + 1$ — число значений в данном диапазоне; \mathcal{J} — все множество диапазонов; $I \doteq |\mathcal{J}|$ — общее число диапазонов (для разных состояний используются разные разбиения на диапазоны).

Пусть $N(\mathcal{I}|\mathcal{S})$ — число элементов состояния \mathcal{S} , значения которых попадают в диапазон \mathcal{I} , $\mathcal{I} \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$. Тогда $f(\mathcal{I}|\mathcal{S}) = N(\mathcal{I}|\mathcal{S})/N(\mathcal{S})$ и $f(x|\mathcal{I}, \mathcal{S}) = N(x|\mathcal{S})/N(\mathcal{I}|\mathcal{S})$, $x \in \mathcal{I}$, — условные частотные распределения вероятностей диапазонов и значений в диапазоне \mathcal{I} в данном состоянии \mathcal{S} . Для каждого диапазона будем использовать свою собственную нормированную функцию распределе-

ния $q(x|\mathcal{I}, \mathcal{S})$, которая аппроксимирует функцию $f(x|\mathcal{I}, \mathcal{S})$. Функция $q(x|\mathcal{I}, \mathcal{S})$ — условное кодовое распределение значений в данном диапазоне. Общее условное кодовое распределение для состояния \mathcal{S} имеет вид:

$$q(x|\mathcal{S}) = f(\mathcal{I}|\mathcal{S})q(x|\mathcal{I}, \mathcal{S}), \quad x \in \mathcal{I} \in \mathcal{J}(\mathcal{S}). \quad (17)$$

Из формул (17) и (9) следует, что избыточность арифметического кодирования состояния \mathcal{S} может быть представлена в виде:

$$R(\mathbf{x}|\mathcal{S}) = \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{J}(\mathcal{S})} f(\mathcal{I}|\mathcal{S})R(\mathbf{x}|\mathcal{I}, \mathcal{S}), \quad (18)$$

где $R(\mathbf{x}|\mathcal{I}, \mathcal{S})$ — избыточность арифметического кодирования отдельного диапазона — имеет вид

$$R(\mathbf{x}|\mathcal{I}, \mathcal{S}) = \sum_{x \in \mathcal{I}} f(x|\mathcal{I}, \mathcal{S}) \left[-\log_2 \frac{q(x|\mathcal{I}, \mathcal{S})}{f(x|\mathcal{I}, \mathcal{S})} \right]. \quad (19)$$

Остановимся подробнее на способе выбора аппроксимирующей функции $q(x|\mathcal{I}, \mathcal{S})$. Сразу отметим, что случай, когда диапазон состоит из единственной точки ($a_B = a_E$), является тривиальным, а избыточность кодирования такого диапазона равна нулю. Поэтому далее будем считать, что $a_B < a_E$.

Пусть $\mathcal{P} = \{p(\xi; \gamma) : \xi \in [0, 1], \gamma \in \Gamma\}$ — некоторое γ -параметрическое семейство положительных функций вещественного аргумента ξ , Γ — область допустимых значений параметров. Выбор отрезка $[0, 1]$ в качестве области определения функций не ограничивает общности, поскольку сдвиг и масштабирование при необходимости могут быть отнесены к числу параметров γ . Предполагается, что класс функций \mathcal{P} известен как кодеру, так и декодеру. При любых значениях параметров величины

$$q(x; \gamma|\mathcal{I}, \mathcal{S}) = c^{-1}p\left(\frac{x - a_B}{a_E - a_B}; \gamma\right), \quad (20)$$

где

$$c = \sum_{k=0}^{a_E - a_B} p\left(\frac{k}{a_E - a_B}; \gamma\right), \quad x \in \mathcal{I} \in \mathcal{J}(\mathcal{S}),$$

удовлетворяют необходимым условиям и могут использоваться в качестве условных кодовых распределений. Наличие в формуле (20) нормировочной константы c обеспечивает выполнение условия (2) и позволяет, не ограничивая общности, наложить на все функции семейства \mathcal{P} одно из условий вида $p(0) = 1$ или $p(1) = 1$.

В процессе кодирования величины $f(x|\mathcal{I}, \mathcal{S})$ могут быть вычислены. Это позволяет выбрать пара-

метры $\gamma = \hat{\gamma} \in \Gamma$ так, чтобы избыточность кодирования диапазона (19) была минимальной при использовании функции $q(x|\mathcal{I}, \mathcal{S}) = q(x; \hat{\gamma}|\mathcal{I}, \mathcal{S})$ в качестве условного кодового распределения. Значения параметров $\hat{\gamma}$ должны быть переданы декодеру, что позволит реконструировать функцию $q(x|\mathcal{I}, \mathcal{S}) = q(x; \hat{\gamma}|\mathcal{I}, \mathcal{S})$ и использовать ее в процессе восстановления.

Для заданного разбиения на диапазоны (множества $\mathcal{J}(\mathcal{S})$) избыточность арифметического кодирования состояния (18) при использовании функций $q(x|\mathcal{I}, \mathcal{S})$ минимальна. Однако эта величина сильно зависит от выбора разбиения и является неустойчивой по отношению к этому выбору: малое изменение границ диапазонов может приводить к заметному изменению избыточности. Поэтому разбиение на диапазоны целесообразно проводить на этапе кодирования, выбирая $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ так, чтобы по возможности уменьшить величину (18). При этом соответствующая информация (границы диапазонов) должна быть передана декодеру.

Рассмотрим преамбулу комбинаторного кода, соответствующего описанному выше методу. Помимо значений $N(\mathcal{I}|\mathcal{S})$ преамбула должна включать значения границ диапазонов выбранных разбиений $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ (по одной границе на диапазон) и значения параметров $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\mathcal{I}, \mathcal{S})$. Оценим длину преамбулы. Для описания одного значения $N(\mathcal{I}|\mathcal{S})$ требуется $\sim \log_2 N$ бит, одной границы диапазона — $\sim \log_2 A$ бит. Пусть G — длина описания одного набора параметров $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\mathcal{I}, \mathcal{S})$. Общая длина преамбулы оценивается как произведение общего числа использованных диапазонов и суммы трех указанных величин, а для избыточности R_T , связанной с передачей дополнительной информации в преамбуле, имеем следующую оценку:

$$R_T \simeq \frac{1}{N} (\log_2 N + \log_2 A + G) \sum_{S \in \mathfrak{S}} I(S).$$

Пусть, как и ранее, $S = 5$, $A = 2^{12}$ и $N = 512^2$. Предположим, что для каждого состояния используется по 10 диапазонов и $G = 50$, т. е. для описания одного набора параметров требуется 50 бит. В таком случае имеем $R_T \sim 0,015$ б/п, что представляется достаточно малой величиной.

Таким образом, есть все основания полагать, что полная избыточность описанного метода построения кодовых распределений определяется главным образом избыточностью арифметического кодирования.

Применение метода для сжатия конкретного типа данных требует его дополнительной адаптации, а оценка его эффективности — вопрос, который должен решаться экспериментально.

3 Компьютерные томограммы

Компьютерная (рентгеновская) томограмма представляет собой квадратное полутоновое изображение размера 512×512 и глубины яркости 16 бит, которое получено в результате применения алгоритма томографического восстановления (реконструкции) к данным сканирования и содержит информацию о рентгеновской плотности тканей пациента в плоскости, перпендикулярной аксиальной оси сканирующей системы (томографа).

Значения рентгеновской плотности принято выражать в единицах шкалы Хаунсфилда (НУ). Шкала состоит из целых значений в диапазоне $[-1024, 3071]$, ширина диапазона — 12 бит. Рентгеновская плотность воды при нормальных условиях принята за нуль, рентгеновская плотность воздуха при нормальных условиях по определению считается равной -1000 . Для некоторого материала с линейным коэффициентом поглощения μ значение рентгеновской плотности по шкале НУ равно $1000(\mu - \mu_0)/\mu_0$, где μ_0 — линейный коэффициент поглощения воды при той же (эффективной) энергии, а значения округляются до ближайшего целого. Приведем для справки некоторые значения рентгеновской плотности в единицах НУ: легочные ткани — $\sim -850 \dots -700$, жировые ткани — $\sim -120 \dots -30$, мышечные ткани — $\sim +20 \dots +40$, костные ткани — $\sim +300 \dots +800$.

При восстановлении значений томограммы X^T для записи выраженных в единицах НУ значений рентгеновской плотности используются два байта (16 бит). Способ размещения 12 значащих битов шкалы Хаунсфилда в 16 битах яркости точки томограммы варьируется в зависимости от используемого компьютерного томографа. Кроме того, поскольку в обычных режимах работы томографа область восстановления представляет собой круг, а томограмма представляет собой квадрат, в который этот круг вписан, то отдельное (фоновое) значение приписывается тем точкам изображения, в которых реконструкция не производилась. Таким образом, яркость томограммы принимает не более $2^{12} + 1$ значений и существует взаимно однозначное амплитудное преобразование $X^T \rightarrow X$, отображающее исходные значения в диапазон $[0, 4096]$ так, что фоновое значение отображается в нуль, а для остальных значений после преобразования справедливо равенство $X = X^{НУ} + 1024 + 1$, где $X^{НУ}$ — значения в единицах НУ. В силу сказанного везде далее будем считать, если не оговорено противное, что амплитудное преобразование выполнено, диапазон значений яркости томограммы равен $[0, 4096]$, значение нуль является фоновым значением.

Итак, подлежащие сжатию данные представляют собой квадратную матрицу $\mathbf{X} = [X_{l,m}]$, $0 \leq l \leq L - 1$, $0 \leq m \leq M - 1$, $L = M = 512$. Пусть $N = L \times M$ — общее число элементов матрицы. Значения элементов лежат в диапазоне $\mathcal{A} = [0, 4096]$. Для применения описанной в разд. 2 схемы необходимо выбрать некоторый способ упорядочения элементов матрицы. Примем естественный способ упорядочения, соответствующий построчному сканированию слева направо и сверху вниз. При этом данные можно рассматривать как последовательность отсчетов $\mathbf{X} = [X_n]$, $0 \leq n \leq N - 1$, причем $X_{l,m} = X_{lM+m}$. Везде, где это не вызывает недоразумений, будем использовать сокращенную запись и обозначать через X текущий элемент матрицы X_n , а через U и L — соседние к нему сверху и слева элементы X_{n-M} и X_{n-1} . Если X — элемент первой строки и/или первого столбца, т.е. верхний и/или левый соседний элемент отсутствует, то будем полагать $U = 0$ и/или $L = 0$. Такое соглашение отвечает специфике томографических изображений (напомним, что 0 — фоновое значение). В соответствии с принятым способом упорядочения элементы U и L являются предшествующими по отношению к текущему элементу X и могут использоваться для определения текущего состояния источника.

В качестве экспериментального материала в работе используются шесть томограмм Т1–Т6 трех видов тканей: брюшной полости — Т1 и Т2, легких — Т3 и Т4 и головного мозга — Т5 и Т6, которые предоставлены Отделением лучевой диагностики Клиники протопедвтики внутренних болезней им. В. Х. Василенко (томограф HiSpeed CT/i компании General Electric). В данном случае значение $X^T = 0x7830$ является фоновым. Остальные значения связаны со значениями рентгеновской плотности, выраженной в единицах НУ, следующим образом: $X^T = 0x8400 + X^{HU}$. Поэтому амплитудное преобразование, о котором шла речь выше, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} X^T \rightarrow X = 0 \quad (X^T = 0x7830) ; \\ X^T \rightarrow X = X^T - 0x7FFF \quad (X^T \neq 0x7830) . \end{aligned} \right\} (21)$$

Префикс «0x» использован выше для обозначения шестнадцатеричной записи целых чисел.

Томограммы Т1–Т6 (после амплитудного преобразования) представлены на рис. 1. Для визуализации томограмм брюшной полости использовано окно визуализации [850, 1250], для томограмм легких — значительно более широкое окно [0, 1100], для томограмм головного мозга — узкое окно [1020, 1120]. Напомним, что визуализация изображения в окне $[x_{\min}, x_{\max}]$ предполагает преобразование значений яркости, при котором

диапазон $[x_{\min}, x_{\max}]$ линейно отображается на стандартный диапазон [0, 255], значения $x < x_{\min}$ отображаются в значение 0, значения $x > x_{\max}$ — в значение 255, и вывод полученного таким образом изображения на экран монитора или устройства печати. Окно визуализации для томограмм обычно выбирается исходя из диагностических задач.

4 Кодирование ошибок предсказания

Адаптацию представленной в разд. 2 общей схемы для сжатия томографических данных начнем с рассмотрения метода, основанного на универсальном кодировании ошибок предсказания. Метод был впервые предложен в работе [1].

4.1 Ошибки предсказания

Простейшее предсказание для текущего элемента X имеет вид $[(U+L)/2]_-$, где U и L суть ближайшие соседние сверху и слева элементы, а $[\cdot]_-$ — целая часть числа, т.е. деление предполагается целочисленным. В соответствии с принятым способом упорядочения к моменту рассмотрения очередного элемента X элементы U и L уже известны как кодеру, так и декодеру и, следовательно, известно предсказание. Поэтому описание исходных значений эквивалентно описанию значений ошибок предсказания $\Delta = X - [(U+L)/2]_-$. Заметим, что в целом ошибки предсказания образуют изображение Δ того же размера, что и исходное изображение. Диапазон возможных значений ошибок предсказания вдвое шире диапазона исходных значений: $A_\Delta = [-4096, +4096]$. Несмотря на это, распределение значений ошибок внутри диапазона является значительно менее равномерным: функция распределения имеет ярко выраженный максимум вблизи нуля. Поэтому кодирование значений ошибок предсказания оказывается выгоднее, чем кодирование исходных значений.

На рис. 2, а представлена ошибка предсказания для томограммы Т3, на рис. 2, б — ошибка предсказания для томограммы Т6. Окна визуализации симметричны относительно значения нуль и имеют ту же ширину, что и окна, использованные при визуализации соответствующих томограмм на рис. 1.

4.2 Множества состояний и оценки минимальной скорости кодирования

Примем гипотезу, согласно которой распределение значений очередной ошибки предсказания Δ

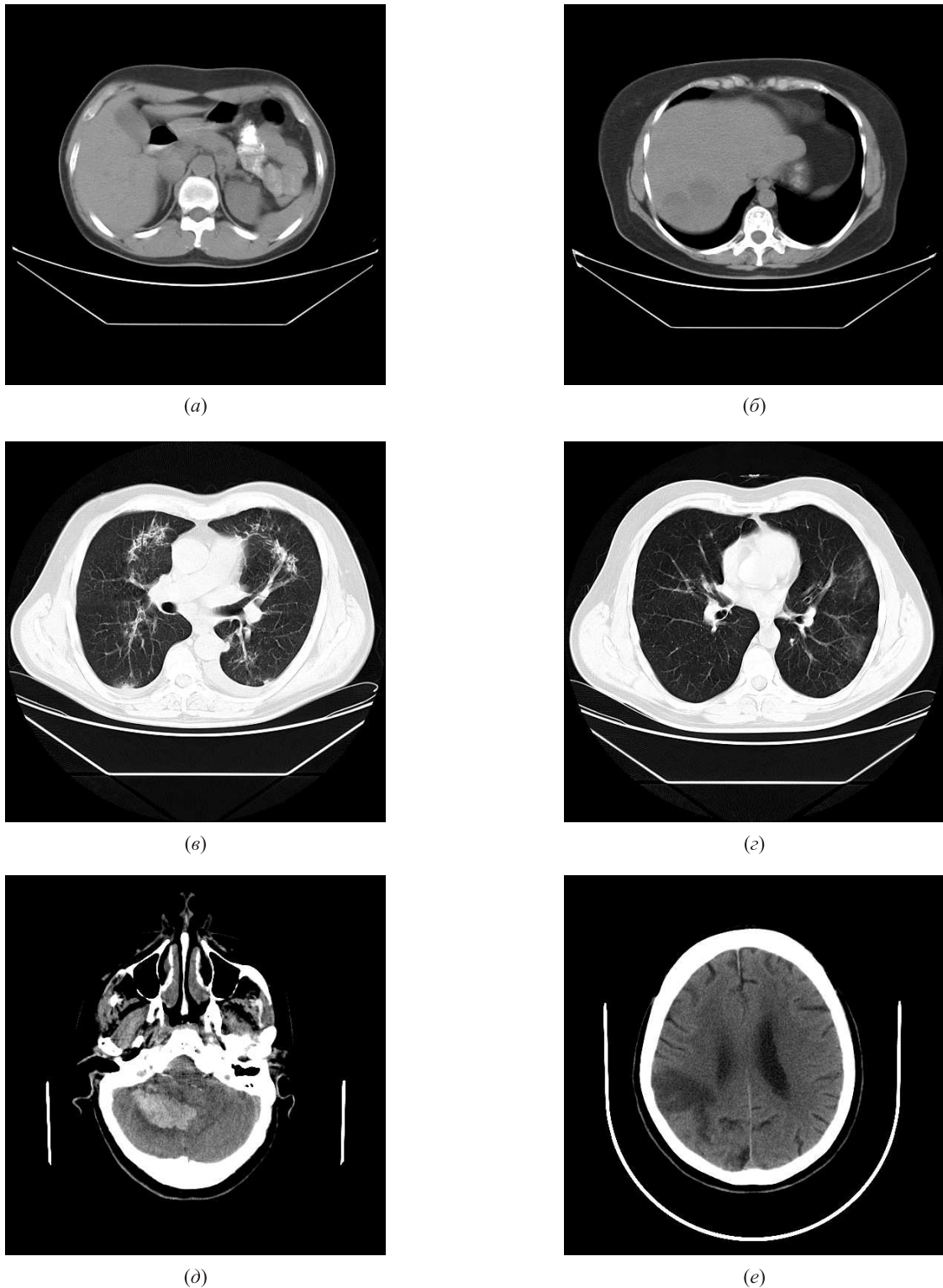


Рис. 1 Томограммы брюшной полости T1 (а) и T2 (б), легких T3 (в) и T4 (г) и головного мозга T5 (д) и T6 (е). Для первой, второй и третьей пары томограмм использованы окна визуализации, равные соответственно [850, 1250], [0, 1100] и [1020, 1120]



Рис. 2 Ошибки предсказания для томограмм Т3 (а) и Т6 (б). Для ошибок предсказания томограммы Т3 (а) использовано окно визуализации $[-550, +550]$, для ошибок предсказания томограммы Т6 (б) — окно визуализации $[-50, +50]$

зависит только от значений элементов U и L исходного изображения. Функция

$$\sigma_1(U, L) = |U - L| \quad (22)$$

характеризует изменение значений элементов в окрестности рассматриваемой точки. Примем гипотезу, согласно которой чем ближе значения функции σ_1 для разных рассматриваемых точек, тем меньше различие соответствующих распределений, измеряемое избыточностью их совместного кодирования. Данная гипотеза приводит к следующему способу построения множества состояний \mathfrak{S} источника. Прежде всего, учитывая специфику томограмм, определим фоновое состояние \mathcal{S}_0 следующим образом: источник находится в фоновом состоянии тогда и только тогда, когда $U = L = 0$. Далее выберем множество порогов $\mathfrak{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_T\}$, состоящее из T различных упорядоченных по возрастанию натуральных чисел. Если источник не находится в фоновом состоянии \mathcal{S}_0 и выполнено условие

$$T_{k-1} \leq \sigma_1(U, L) < T_k, \quad k = 1, \dots, T, \quad (23)$$

то источник находится в состоянии \mathcal{S}_k . Если, наконец,

$$T_T \leq \sigma_1(U, L), \quad (24)$$

то источник находится в состоянии \mathcal{S}_{T+1} . Таким образом, функция σ_1 и значения порогов \mathfrak{T} определяют множество состояний источника $\mathfrak{S}(\mathfrak{T})$, которое состоит из $T + 2$ состояний (считая фоновое).

Множеству состояний источника $\mathfrak{S}(\mathfrak{T})$ соответствует квазиэнтропия $H = H(\mathfrak{S}(\mathfrak{T})) \equiv H(\mathfrak{T})$. Отметим, что в силу выпуклости квазиэнтропии (см. формулу (14)) добавление дополнительного порога может лишь уменьшать ее значение.

В подразд. 2.3 была сформулирована оптимизационная задача (15), которая предполагает нахождение оптимального множества состояний источника при фиксированном общем числе состояний и вычисление соответствующей квазиэнтропии. При выбранном способе построения состояний данная задача превращается в задачу нахождения оптимальных порогов и принимает следующий вид:

$$\hat{H}^T(\Delta) = \min_{0 < T_1 < \dots < T_T} H(\Delta, \mathfrak{T}), \quad (25)$$

где общее число используемых порогов T фиксировано. Величина \hat{H}^T — оптимальная квазиэнтропия; для обозначения множества порогов, реализующих минимум в (25), будем использовать обозначение $\hat{\mathfrak{T}}^T = \{\hat{T}_1^T, \hat{T}_2^T, \dots, \hat{T}_T^T\}$.

В отличие от общей задачи (15), задача (25) допускает численное решение, в результате которого можно получить оценки оптимальной квазиэнтропии, т. е. оценки для минимальной скорости кодирования используемого метода.

Значение квазиэнтропии при фиксированных значениях порогов может быть вычислено по формуле (12) (в качестве значений отсчетов нужно использовать значения ошибок предсказания). Квазиэнтропия зависит от значений порогов сложным нерегулярным образом, поэтому единственным способом точного решения оптимизационной задачи (25) является прямой перебор в пространстве параметров (допустимых значений порогов). Результаты проведенных для томограмм Т1–Т6 численных экспериментов представлены в табл. 1. Вычисления были проведены для общего числа порогов T , принимающего значения 0, 1, 2 и 3, при

Таблица 1 Оптимальные пороги и квазиэнтропия

T	$\hat{H}^0 (T = 0)$	$\hat{\mathfrak{z}}^1; \hat{H}^1 (T = 1)$	$\hat{\mathfrak{z}}^2; \hat{H}^2 (T = 2)$	$\hat{\mathfrak{z}}^3; \hat{H}^3 (T = 3)$
T1	4,768833	{37}; 4,564031	{23,101}; 4,507584	{15,37,114}; 4,486921
T2	5,032069	{41}; 4,835185	{29,113}; 4,790141	{16,37,117}; 4,771703
T3	6,451010	{149}; 6,335030	{101,257}; 6,309464	{87,175,468}; 6,294528
T4	6,374494	{161}; 6,250491	{87,270}; 6,218691	{1,87,270}; 6,199943
T5	4,674353	{19}; 4,381157	{1,21}; 4,276768	{1,14,61}; 4,215797
T6	4,378846	{16}; 4,023612	{12,44}; 3,976094	{12,39,274}; 3,957160

этом общее число состояний было равно соответственно 2, 3, 4 и 5. Заметим, что случай $T = 0$ отвечает использованию двух состояний: «фоновое» и «нефоновое».

Приведенные данные показывают, что величина \hat{H}^T монотонно убывает с ростом T , т. е. увеличение общего числа порогов уменьшает нижнюю оценку скорости кодирования. Однако уже при малых значениях T наступает насыщение, и дальнейшее увеличение числа порогов может дать лишь незначительный выигрыш в скорости кодирования. Действительно, для любой томограммы разность $\hat{H}^2 - \hat{H}^3$ уже находится в пределах нескольких сотых долей, а при добавлении еще одного порога квазиэнтропия уменьшается не более чем на тысячные доли. Поэтому использование большого числа порогов не имеет смысла и целесообразно ограничиться не более чем тремя порогами (использовать не более пяти состояний источника).

Как уже было указано выше, единственным способом решения экстремальной задачи (25) является прямой перебор. При этом вычисление квазиэнтропии для каждого набора порогов связано с просмотром значений всего изображения. Поэтому нахождение оптимальных значений порогов представляет собой трудную вычислительную задачу, которая не может быть решена за приемлемое на этапе сжатия время уже в двумерном пространстве параметров, т. е. для двух порогов. Решение же задачи (25) в трехмерном пространстве параметров ($T = 3$) при использовании современной вычислительной техники занимает десятки часов. Поэтому необходим эффективный алгоритм построения множества состояний (порогов), реализация которого в процессе кодирования томограммы не приводила бы к большим временным затратам. Такой алгоритм был предложен в работах [3, 4].

Алгоритм предполагает вместо трех оптимальных порогов $\hat{\mathfrak{z}}^3 = \{\hat{T}_1^3, \hat{T}_2^3, \hat{T}_3^3\}$ использовать при построении состояний три квазиоптимальных порога $\tilde{\mathfrak{z}}^3 = \{\tilde{T}_1^3, \tilde{T}_2^3, \tilde{T}_3^3\}$, которые находятся следующим образом. Сначала находится порог \tilde{T}_2^3 как решение задачи (25) при общем числе порогов $T =$

$= 1: \tilde{T}_2^3 = \hat{T}_1^1$. Далее находятся пороги $\tilde{T}_1^3, \tilde{T}_3^3$ как решения экстремальных задач

$$\left. \begin{aligned} H^2(\tilde{T}_1^3, \tilde{T}_2^3) &= \min_{T: T < \tilde{T}_2^3} H^2(T, \tilde{T}_2^3); \\ H^2(\tilde{T}_2^3, \tilde{T}_3^3) &= \min_{T: \tilde{T}_2^3 < T} H^2(\tilde{T}_2^3, T) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

соответственно. Таким образом, нахождение трех квазиоптимальных порогов предполагает последовательное решение трех одномерных оптимизационных задач, что может быть сделано за приемлемое время в процессе кодирования.

Пусть \tilde{H}^3 — квазиэнтропия, соответствующая трем квазиоптимальным порогам. Поскольку добавление порогов может приводить только к уменьшению квазиэнтропии, величина \tilde{H}^3 не превышает величины \hat{H}^1 (оптимальной квазиэнтропии при использовании одного порога):

$$\begin{aligned} \tilde{H}^3 = H^3(\tilde{T}_1^3, \tilde{T}_2^3, \tilde{T}_3^3) &= H^3(\tilde{T}_1^3, \hat{T}_1^1, \tilde{T}_3^3) \leq \\ &\leq H^1(\hat{T}_1^1) = \hat{H}^1. \end{aligned}$$

Более того, пусть выполнено условие $\hat{T}_1^2 \leq \hat{T}_1^1 \leq \hat{T}_2^2$, т. е. значение одного оптимального порога (при $T = 1$) расположено между значениями двух оптимальных порогов (при $T = 2$). Тогда квазиэнтропия \tilde{H}^3 не превышает квазиэнтропии \hat{H}^2 двух оптимальных порогов:

$$\begin{aligned} \tilde{H}^3 = H^3(\tilde{T}_1^3, \tilde{T}_2^3, \tilde{T}_3^3) &\leq H^3(\tilde{T}_1^2, \hat{T}_1^1, \tilde{T}_2^2) \leq \\ &\leq H^2(\hat{T}_1^2, \hat{T}_2^2) = \hat{H}^2, \end{aligned}$$

причем первое неравенство в цепочке справедливо, поскольку пороги \tilde{T}_1^3 и \tilde{T}_3^3 суть решения экстремальных задач (26), а второе — поскольку при добавлении порогов квазиэнтропия не возрастает. Заметим, что указанное условие выполнено для всех томограмм T1–T6, как показывают приведенные в табл. 1 данные.

В табл. 2 приведены значения квазиоптимальных порогов и соответствующие значения квазиэнтропии, посчитанные для томограмм T1–T6. Там

Таблица 2 Квазиоптимальные пороги и квазиэнтропия

Γ	$\tilde{\xi}^3$	\tilde{H}^3	$\hat{H}^2 - \tilde{H}^3$	$\tilde{H}^3 - \hat{H}^3$
T1	{15,37,114}	4,486921	0,020663	0,000000
T2	{17,41,117}	4,771758	0,018383	0,000055
T3	{70,149,419}	6,295014	0,014450	0,000486
T4	{69,161,429}	6,204381	0,014310	0,004438
T5	{1,19,79}	4,219947	0,056821	0,004150
T6	{9,16,57}	3,959734	0,016360	0,002574

же для удобства приведены значения величин $\hat{H}^2 - \tilde{H}^3$ и $\tilde{H}^3 - \hat{H}^3$.

Анализ приведенных данных показывает, что, во-первых, использование трех квазиоптимальных порогов всегда обеспечивает некоторый выигрыш по сравнению с использованием двух оптимальных. Во-вторых, величина $\tilde{H}^3 - \hat{H}^3$ не превышает 0,0045 б/п, а величина отношения $(\tilde{H}^3 - \hat{H}^3)/\hat{H}^3$ не превышает 0,001. Следовательно, использование квазиоптимальных порогов не приводит к заметным издержкам по сравнению с использованием трех оптимальных порогов.

Таким образом, описанный способ нахождения квазиоптимальных порогов полностью решает основную поставленную задачу и дает эффективный алгоритм построения множества состояний.

Построенное по квазиоптимальному множеству порогов $\tilde{\xi}^3$ множество состояний будем далее называть квазиоптимальным множеством состояний и обозначать $\tilde{\mathcal{S}}^5 = \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{\xi}^3)$.

В ходе проведенных работ был исследован вопрос о возможности уменьшения оценок для минимальной скорости кодирования за счет использования предсказаний другого типа и/или других способов построения состояний источника. Ответ оказался отрицательным: приведенные выше

оценки не удалось улучшить сколько-нибудь заметно.

4.3 Оценки избыточности кодирования

Используем описанную в подразд. 2.4 общую схему для построения кодовых распределений состояний источника. В качестве множества состояний будем использовать квазиоптимальное множество состояний $\tilde{\mathcal{S}}^5$, которое состоит из пяти состояний, построенных по трем квазиоптимальным порогам $\tilde{\xi}^3$ (см. табл. 2). Заметим, что, поскольку значения порогов вычисляются для каждой томограммы в процессе кодирования, их придется передавать декодеру в преамбуле.

На рис. 3 в качестве характерного примера представлены частотные распределения значений ошибок предсказания для томограммы брюшной полости T1. График на рис. 3, а отвечает фоновому состоянию \mathcal{S}_0 , графики на рис. 3, б — остальным состояниям \mathcal{S}_1 – \mathcal{S}_4 . Распределения на рис. 3, б легко различаются: чем больше номер состояния, тем больше значение соответствующего распределения в нуле и тем «шире» соответствующая кривая. Масштабы по оси ординат на двух рисунках различаются на два порядка.

Рассмотрим частотное распределение значений ошибок предсказания в фоновом состоянии \mathcal{S}_0 . Определяющее состояние условие имеет вид $U = L = 0$. Отсюда сразу следует, что значения ошибок предсказания Δ в фоновом состоянии не могут быть отрицательными. Далее напомним, что нуль — это уникальное значение, приписываемое точкам фона, т.е. тем и только тем точкам томограммы, где восстановление не производится.

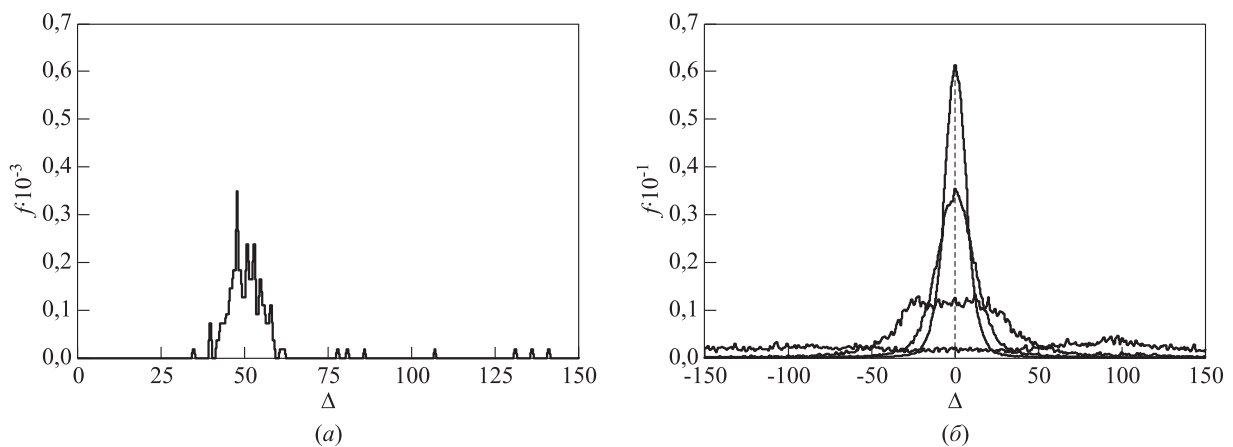


Рис. 3 Частотные распределения значений ошибок предсказания томограммы T1 для фоновом состоянии \mathcal{S}_0 (а) и для состояний \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 , \mathcal{S}_3 и \mathcal{S}_4 (б), соответствующих трем квазиоптимальным порогам: $f(0|\mathcal{S}_1) < f(0|\mathcal{S}_2) < f(0|\mathcal{S}_3) < f(0|\mathcal{S}_4)$

Такие точки (точки фона) образуют дополнение круга восстановления до квадрата, в который этот круг вписан. Поэтому состояние S_0 , во-первых, состоит практически из одних точек фона и, во-вторых, включает практически все точки фона. Исключения того или иного рода сводятся лишь к небольшому количеству точек, расположенных вблизи границы круга восстановления. При этом не попадающие в фоновое состояние S_0 точки фона автоматически попадают в первое состояние S_1 , а значения томограммы X в «лишних» точках, совпадающие в данном случае со значениями ошибок предсказания Δ , определяются плотностью воздуха и не могут быть велики. Таким образом, значения ошибок предсказания неотрицательны, а их частотное распределение имеет более чем выраженный максимум в нуле и относительно неширокий диапазон. Поскольку значение максимума распределения определяется геометрией, то для всех используемых томограмм оно одинаково и равно $f(0|S_0) = 0,997279$. Максимальное ненулевое значение для представленного на рис. 3, а распределения равно 141. Полная частотная вероятность фонового состояния также определяется только геометрией и для всех томограмм равна $f(S_0) = 0,210285$.

Отмеченные выше специфические особенности фонового состояния позволяют предположить, что построение кодовых вероятностей может быть осуществлено без особого труда и не сопряжено с преодолением каких бы то ни было трудностей. Действительно, в случае томограммы T1 использование даже простейшего равномерного условного кодового распределения $q(\Delta|[1, 141], S_0) = 1/141$ обеспечивает приемлемое значение избыточности арифметического кодирования $R(\Delta|S_0)$ фонового состояния (см. (18) и (19)) на уровне 0,008 б/п. При этом вклад в общую избыточность арифметического кодирования $R(\Delta)$ (см. (13)) заведомо не превысит 0,002 б/п.

Рассмотрим частотные распределения значений ошибок предсказания в других состояниях. Диапазон всех возможных значений ошибок предсказания составляет $A_\Delta = [-4096, +4096]$. В действительности диапазоны, в которых частотные распределения отличны от нуля, заметно менее широкие. Для состояний 1–4 томограммы T1, например, соответствующие диапазоны равны $[-1183, +348]$, $[-464, +384]$, $[-1271, +418]$ и $[-910, +746]$, а на рис. 3, б представлены лишь «центральные» части соответствующих распределений. Условные частотные вероятности $f(I|S)$ изображенного на рисунке диапазона $[-150, +150]$ для состояний 1–4 составляют 0,999502, 0,996579, 0,963086 и 0,629420. Это означает, что нетриви-

альные части распределений для состояний 1–3 представлены на рис. 3, б практически полностью. Отметим, что в рассматриваемом примере полные частотные вероятности $f(S)$ состояний 1–4 составляют 0,536415, 0,146095, 0,062107 и 0,045097 соответственно.

Рисунок 3, б показывает, что частотные распределения представляют собой достаточно «гладкие» функции. Это дает основания полагать, что их аппроксимация в рамках описанной в подразд. 2.4 общей схемы приведет в конечном счете к малой избыточности арифметического кодирования. Кроме того, нетрудно заметить, что частотные распределения в целом имеют симметричный относительно нуля вид. Поэтому в работе [1] было предложено ограничиться использованием кодовых распределений, также симметричных относительно нуля. При этом общая схема аппроксимации несколько изменяется; рассмотрим соответствующие изменения.

Зафиксируем некоторое состояние $S \neq S_0$, $f(\Delta|S)$ — соответствующее условное частотное распределение. Пусть $q(\Delta|S)$ — симметричное относительно значения $\Delta = 0$ кодовое распределение $q(\Delta|S) = q(-\Delta|S)$ и, кроме того, $q(0|S) = f(0|S)$. В таком случае формулу (9) для избыточности арифметического кодирования состояния можно тождественно переписать в виде двух слагаемых:

$$R(\Delta|S) = R_G(\Delta|S) + R_Q(\Delta|S), \quad (27)$$

где

$$R_G(\Delta|S) = \sum_{\Delta \in A_\Delta} f(\Delta|S) \left[-\log_2 \frac{g(\Delta|S)}{f(\Delta|S)} \right]; \quad (28)$$

$$R_Q(\Delta|S) = 2 \sum_{\Delta \in A_\Delta, \Delta > 0} g(\Delta|S) \left[-\log_2 \frac{q(\Delta|S)}{g(\Delta|S)} \right]. \quad (29)$$

Входящая в формулы (28) и (29) функция $g(\Delta|S)$ равна

$$g(\Delta|S) = \frac{1}{2} [f(\Delta|S) + f(-\Delta|S)] \quad (30)$$

и представляет собой результат симметризации условного частотного распределения $f(\Delta|S)$.

Первое слагаемое в формуле (27) представляет собой избыточность арифметического кодирования исходного распределения f посредством симметризованного распределения g , не зависит от кодового распределения и называется далее *избыточностью симметризации*. Второе слагаемое — это избыточность кодирования симметричного распределения g симметричным кодовым распределением q при условии $q(0) = g(0) = f(0)$.

Заметим, что использование при арифметическом кодировании симметричного относительно значения нуль кодового распределения эквивалентно использованию вероятностей $2q(|\Delta|)$ для описания абсолютных значений ошибки предсказания $|\Delta|$ ($|\Delta| \neq 0$) и одного бита для описания знака ошибки. При этом избыточность симметризации — «плата» за использование отдельного бита для описания знака.

Для симметричных распределений избыточность симметризации обращается в нуль, а для распределений, близких к симметричным, невелика. Для рассматриваемого примера (томограммы T1) избыточность симметризации состояний 1–4 составляет 0,001949, 0,005553, 0,025371 и 0,046791 б/п соответственно, а полная (суммарная) избыточность симметризации, равная

$$R_G(\Delta) = \sum_{S \neq S_0} f(S) R_G(\Delta|S), \quad (31)$$

составляет 0,005543 б/п.

Приведенные данные показывают, что издержки, обусловленные использованием только симметричных кодовых распределений, весьма незначительны. Поэтому для всех состояний (кроме фонового) можно ограничиться построением именно таких распределений. Кодовые вероятности должны строиться как результат аппроксимации симметризованных частотных распределений g , чтобы минимизировать величину (29). Такая задача проще исходной общей задачи, поскольку, во-первых, ее нужно решить только для диапазона значений $\Delta > 0$ и, во-вторых, усреднение (30) несколько увеличивает гладкость функции, подлежащей аппроксимации. Кроме того, использование симметричных кодовых распределений уменьшает количество параметров, которые необходимо передавать в преамбуле, т. е. уменьшает избыточность передачи R_T .

Введем ряд необходимых обозначений. Обозначим через $a_{\max}^+(S)$ максимальное значение, которое принимает модуль ошибки предсказания в состоянии S . В рассматриваемом примере величины $a_{\max}^+(S)$ для состояний 0–4 равны 141, 1183, 464, 1271 и 910. Очевидно, что $f(\Delta|S_0) = 0$ при $\Delta < 0$ и $\Delta > a_{\max}^+(S_0)$ для фонового состояния, $g(\Delta|S) = 0$ при $|\Delta| > a_{\max}^+(S)$ для остальных состояний. Поэтому задачу аппроксимации достаточно решить для множества значений $[0, a_{\max}^+(S)]$. Выделим значение нуль в отдельный диапазон $[0]$, состоящий из одной точки. Пусть $\mathcal{J}^+(S)$ — разбиение на диапазоны оставшегося множества значений $[1, a_{\max}^+(S)]$ (для разных состояний используются разные разбиения). Для состояний $S \neq S_0$ введем в рассмотрение величины:

$$g(\mathcal{I}|S) = \sum_{\Delta \in \mathcal{I} \in \mathcal{J}^+(S)} g(\Delta|S);$$

$$g(\Delta|\mathcal{I}, S) = \frac{g(\Delta|S)}{g(\mathcal{I}, S)}, \quad \Delta \in \mathcal{I} \in \mathcal{J}^+(S).$$

Для симметризованных частотных распределений данные величины являются аналогами величин $f(\mathcal{I}|S)$ и $f(\Delta|\mathcal{I}, S)$ и связаны с ними следующим образом:

$$g(\mathcal{I}|S) = \frac{1}{2} [f(\mathcal{I}|S) + f(-\mathcal{I}|S)];$$

$$g(\Delta|\mathcal{I}, S) = \frac{1}{2} [f(\Delta|\mathcal{I}, S) + f(-\Delta|\mathcal{I}, S)].$$

Как и ранее, для искомым условных кодовых распределений вероятности значений ошибки предсказания в диапазоне $\mathcal{I} \in \mathcal{J}^+(S)$ состояния S используем обозначение $q(\Delta|\mathcal{I}, S)$. С учетом принятых обозначений формулу (29) можно переписать в следующем виде:

$$R_Q(\Delta|S) = 2 \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{J}^+(S)} g(\mathcal{I}|S) R_Q(\Delta|\mathcal{I}, S), \quad (32)$$

где

$$R_Q(\Delta|\mathcal{I}, S) = \sum_{\Delta \in \mathcal{I} \in \mathcal{J}^+(S)} g(\Delta|\mathcal{I}, S) \left[-\log_2 \frac{q(\Delta|\mathcal{I}, S)}{g(\Delta|\mathcal{I}, S)} \right]. \quad (33)$$

Формулы (32) и (33) являются аналогами формул (18) и (19) для симметричного случая.

Конкретизируем класс функций, используемых при аппроксимации. Частотное распределение для фонового состояния является вырожденным (см. выше), и выбор класса диктуется необходимостью аппроксимировать симметризованные частотные распределения остальных состояний. В области $\Delta > 0$ эти распределения в целом имеют тенденцию убывать с ростом аргумента Δ , поэтому можно ограничиться рассмотрением невозрастающих функций. Невозрастающие, положительные на отрезке $[0, 1]$ линейные функции, принимающие значение 1 в точке нуль, имеют вид:

$$p_{\text{lin}}(\xi; \alpha) = 1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \xi, \quad \alpha > 1.$$

В соответствии с формулой (20) параметр α определяет отношение условных кодовых вероятностей в начале a_B и в конце a_E рассматриваемого диапазона:

$$\alpha = \frac{q(a_B; \alpha|\mathcal{I}, S)}{q(a_E; \alpha|\mathcal{I}, S)}.$$

Убывающие экспоненциальные функции, принимающие значение 1 в точке нуль, имеют вид:

$$p_{\text{exp}}(\xi; \alpha, \nu) = \exp(-\ln \alpha \cdot \xi^\nu), \quad \alpha > 1, \nu > 0,$$

Таблица 3 Оптимальные кодовые распределения для состояний томограммы T1

\mathcal{S}	$(\mathcal{I}, \mathcal{I}^+)(\mathcal{S})$	$(f, g)(\mathcal{I}, \mathcal{S})$	α	ν	$(R, R_Q)(\mathcal{I}, \mathcal{S})$	$(R, R_Q)(\mathcal{S})$
0	[1, 141]	0,002721	$3,39 \cdot 10^2$	3,5	2,335142	0,006354
1	[1, 13]	0,422606	$6,51 \cdot 10^0$	1,5	0,000082	0,002186
	[14, 32]	0,041218	$2,39 \cdot 10^1$	0,8	0,002555	
	[33, 1183]	0,005839	$4,21 \cdot 10^6$	0,5	0,163215	
2	[1, 21]	0,420897	$5,41 \cdot 10^0$	1,7	0,000354	0,007429
	[22, 60]	0,053332	$2,87 \cdot 10^1$	0,7	0,005296	
	[61, 464]	0,008277	$4,15 \cdot 10^2$	0,5	0,396677	
3	[1, 47]	0,406425	$4,84 \cdot 10^0$	3,4	0,004503	0,026150
	[48, 301]	0,082673	$9,42 \cdot 10^1$	0,5	0,078880	
	[302, 1271]	0,004699	$2,24 \cdot 10^6$	0,8	1,005211	
4	[1, 55]	0,092243	$1,00 \cdot 10^0$	0	0,025029	0,047695
	[56, 249]	0,335138	$3,60 \cdot 10^0$	1,4	0,022354	
	[250, 910]	0,071519	$2,08 \cdot 10^5$	1,0	0,196409	

причем смысл параметра α тот же, что и выше. Далее будем использовать соглашение, в соответствии с которым $p(\xi; \alpha, 0) = p_{\text{lin}}(\xi; \alpha)$ и $p(\xi; \alpha, \nu) = p_{\text{exp}}(\xi; \alpha, \nu)$ при условии $\nu > 0$.

Рассмотрим класс \mathcal{P} , состоящий из функций $p(\xi; \alpha, \nu)$. Определим множество возможных значений параметров. Множество значений параметра ν состоит из значения 0 и значений 0,5, 0,6, . . . , 3,5, всего 32 возможных значения. Множество значений параметра α включает те числа, которые в нормализованном десятичном представлении имеют мантиссу, состоящую из трех цифр, и порядок от 0 до 7. Указанный класс оказывается достаточным для успешного решения задачи аппроксимации.

При заданных значениях параметров ν и α условное кодовое распределение для диапазона $q(\Delta|\mathcal{I}, \mathcal{S}) = q(\Delta; \nu, \alpha|\mathcal{I}, \mathcal{S})$, $\Delta \in \mathcal{I} \in \mathcal{I}^+(\mathcal{S})$, определяется по соответствующей функции класса \mathcal{P} в соответствии с формулой (20). Общее кодовое распределение $q(\Delta|\mathcal{S}_0)$ в случае фонового состояния определяется формулой (17), в остальных случаях используется аналогичная формула $q(\Delta|\mathcal{S}) = g(\mathcal{I}|\mathcal{S})q(\Delta|\mathcal{I}, \mathcal{S})$.

При построении кодового распределения для фонового состояния достаточно единственного диапазона $[1, a_{\text{max}}^+(\mathcal{S}_0)]$, т.е. разбиение $\mathcal{I}^+(\mathcal{S}_0)$ тривиально, при этом параметры ν и α выбираются так, чтобы минимизировать избыточность (19) (или (18), что в данном случае одно и то же). Кодовые распределения для остальных состояний построим следующим образом: зафиксируем общее число диапазонов $\mathcal{I}^+(\mathcal{S})$ в разбиении интервала $[1, a_{\text{max}}^+(\mathcal{S})]$ и выберем границы диапазонов и параметры ν и α так, чтобы минимизировать избыточность (29). Построенные таким образом кодовые распределения будем называть *оптималь-*

ными, а соответствующую процедуру — *оптимальной*.

В табл. 3 представлены результаты построения оптимальных условных кодовых распределений ($\mathcal{I}^+(\mathcal{S}) = 3, \mathcal{S} \neq \mathcal{S}_0$) для состояний томограммы T1. В первом столбце приведены номера состояний, во втором — диапазоны разбиения. В третьем столбце для фонового состояния приведено значение величины $f(\mathcal{I}, \mathcal{S})$, а для остальных состояний — значения величины $g(\mathcal{I}, \mathcal{S})$ для каждого из соответствующих диапазонов. В четвертом и пятом столбцах приведены значения параметров α и ν , которые определяют условное кодовое распределение $q(\Delta|\mathcal{I}, \mathcal{S})$. В шестом столбце для единственного использованного диапазона фонового состояния приведено значение избыточности $R(\Delta|\mathcal{I}, \mathcal{S}) = R(\mathcal{I}, \mathcal{S})$, а для остальных состояний приведены значения избыточности $R_Q(\Delta|\mathcal{I}, \mathcal{S}) = R_Q(\mathcal{I}, \mathcal{S})$ для каждого из использованных диапазонов. В последнем столбце приведено значение полной избыточности $R(\Delta|\mathcal{S}) = R(\mathcal{S})$ для фонового состояния и значения полной избыточности $R_Q(\Delta|\mathcal{S}) = R_Q(\mathcal{S})$ для остальных состояний.

Приведенные в табл. 3 данные позволяют получить точную оценку полной избыточности арифметического кодирования всей томограммы T1 по формуле:

$$R(\Delta) = f(\mathcal{S}_0)R(\Delta|\mathcal{S}_0) + \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{S}_0} f(\mathcal{S})R_Q(\mathcal{S}) + R_G(\Delta),$$

где третье слагаемое (полная избыточность симметризации), которое задается формулами (28) и (31), уже было вычислено ранее и составляет 0,005543 б/п. Используя приведенные ранее значения $f(\mathcal{S})$, $\mathcal{S} \in \tilde{\mathcal{S}}^5$, находим, что искомая избыточность равна 0,012912 б/п.

Оценим избыточность передачи R_T , т. е. избыточность, связанную с необходимостью передавать значения вычисляемых на этапе кодирования параметров декодеру. К числу таких параметров относятся значения трех квазиоптимальных порогов, границы диапазонов разбиения (по одной верхней границе на каждый диапазон), условные частотные вероятности диапазонов и значения параметров α и ν в каждом диапазоне. Функция $\sigma_1(U, L) = |U - L|$, участвующая в определении состояний, принимает значения от 0 до 4096, поэтому область возможных значений порогов — $[1, 4096]$; следовательно, для описания трех значений порогов достаточно $3 \cdot 12 = 36$ бит. Аналогично для описания одной границы диапазона достаточно 12 бит. Поскольку томограмма содержит 2^{18} пикселей, то для описания условной частотной вероятности одного диапазона заведомо достаточно 18 бит. Для описания значений пары параметров α и ν требуется, как легко видеть, $(10 + 5) + 3 = 18$ бит. Итак, для описания одного диапазона нужно 48 бит, а общее число диапазонов равно $1 + 4 \cdot 3 = 13$. Таким образом, полная длина преамбулы составляет 660 бит, а избыточность передачи, равная отношению длины преамбулы к общему числу пикселей, составляет 0,002518 б/п.

Складывая индивидуальную избыточность арифметического кодирования томограммы T1 и избыточность передачи, одинаковую для любой томограммы, получаем общую избыточность кодирования метода для томограммы T1: 0,015429 б/п.

В табл. 4 приведены оценки минимальной избыточности кодирования томограмм T1–T6 с использованием описанной выше оптимальной процедуры. Результаты для томограмм T2–T6 получены в точности так же, как и соответствующие результаты для томограммы T1 ранее; детали, относящиеся к разбиениям на диапазоны и условным кодовым распределениям (аналогичные приведенным в табл. 3 данным для томограммы T1), опущены в целях экономии места. В первом столбце таблицы указана томограмма, в остальных столбцах — соответствующие значения избыточности симмет-

ризации, индивидуальной избыточности арифметического кодирования (с учетом симметризации), избыточности передачи, общей избыточности кодирования метода и относительной общей избыточности кодирования ($H = \tilde{H}^3$).

Представленные в табл. 4 данные свидетельствуют об исключительном качестве предложенного метода построения оптимальных кодовых вероятностей. Действительно, даже в худшем случае (томограмма T6) относительная общая избыточность едва превышает 0,4%. Таким образом, метод позволяет практически достигнуть нижней границы скорости кодирования (квазиэнтропии), что, в свою очередь, подтверждает справедливость гипотез, использованных при разработке метода.

Рассмотренная оптимальная процедура построения кодовых распределений предполагает решение многомерной оптимизационной задачи по минимизации избыточности (29) в пространстве значений параметров аппроксимации и границ диапазонов при фиксированном общем числе диапазонов. Для всех состояний, за исключением фонового (где определение оптимальных границ не требуется), данная задача является вычислительно сложной и не может быть решена за приемлемое время на этапе кодирования. Поэтому оптимальная процедура может быть использована в алгоритмах сжатия, ориентированных на практическое применение, только для фонового состояния.

Рассмотрим альтернативную процедуру построения кодовых распределений для состояний, отличных от фонового ($\mathcal{S} \neq \mathcal{S}_0$), которая, в отличие от оптимальной процедуры, допускает «быструю» реализацию. Зафиксируем общее для всех состояний число I_{\max}^+ — максимально возможное число диапазонов разбиения интервалов $[1, a_{\max}^+(\mathcal{S})]$. Зафиксируем некоторое положительное число $\rho > 0$ и определим для каждого состояния величину

$$r(\mathcal{S}) = \frac{\rho H}{2(S - 1)I_{\max}^+ f(\mathcal{S})}.$$

Напомним, что $H = H(\Delta)$ — квазиэнтропия томограммы; $f(\mathcal{S})$ — частотная вероятность состояния;

Таблица 4 Избыточность кодирования (оптимальная процедура)

T	R_G	R	R_T	$R + R_T$	$(R + R_T)/\tilde{H}^3$
T1	0,005543	0,012912		0,015429	0,003439
T2	0,005890	0,012415		0,014933	0,003129
T3	0,009416	0,019322		0,021840	0,003469
T4	0,009942	0,020528		0,023046	0,003714
T5	0,006532	0,012582		0,015099	0,003578
T6	0,008045	0,013486	0,002518	0,016004	0,004042

$S = 5$ — общее число состояний. Для каждого состояния разбиение интервала $[1, a_{\max}^+(S)]$ на диапазоны осуществляется рекурсивно. В начале очередного шага рекурсии известно начало очередного диапазона a_B , требуется определить его конец a_E и параметры аппроксимации. Конец текущего диапазона выбирается следующим образом:

$$a_E = \max_{a_B \leq a \leq a_{\max}^+(S)} \{a : g(\mathcal{I}_a, S)R_Q(\Delta|\mathcal{I}_a, S) \leq r(S)\},$$

где $\mathcal{I}_a = [a_B, a]$, а $R_Q(\Delta|\mathcal{I}_a, S)$ — решение оптимизационной задачи по минимизации выражения (33). Одновременно с определением искомого конца диапазона становятся известны и параметры аппроксимации, поскольку решение оптимизационной задачи предполагает их нахождение. Рекурсия завершается в любом из следующих случаев:

- (1) исчерпан весь интервал $[1, a_{\max}^+(S)]$ (полученное очередное значение a_E равно $a_{\max}^+(S)$);
- (2) исчерпано максимально допустимое общее число диапазонов разбиения (в этом случае просто полагается $a_E = a_{\max}^+(S)$).

Нетрудно видеть, что правая граница очередного диапазона разбиения (кроме последнего) для любого состояния выбирается так, чтобы вклад избыточности кодирования этого диапазона в суммарную избыточность кодирования был порядка $\rho H / [2(S - 1)I_{\max}^+]$, но не превышал указанной величины. В результате все построенные диапазоны всех состояний (за исключением последних диапазонов каждого из состояний) вносят приблизительно равные вклады в суммарную избыточность кодирования. Поэтому далее будем называть рассматриваемую процедуру *процедурой уравнивания*. Кроме того, ясно, что если завершение рекурсии для всех состояний было связано с выполнением первого из указанных выше условий, то суммарная избыточность кодирования не превышает значения ρH . Таким образом, используемая в процедуре

уравнивания величина ρ играет роль общего относительного «целевого» уровня кодовой избыточности.

Основное достоинство процедуры уравнивания заключается в том, что она допускает быструю реализацию и, следовательно, может использоваться на практике в процессе кодирования.

Анализ приведенных выше данных, относящихся к избыточности кодирования с использованием оптимальной процедуры, показывает, что разумным, например, является выбор значения $\rho = 0,004$ и использование $I_{\max}^+ = 4$, т.е. не более четырех диапазонов разбиения для каждого состояния. Указанные значения используются всюду далее.

В табл. 5 представлены результаты построения условных кодовых распределений для состояний томограммы Т1 с помощью процедуры уравнивания. Таблица имеет ту же структуру, что и табл. 3.

Избыточность кодирования $R_Q(S)$ отдельных состояний, как и следовало ожидать, оказалась несколько больше, чем при использовании оптимальных кодовых распределений. Суммарный вклад величин $R_Q(S)$ в общую избыточность кодирования метода составляет менее 0,01 б/п, т.е. менее 0,23% от величины квазиэнтропии томограммы, что заметно меньше использованного в процедуре уравнивания значения целевого уровня кодовой избыточности. Полная избыточность арифметического кодирования всей томограммы Т1, включающая вклад фонового состояния и избыточность симметризации, равна 0,016378 б/п. Избыточность передачи R_T при использовании процедуры уравнивания зависит от общего числа реально использованных диапазонов и в данном случае составляет 0,002151 б/п, что несколько меньше избыточности передачи при оптимальной процедуре. Наконец, общая избыточность кодирования метода, использующего проце-

Таблица 5 Кодовые распределения для состояний томограммы Т1 (процедура уравнивания)

S	$(\mathcal{I}, \mathcal{I}^+)(S)$	$(f, g)(\mathcal{I}, S)$	α	ν	$(R, R_Q)(\mathcal{I}, S)$	$(R, R_Q)(S)$
0	[1, 141]	0,002721	$3,39 \cdot 10^2$	3,5	2,335142	0,006354
1	[1, 28]	0,461939	$1,87 \cdot 10^2$	1,3	0,002176	0,004097
	[29, 1183]	0,007723	$1,15 \cdot 10^7$	0,5	0,135063	
2	[1, 51]	0,471905	$2,17 \cdot 10^2$	1,3	0,008063	0,014564
	[52, 464]	0,010601	$7,67 \cdot 10^2$	0,6	0,327971	
3	[1, 92]	0,457159	$7,13 \cdot 10^1$	1,8	0,019413	0,037744
	[93, 424]	0,036454	$2,66 \cdot 10^1$	0,6	0,247027	
	[425, 1271]	0,000184	$8,89 \cdot 10^2$	0,5	5,390520	
4	[1, 119]	0,254779	$1,00 \cdot 10^0$	0	0,048731	0,062751
	[120, 393]	0,240611	$5,58 \cdot 10^1$	0	0,051161	
	[394, 910]	0,003510	$4,01 \cdot 10^2$	0,5	1,894615	

Таблица 6 Избыточность кодирования (процедура уравнивания)

T	R_G	R	R_T	$R + R_T$	$(R + R_T)/\tilde{H}^3$
T1	0,005543	0,016378	0,002151	0,018529	0,004130
T2	0,005890	0,015653	0,002151	0,017804	0,003731
T3	0,009416	0,022028	0,001968	0,023996	0,003812
T4	0,009942	0,023203	0,002151	0,025354	0,004087
T5	0,006532	0,015675	0,002334	0,018009	0,004268
T6	0,008045	0,016231	0,002151	0,018382	0,004642

дуру уравнивания при построении кодовых вероятностей, для томограммы T1 составляет 0,018529 б/п.

В табл. 6 приведены оценки избыточности кодирования всех томограмм T1–T6 с использованием описанной выше процедуры уравнивания при построении кодовых вероятностей. Таблица имеет ту же структуру, что и табл. 4. Общее число используемых диапазонов не является фиксированным, равно

$$I(\mathfrak{S}) = 1 + \sum_{S \in \mathfrak{S}, S \neq S_0} I^+(S),$$

где $I^+(S)$ — число диапазонов в построенном разбиении $\mathfrak{J}^+(S)$, и может варьироваться от томограммы к томограмме. Поэтому и значения избыточности передачи R_T в табл. 6 несколько различаются.

Представленные в табл. 6 данные свидетельствуют об отличном качестве предложенного метода построения кодовых вероятностей на основе процедуры уравнивания. В худшем случае (томограмма T6) относительная общая избыточность не превышает 0,5%. В действительности результаты применения процедуры уравнивания лишь немного уступают аналогичным результатам, полученным с использованием оптимальной процедуры. При этом время вычислений оказывается несопоставимо меньше.

5 Кодирование компонент дискретного вейвлет-преобразования

Адаптируем теперь представленную в разд. 2 общую схему так, чтобы получить метод сжатия, основанный на универсальном кодировании значений компонент дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) томограмм. Метод был впервые предложен в работе [5].

5.1 Дискретное вейвлет-преобразование

Напомним, прежде всего, что представляет собой ДВП последовательности. Пусть $\mathbf{x} = \{x_n\}$ —

суммируемая с квадратом вещественная последовательность целого аргумента. Прямое ДВП такой последовательности — это разложение данной последовательности на две составляющие (компоненты), которое осуществляется следующим образом. Сначала вычисляются свертки последовательности \mathbf{x} с двумя заданными фильтрами разложения (анализа), низкочастотным фильтром μ^0 и высокочастотным фильтром μ^1 (оба фильтра суть суммируемые с квадратом вещественные последовательности). Затем две полученные в результате фильтрации последовательности прореживаются, т. е. в них удерживаются лишь четные члены. В итоге имеем суммируемые с квадратом вещественные последовательности целого аргумента \mathbf{x}^0 и \mathbf{x}^1 :

$$x_n^i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_{2n-k}^i x_k, \quad i = 0, 1, \quad (34)$$

которые представляют собой приближение (низкочастотную составляющую) и детальную (высокочастотную) составляющую исходной последовательности, при этом каждая имеет вдвое меньшее разрешение.

Обратное ДВП — это восстановление исходной последовательности по ее приближению и детальной составляющей. Разбавим обе последовательности \mathbf{x}^0 и \mathbf{x}^1 нулями (т. е. построим последовательности с нулевыми нечетными членами и четными членами, заданными последовательностями \mathbf{x}^0 и \mathbf{x}^1), затем вычислим свертки полученных последовательностей с некоторыми фильтрами синтеза ν^0 и ν^1 и сложим результаты:

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\nu_{n-2k}^0 x_k^0 + \nu_{n-2k}^1 x_k^1). \quad (35)$$

Чтобы преобразование (35) действительно было обратным по отношению к преобразованию (34), т. е. чтобы выполнялось равенство $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$, система фильтров μ^0, μ^1, ν^0 и ν^1 должна удовлетворять условию восстановления (см., например, [6]). Этому условию, в частности, удовлетворяет система фильтров конечной длины, впервые предложенная в [7]:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{-2}^0 &= -\frac{1}{8}, \mu_{-1}^0 = \frac{1}{4}, \mu_0^0 = \frac{3}{4}, \mu_1^0 = \frac{1}{4}, \mu_2^0 = -\frac{1}{8}; \\ \mu_{-2}^1 &= -\frac{1}{2}, \mu_{-1}^1 = 1, \mu_0^1 = -\frac{1}{2}; \\ \nu_{-1}^0 &= \frac{1}{2}, \nu_0^0 = 1, \nu_1^0 = \frac{1}{2}; \\ \nu_{-1}^1 &= -\frac{1}{8}, \nu_0^1 = -\frac{1}{4}, \nu_1^1 = \frac{3}{4}, \nu_2^1 = -\frac{1}{4}, \nu_3^1 = -\frac{1}{8}; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

остальные коэффициенты фильтров равны нулю. Эта система, получившая широкое распространение и вошедшая в стандарт сжатия JPEG 2000, используется в настоящей работе.

Эффективность применения ДВП для сжатия данных обусловлена тем, что при удачном выборе фильтров разложения значения детальных составляющих распределены значительно более неравномерно, чем значения исходного сигнала. Однако требование обратимости (отсутствия искажений) при сжатии сигналов конечной длины с целыми значениями приводит к серьезному дополнительному требованию: ДВП должно быть свободно от ошибок округления. Если ДВП с фильтрами (36) реализуется непосредственно по формулам (34) и (35), то для того чтобы избежать ошибок округления, необходимо на этапе вычисления прямого преобразования добавить дополнительные биты для хранения остатков от деления: три бита для приближения и один бит для детальной составляющей. Попадающие в эти дополнительные «младшие» биты остатки представляют собой практически «белый шум», что неприемлемо с точки зрения последующего сжатия. Решение проблемы заключается в том, чтобы реализовывать ДВП посредством так называемой лифтинг-схемы [8]. При этом появляется возможность взаимосогласованным образом округлять результаты при вычислении прямого и обратного преобразований, что, во-первых, обеспечивает точное восстановление и, во-вторых, избавляет от необходимости хранить (и сжимать) остатки. Кроме того, аккуратный учет краевых эффектов в лифтинг-схеме позволяет добиться того, что для конечной последовательности x длины N приближение x^0 и детальная составляющая x^1 имеют длины, в точности равные $[N/2 + 1]_-$ и $[N/2]_-$ соответственно.

В двумерном случае ДВП представляет собой суперпозицию одномерных преобразований, применяемых отдельно к строкам и столбцам. Если $X = \{X_{l,m}\}$ — двумерная вещественная последовательность, то прямое ДВП имеет аналогичный (34) вид:

$$X_{l,m}^{i,j} = \sum_{k,k'=-\infty}^{+\infty} \mu_{2l-k}^i \mu_{2m-k'}^j X_{k,k'}, \quad i, j = 0, 1,$$

а его результатом является разложение исходной последовательности на четыре компоненты (составляющие) вдвое меньшего разрешения.

Последовательность $X^{0,0} \doteq X^A$, полученная с применением низкочастотной фильтрации по строкам и столбцам, представляет собой приближение, а остальные три последовательности $X^{0,1} \doteq X^V$, $X^{1,0} \doteq X^H$ и $X^{1,1} \doteq X^D$, в построении которых участвует высокочастотный фильтр, — детальные составляющие (вертикальные, горизонтальные и диагональные соответственно). Такое разложение называется *одномасштабным* ДВП. Обратное преобразование производится очевидным образом при помощи одномерных обратных ДВП, применяемых отдельно к строкам и столбцам, и описывается двумерным аналогом формулы (35). Как и в одномерном случае, возможна лифтинг-реализация двумерного ДВП. Это дает возможность использовать целую арифметику и добиться того, что для изображения (конечной двумерной последовательности, т. е. матрицы) размера $L \times M$ приближение и вертикальные, горизонтальные и диагональные составляющие имеют следующие размеры: $[L/2 + 1]_- \times [M/2 + 1]_-$, $[L/2 + 1]_- \times [M/2]_-$, $[L/2]_- \times [M/2 + 1]_-$ и $[L/2]_- \times [M/2]_-$.

Результатом применения прямого ДВП к томограмме X размера 512×512 является ее одномасштабное разложение на четыре компоненты (изображения) размерами 256×256 : приближение X^A и вертикальные X^V , горизонтальные X^H и диагональные X^D детальные составляющие. Первая компонента — результат низкочастотной фильтрации (сглаживания) элементов исходного изображения по строкам и столбцам, следующие две получены сглаживанием по одной координате и высокочастотной фильтрацией по другой, а последняя — результат высокочастотной фильтрации по обеим координатам (в каждом случае фильтрация сопровождается прореживанием, уменьшающим размер вдвое по каждой координате). Как уже было указа-

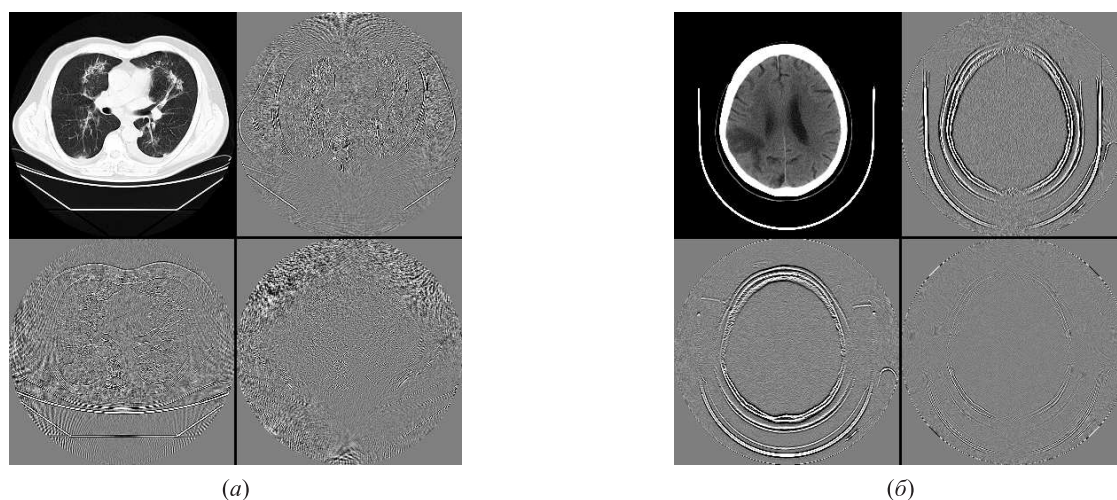


Рис. 4 Одномасштабное разложение томограмм Т3 (а) и Т6 (б)

но выше, в данной работе используется ДВП, основанное на системе фильтров (36), поэтому диапазоны значений яркости компонент равны соответственно $[-2560, 6656]$, $[-6144, 6144]$, $[-6144, 6144]$ и $[-8192, 8192]$. На рис. 4 представлены одномасштабные разложения томограмм Т3 и Т6. В левом верхнем квадрате каждого рисунка располагается приближение для соответствующей томограммы (использованы те же окна визуализации, что и на рис. 1). В правом верхнем, левом нижнем и правом нижнем квадратах располагаются соответственно вертикальные, горизонтальные и диагональные составляющие. При этом использованы существенно более узкие, чем для приближений, окна визуализации с центром в нуле: окно $[-150, +150]$ для детальных составляющих Т3 и окно $[-20, +20]$ для детальных составляющих Т6.

5.2 Особенности метода кодирования

В разд. 4 метод универсального кодирования ошибок предсказания для томограмм был рассмотрен во всех деталях. После внесения некоторых изменений непринципиального характера по существу тот же метод может быть с успехом применен для кодирования компонент ДВП томограмм. Данный раздел посвящен рассмотрению тех особенностей, которые отличают метод сжатия (кодирования) компонент ДВП от аналогичного метода, используемого при сжатии ошибок предсказания.

Компоненты томограммы, полученные в результате ДВП, сжимаются по отдельности (независимо друг от друга). Поскольку все компоненты имеют одинаковые размеры, значения квазиэнтропии и избыточности для всей томограммы равны средним арифметическим значениям соответствующим

величин для всех компонент ДВП. Как показывает рис. 4, статистические свойства приближения и детальных составляющих значительно различаются, поэтому и методы их сжатия, вообще говоря, должны различаться.

Начнем с рассмотрения метода сжатия компоненты X^A (приближения). Как показывает сравнение рис. 1 и 4, приближение визуально почти не отличается от исходного изображения. Статистические свойства приближения и исходного изображения также близки, несмотря на расширение диапазона значений в 2,25 раза и появление отрицательных значений. Поэтому для сжатия приближения можно прямо использовать описанный в разд. 4 метод и кодировать значения ΔX^A , т. е. значения ошибок предсказания приближения. В части построения множества состояний метод вообще не претерпевает изменений. В части построения кодовых вероятностей в метод требуется внести единственное изменение, которое затрагивает только процедуру построения кодовых вероятностей для фонового состояния и подробно рассмотрено далее.

Рассмотрим теперь детальные составляющие. Отсчеты детальных составляющих принимают значения в симметричных относительно нуля диапазонах, которые для компонент X^V и X^H в 3 раза, а для компоненты X^D в 4 раза шире, чем диапазон исходных значений. Однако функции распределения значений концентрируются в небольших окрестностях нуля: на рис. 4 детальные составляющие менее контрастны, чем приближение, несмотря на то что для их визуализации использовано значительно более узкое окно. Поэтому следует кодировать непосредственно значения этих составляющих.

Детальные составляющие описывают отличие элементов исходного изображения от сглаженных значений. Как и раньше, элементы, расположенные слева и сверху от рассматриваемого, будем обозначать через U и L . Однако теперь значения самих этих элементов характеризуют скорость изменения значений исходного изображения по крайней мере по одной координате. Поэтому при построении состояний в формулах (23) и (24) вместо функции σ_1 будем использовать функцию:

$$\sigma_2(U, L) = |U| + |L|. \quad (37)$$

Такой выбор предпочтительнее, чем $|U + L|$, поскольку U и L могут иметь разные знаки. Действительно, если $U \sim -L \gg 0$, то скорость изменения значений элементов велика, но при этом $|U + L| \sim 0$. Замена функции, используемой при построении состояний, — это главное изменение, которое необходимо внести в метод при сжатии детальных составляющих.

В ходе выполнения работ был подробно исследован вопрос о целесообразности использования при построении множества состояний функции σ_2 другого вида. Действительно, вертикальные детальные составляющие X^V получены низкочастотной фильтрацией по столбцам и высокочастотной по строкам, а горизонтальные детальные составляющие X^H — низкочастотной фильтрацией по строкам и высокочастотной по столбцам. Эта асимметрия строк и столбцов никак не учтена в способе построения состояний при использовании функции (37): состояния инвариантны относительно транспонирования. Поэтому априори представляется обоснованным рассмотреть обобщение (37) вида

$$\sigma_2(U, L; \alpha) = (1 + \alpha)|U| + (1 - \alpha)|L|, \quad -1 \leq \alpha \leq +1, \quad (38)$$

и использовать при построении состояний для детальных составляющих конкретного типа функцию σ_2 вида (38) с конкретным (отличным от нуля) значением α .

Для проверки гипотезы был проведен эксперимент, в ходе которого значения оптимальной квазиэнтропии детальных составляющих, полученные с использованием функций вида (38) и значениями α , равными $\pm 1/3$, сравнивались с полученными с использованием функции (37) аналогичными значениями. Вычисления проводились для детальных составляющих всех 6 томограмм при общем числе выбираемых порогов $T = 1, 2$ и 3 , всего 108 вариантов. Полученные результаты опровергают высказанное предположение. В подавляющем большинстве случаев (92 из 108) наименьшее значение

квазиэнтропии достигалось при использовании функции (37). В остальных 16 случаях выигрыш, обусловленный использованием функции вида (38) со значением $\alpha \neq 0$, оказался ничтожным и не превысил 0,008 б/п ни в одном из случаев. При этом уменьшение квазиэнтропии для томограммы в целом как результат использования для его детальных составляющих оптимальных функций вида (38) оказалось еще меньше: оно не превысило 0,002 б/п. Поэтому использование функций вида (38) в процессе построения состояний для детальных составляющих было признано нецелесообразным.

Рассмотрим теперь уже упомянутое выше изменение процедуры построения кодовых вероятностей, используемое как при сжатии приближений, так и при сжатии детальных составляющих, но затрагивающее лишь фоновое состояние. Необходимость данного изменения обусловлена тем, что отсчеты любой из компонент ДВП могут иметь отрицательные значения. Это не сказывается на построении кодовых вероятностей для нефоновых состояний, поскольку в этом случае предусмотрено использование процедуры симметризации. Для фонового состояния ситуация отличается. С одной стороны, для любой компоненты частотное распределение значений в фоновом состоянии по-прежнему несимметрично и использование симметризации привело бы к неоправданным издержкам. С другой стороны, вероятности отрицательных значений в фоновом состоянии, вообще говоря, не равны нулю и для таких значений должны быть построены ненулевые кодовые вероятности. Поэтому при построении аппроксимации для фонового состояния нельзя ограничиться диапазоном $\mathcal{I}_0^+ = [1, a_{\max}^+(\mathcal{S}_0)]$, а необходимо добавить диапазон $\mathcal{I}_0^- = [a_{\min}^-(\mathcal{S}_0), -1]$, где $a_{\min}^-(\mathcal{S}_0)$ — минимальное значение, которое принимают отсчеты рассматриваемой компоненты в фоновом состоянии, и построить соответствующие условные кодовые вероятности. Вклад избыточности кодирования нового диапазона $R(X|\mathcal{I}_0^-, \mathcal{S}_0)$ в общую избыточность кодирования составляет $f(\mathcal{I}_0^-|\mathcal{S}_0)R(X|\mathcal{I}_0^-, \mathcal{S}_0)$, где X — любая из компонент ДВП.

Задача аппроксимации для отрицательного диапазона \mathcal{I}^- сводится к уже рассмотренной ранее задаче для положительного диапазона $\mathcal{I}^+ = -\mathcal{I}^-$. Пусть $f(x)$, $x \in \mathcal{I}^-$, — заданное в отрицательном диапазоне условное частотное распределение. Функция $\varphi(x) = f(-x)$, $x \in \mathcal{I}^+$, — условное распределение в положительном диапазоне, поэтому рассмотренная в подразд. 4.3 процедура позволяет построить для него аппроксимацию $q_\varphi(x)$, $x \in \mathcal{I}^+$. В качестве искомого условного кодового распределения будем использовать функцию $q(x) = q_\varphi(-x)$, $x \in \mathcal{I}^-$.

5.3 Оценки минимальной скорости и избыточности кодирования

Оценки минимальной скорости кодирования (квазиэнтропии) компонент ДВП томограмм T1–T6, отвечающие множествам состояний, построенных с использованием двух и трех оптимальных и трех квазиоптимальных порогов, приведены в табл. 7. Там же приведены и соответствующие значения порогов. Первый столбец таблицы определяет рассматриваемое изображение (указаны тип компоненты ДВП и номер томограммы). Во втором и третьем столбцах приведены значения двух и трех оптимальных порогов и соответствующие значения квазиэнтропии. Последний столбец содержит те же данные для квазиоптимальных порогов. В соответствии со сказанным в подразд. 5.2, в случае приближений (компоненты A1–A6) множества состояний строились для ошибок предсказания с использованием функции (22); оценки квазиэнтропии получены также для ошибок предсказания. В случае детальных составляющих (остальные компоненты) множества состояний строились для значений компонент с использованием функции (37); оценки квазиэнтропии получены также для значений компонент.

Анализ приведенных данных кроме всего прочего еще раз демонстрирует эффективность использо-

вания трех квазиоптимальных порогов. Поскольку минимальная скорость кодирования (квазиэнтропия) томограммы в целом равна среднему арифметическому значений квазиэнтропии всех компонент ДВП, она может легко быть вычислена на основе данных табл. 7. Соответствующие результаты для томограмм T1–T6 приведены в табл. 8.

Сравнение приведенных результатов с аналогичными результатами из подразд. 4.2 показывает, что квазиэнтропия кодирования компонент ДВП томограммы всегда оказывается меньше соответствующей квазиэнтропии кодирования ошибок предсказания той же томограммы. Достижимый выигрыш варьируется от нескольких сотых долей для томограмм легких до нескольких десятых долей для томограмм мозга.

Построение кодовых распределений и оценка избыточности арифметического кодирования для любой из компонент ДВП осуществляется так, как описано в подразд. 4.3. Единственное отличие — использование дополнительного отрицательного диапазона для фонового состояния — подробно рассмотрено в подразд. 5.2.

В табл. 9 представлены оценки избыточности кодирования компонент ДВП томограмм T1–T6, полученные с использованием процедуры урав-

Таблица 7 Оптимальные/квазиоптимальные пороги и квазиэнтропия компонент ДВП

X	$\hat{\xi}^2$;	$\hat{H}^2 (T = 2)$	$\hat{\xi}^3$;	$\hat{H}^3 (T = 3)$	$\tilde{\xi}^3$;	$\tilde{H}^3 (T = 3)$
A1	{23,182};	4,880032	{20,73,271};	4,847027	{14,29,182};	4,853077
V1	{12,34};	4,010317	{9,21,42};	3,997519	{12,28,87};	3,998197
H1	{20,81};	4,523917	{11,30,115};	4,489731	{12,41,116};	4,490816
D1	{13,27};	4,018969	{13,26,52};	4,008997	{11,19,49};	4,010081
A2	{28,175};	5,124079	{23,85,312};	5,087575	{13,35,175};	5,096258
V2	{17,42};	4,242733	{13,30,69};	4,227881	{13,26,69};	4,228058
H2	{17,63};	4,725712	{17,51,150};	4,696555	{17,51,150};	4,696555
D2	{15,36};	4,292950	{11,21,43};	4,281943	{11,21,43};	4,281943
A3	{56,241};	6,491513	{51,193,584};	6,449757	{42,115,428};	6,454966
V3	{68,191};	6,064261	{58,148,335};	6,045233	{51,104,205};	6,046978
H3	{78,229};	6,223272	{61,155,318};	6,199585	{61,155,318};	6,199585
D3	{64,145};	6,119812	{61,117,233};	6,105214	{61,99,217};	6,106998
A4	{62,276};	6,448976	{53,166,577};	6,406838	{48,150,562};	6,408289
V4	{68,203};	5,985891	{48,107,283};	5,967160	{48,107,283};	5,967160
H4	{78,230};	6,130190	{57,140,347};	6,103864	{57,140,347};	6,103864
D4	{69,147};	6,024354	{63,133,321};	6,011689	{42,83,175};	6,012719
A5	{12,92};	4,942235	{1,16,100};	4,856658	{1,22,116};	4,863834
V5	{13,39};	3,891974	{10,24,87};	3,866175	{10,21,71};	3,867450
H5	{11,32};	3,636817	{6,17,60};	3,614506	{6,17,60};	3,614506
D5	{8,17};	3,092293	{8,15,35};	3,082019	{6,12,35};	3,082257
A6	{16,87};	4,661787	{15,47,163};	4,627884	{12,22,89};	4,640066
V6	{11,39};	3,686671	{9,20,79};	3,664356	{8,15,63};	3,666472
H6	{10,26};	3,474091	{7,13,41};	3,458590	{7,12,41};	3,458997
D6	{5,10};	2,865786	{5,8,20};	2,855021	{5,8,20};	2,855021

Таблица 8 Квазиэнтропия в целом (оптимальные/квазиоптимальные пороги)

T	$\hat{H}^2 (T = 2)$	$\hat{H}^3 (T = 3)$	$\tilde{H}^3 (T = 3)$
T1	4,358309	4,335819	4,338043
T2	4,596369	4,573489	4,575704
T3	6,224715	6,199947	6,202132
T4	6,147353	6,122388	6,123008
T5	3,890830	3,854840	3,857012
T6	3,672084	3,651463	3,655139

нивания при построении кодовых распределений. Параметры процедуры выбирались так же, как и ранее ($\rho = 0,004$ и $I_{\max}^+ = 4$). Как и для ошибок предсказания, использовано квазиоптимальное множество состояний (свое для каждой компоненты ДВП). Структура таблицы аналогична структуре табл. 4 и 6. В первом столбце таблицы указа-

ны тип компоненты ДВП и номер томограммы. В остальных столбцах — соответствующие значения избыточности симметризации, индивидуальной избыточности арифметического кодирования (с учетом симметризации), избыточности передачи, общей избыточности кодирования метода и относительной общей избыточности кодирования. Аккуратный подсчет числа битов, необходимых для передачи параметров декодеру, может быть произведен так же, как в подразд. 4.3. Подсчет должен производиться отдельно для компоненты каждого типа.

Поскольку значение избыточности кодирования томограммы в целом равно среднему арифметическому значений избыточности всех компонент ДВП, она может легко быть вычислена на основе данных табл. 9. Соответствующие результаты для томограмм T1–T6 приведены в табл. 10.

Таблица 9 Избыточность кодирования компонент ДВП (процедура уравнивания)

X	R_G	R	R_T	$R + R_T$	$(R + R_T)/\tilde{H}^3$
A1	0,021421	0,052898	0,013824	0,066723	0,013749
V1	0,007909	0,019402	0,010681	0,030083	0,007524
H1	0,013685	0,027911	0,011398	0,039309	0,008753
D1	0,005286	0,014373	0,009247	0,023619	0,005890
A2	0,023268	0,054725	0,013824	0,068549	0,013451
V2	0,007788	0,019579	0,009964	0,029543	0,006987
H2	0,012490	0,026999	0,010681	0,037680	0,008023
D2	0,005202	0,014967	0,009964	0,024931	0,005822
A3	0,036772	0,084136	0,013824	0,097960	0,015176
V3	0,016965	0,042210	0,012833	0,055043	0,009102
H3	0,022136	0,048502	0,012833	0,061335	0,009893
D3	0,014539	0,033993	0,011398	0,045392	0,007433
A4	0,041553	0,093684	0,013824	0,107509	0,016776
V4	0,018914	0,045172	0,012833	0,058004	0,009721
H4	0,022429	0,051096	0,012833	0,063929	0,010473
D4	0,014004	0,033910	0,012115	0,046025	0,007655
A5	0,022703	0,052829	0,012360	0,065189	0,013403
V5	0,007669	0,018427	0,011398	0,029825	0,007712
H5	0,012084	0,022112	0,011398	0,033511	0,009271
D5	0,006518	0,014612	0,010681	0,025293	0,008206
A6	0,023082	0,053538	0,013824	0,067363	0,014518
V6	0,012474	0,022548	0,011398	0,033947	0,009259
H6	0,016700	0,025930	0,011398	0,037328	0,010792
D6	0,010453	0,017056	0,009247	0,026303	0,009213

Таблица 10 Избыточность кодирования в целом (процедура уравнивания)

T	R_G	R	R_T	$R + R_T$	$(R + R_T)/\tilde{H}^3$
T1	0,012075	0,028646	0,011288	0,039934	0,009205
T2	0,012187	0,029068	0,011108	0,040176	0,008780
T3	0,022603	0,052210	0,012722	0,064933	0,010469
T4	0,024225	0,055966	0,012901	0,068867	0,011247
T5	0,012244	0,026995	0,011459	0,038455	0,009970
T6	0,015677	0,029768	0,011467	0,041235	0,011281

Сравнение приведенных данных с аналогичными данными табл. 6, относящимися к кодированию ошибок предсказания, обнаруживает более чем двукратное увеличение общей избыточности кодирования метода. Это вызвано и увеличением избыточности арифметического кодирования, и увеличением избыточности передачи.

Причинами увеличения избыточности арифметического кодирования являются увеличение избыточности симметризации и снижение качества аппроксимации. И то, и другое обусловлено четырехкратным уменьшением числа отсчетов компонент ДВП в сравнении с исходным числом отсчетов. В результате частотные распределения становятся менее «представительными», что увеличивает асимметрию и снижает качество аппроксимации.

Увеличение избыточности передачи связано, главным образом, с необходимостью вместо одного набора параметров передать четыре набора, по одному для каждой компоненты. Кроме того, снижение качества аппроксимации приводит к увеличению числа диапазонов, которые строятся в процессе применения процедуры уравнивания.

Несмотря на все сказанное, общая относительная избыточность кодирования метода находится на уровне 1%, что с практической точки зрения может быть признано более чем хорошим результатом.

6 Заключение

В работе построены и исследованы два метода обратимого сжатия компьютерных томограмм. Первый метод предполагает кодирование ошибок предсказания томограммы, второй — кодирование компонентов ДВП томограммы. Оба метода получены как результат адаптации к конкретному типу данных некоторого общего метода (подхода), основанного на применении универсального арифметического кодирования. Для каждого из методов получены эффективные индивидуальные оценки скорости кодирования.

Томограммы представляют собой полутоновые изображения, поэтому их обратимое сжатие может быть осуществлено методом, входящим в стандарт JPEG 2000. Сравнение скоростей кодирования рассмотренных в работе методов и алгоритма обратимого сжатия JPEG 2000 позволяет вынести суждения как об эффективности конкретных предложенных методов, так и о потенциальных возможностях предложенного общего подхода в целом.

В сводной табл. 11 представлены экспериментально полученные оценки скорости кодирования (в битах на пиксель) для томограмм T1–T6. Во второй колонке приведены результаты, отвечающие кодированию значений ошибок предсказания (см. разд. 4), в третьей — кодированию значений компонент ДВП (см. разд. 5). В обоих случаях приведенные скорости кодирования соответствуют алгоритмам, использующим квазиоптимальное множество состояний и процедуру уравнивания при построении кодовых вероятностей, т.е. алгоритмам, допускающим «быструю» реализацию. В четвертой колонке приведена скорость кодирования в случае применения алгоритма JPEG 2000 к исходным данным томограммы (JP2, вариант 1), в пятой — скорость кодирования в случае применения алгоритма JPEG 2000 к данным, полученным после амплитудного преобразования (21) (JP2, вариант 2). В последних двух случаях для кодирования использована эталонная реализация (Jasper) стандарта JPEG 2000 (библиотека доступна по адресу <http://www.ece.uvic.ca/~mdadams/jasper>).

Приведенные в табл. 11 результаты показывают, что наименьшая скорость кодирования (наибольшая степень сжатия) достигается при использовании метода кодирования компонент ДВП. Отметим, что применение к данным преобразования (21) заметно уменьшает скорость кодирования данных алгоритмом JPEG 2000.

Можно констатировать, что разработанные для сжатия томограмм методы кодирования весьма эффективны, хотя выигрыш, который достигается по сравнению с алгоритмом JPEG 2000, по-видимому, недостаточен, чтобы рекомендовать их практиче-

Таблица 11 Скорости кодирования томограмм T1–T6

T	Ошибки предсказания	Компоненты ДВП	JP2	
			Вариант 1	Вариант 2
T1	4,505450	4,377977	4,696686	4,481018
T2	4,789562	4,615880	4,925232	4,706512
T3	6,319010	6,267065	6,672668	6,481934
T4	6,229735	6,191875	6,603790	6,408722
T5	4,237956	3,895467	4,252380	3,941132
T6	3,978116	3,696374	3,959625	3,703583

ское внедрение. Более важным является то, что полученные результаты демонстрируют большие потенциальные возможности общего метода (подхода), основанного на применении универсального арифметического кодирования, который можно с успехом адаптировать для построения методов сжатия таких данных, которые не являются изображениями и где алгоритм JPEG 2000 неприменим. Это может стать целью дальнейших исследований. В частности, большой интерес представляет задача построения метода обратимого сжатия карт силовых кривых атомно-силовой микроскопии.

Литература

1. Сушко Д. В., Штарьков Ю. М. О сжатии томографических данных // Информационные процессы, 2008. Т. 8. № 4. С. 240–255.
2. Witten I. H., Neal R. M., Cleary J. G. Arithmetic coding for data compression // Commun. ACM, 1987. Vol. 30. No. 6. P. 520–540.
3. Сушко Д. В. Выбор состояний источника при сжатии томограмм // Информационные процессы, 2010. Т. 10. № 3. С. 237–244.
4. Sushko D. V. Choice of source states for compression of tomograms // J. Commun. Technol. El., 2011. Vol. 56. No. 6. P. 716–721.
5. Сушко Д. В., Штарьков Ю. М. Вейвлет-преобразования и сжатие компьютерных томограмм // Информационные процессы, 2009. Т. 9. № 2. С. 105–115.
6. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / Пер. с англ. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 464 с. (*Daubechies I. Ten lectures on wavelets. — CBMS-NSF regional conference ser. in applied mathematics. — SIAM, 1992. Vol. 61. 377 p.*)
7. Le Gall D., Tabatabai A. Sub-band coding of digital images using symmetric short kernel filters and arithmetic coding techniques // IEEE Conference (International) on Acoustics, Speech, and Signal Processing Proceedings, 1988. P. 761–764.
8. Sweldens W. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets // Appl. Comput. Harmon. Anal., 1996. Vol. 3. No. 2. P. 186–200.

Поступила в редакцию 30.11.16

REVERSIBLE DATA COMPRESSION BY UNIVERSAL ARITHMETIC CODING

A. I. Stefanovich and D. V. Sushko

Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper considers the general approach to the reversible (lossless) digital data compression problem, which is based on universal arithmetic coding of data with unknown statistics. A model of a source with calculable sequence of states is used for data description. Within the approach, the tasks of obtaining specific compression methods and algorithms for particular data types are set up. The authors use computed tomography data (tomograms) as the object of the study and present two methods of lossless compression of tomograms. The first method encodes prediction errors of tomograms; the second method encodes components of discrete wavelet transform of tomograms. These methods are examined in details, effective compression algorithms are constructed, and individual estimates of bit rate are obtained for the algorithms. The bit rates of the constructed algorithms and the lossless compression algorithms of the JPEG 2000 standard are compared. The results demonstrate high quality of the constructed algorithms and indicate great potential of the approach in general.

Keywords: reversible data compression; lossless compression; universal coding; arithmetic coding; computed tomography

DOI: 10.14357/19922264170103

References

1. Sushko, D. V., and Yu. M. Shtar'kov. 2008. O szhatii tomograficheskikh dannykh [On tomography data compression]. *Informatsionnye protsessy* [Information Processes] 8(4):240–255.
2. Witten, I. H., R. M. Neal, and J. G. Cleary. 1987. Arithmetic coding for data compression. *Commun. ACM* 30(6):520–540.
3. Sushko, D. V. 2010. Vybhor sostoyaniy istochnika pri szhatii tomogramm [Choice of source states for compression of tomograms]. *Informatsionnye protsessy* [Information Processes] 10(3):237–244.
4. Sushko, D. V. 2011. Choice of source states for compression of tomograms. *J. Commun. Technol. El.* 56(6):716–721.
5. Sushko, D. V., and Yu. M. Shtar'kov. 2009. Veyvlet-preobrazovaniya i szhatie komp'yuternykh tomogramm [Wavelet transforms and computed tomogram compression]

- sion]. *Informatsionnye protsessy* [Information Processes] 9(2):105–115.
6. Daubechies, I. 1992. *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF regional conference ser. in applied mathematics. SIAM. Vol. 61. 377 p.
 7. Le Gall, D., and A. Tabatabai. 1988. Sub-band coding of digital images using symmetric short kernel filters and arithmetic coding techniques. *IEEE Conference (International) on Acoustics, Speech, and Signal Processing Proceedings*. 761–764.
 8. Sweldens, W. 1996. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 3(2):186–200.

Received November 30, 2016

Contributors

Stefanovich Alexei I. (b. 1983) — scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; astefanovich@ipiran.ru

Sushko Dmitry V. (b. 1962) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; dsushko@ipiran.ru

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГРАММ К КРАТКОВРЕМЕННЫМ АППАРАТНЫМ СБОЯМ*

С. Л. Френкель¹, В. Н. Захаров², Б. М. Басок³

Аннотация: Показана возможность использования двумерной марковской модели поведения конечного автомата при сбое на одном такте, предложенной ранее для вероятностной верификации аппаратных систем, для оценки устойчивости программ, представленных блок-схемами реализуемых алгоритмов, к кратковременным сбоям. Модель представляет собой произведение цепей Маркова (ЦМ), соответствующих конечно-автоматной модели программы, работающей в нормальных условиях, и автомата, в котором в некоторый момент времени произошел кратковременный (например, в пределах времени выполнения одной операции или одного машинного цикла) сбой. Устойчивость к сбоям оценивается вероятностью возвращения автомата после прекращения действия помехи на траекторию переходов исходного автомата. При этом считается, что изменения траектории при сбое в низкоуровневой (instruction-by-instruction) модели программы будут существенными только в том случае, если они соответствуют изменению ветвления в указанной блок-схеме. Модель подробно анализируется на примере конкретной блок-схемы программы.

Ключевые слова: самовосстановление программ; сбои; марковские модели; тестирование

DOI: 10.14357/19922264170104

1 Введение

Проблема учета влияния сбоев на работу вычислительных систем (ВС) — как аппаратных, так и программных подсистем — остается одной из наиболее актуальных для теории и практики проектирования ВС. Сбои могут возникать как в той или иной части области памяти программы, так и вне ее. Они могут исказить как данные, так и содержимое программы (значения переменных, констант, кодов операций и т. д.).

Поскольку основным источником оценки правильности работы сложных ВС, в том числе и в условиях сбоев, является тестирование на тех или иных множествах программ и данных (бенчмарках, например, как в [1], или функциональных тестах), было бы очень полезно, чтобы последствия этих сбоев могли оцениваться и верифицироваться в процессе разработки ВС.

В настоящее время одной из основных техник оценки чувствительности ВС к сбоям является так называемое инъекционное введение неисправностей (fault injection — FI) [2], используемое для оценки надежности тестирования влияния аппаратных или системных сбоев на работу прикладных программ.

Обычно в технике FI прикладная программа эмулируется пошагово (instruction-by-instruction), при этом операнды-источники случайным образом модифицируются до выполнения инструкции, а результат выполнения инструкции также случайным образом искажается, имитируя тем самым действие ошибки. Программный счетчик также случайно модифицируется в случае, если это инструкция условного перехода (branch instruction). Результирующая последовательность таких модификаций инструкций и счетчика прослеживается для определения уровня защищенности данной программы к указанным сбоям (soft error rate — SER).

Данный подход требует наличия у разработчиков достаточно дорогостоящего программного обеспечения, которое при этом не используется для решения других многочисленных задач проектирования, в частности верификации и функционального тестирования [2].

В статье показывается возможность использования двумерной марковской модели поведения конечного автомата при сбое на одном такте, предложенной ранее для вероятностной верификации аппаратных систем [3, 4], для оценки устойчивости программ к кратковременным сбоям.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-07-01028 и 15-07-05316).

¹Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, fsergei51@gmail.com

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, VZakharov@ipiran.ru

³Московский технологический университет (МИРЭА), VM_E@mail.ru

Модель представляет собой произведение ЦМ, соответствующих конечно-автоматной модели программы, работающей в нормальных условиях, и автомата, в котором в некоторый момент времени произошел кратковременный (например, в пределах времени выполнения одной операции, или одного машинного цикла) сбой. Устойчивость к сбоям оценивается вероятностью возвращения указанной цепи-произведения на траекторию, соответствующую нормальному функционированию автомата. При этом предлагается рассматривать программу на алгоритмическом языке высокого уровня и соответствующую блок-схему.

Авторы считают, что указанные выше модификации в низкоуровневой (instruction-by-instruction) модели программы будут существенными только в том случае, если изменяют ветвления в указанной блок-схеме.

Применение указанного подхода иллюстрируется на примере конкретной программы.

2 Проблема анализа сбоев в прикладных программах

В последнее время в связи со все более широким распространением нанотехнологий актуальной задачей становится учет на разных этапах проектирования возможных последствий случайных сбоев, вызываемых воздействием одиночных частиц (протонов, нейтронов, тяжелых заряженных частиц) [2], а также отказов, связанных с взаимовлиянием отдельных элементов СБИС (сверхбольших интегральных схем) при работе на высоких частотах. При этом, очевидно, непосредственно сбои приводят к неправильному поведению аппаратных элементов ВС, которые в свою очередь могут влиять на работу системных и прикладных программ. Однако в то время как анализу влияния сбоев в аппаратуре уделяется довольно много внимания в литературе, оценка влияния сбоев на выполнение программ, особенно на прикладном уровне, как самостоятельных объектов сбоев, рассматривается крайне редко [5]. Это связано с предположением, что, устранив влияние аппаратных сбоев (за счет дублирования, обеспечения свойств помехоустойчивого кодирования состояний (коды Хэмминга, Рида–Соломона), самовосстановления и т. д.), можно исключить влияние сбоев на прикладные программы. Однако эти мероприятия могут быть связаны с введением столь существенной аппаратной избыточности, что нарушаются требования к допустимым уровням потребления энергии и задержкам в обработке и передаче информации. Вместе

с тем далеко не все кратковременные изменения в поведении аппаратных элементов ВС будут приводить к неправильному поведению тех или иных выполняемых программ. Поэтому при оценке необходимости повышения устойчивости аппаратуры к сбоям было бы желательно учесть их возможное влияние на свойства программ, причем как в рабочем, так и в тестовых режимах.

3 Краткое описание модели программы и программных сбоев

Определим прежде всего модель программы.

В основе рассматриваемой в настоящей статье модели прикладной программы лежит конечный автомат Мили, соответствующий алгоритму, реализуемому данной программой. В данной статье не будут рассматриваться формальные аспекты использования данной модели — отошлем читателя к [6] и статье авторов [7], а дадим лишь пояснения, необходимые для понимания дальнейшего.

В терминах указанной автоматной модели выполнение программы моделируется как переходы между состояниями соответствующего автомата [6]. Направленная дуга в диаграмме (графе) автомата представляет последовательность выполнения программы от состояния к состоянию. Входами моделей Мили могут быть флаги событий или условий. Выходы — вычисляемые переменные.

На основе конечно-автоматной модели программы определим понятие сбоя. Неформально под сбоем при работе программы будем понимать ошибки вычислений, вызываемые случайными изменениями любого из битов некоторого машинного слова из двоичного образа программы (binaries, binary image), т. е. заменой «0» на «1» или «1» на «0». В дальнейшем будем считать, что такое изменение приводит к изменению того или иного состояния автоматного представления программы, однако не приводит к появлению новых состояний, отличных от состояний, представленных в указанном автоматном представлении.

4 Марковская модель оценки чувствительности к сбоям

Будем называть событие $HS(t)$ *самовосстановлением* автомата после сбоя, произошедшего на такте t_0 , если $t > t_0$ — первый следующий за сбоем такт, на котором выполняется $A_f(t) = A(t)$ и $Y_f(t) =$

$= Y(t)$, где $A(t)$ и $A_f(t)$ — состояния ЦМ исправного $A(t)$ и сбойного $A_f(t)$ автоматов на такте t , а $Y(t)$ и $Y_f(t)$ — соответствующие векторы значений выходов.

Вероятностная оценка того, повлияет ли тот или иной сбой, описываемый данной моделью, на корректность работы программы (произойдет ли самовосстановление), может быть получена в терминах вероятности попадания двумерной ЦМ, состояния которой представляют собой пары состояний из цепи, не подверженной действию помехи, и цепи, в которой произошел указанный сбой, в поглощающее состояние, соответствующее возвращению на траекторию, образуемую только правильными переходами цепи. При этом цепь имеет еще одно поглощающее состояние, которое может быть определено одним из двух следующих способов:

- (1) оно соответствует искажению хотя бы одной выходной переменной до возвращения траектории переходов автомата в состояние, соответствующее исправному;
- (2) оно соответствует искажению выходов при совпадении состояний исправного и сбойного автоматов.

Матрица переходных вероятностей вычисляется по заданной таблице переходов автоматов и вероятностям булевых единиц входных двоичных переменных автомата (поскольку переход в данное состояние определяется той или иной операцией над текущим значением входной переменной и текущим состоянием). При этом можно определить число временных тактов до возможного возвращения к правильному функционированию путем вычисления вектора вероятностей состояний, в которые попадает двумерная ЦМ из-за помехи за t переходов автомата:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(t-1)P^* = \vec{p}(0)(P^*)^t, \quad (1)$$

где начальное распределение $\vec{p}(0)$ определяется начальными состояниями исправного и неисправного автоматов, а P^* — матрица переходов указанной двумерной ЦМ.

Если исправный автомат в начальный момент 0 находится в состоянии i_0 , а неисправный — в состоянии $j_0 \neq i_0$, то $p_{i_0, j_0}(0) = 1$, а остальные координаты вектора $\vec{p}(0)$ равны нулю.

Компоненты вектора $p(t)$ представляют собой вероятности $p_0(t)$ попадания в поглощающее состояние A_0 , соответствующее восстановлению правильного функционирования после прекращения действия помехи, вероятности $p_1(t)$ поглощающего состояния A_1 (определенного одним из указанных

выше способов), и вероятности переходов в остальные (переходные) состояния ЦМ, в сумме равные $1 - p_0(t) - p_1(t)$.

Подробный математический анализ модели выполнен в [3]. Здесь приводится лишь поясняющий пример, помогающий лучше понять описываемый ниже анализ чувствительности конкретной программы.

Рассмотрим автомат, заданный табл. 1, где a_t и a_s — текущие и следующие состояния автомата, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ — двоичные входные и выходные переменные, причем отсутствие того или иного компонента вектора X во входных переменных означает его произвольное значение, а вектора Y — нулевое, т. е. входной вектор $(0, 1, 1)$, а также входные векторы $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ и $(0, 1, 0)$, соответствующие ячейке таблицы с \bar{x}_1 , примененные к состоянию a_1 , приводят автомат в состояние a_2 и формируют на выходе вектор $(0, 1, 0, 1)$, и т. д.

Таблица 1 Автомат с двумя состояниями

a_t	a_s	X	Y
a_1	a_2	\bar{x}_1	y_2y_4
a_1	a_2	$x_1\bar{x}_2$	y_2y_3
a_1	a_1	x_1x_2	y_2y_4
a_2	a_1	\bar{x}_2	y_2y_4
a_2	a_1	$x_2\bar{x}_3$	y_1y_4
a_2	a_2	x_2x_3	y_2y_4

Напомним, что если исправный автомат в начальный момент 0 находится в состоянии i_0 , а неисправный — в состоянии $j_0 \neq i_0$, то $p_{i_0, j_0}(0) = 1$, а остальные координаты вектора $\vec{p}(0)$ равны нулю.

Для данного автомата матрица переходных вероятностей вычисляется по заданной таблице переходов автоматов и вероятностям булевых единиц входных двоичных переменных автомата. При этом в зависимости от выбора условий, определяющих попадание рассматриваемой двумерной ЦМ в поглощающее состояние A_1 , можно рассмотреть разные модели формирования матрицы переходных вероятностей P . Рассмотрим на примере данного автомата две указанные модели.

Модель 4.1. Попадание ЦМ в поглощающее состояние A_1 во всех случаях несовпадения выходов исправного и сбойного автоматов.

Матрица вероятностей переходов указанной двумерной ЦМ представлена в виде табл. 2, где $p_i = \text{Prob}(x_i = 1)$, $i = 1, 2, 3$, $q_i = 1 - p_i$.

Состояния A_0 и A_1 (см. табл. 2) соответствуют указанным выше поглощающим состояниям двумерной ЦМ. Состояния указанной ЦМ $(1, 2)$, $(2, 1)$

Таблица 2 Матрица вероятностей переходов автомата

	A_0	(1, 2)	(2, 1)	A_1
A_0	1	0	0	0
(1, 2)	$q_1 p_2 p_3$	$p_1 p_2 p_3$	$q_1 q_2$	$p_1 q_2 + p_2 q_3$
(2, 1)	$q_1 p_2 p_3$	$q_1 q_2$	$p_1 p_2 p_3$	$p_1 q_2 + p_2 q_3$
A_1	0	0	0	1

означают, что в начальном состоянии автомат должен быть в состоянии $a_1(a_2)$, но в результате сбоя (ошибки, помехи) оказывается в $a_2(a_1)$. Очевидно, что если число состояний исходного автомата равно N , то размер двумерной ЦМ составит $N(N - 1) + 2$ и в данном примере будет равен 4.

Поясним подробно построение матрицы вероятностей переходов двумерной ЦМ для автомата табл. 1, представив для большей наглядности всю информацию о возможном поведении пары исправного и сбойного автоматов в виде табл. 3. Здесь, в отличие от табл. 1, указываются все компоненты x_1, x_2 и x_3 входного вектора, включая те, которые не влияют на данный переход.

Пусть в начальный момент времени из-за действия (необнаруженной) помехи автомат (см. табл. 1) вместо состояния a_1 оказался в состоянии a_2 . Общая ЦМ Z_t , описывающая совместное функционирование исправного и неисправного автоматов, имеет состояния: переходные (1, 2) и (2, 1) и поглощающие A_0 и A_1 . Здесь (1, 2) — исправный и неисправный автоматы находятся соответственно в состояниях a_1 и a_2 ; (2, 1) — в состояниях a_2 и a_1 ; A_0 — событие «к данному моменту произошло восстановление траектории функционирования автомата (он оказался в правильном состоянии) и выходные данные не были искажены»; A_1 — неправильное функционирование уже проявилось в выходном сигнале. В отличие от поглощающих состояний, для состояний (1, 2) и (2, 1) возможны переходы.

Вычислим переходные вероятности ЦМ Z_t (см. табл. 2).

Состояния A_0 и A_1 являются поглощающими, и поэтому вероятность остаться в каждом из этих состояний равна 1.

Из состояния (1, 2) в состояние A_0 можно попасть только в том случае, когда поступит сиг-

нал $\bar{x}_1 x_2 x_3$ (с вероятностью $q_1 p_2 p_3$). Тогда оба автомата (исправный и неисправный) перейдут в одно и то же состояние a_2 , а выходной сигнал у обоих автоматов — $y_2 y_4$.

Из состояния (1, 2) в состояние (1, 2) можно попасть только в том случае, когда поступит сигнал $x_1 x_2 x_3$ (с вероятностью $p_1 p_2 p_3$). Тогда исправный автомат остается в состоянии a_1 , неисправный — в состоянии a_2 , а выходной сигнал у обоих автоматов — $y_2 y_4$. Аналогично вычисляется вероятность перехода из состояния (1, 2) в состояние (2, 1). Из состояния (1, 2) в состояние A_1 можно попасть при разных входных сигналах. Во-первых, если поступит сигнал $x_1 \bar{x}_2$ (с вероятностью $p_1 q_2$, третий компонент входного сигнала может быть любым), тогда выходной сигнал у исправного автомата — $y_2 y_3$, у неисправного — $y_2 y_4$ (при этом исправный автомат переходит из состояния a_1 в состояние a_2 , неисправный — из состояния a_2 в состояние a_1). Во-вторых, если поступит сигнал $x_1 x_2 \bar{x}_3$ (с вероятностью $p_1 p_2 q_3$), тогда выходной сигнал у исправного автомата — $y_2 y_4$, у неисправного — $y_1 y_4$ (при этом оба автомата попадают в состояние a_1). В-третьих, если поступит сигнал $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$ (с вероятностью $q_1 p_2 q_3$), тогда выходной сигнал у исправного автомата — $y_2 y_4$, у неисправного — $y_1 y_4$.

Пусть $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,25$. При векторе начальных состояний $\bar{p}^*(0) = (0, 1, 0, 0)$ после первого шага

$$\bar{p}^*(1) = \bar{p}^*(0)P^* = (0,08; 0,02; 0,48; 0,42) .$$

Соответственно, вероятность $p_0(1)$ попадания в поглощающее состояние A_0 , при котором автомат при снятии кратковременного возмущения, вызвавшего сбой, вернется на траекторию переходов исправного автомата до того, как произошло изменение хотя бы на одном выходе y_1, y_2, y_3, y_4 , равно 0,08, вероятность $p_1(1)$ попасть в поглощающее состояние A_1 (выход исказился до возвращения на правильную траекторию), равно 0,42 (произведение строки начальных состояний на 4-й столбец матрицы переходных вероятностей, соответствующий попаданию в A_1), и ЦМ останется в подмножестве эргодических состояний (1, 2), (2, 1) с вероятностью $p(1) = 0,02 + 0,48 = 0,5$.

Таблица 3 Описание возможных переходов пар состояний исправного и сбойного автоматов

a_t	X							
	$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 \bar{x}_3$	$x_1 \bar{x}_2 x_3$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2 x_3$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
a_1	$a_1/y_2 y_4$	$a_1/y_2 y_4$	$a_2/y_2 y_3$	$a_2/y_2 y_3$	$a_2/y_2 y_4$	$a_2/y_2 y_4$	$a_2/y_2 y_4$	$a_2/y_2 y_4$
a_2	$a_2/y_2 y_4$	$a_1/y_1 y_4$	$a_1/y_2 y_4$	$a_1/y_2 y_4$	$a_2/y_2 y_4$	$a_1/y_1 y_4$	$a_1/y_2 y_4$	$a_1/y_2 y_4$
(1, 2)	(1, 2)	A_1	A_1	A_1	A_0	A_1	(2, 1)	(2, 1)
(2, 1)	(2, 1)	A_1	A_1	A_1	A_0	A_1	(1, 2)	(1, 2)

Таблица 4 Вероятности достижения поглощающих и эргодических состояний через t шагов

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$...	$t = 28$
$p_{(0)}(t)$	0,000000	0,080000	0,120000	0,140000	0,150000	...	0,160000
$p_{(1)}(t)$	0,000000	0,420000	0,630000	0,735000	0,787500	...	0,840000
$\hat{p}(t)$	1,000000	0,500000	0,250000	0,125000	0,062500	...	0,000000

После второго шага

$$\vec{p}^*(2) = \vec{p}^*(1)P^* = (0,1200; 0,2308; 0,0192; 0,6300)$$

и т. д. согласно табл. 4.

Модель 4.2. Попадание ЦМ в поглощающее состояние A_1 только в случае несовпадения выходов исправного и сбойного автоматов при попадании сбойного автомата в состояние, совпадающее с состоянием исправного.

Данная модель соответствует переходам в табл. 5, в которой поглощающее состояние A_1 соответствует несовпадению выходов при нахождении двух автоматов в одном и том же состоянии (a_1 в данном примере).

В этом случае матрица вероятностей переходов может быть представлена в виде табл. 6. При этом вероятности достижения поглощающих и эргодических состояний через t шагов (аналогично табл. 4) представлены в табл. 7.

В зависимости от назначения систем и подходов к их проектированию, та или иная из двух рассмотренных семантик поведения систем в условиях сбоя может оказаться более предпочтительной. Более подробно этот вопрос обсуждается ниже на конкретном примере.

5 Пример анализа устойчивости программы к сбоям

Рассмотрим программу, которая должна удалять пробелы из символьных строк согласно следующим условиям:

- подавляются ведущие (стоящие в начале строки) пробелы;
- если строка заканчивается пробелами, то они также удаляются;

Таблица 5 Описание возможных переходов пар состояний исправного и сбойного автоматов (модель 4.2)

a_t	X							
	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2x_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1x_2x_3$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
a_1	a_1/y_2y_4	a_1/y_2y_4	a_2/y_2y_3	a_2/y_2y_3	a_2/y_2y_4	a_2/y_2y_4	a_2/y_2y_4	a_2/y_2y_4
a_2	a_2/y_2y_4	a_1/y_1y_4	a_1/y_2y_4	a_1/y_2y_4	a_2/y_2y_4	a_1/y_1y_4	a_1/y_2y_4	a_1/y_2y_4
(1, 2)	(1, 2)	A_1	(2, 1)	(2, 1)	A_0	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)
(2, 1)	(2, 1)	A_1	(1, 2)	(1, 2)	A_0	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)

Таблица 6 Матрица вероятностей переходов

	A_0	(1,2)	(2,1)	A_1
A_0	1	0	0	0
(1,2)	$q_1p_2p_3$	$p_1p_2p_3$	$p_1q_2 + q_1q_3 + p_1p_2q_3$	$p_1p_2q_3$
(2,1)	$q_1p_2p_3$	$p_1q_2 + q_1q_3 + p_1p_2q_3$	$p_1p_2p_3$	$p_1p_2q_3$
A_1	0	0	0	1

Таблица 7 Вероятности достижения поглощающих и эргодических состояний через t шагов (модель 4.2)

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$...	$t = 28$
$p_0(t)$	0,000	0,08	0,1488	0,208	0,2589	...	0,563
$p_1(t)$	0,000	0,06	0,1116	0,156	0,1941	...	0,423
$p'(t)$	1	0,86	0,7396	0,636	0,547	...	0,014

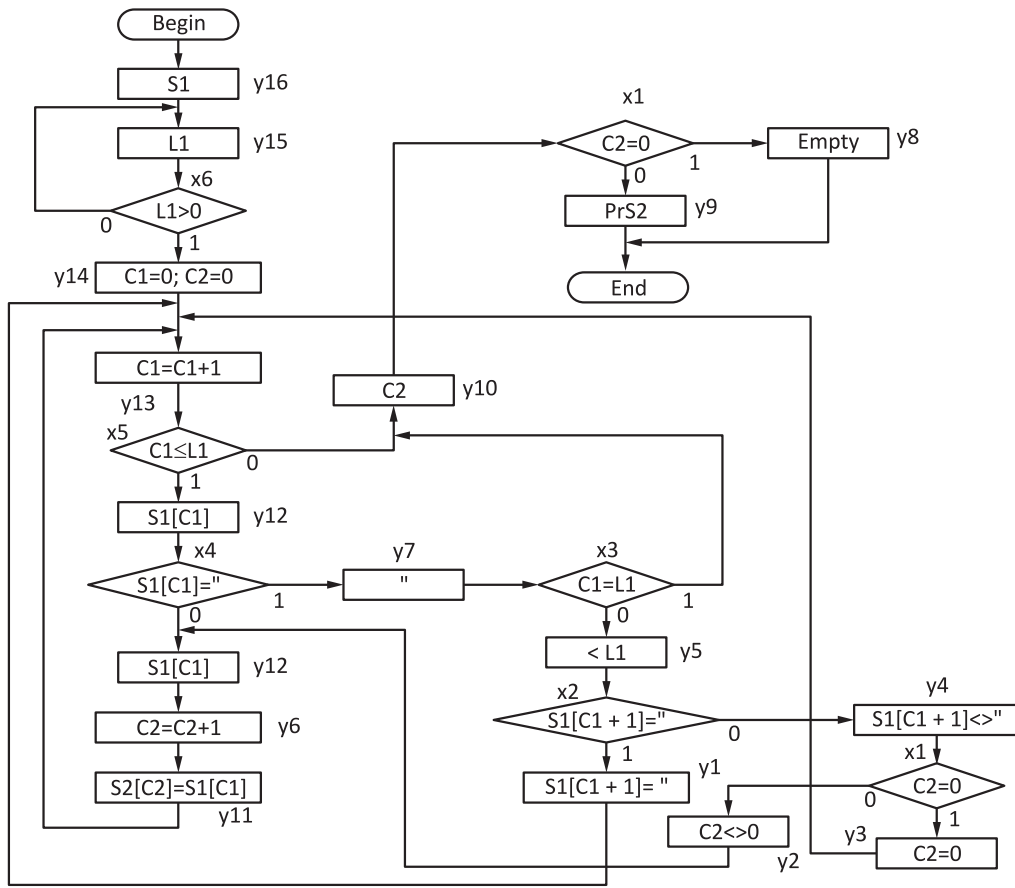


Рис. 1 ASM-диаграмма программы

— внутри строки не может быть последовательности, содержащей подряд более одного пробела, лишние пробелы удаляются.

Для упрощения анализа будем рассматривать блок-схему программы для обработки только одной строки (S_1), подразумевая, что программа включает средства перехода к считыванию и обработке следующей строки из всего множества строк обрабатываемой данной программой текста.

Заметим, что данную программу можно рассматривать как модель различных программ, предназначенных для удаления некоторых служебных символов в потоке передаваемой символьной информации, например признаков начала и конца передачи блока данных в телекоммуникационных приложениях.

Согласно сформулированной во введении цели данной статьи рассмотрим задачу вычисления вероятностной оценки возможности самовосстановления работы рассматриваемого программного модуля после сбоя — в данном случае вопрос стоит о восстанавливаемости работы при неправильном выполнении операции. Это, очевидно, зависит не

только от структуры модуля, но также от вероятности выполнения тех или иных переходов, т. е. от входной информации.

Представим алгоритм, реализующий указанную программу, как диаграмму «Алгоритмической машины состояний» (Algorithmic State Machine — ASM) [8] (блок-схема на рис. 1).

На приведенной блок-схеме S_1 — массив, содержащий обрабатываемую строку, из которой удалены управляющие символы, не входящие в алфавит A , длина этого массива — L_1 (механизм считывания и буферизации здесь не рассматриваем, считая весь процесс буферизации одной операцией, соответствующей прямоугольнику S_1 блок-схемы). Если длина строки оказалось нулевой (например, содержатся только специальные управляющие символы (включая некоторый признак конца строки) и нет ни одного символа из алфавита A), то вводится следующая строка. C_1 — индекс в массиве S_1 , C_2 — индекс в массиве S_2 , в который записываются символы строки без удаленных пробелов и в котором формируется результат работы программы (обозначаемый как PrS_2). В случае если строка состояла из

одних пробелов, то пользователь получает сообщение Empty.

В данной блок-схеме прямоугольники соответствуют выполнению некоторой операции, а ромбы — условиям перехода.

С помощью программы Abelite [8] можно получить конечно-автоматное представление блок-схемы в виде автомата Мили, в котором двоичные входные переменные соответствуют условиям выбора пути на блок-схеме рисунка (из вершин ромба «0» или «1»), а каждое выполнение операций связано с переходом из состояния в состояние (подробнее о программе Abelite и методологии ее использования в проектировании цифровых систем см. [7, 8]). Заметим, что программа Abelite сама определяет по ASM-диаграмме состояния строящегося автомата. Следует, однако, учесть следующие обстоятельства:

- (1) поскольку изложенная в предыдущем разделе модель двумерной ЦМ производства автоматов предполагает независимость случайных входов автоматов, а в автоматах, получаемых по ASM-диаграммам, входным переменным соответствуют условные переходы, необходимо, чтобы указанные переходы выполнялись по условиям, определяемым независимыми событиями;
- (2) поскольку в данной модели сбоев рассматриваются синхронные автоматы, каждый результат изменения входных данных (выбор перехода в ASM) должен фиксироваться в том или ином состоянии автомата, что означает необходимость того, чтобы выход каждого ромба был связан с тем или иным прямоугольником.

Построенный программой Abelite автомат представлен на рис. 2. Здесь первая колонка — предыдущее состояние, вторая — следующее состояние, третья — логические значения входов x_1-x_6 , вызывающие соответствующий переход, последняя — выходы автомата, формируемые при данном переходе.

Соответствие выходов и входов автомата блок-схеме, представленной на рис. 1, описывает рис. 3. Здесь знак $\langle \rangle$ замещает символ \neq , использование которого (как и некоторых других знаков из таблицы символов MS Windows) запрещает интерфейс программы Abelite [8], используемой для построения автомата.

Состояния a_1-a_{13} описывают состояния построенного автомата, y_1-y_{16} — выходные переменные, соответствующие выполнению операций в прямоугольниках блок-схемы, состоящих или

a1	a13	1	y16
a2	a11	1	y13
a3	a9	1	y12
a4	a2	x1	y3
a4	a3	$\sim x1$	y2
a5	a2	x2	y1
a5	a4	$\sim x2$	y4
a6	a2	1	y11
a7	a8	x3	y10
a7	a5	$\sim x3$	y5
a8	a1	x1	y8
a8	a1	$\sim x1$	y9
a9	a6	1	y6
a10	a7	x4	y7
a10	a9	$\sim x4$	y12
a11	a10	x5	y12
a11	a8	$\sim x5$	y10
a12	a2	x6	y14
a12	a12	$\sim x6$	y15
a13	a12	1	y15

Рис. 2 Автомат Мили, соответствующий диаграмме рис. 1

Выходные переменные (Micro Operations):

- y1: S1[C1+1]="
- y2: C2<>0
- y3: C2=0
- y4: S1[C1+1]<>"
- y5: <L1
- y6: C2=C2+1,
- y7: "
- y8: Empty
- y9: PrS2
- y10: C2
- y11: S2[C2]=S1[C1]
- y12: S1[C1]
- y13: C1=C1+1
- y14: C1=0;C2=0
- y15: L1
- y16: S1

Входные переменные (Logical Conditions):

- x1: C2=0
- x2: S1[C1+1]="
- x3: C1=L1
- x4: S1[C1]="
- x5: C1=<L1
- x6: L1>0

Рис. 3 Соответствие входных и выходных переменных автомата операциям и переходам в ASM

в присвоении значений одной переменной другой, или в выполнении непосредственно указанных действий. Переменные $S1[C1+1]=''$, $''$, $S2<>0$ представляют собой отмеченные «синхронизирующие» операции, которые вставляются в диаграмму для разделения моментов изменения входов автомата. Эти псевдооперации просто фиксируют состояние автомата, в которое он перешел после выбора соответствующего перехода.

Состояния автомата легко могут быть интерпретированы при сравнении рис. 2 и 3. Например, состояние a_4 — это состояние, когда в слове обнаружен пробел, за которым идет не пробел. Если это происходит в начале слова, то пробел не записывается в формируемое слово S_2 , в противном случае — записывается.

Ввиду того что сбои рассматриваются как события, случайно происходящие во время обработки множества строк S в некотором заданном алфавите, вероятности событий задаются на множестве всех возможных строк, содержащих символы алфавита, и на множестве индексов символов внутри каждой из строк.

Для построения требуемой марковской модели (см. разд. 2) необходимо каждой входной переменной автомата (x_1, \dots, x_6) приписать вероятность булевой единицы, что соответствует вероятности активизации соответствующего пути в блок-схеме рис. 1 по единичной ветви. Эти вероятности оцениваются по наборам обрабатываемых текстов $S_T \subseteq S$, рассматриваемых как конечная выборка объемом N_T из множества S .

Например, вероятность того, что $x_6 = 1$, оценивается как $\text{Prob}(L_1 > 0) = N_{\text{emp}}/N_T$, где N_{emp} — число пустых строк; N_T — общее число строк в тестовом наборе. Это оценка вероятности отсутствия пустых строк в потоке обрабатываемых строк, например, состоящих только из признаков начала и конца и не содержащих ни одного символа используемого алфавита (построение тестового набора рассматривалось в [4]).

Рассмотрим применение данной модели при анализе чувствительности теста и устойчивости программы к сбоям, а именно: вычисляя значения вероятностей попадания двумерной ЦМ, построенной из пары автоматов с разными начальными условиями, одно из которых соответствует изменению вектора начального состояния в результате сбоя, в поглощающее состояние.

Для рассматриваемого примера общее число состояний двумерной ЦМ $\{(i, j)\}$, где i и j — индексы состояний a_i и a_j исправного и автомата, подвергнувшегося сбою («сбойного» автомата), как указано в предыдущем разделе, равно $N(N-1)+2$, где N — число состояний автомата на рис. 2, и составля-

ет 158. Состояния упорядочиваются следующим образом:

$$\{A_0, (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11), (1, 12), (1, 13), (2, 1), (2, 3), (2, 4), \dots, (5, 6), \dots, (13, 11), (13, 12), A_1\}.$$

Вектор вероятностей начальных состояний $\{p_{i,j}\}_{158}$ имеет единственную единичную компоненту (i_0, j_0) : если исправный автомат в начальный момент 0 находится в состоянии i_0 , а неисправный — в состоянии $j_0 \neq i_0$, то $p_{i_0, j_0}(0) = 1$, а остальные координаты вектора $\vec{p}(0)$ равны нулю. Например, для сбоя вида (5, 6), вектор $\vec{p}(0)$ будет содержать единицу на позиции (5, 6).

6 Анализ чувствительности к сбоям по результатам тестирования

Пусть имеется некоторое множество строк S_1 , представляющее набор тестов для функционального тестирования программы. Пусть определены по данному тестовому множеству текстов (или более широкому множеству текстов, рассматриваемых как обучающая выборка) вероятности $\text{Prob}(x_1 = 1), \dots, \text{Prob}(x_6 = 1)$.

Как отмечалось в разд. 4, для каждой автоматной модели программы можно построить две разные ЦМ, у одной из которых поглощающее состояние A_1 определяется подмножеством переходов цепи Z_t , у которых выходы исправного и сбойного автоматов не совпадают (модель 4.1), а у другой ЦМ состояние A_1 соответствует переходам, в которых не совпадают выходы при совпадении состояний (модель 4.2). Использование той или иной модели зависит от того, какую конкретно задачу предстоит решать.

Рассмотрим задачу определения вероятного интервала самовосстановления. В этом случае, очевидно, адекватной является именно модель 4.2, поскольку модель 4.1 означает проверку несовпадения выходов для каждого состояния, что в ряде случаев может не позволять реализовывать эффект самовосстановления, поскольку работа программы может быть остановлена уже на первом такте после сбоя, тогда как многие алгоритмы самовосстановления и самокоррекции как раз предполагают наличие некоторого времени на самовосстановление [9].

Далее рассмотрим несколько примеров анализа автомата, заданного в табл. 5, на чувствительность и устойчивость к сбоям.

Пример 1. Рассмотрим сбой (10, 8): «автомат вместо состояния a_{10} , в котором он должен находиться на данном такте после перехода на предыдущем такте, в результате сбоя оказался в состоянии a_8 », что означает, согласно рис. 2, выполнение операции y_{10} вместо y_{12} и, соответственно, формирование результирующей строки S_2 может быть закончено до исчерпания символов во входной строке S_1 . При этом таблица вероятностей восстановления $p_0(t)$, появления сбоя на выходах $p_1(t)$ и нахождения на неправильной траектории переходов при неискаженных выходных переменных $\sim p(t)$ вычисляется по формуле (1) как произведение указанного выше вектора вероятности начальных состояний на n -ю степень матрицы вероятностей переходов двумерной ЦМ, вычисляемую по вероятностям переходов, как это показано на примере автомата табл. 1–3. Для данного примера аналогичные матрицы 158×158 строятся программой [10].

Возьмем некоторый вектор вероятностей единичных значений входов x_1, \dots, x_6 (не задаваясь пока вопросом связи их значений с семантикой программы), например 0,2, 0,7, 0,2, 0,7, 0,01, 0,2, и вычислим значение вероятностей самовосстановления на шагах (тактах) $t = 1, \dots, 19$ по формуле (1), представив их вектором

$$P_0(t) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,3136, 0,3136, 0,31395, 0,45906, 0,57226, 0,64495, 0,69991, 0,75712, 0,78388, 0,82202, 0,85148, 0,87607, 0,89468, 0,91082, 0,92396],$$

где номер каждой позиции соответствует номеру такта минус 1 (первый элемент соответствует моменту сбоя и считается нулевым индексом).

Как видно из вектора вероятностей самовосстановления $P_0(t)$, уже к 12-му такту после сбоя вероятность восстановления достаточно высока (0,757).

Проанализируем связь вероятностей x_1, \dots, x_6 с семантикой рассматриваемой прикладной задачи рис. 1. Как отмечалось выше, вероятности входных переменных x_1, \dots, x_6 определяются распределением пробелов в текстах, образующих тестовое множество строк. Вероятность события $C_2 = 0$ (представляемое переменной x_1) означает вероятность того, что на случайно выбранном шаге алгоритма (на всем множестве тестовых строк) окажется, что ни одного ведущего пробела пока не встречено. В данном примере эта вероятность равна 0,2, что указывает на достаточно высокую плотность пробелов в строках множества. О том же говорит значение вероятности для переменных x_2 и x_4 , соответствующих частоте пробелов в тестовых строках. Значение вероятности для x_3 — вероятность

встретить на случайном шаге конец строки, которая в рассматриваемом случае небольшая. Очевидно, что переменные x_5 и x_6 (« $C_1 = L_1$ ») логически связаны (чем больше вероятность встретить конец строки, тем меньше вероятность того, что строка столь (относительно) длинная, что в случайно выбранный момент времени выполняется условие $C_1 < L_1$), что ставит вопрос о возможности считать их независимыми.

Отметим, что если, как отмечалось выше, рассматривать данную программу анализа наличия и удаления пробелов как модель телекоммуникационной программы, для которой пробелам соответствуют те или иные служебные символы, то условие $L_1 = 0$ означает отсутствие в некоторой посылке информационных символов, а малые значения вероятности $L_1 > 0$ означают, что информационные посылки достаточно редки.

Приведем примеры вычисления вероятностей самовосстановления также для других сбоев и для различных значений вероятностей x_1, \dots, x_6 .

Пример 2. Для сбоя (10, 8) и вероятностей входов 0,05; 0,7; 0,1; 0,05; 0,9; 0,1

$$P_0(t) = [0, 0, 0, 0, 0, 0,00405, 0,00405, 0,0040898, 0,062046, 0,062999, 0,066632, 0,068139, 0,069252, 0,10226, 0,10411, 0,10778, 0,11016, 0,1119, 0,13258, 0,13501].$$

Пример 3. Для сбоя (7, 9) при тех же вероятностях входов вероятность восстановления крайне мала:

$$P_0(t) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,00729, 0,00741, 0,010307, 0,010507, 0,0124, 0,01847, 0,018905, 0,02131, 0,021632, 0,0242, 0,0295, 0,03004, 0,03211].$$

7 Обсуждение результатов и направление дальнейших исследований

Благодаря предложенному подходу можно судить об устойчивости программ к случайным сбоям и в случае необходимости использовать дополнительные средства и методы восстановления программ. При этом построение марковской модели (матрица вероятностей переходов) может выполняться по ранее разработанным функциональным тестам и не требует дополнительных затрат на построение новых тестов.

Вероятность самовосстановления для рассматриваемой программы в общем случае может быть

мала, что ставит вопрос о том, как информация, полученная при изложенном анализе самовосстановления, может быть использована проектировщиком для получения вариантов программ, устойчивых к случайным сбоям.

Рассмотрим основные факторы устойчивости к сбоям, которые должен учитывать проектировщик программно-аппаратной системы, исследуемой с помощью данной модели программы. Прежде всего, как это видно из анализа рассмотренных примеров, существенным является прикладное назначение и функциональные особенности проектируемой системы, отображаемые в используемых тестовых множествах. Например, для рассмотренной программы, если исходя из исходной спецификации проекта некоторой системы, частью которой является данная программа, следует, что большая часть данных на входе программы (строка S_1) не содержит символов заданного (используемого) алфавита, то вероятность самовосстановления весьма высока.

Если же это не так и вероятности самовосстановления на рассматриваемом тестовом множестве малы (см. пример 3), то проектировщик принимает решение о тех или иных способах обеспечения защиты.

В зависимости от используемых критериев качества проекта (стоимость, потребление энергии, вес, габариты, надежность и т. д.) он принимает решение о том, что более эффективно — существенно сократить интенсивность сбоев и/или применить те или иные схемы самовосстановления.

Упрощенно оценку влияния аппаратных сбоев можно представить следующим образом. Пусть L_n — список сбоев ((10,8), (7,9) и т. д. в рассмотренных примерах). Тогда, оценив известными методами вероятности аппаратных сбоев [1] p_i , $i = 1, \dots, |L_n|$, которые влияют, например, на соответствующие области программной памяти, ответственные за сбой из списка L_n , вероятность сбоя на интервале тактов [1, t]:

$$P_t = \sum_{i=1, \dots, |L_n|} p_i P_0^i,$$

где P_0^i — компоненты векторов $P_0(t)$, соответствующие тактам $1, 2, \dots, t$ для каждого из сбоев i из списка L_n , примеры вычислений которых даны в предыдущем разделе и которые в данном случае интерпретируются как условные вероятности сбоя, при условии что произошел сбой i , а приведенная формула представляет собой формулу *полной вероятности* события «произошел сбой». Имея список сбоев и вычисленные вероятности самовосстановления, можно сформулировать требования

к аппаратуре для обеспечения допустимых p_i . Далее разработчик использует те или иные подходы к обеспечению устойчивости программного обеспечения к сбоям, например N-version programming, при которой в память записывается n (где n — нечетное число) копий (версий) программы с последующим сравнением результатов «по большинству».

Другой практически важной задачей является оценка чувствительности к сбою в тестовом наборе, когда при передаче некоторого блока символов случайно изменился один из символов. Эту ситуацию также желательно оценить при анализе проекта ВС, так как это говорит либо о проявлении сбоя в канале ввода данных (в данном случае — символьных строк), либо, если рассматривается модульная система, о сбое в модуле (аппаратном или программном), являющемся источником данных для диагностируемого программного модуля.

Формально именно эта задача может решаться при использовании модели 4.1, и если тесты чувствительны к кратковременным сбоям, то есть основания надеяться, что эти тесты обладают высоким качеством (полнотой) также относительно других классов отказов, например ошибок при выполнении функций. Согласно общему принципу тестирования некоторое ошибочное изменение в системе проверяется, если хотя бы одна из наблюдаемых выходных переменных изменяет свое значение по сравнению с исправной (эталонной) системой при заданном множестве наблюдаемых (при тестировании) переменных. Если это произошло, система признается неисправной и дальнейшее ее функционирование невозможно (срабатывают те или иные механизмы принудительной остановки).

Однако вероятность обнаружения сбоя на выходах зависит от того, какое подмножество компонентов вектора Y рассматривается в качестве выходов программы и с какой периодичностью (каков интервал в тактах между последовательными наблюдениями выходов). Например, для рассматриваемой программы контролировать было бы логично только компонент вектора выходов $Pr.S_2$ (см. рис. 1). Это означает, что при задании поглощающего состояния A_1 решения задачи оценки вероятности обнаружения (тестирования) сбоя необходимо учитывать используемые контролируемые выходы.

Расширение предложенной модели на задачу оценки вероятности обнаружения случайного сбоя на заданном подмножестве контролируемых выходов представляется весьма актуальным и является предметом дальнейших исследований.

Литература

1. Li X., Adve S. V., Bose P., Rivers J. A. Softarch: An architecture level tool for modeling and analyzing soft errors // Conference (International) on Dependable Systems and Networks (DSN) Proceedings. — Yokohama, Japan, 2005. P. 496–505.
2. Darbar A., Al-Hashimi B., Harrod P., Bradley D. A new approach for transient fault injection using symbolic simulation // 14th IEEE On-Line Testing Symposium (International) Proceedings, 2008. P. 93–98.
3. Frenkel S., Pechinkin A. Estimation of self-healing time for digital systems under transient faults // Информатика и её применения, 2010. Т. 4. Вып. 3. С. 2–8.
4. Френкель С. Л., Захаров В. Н., Ушаков В. Г. Вероятностная верификация при проектировании вычислительных систем // Инструменты и методы анализа программ (ТМРА-2014): Мат-лы междунар. науч.-практич. конф. — Кострома: КГТУ, 2014. С. 148–155.
5. Li X., Yeung D. Application-level correctness and its impact on fault tolerance // 16th Symposium (International) on High-Performance Computer Architecture. — Bangalore, India, 2010. P. 220–225.
6. Шальто А. А., Туккель Н. И. SWITCH-технология — автоматный подход к созданию программного обеспечения «реактивных» систем // Программирование, 2001. № 5. С. 45–62.
7. Baranov S., Frenkel S., Zakharov V. Semiformal verification for pipelined digital designs based on Algorithmic State Machines // Информатика и её применения, 2010. Т. 4. Вып. 3. С. 49–60.
8. Baranov S. ASMs in high level synthesis of EDA tool Abelite // DESDes'09 IFAC Workshop (International) Proceedings. — Valencia, Spain, 2009. P. 195–200.
9. Lala P. K., Kumar B. K. On self-healing digital system design // J. Microelectronics, 2006. Vol. 37. P. 353–362.
10. Френкель С. Л., Либуркин Д. Л. Программа оценки времени самовосстановления цифровой системы после сбоя по ее высокоуровневой модели. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013661815 от 16.12.2013.

Поступила в редакцию 31.10.16

A PROBABILISTIC MODEL FOR ESTIMATION OF SOFTWARE ROBUSTNESS TO SHORT-TERM HARDWARE FAILURES

S. L. Frenkel¹, V. N. Zakharov², and B. M. Basok³

¹Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Sciences and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

²Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

³Moscow Technological University “MIREA,” 78 Vernadskogo Ave., Moscow 119454, Russian Federation

Abstract: The paper shows the possibility of using a two-dimensional Markov model defined on direct product of state spaces of two finite-state machines (FSM), one of which is a program finite automaton model that is running under normal conditions and the other one is the same FSM in which at some point in time, there was a short-term failure (e. g., within the time of a single operation or one machine cycle), for estimation of software robustness to short-term hardware failures. Previously, this model was proposed for probabilistic verification of hardware systems. The robustness of a program is estimated by probability of the faulty FSM return on the path of transitions of the source machine after termination of the failure. At the same time, the authors assume that a change in the FSM transitions trajectory in a low-level (instruction-by-instruction) program model will be significant only if it corresponds to some corruption in the branching of said block-diagram. The model is analyzed in detail by the example of the block-diagram of a specific program.

Keywords: self-repairing software; transient faults; Markovian models; testing

DOI: 10.14357/19922264170104

Acknowledgments

The work was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 16-07-01028 and 15-07-05316).

References

1. Li, X., S. V. Adve, P. Bose, and J. A. Rivers. 2005. Soft-arch: An architecture level tool for modeling and analyzing soft errors. *Conference (International) on Dependable Systems and Networks (DSN) Proceedings*. Yokohama, Japan. 496–505.
2. Darbar, A., B. Al Hashimi, P. Harrod, and D. Bradley. 2008. A new approach for transient fault injection using symbolic simulation. *14th IEEE On-Line Testing Symposium (International) Proceedings*. 93–98.
3. Frenkel, S., and A. Pechinkin. 2010. Estimation of self-healing time for digital systems under transient faults. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 4(3):2–8.
4. Frenkel, S. L., V. N. Zakharov, and V. G. Ushakov. 2014. Veroyatnostnaya verifikatsiya pri proektirovanii vychislitel'nykh sistem [Probabilistic verification of computer systems design]. *Scientific-Practical Conference (International) "Tools & Methods of Program Analysis" (TMPA 2014) Proceedings*. Kostroma: KGTU. 148–155.
5. Li, X., and D. Yeung. 2010. Application-level correctness and its impact on fault tolerance. *16th Symposium (International) on High-Performance Computer Architecture*. Bangalore, India. 220–225.
6. Tukkel, N. N., and A. A. Shalyto. 2001. SWITCH-tekhnologiya — avtomatnyy podkhod k sozdaniyu programmnoogo obespecheniya "reaktivnykh" sistem [SWITCH-technology is an automatic approach to software design]. *Programmirovaniye* [Programming] 5:45–62.
7. Baranov, S., S. Frenkel, and V. Zakharov. 2010. Semiformal verification for pipelined digital designs based on Algorithmic State Machines. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 4(4):48–59.
8. Baranov, S. 2009. ASMs in high level synthesis of EDA tool Abelite. *DESDes'09 IFAC Workshop (International) Proceedings*. Valencia, Spain. 195–200.
9. Lala, P. K., and B. K. Kumar. 2007. On self-healing digital system design. *J. Microelectronics* 37:353–362.
10. Frenkel, S. L., and D. Liburkin. December 16, 2013. Programma dlya otsenki vremeni samovosstanovleniya tsifrovoy sistemy posle sboya po ee vysokourovnevoy modeli [Program for estimation of a digital system self-repairing after a transient fault by a high-level model of the system]. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii [Certificate of state registration] No. 2013661815.

Received October 31, 2016

Contributors

Frenkel Sergey L. (b. 1951) — Candidate of Science (PhD) in technology, senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Sciences and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; fsergei51@gmail.com

Zakharov Victor N. (b. 1948) — Doctor of Science in technology, associate professor; Scientific Secretary, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; vzakharov@ipiran.ru

Basok Boris M. (b. 1948) — Candidate of Science (PhD) in technology, associate professor, Moscow Technological University "MIREA," 78 Vernadskogo Ave., Moscow 119454, Russian Federation; VM_E@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ПРОГРАММНЫХ МЕТОДАХ ПОСТРОЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ МОДЕЛЕЙ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ*

А. К. Горшенин¹

Аннотация: Потоки событий в современных информационных системах не являются регулярными, поэтому методы анализа, основанные на классических теоремах, справедливых при определенных условиях регулярности, могут приводить к некорректным выводам, включая недооценку рисков экстремальных событий. При практическом моделировании и анализе нестационарных информационных потоков ключевой задачей становится выбор статистических методов оценивания неизвестных параметров моделей. В исследованиях, проводимых в рамках научной школы профессора В. Ю. Королева, традиционно для этих целей принято использовать так называемый метод скользящего разделения смесей (СРС-метод), основанный на специальном разбиении исходной выборки на подвыборки (окна) и дальнейшем анализе поведения данных на каждом окне, в рамках смешанных вероятностных моделей. Описанные методы анализа стохастических данных на основе смешанных вероятностных моделей позволяют повысить эффективность исследования сложных информационных систем. Развитие и использование предложенных методов может оказаться весьма полезным в соответствующих областях прикладной математики и компьютерных наук.

Ключевые слова: информационные системы; смешанные вероятностные модели; метод скользящего разделения смесей; статистический анализ данных; экстремальные наблюдения; зашумленные данные; пороговое значение; метод Peak Over Threshold; теорема Пикандса – Балкемы – Де Хаана; теорема Реньи; онлайн-комплекс; матричные вычисления

DOI: 10.14357/19922264170105

1 Введение

Потоки событий в современных информационных, телекоммуникационных и вычислительных системах не являются регулярными (стационарными, однородными), поэтому методы анализа, основанные на классических теоремах, справедливых при определенных условиях регулярности, могут приводить к некорректным выводам, включая недооценку рисков экстремальных событий. При практическом моделировании и анализе нестационарных информационных потоков ключевой задачей становится выбор статистических методов оценивания неизвестных параметров моделей.

В исследованиях, проводимых в рамках научной школы профессора, доктора физико-математических наук В. Ю. Королева (ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, ИПИ ФИЦ ИУ РАН), традиционно для этих целей принято использовать так называемый СРС-метод [1], основанный на специальном разбиении исходной выборки на подвыборки (окна) и дальнейшем анализе поведения данных на каж-

дом окне, в рамках смешанных вероятностных моделей. Поэтому особое внимание в данной работе уделяется подходам, способствующим повышению эффективности СРС-метода.

Статья посвящена обзору следующих основных результатов исследований, соответствующих тематике проекта РФФИ 15-37-20851 мол.а.вед «Математические и программные методы построения структурных моделей информационных потоков» (руководитель — А. К. Горшенин):

- развитие и апробация методологии определения экстремальных наблюдений в данных (как на основе СРС-метода [2], так и с использованием теорем Пикандса – Балкемы – Де Хаана и Реньи о редящих потоках [3]);
- изучение методологии искусственного зашумления исходных данных для повышения корректности результатов анализа СРС-метода [4];
- разработка программной реализации сеточных методов разделения конечных смесей на базе архитектуры NVIDIA CUDA [5];

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 15-37-20851 мол.а.вед) и Программы Президиума РАН № 1.33П (проект 063-2016-0015).

¹Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, agorshenin@frccsc.ru

- реализация анализа моментных характеристик конечных нормальных смесей [6];
- анализ стохастического подхода к верификации времени выполнения программного кода [7];
- разработка архитектуры [8] специализированного онлайн-комплекса стохастического моделирования реальных процессов и создание бета-версии вычислительного портала <http://msm-analysis.com> с системой пользовательской регистрации, тестовым набором методов обработки данных, развиваемых в проекте, и выводом графических результатов [9];
- использование полученных инструментов для анализа реальных данных (турбулентные потоки тепла между океаном и атмосферой [10], отчеты профилировщика программного кода [7], информация об осадках [11, 12]).

2 Методология определения экстремальных наблюдений в данных

В статье [2] продемонстрирован подход на основании упорядочения весов и дисперсий, получаемых в рамках аппроксимации исходных данных моделью типа конечной смеси нормальных законов и применения СРС-метода. Для этого полученные компоненты смеси упорядочиваются по убыванию значения дисперсий, а наблюдения, соответствующие компоненте с наибольшим значением, могут интерпретироваться как экстремальные относительно других. Данный метод решения задачи определения доли таких наблюдений в исходной выборке не требует привлечения теории экстремальных значений (так как соответствует параметру веса соответствующей компоненты), однако для исходных данных (в указанной работе рассмотрен пример турбулентных потоков тепла между океаном и атмосферой) необходимо заранее определить модель, пусть и достаточно общего вида.

В работе [3] предложена альтернативная описанной выше методология определения экстремальных пороговых значений в неотрицательных данных, которые характерны для многих информационных систем. Стоит отметить, что данный подход развивает популярную технику Peak Over Threshold [13].

Согласно предельной теореме Реньи [14] для редящих потоков, стационарный точечный процесс при специальном прореживании (каждая точка удаляется с вероятностью $1 - p$, где $p \rightarrow 0$) сходится к пуассоновскому процессу. При этом интервалы между скачками имеют экспоненциальное распределение. Таким образом, проверяя гипотезу

экспоненциальности, можно определить пороговое значение. Согласно теореме Пикандса – Балкемы – Де Хаана [15, 16] распределение превышений данного порога должно стремиться к обобщенному распределению Парето с функцией распределения $F_{\xi, \sigma, \mu}(x)$, а именно: для достаточно широкого класса распределений случайной величины X

$$F(X - u \leq y \mid X > u) \rightarrow F_{\xi, \sigma, \mu}(y) \text{ при } u \rightarrow \infty,$$

где $F_{\xi, \sigma, \mu}(x)$ имеет следующий вид:

$$F_{\xi, \sigma, \mu}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi(y - \mu)}{\sigma}\right)^{-1/\xi}, & \text{если } \xi \neq 0; \\ 1 - e^{-(y - \mu)/\sigma} & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Успешность подгонки реальных данных проверяется по χ^2 -критерию. Подобная процедура составляет суть восходящего метода определения порогового значения, так как «уровень» поднимается от нулевого значения данных с некоторым шагом, пока проверяемая гипотеза об экспоненциальности отвергается (поясняющие графики можно найти в работе [3]). Допустимо движение и в обратном направлении — так реализуется нисходящий метод определения порогового значения. В статье [3] также приведены наглядные блок-схемы для каждого из методов, позволяющие реализовать процедуру на любом удобном языке программирования. Стоит отметить, что в качестве данных могут выступать наблюдения любой природы, удовлетворяющие условию неотрицательности.

Предположим, что наблюдения могут быть разделены на группы строго положительных и нулевых наблюдений, следующих друг за другом, т. е. исходные данные можно записать в виде $X_{n,j}$, где n — номер соответствующей группы с ненулевыми данными, а j соответствует позиции элемента внутри данной группы. Пусть t — время начала одной из групп. Тогда можно рассмотреть данные, представляющие собой кумулятивные суммы:

- $X_{n,1}$ в момент времени t ;
- $X_{n,1} + X_{n,2}$ в момент времени $t + 1$;
-
- $X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$ в момент времени $t + k_n$, параметр k_n соответствует размеру группы.

Превышение порога происходит в момент времени $t + j$, который определяется выполнением следующих условий:

$$\begin{aligned} X_{n,1} + \dots + X_{n,j-1} &\leq u; \\ X_{n,1} + \dots + X_{n,j} &> u. \end{aligned}$$

В случае если $X_{n,j}$ имеют гамма- или Парето-распределение, представление кумулятивных данных в виде случайной суммы со случайным числом слагаемых $\sum_{j=1}^{N_n} X_{n,j}$, где N_n есть случайная величина с отрицательным биномиальным распределением, приводит к новым смешанным вероятностным моделям (например, пуассоновским) [1], что позволяет более тонко исследовать структуру изучаемых процессов.

Описанная методология опирается на две фундаментальные теоремы теорий случайных процессов и экстремальных значений без априорных предположений о данных, что позволяет, с одной стороны, адаптивно учитывать их изменяющуюся структуру, а с другой — ослабить эмпирические предположения при построении вероятностно-статистических моделей. Результаты могут быть использованы при построении вероятностных прогнозов экстремальных событий, связанных с нестационарными потоками событий в различных информационных системах, в том числе и для анализа климатических изменений в регионах с потенциальными угрозами наводнений и затопления жилых, промышленных и иных стратегически важных объектов.

3 Методология искусственного зашумления исходных данных для повышения корректности результатов анализа метода скользящего разделения смесей

Одной из наиболее важных характеристик процессов, происходящих в информационных системах, является интенсивность (трафика, событий и т. д.) — величина, которая является неотрицательной. В этой ситуации использование СРС-метода для конечных сдвиг-масштабных смесей представляется не вполне корректным, так как данный класс распределений сосредоточен на всей действительной оси. Для решения данной проблемы в работе [4] предложено использование искусственного зашумления выборки с помощью добавления к данным случайной величины с известным распределением, а именно: нулевым математическим ожиданием и некоторой дисперсией. При этом известно, что конечные нормальные смеси являются достаточно адекватной аппроксимацией для нормальных дисперсионно-сдвиговых, выступающих в качестве предельных распределений для сумм случайных величин со случайным числом слагаемых. Таким образом, можно получить разумные асимптотиче-

ские аппроксимации статистических закономерностей в рассматриваемых данных.

Отметим, что методология искусственного зашумления успешно применяется, например, в области статистической обработки сигналов (см., например, [17, 18]). Кроме того, как продемонстрировано в работе [19], такая техника может способствовать некоторому повышению вычислительной эффективности широко известного метода получения оценок максимального правдоподобия — EM-алгоритма.

В рамках работы [4] было проведено зашумление строго положительных данных, новая выборка, в которой появились отрицательные наблюдения, исследовалась с помощью классической модели конечных сдвиг-масштабных смесей нормальных распределений в рамках СРС-метода, а затем из полученных результатов была удалена известная шумовая компонента (при этом были корректно пересчитаны веса оставшихся, чтобы в сумме по-прежнему получалась единица), а именно: для каждого из наблюдений X_j зашумление предполагает проведение замены вида

$$X_j \rightarrow X_j + \varepsilon_j$$

для всех $j = 1, \dots, N$, где N — число исходных наблюдений. В качестве зашумляющих использованы случайные величины $\varepsilon_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ с нормальным распределением с параметрами 0 и σ , при этом выбор параметра σ позволяет варьировать изменение начальных данных. Неудачный выбор σ (например, в случае превышения значения выборочного среднеквадратического отклонения) может привести к существенным изменениям в данных и потере структурных компонент в рамках анализа СРС-методом. Случайные величины X_j и ε_j предполагаются независимыми. Очевидно, что данная операция зашумления не изменяет математические ожидания как компонент, так и самой смеси, а для дисперсии справедливо представление (см. подробнее [1, 4]):

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\text{mixt}} &= \sum_{i=1}^k p_i(t) \left[a_i(t) - \sum_{i=1}^k p_i(t) a_i(t) \right]^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^k p_i(t) (\sigma_i^2(t) + \sigma^2) = \\ &= \sum_{i=1}^k p_i(t) \left[a_i(t) - \sum_{i=1}^k p_i(t) a_i(t) \right]^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^k p_i(t) \sigma_i^2(t) + \sigma^2. \end{aligned}$$

Полученные в ходе такого анализа результаты продемонстрировали значительно лучшее качество выделения структурных компонент по сравнению с ситуацией, когда в качестве входа СРС-метода использовалась исходная неотрицательная выборка.

Дальнейшие исследования в данном вопросе могут быть направлены на установление критериев, которые могли бы использоваться для автоматизации процесса зашумления исходных данных, т. е. выбора значения параметра σ . В частности, может быть использован подход на основе статьи [20] в рамках изучения связи между ошибкой измерения, погрешностью округления и точностью восстановления измеряемой величины.

4 Реализация сеточных методов разделения конечных смесей на базе архитектуры NVIDIA CUDA

Стремительный рост популярности решений на базе платформ, ориентированных на задействование в процессе проведения вычислений специализированных графических видеокарт, наблюдается в широком спектре актуальных исследовательских областей: в медицине для реконструкции изображений, в задачах геостатистического имитационного

моделирования для изучения запасов нефти и газа, в фармакокинетическом анализе данных (более подробный обзор с указанием ссылок приведен в статье [5]).

В работе [21] были предложены концептуальные решения на базе архитектуры NVIDIA CUDA, направленные на повышение эффективности реализации сеточных модификаций методов поиска оценок неизвестных параметров в смешанных вероятностных моделях. Была разработана программная реализация сеточного метода разделения смесей нормальных распределений с фиксированными компонентами на базе архитектуры NVIDIA CUDA, описанного в статье [22]. Данное решение подходит для обработки данных в режиме реального времени (или в близком к нему). Аналогичные реализации в рамках библиографического поиска в базе Web of Science обнаружены не были.

Пример графического представления результатов работы данного метода с помощью средств портала <http://msm-analysis.com> продемонстрирован на рис. 1. В работе [5] можно найти аналогичный график, созданный в среде MATLAB.

Отметим, что теоретическое обоснование корректности использования сеточных методов разделения конечных сдвиг-масштабных смесей нормальных законов для ряда достаточно общих моделей можно найти в статьях [23, 24], некоторые результаты для дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных законов приведены в статье [25].

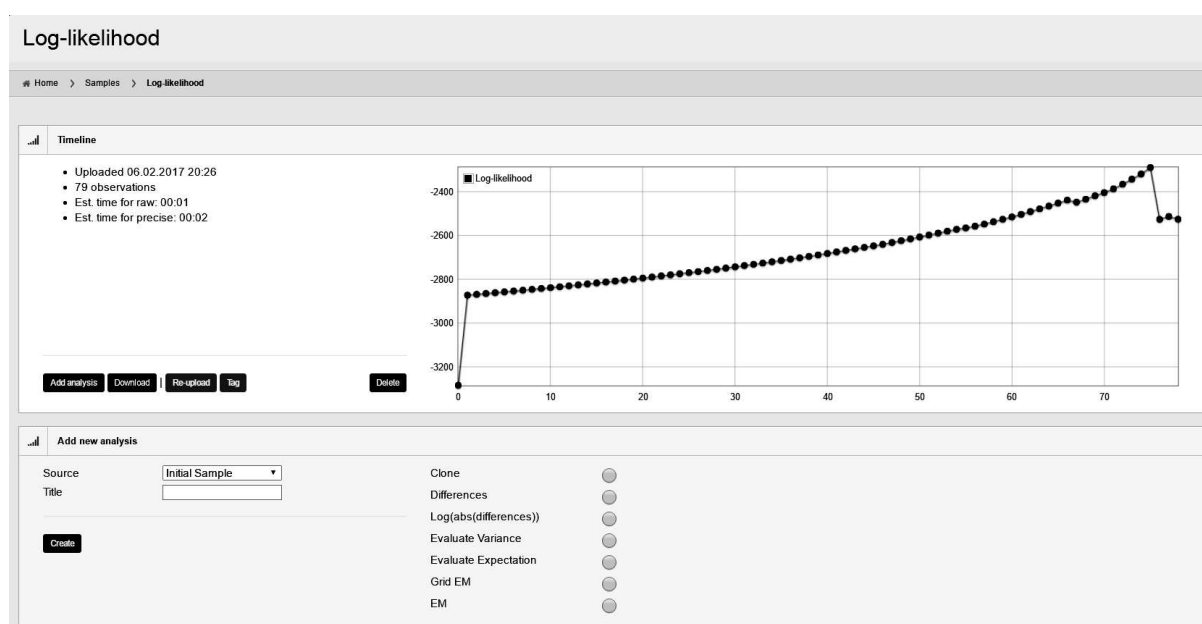


Рис. 1 Изменение значений логарифма функции правдоподобия при изменении параметрической сетки (график создан средствами онлайн-портала <http://msm-analysis.com>)

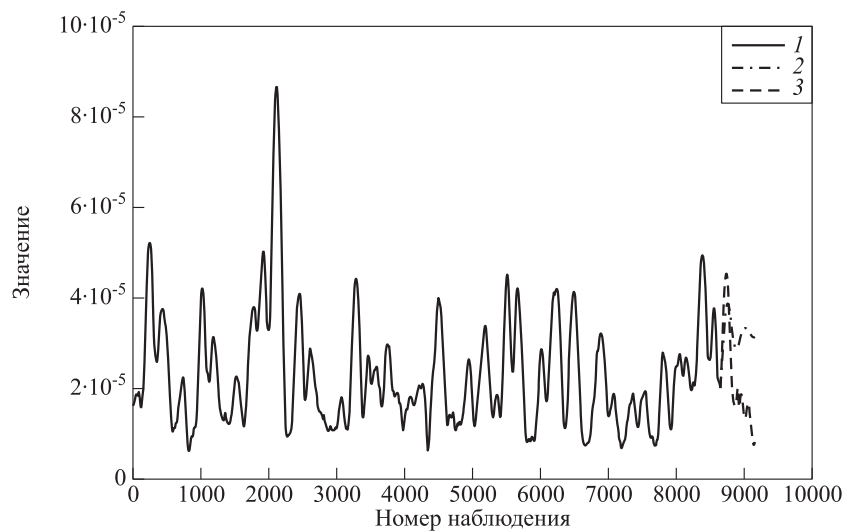
5 Реализация анализа моментных характеристик конечных нормальных смесей

В работе [6] значительное внимание уделяется получению явных формул для ряда моментных характеристик, отражающих динамику изменения смеси в процессе использования СРС-метода, прежде всего в матричном представлении, — математического ожидания, дисперсии, коэффициентов асимметрии и эксцесса.

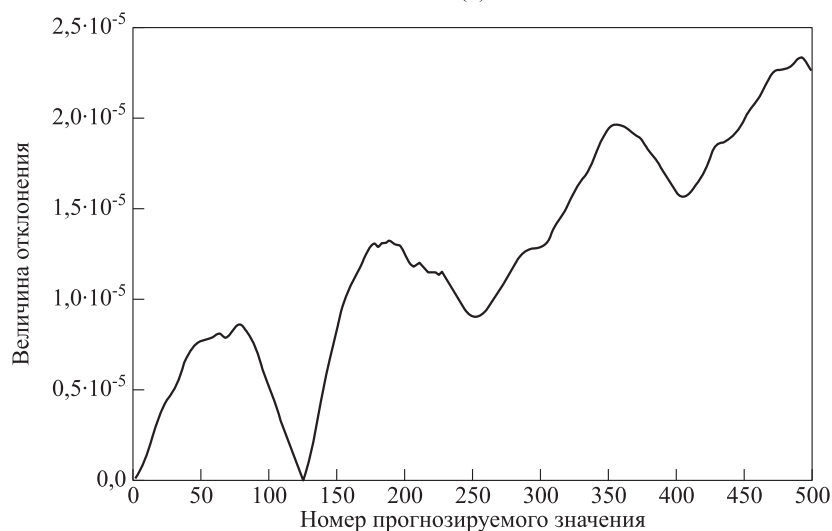
Для отыскания подобных характеристик требуется вычисление значений центральных моментов порядка $\mu \geq 1$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Z_t - \mathbb{E}Z_t)^\mu$, где случайная величина Z_t имеет распределение типа конеч-

ной сдвиг-масштабной смеси нормальных законов, а индекс t указывает на то обстоятельство, что параметры распределения могут изменяться в процессе работы СРС-метода. Очевидно, что для получения явного представления требуется отыскание соответствующих начальных моментов, матричные формулы для первых четырех из которых приведены ниже:

$$\mathbb{E}Z_t^m = \begin{cases} P_t \cdot A_t^T, & m = 1; \\ P_t (D_{A,t} \cdot A_t^T + D_{\Sigma,t} \cdot \Sigma_t^T), & m = 2; \\ P_t \cdot D_{A,t} (D_{A,t} \cdot A_t^T + 3D_{\Sigma,t} \cdot \Sigma_t^T), & m = 3; \\ P_t (D_{A,t}^3 \cdot A_t^T + 6D_{\Sigma,t}^2 \cdot D_{A,t} \cdot A_t^T + 3D_{\Sigma,t}^3 \cdot \Sigma_t^T), & m = 4; \end{cases}$$



(а)



(б)

Рис. 2 Прогнозирование MAD с помощью модели ARIMAX: (а) 500 шагов (1 — наблюдения; 2 — прогноз; 3 — измерения); (б) модуль отклонения прогноза от истинного значения

матричная запись для компонент смеси представлена в виде соответствующих векторов

$$\begin{aligned} P_t &= (p_1, \dots, p_{k(t)}); \\ A_t &= (a_1, \dots, a_{k(t)}); \\ \Sigma_t &= (\sigma_1, \dots, \sigma_{k(t)}); \\ D_{A,t} &= \text{diag}\{a_1, \dots, a_{k(t)}\}; \\ D_{\Sigma,t} &= \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_{k(t)}\}, \end{aligned}$$

а обозначение $\text{diag}\{\dots\}$ использовано для записи диагональных матриц с указанными элементами. Использование таких выражений позволяет значительно повысить эффективность вычислений для ряда современных архитектур (см., например, [26]).

Необходимо отметить, что работа в данном направлении может быть развита с точки зрения прогнозирования данных характеристик. На рис. 2, а приведен пример прогнозирования величины среднего абсолютного отклонения (MAD, median absolute deviation) для математического ожидания смеси по известным 8650 наблюдениям (кривая 1) на 500 шагов (кривая 2) с помощью интегрированной модели авторегрессии — скользящего среднего ARIMAХ. Рисунок 2, б демонстрирует величину абсолютного отклонения от истинных наблюдений (кривая 3 на рис. 2, а) для этих 500 шагов. Видно, что в данном случае можно успешно прогнозировать порядка 150 наблюдений, что важно в случае необходимости расчетов в реальном времени (получается больший временной слот на обновление оценок параметров смешанной вероятностной модели).

6 Стохастический подход к верификации времени выполнения программного кода

Важной задачей при разработке программного обеспечения, в том числе критического по скорости, является контроль накладных расходов, возникающих из-за различных причин (в частности, из-за изменения среды окружения, в которой запускается программа). Для стохастической верификации времени выполнения программ в работе [7] было предложено использование техники на основе применения СРС-метода.

Анализ функционирования программы в среде выполнения со случайными факторами может выполняться по следующему алгоритму. Один и тот же программный код многократно запускается для формирования тестовой выборки необходимого размера, которая содержит сведения о времени

его работы. В качестве тестового примера были использованы 10 000 запусков одной из встроенных функций (surf) среды MATLAB, предназначенной для рисования трехмерных поверхностей. С помощью СРС-метода для конечных сдвиг-масштабных смесей нормальных законов были выявлены структурные компоненты неизвестного формирующего процесса, которые затем сопоставлялись с результатами профилирования, в частности для поиска соответствия с конкретными элементами программного кода, на которые в процентном отношении тратилось время, эквивалентное весам соответствующих компонент в аппроксимирующей смеси. Был выявлен участок в программном коде, временные затраты на работу которого составляют около 80% общего времени, еще один блок с 8% затрат и три участка с долей около 3% каждый. Эти данные хорошо согласуются с результатами СРС-метода, с помощью которого была определена главная компонента с большим весом, одна компонента с умеренным весом, а также 2–3 «шумовые» компоненты.

Подобный подход к анализу производительности программного обеспечения был впервые предложен в работе [7]. При этом возможен анализ и исходных данных профилировщика, однако здесь следует учитывать, что они представляют собой строго положительные значения, поэтому может оказаться весьма полезной описанная выше методология искусственного зашумления наблюдений. Разработанная методология может быть использована для оценивания производительности программного кода и соответствующей структуры временных затрат в рамках специализированной онлайн-системы <http://msm-analysis.com>, например для определения эффективности отдельных ее модулей.

7 Анализ реальных данных с помощью разработанных подходов

В статье [2] СРС-метод использован в применении к задаче статистического моделирования закономерностей в явных и скрытых турбулентных тепловых потоках между океаном и атмосферой. Также для повышения эффективности и качества анализа предложена специальная версия EM-алгоритма, основанная на максимизации функции правдоподобия в классе конечных смесей нормальных законов. В качестве исходных данных используются результаты шестичасовых наблюдений в Атлантике за период с 1948 по 2008 г. Показано, что

в эволюции тепловых потоков основная компонента с небольшой дисперсией может сопровождаться стохастически развивающимися и исчезающими компонентами с большой дисперсией, при этом вклад в общую дисперсию ее чисто стохастической диффузионной компоненты превосходит динамическую составляющую. Математическое ожидание заметно колеблется во времени с изменяющейся амплитудой, при этом для каждого периода амплитуда меньше в периоды сезонного увеличения общего среднего значения. Вклад в общую дисперсию чисто стохастической диффузионной компоненты дисперсии больше, чем динамической составляющей. При этом эксцесс распределения максимален во время периода «спокойствия».

В большинстве работ, посвященных изучению метеорологических данных, используемые аналитические модели для наблюдаемых статистических закономерностей в осадках далеко не всегда являются корректными. Например, традиционно считается, что продолжительность «дождливого» периода (число подряд идущих дней, во время которых наблюдались осадки) имеет геометрическое распределение (см., например, статью [27]). Возможно, это предположение основано на традиционной интерпретации геометрического распределения в терминах испытаний Бернулли: распределения числа подряд идущих дней с осадками («успехи») до первого дня без осадков («неудача»). Однако необходимые для такой интерпретации условия (например, независимость испытаний) на практике нарушаются.

В рамках исследований был проведен статистический анализ для определения следующих закономерностей для процесса выпадения осадков:

- распределение длительностей временных интервалов, в которые наблюдались осадки;
- распределение длительностей временных интервалов без осадков;
- распределение объема выпавших осадков;
- распределение интенсивностей осадков, выпавших за дождливый период.

Данный анализ был автоматизирован, в частности для среды MATLAB [11], с помощью специально разработанного для этих целей интерактивного скрипта. Для каждой величины используется аппроксимация различными семействами вероятностных распределений (отрицательное биномиальное, экспоненциальное, гамма-распределение, обобщенное распределение Парето (1)), при этом качество аппроксимации оценивается по критерию хи-квадрат. Стоит отметить, что адекватные модели закономерностей процессов для осадков крайне

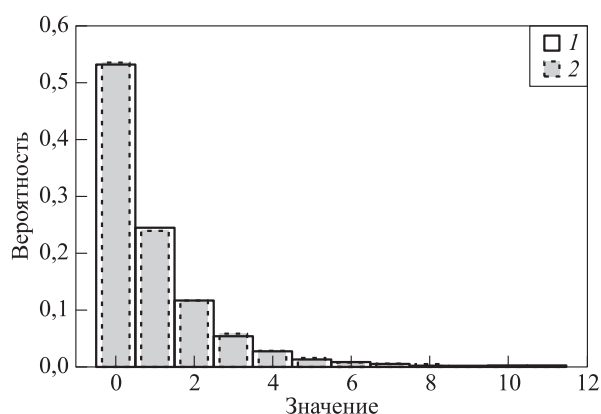


Рис. 3 Пример для распределения длительностей дождливых интервалов: 1 — исходные данные; 2 — отрицательное биномиальное распределение с параметрами $r = 0,876$ и $p = 0,489$

важны для успешного прогнозирования стихийных бедствий (например, наводнений или длительных засушливых периодов).

На рис. 3 приведен пример подгонки распределения длительностей дождливых интервалов с помощью отрицательного биномиального распределения. Стоит отметить как высокое визуальное соответствие, так и результаты сравнения по χ^2 -критерию (p -значение оказалось равно 0,1238).

Исследуемая случайная величина, соответствующая длительности дождливого периода, могла принимать целые значения не меньше единицы, в то время как классическое определение отрицательного биномиального распределения с параметрами $r > 0$ и $p \in (0, 1)$ подразумевает для случайной величины $Y \sim NB(r, p)$ выполнение следующего равенства:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\Gamma(r + k)}{\Gamma(r)\Gamma(k + 1)} p^r (1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Однако легко заметить, что для случайной величины $X = Y + 1$ справедливы соотношения (с учетом условия $X \geq 1$):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X - 1 = k - 1) = \\ &= \frac{\Gamma(r + k - 1)}{\Gamma(r)\Gamma(k - 1 + 1)} p^r (1 - p)^{k-1} = \\ &= \frac{\Gamma(r + k - 1)}{\Gamma(r)\Gamma(k)} p^r (1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Поэтому для проверки соответствующей гипотезы достаточно вычесть из исходных данных единицу (см. гистограммы на рис. 3).

Кроме того, была разработана и реализована методология предсказания осадков на основе исто-

рических паттернов [12]: часовые исторические наблюдения процесса выпадения осадков представляются в виде последовательности нулей (осадков не было) и единиц (наблюдались осадки, независимо от объема). На основе этих данных формируются паттерны, определяющие картину наличия/отсутствия осадков за период времени заданной длины (по дням). Рассчитывается частота (вероятность) появления каждого паттерна по историческим данным, при этом максимальный размер для паттернов задается пользователем в качестве входного параметра модуля. Эти частоты используются для вероятностного прогноза выпадения осадков в рамках заданного периода времени в будущем, включая оценку вероятности выпадения осадков через фиксированное пользователем число дней.

8 Заключение

Многие сложные методы вероятностного анализа реализуются в виде отдельных библиотек или программ для специализированных пакетов или предполагают соответствие специальным требованиям характеристик аппаратного обеспечения. В качестве альтернативы [6] такому подходу предполагается их интеграция в специализированную онлайн-систему <http://msm-analysis.com> для распределенных вычислений. Это может оказаться весьма полезным, например, для исследователей, не имеющих возможности использовать оборудование от NVIDIA. Подобный сервис, предоставляющий широчайшие возможности для моделирования процессов в информационных системах, снабженный веб-интерфейсом и инструментарием для распределенной пользовательской обработки, является новым, не имеет прямых аналогов и способен заинтересовать исследователей различных предметных областей.

В качестве специализированной опции для онлайн-комплекса с точки зрения обеспечения дополнительного уровня безопасности (помимо системы пользовательской авторизации) был разработан тестовый модуль графической идентификации пользователей [28]. Программа получает набор фотографических изображений с камеры и сравнивает с заранее заданным для данного пользователя образцом. Для этого используется гибридный алгоритм на основе методов сравнения контуров и хэш-таблиц. В модуле для обработки изображений использованы функции библиотеки компьютерного зрения с открытым исходным кодом OpenCV. Данная разработка является экспериментальной и на текущем этапе не включена в доступный для пользователей функционал портала.

Разработанные и реализованные программно в рамках проекта методы анализа стохастических данных на основе смешанных вероятностных моделей позволяют повысить эффективность исследования сложных информационных систем, а также развить ранее полученные результаты в ряде важных прикладных областей [29]. Двухлетний план работ по проекту РФФИ 15-37-20851 мол.а.вед «Математические и программные методы построения структурных моделей информационных потоков» выполнен в полном объеме, запланированные цели достигнуты. Развитие и использование предложенных методов может оказаться весьма полезным при проведении исследований в соответствующих областях прикладной математики и компьютерных наук.

Автор выражает признательность доктору физико-математических наук, профессору Виктору Юрьевичу Королеву за полезные обсуждения в рамках совместных исследований проблематики смешанных вероятностных моделей, а также Виктору Кузьмину за плодотворное участие в разработке архитектурно-программных решений для вычислительного портала <http://msm-analysis.com>.

Литература

1. *Королев В. Ю.* Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. 512 с.
2. *Королев В. Ю., Горшенин А. К., Гулев С. К., Беляев К. П.* Статистическое моделирование турбулентных потоков тепла между океаном и атмосферой с помощью метода скользящего разделения конечных нормальных смесей // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 4. С. 3–13.
3. *Gorshenin A. K., Korolev V. Yu.* A methodology for the identification of extremal loading in data flows in information systems // Comm. Com. Inf. Sc., 2016. Vol. 638. P. 94–103.
4. *Gorshenin A. K., Korolev V. Yu.* A noising method for the identification of the stochastic structure of information flows // Comm. Com. Inf. Sc., 2016. Vol. 678. P. 1–11.
5. *Горшенин А. К., Кузьмин В. Ю.* Применение архитектуры CUDA при реализации сеточных алгоритмов для метода скользящего разделения смесей // Системы и средства информатики, 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 60–73.
6. *Горшенин А. К.* Концепция онлайн-комплекса для стохастического моделирования реальных процессов // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 1. С. 72–81.
7. *Gorshenin A., Frenkel S., Korolev V.* On a stochastic approach to a code performance estimation // AIP Conference Proceedings, 2016. Vol. 1738. 220010. 4 p.

8. *Gorshenin A., Kuzmin V.* Online system for the construction of structural models of information flows // 7th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT) Proceedings. – Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015. P. 216–219.
9. *Gorshenin A., Kuzmin V.* On an interface of the online system for a stochastic analysis of the varied information flows // AIP Conference Proceedings, 2016. Vol. 1738. 220009. 4 p.
10. *Korolev V. Yu., Gorshenin A. K., Gulev S. K., Belyaev K. P.* Statistical modeling of air–sea turbulent heat fluxes by finite mixtures of Gaussian distributions // *Comm. Com. Inf. Sc.*, 2015. Vol. 564. P. 152–162.
11. *Горшенин А. К.* Программный модуль анализа статистических характеристик осадков. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016618864 от 09.08.2016.
12. *Горшенин А. К., Королев В. Ю.* Программный модуль предсказания осадков на основе исторических паттернов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016618887 от 09.08.2016.
13. *Leadbetter M. R.* On a basis for “Peaks over Threshold” modeling // *Stat. Probabil. Lett.*, 1991. Vol. 12. No. 4. P. 357–362.
14. *Gnedenko B. V., Korolev V. Yu.* Random summation: Limit theorems and applications. — Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 1996. 288 p.
15. *Balkema A., de Haan L.* Residual life time at great age // *Ann. Probab.*, 1974. Vol. 2. No. 5. P. 792–804.
16. *Pickands J., III.* Statistical inference using extreme order statistics // *Ann. Stat.*, 1975. Vol. 3. No. 1. P. 119–131.
17. *Brey J. J., Prados A.* Stochastic resonance in a one-dimension Ising model // *Phys. Lett. A*, 1996. Vol. 216. P. 240–246.
18. *Kosko B., Mitaim S.* Stochastic resonance in noisy threshold neurons // *Neural Networks*, 2003. Vol. 16. No. 5. P. 755–761.
19. *Osoba O., Mitaim S., Kosko B.* The noisy Expectation-Maximization algorithm // *Fluct. Noise Lett.*, 2013. Vol. 12. No. 3. 1350012. 30 p.
20. *Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Об усреднении округленных данных // *Информатика и её применения*, 2015. Т. 9. Вып. 4. С. 106–109.
21. *Kuzmin V. Yu., Gorshenin A. K., Ostroumov D. S., Uglitskaya M. G.* Application of GPU and parallel programming on grid methods // *AIP Conference Proceedings*, 2015. Vol. 1648. 250006. 4 p.
22. *Gorshenin A., Korolev V., Kuzmin V., Zeifman A.* Coordinate-wise versions of the grid method for the analysis of intensities of non-stationary information flows by moving separation of mixtures of gamma-distribution // *27th European Conference on Modelling and Simulation Proceedings*. — Dudweiler, Germany: Digitaldruck Pirrot GmbH, 2013. P. 565–568.
23. *Горшенин А. К.* Устойчивость масштабных смесей нормальных законов относительно смешивающего распределения // *Системы и средства информатики*, 2012. Т. 22. № 1. С. 136–148.
24. *Горшенин А. К.* Об устойчивости сдвиговых смесей нормальных законов по отношению к изменениям смешивающего распределения // *Информатика и её применения*, 2012. Т. 6. Вып. 2. С. 22–28.
25. *Королев В., Корчагин А., Горшенин А.* Некоторые свойства дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных законов // *Статистические методы оценивания и проверки гипотез*, 2015. Вып. 26. С. 134–153.
26. *Gorshenin A. K.* On implementation of EM-type algorithms in the stochastic models for a matrix computing on GPU // *AIP Conference Proceedings*, 2015. Vol. 1648. 250008. 4 p.
27. *Zolina O., Simmer C., Belyaev K., Gulev S., Koltermann P.* Changes in the duration of European wet and dry spells during the last 60 years // *J. Climate*, 2013. Vol. 26. No. 6. P. 2022–2047.
28. *Горшенин А. К., Кагерманов Ш. Ш.* Модуль графической идентификации пользователей веб-сервиса. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016661021 от 28.09.2016.
29. *Batanov G. M., Gorshenin A. K., Korolev V. Yu., Malakhov D. V., Skvortsova N. N.* The evolution of probability characteristics of low-frequency plasma turbulence // *Math. Models Computer Simulations*, 2012. Vol. 4. Iss. 1. P. 10–25.

Поступила в редакцию 15.01.17

ON SOME MATHEMATICAL AND PROGRAMMING METHODS FOR CONSTRUCTION OF STRUCTURAL MODELS OF INFORMATION FLOWS

A. K. Gorshenin

Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilova Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The flows of events in the modern information systems are not regular; so, the methods of analysis based on the classical theorems that are correct only under certain regularity conditions can lead to false conclusions including underestimation of risks of extreme events. The key problem of practical modeling and analysis of nonstationary information flows is selection of statistical methods for estimation of the unknown model parameters. For these purposes, the so-called method of moving the separation of mixtures based on a special decomposition of the original sample into subsamples (windows) and data analysis for each window within the framework of the mixed probability models is traditionally used by the members of Prof. V. Yu. Korolev’s Scientific School. The paper describes the methods of stochastic data analysis based on the mixed probability models that can enhance the effectiveness of complex information systems research. The development and application of the proposed methods can be useful for the appropriate areas of applied mathematics and computer sciences.

Keywords: information system; mixed probability models; moving separation of mixtures; statistical data analysis; extremal values; noisy data; threshold; Peak Over Threshold; Pickands – Balkema – de Haan theorem; Rényi theorem; online software; matrix computing

DOI: 10.14357/19922264170105

Acknowledgments

The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 15-37-20851) and the RAS Presidium Program No. I.33P (project 0063-2016-0015).

References

1. Korolev, V. Yu. 2011. *Veroyatnostno-statisticheskie metody dekompozitsii volatil’nosti khaoticheskikh protsessov* [Probabilistic and statistical methods of decomposition of volatility of chaotic processes]. Moscow: Moscow University Publishing House. 512 p.
2. Korolev, V. Yu., A. K. Gorshenin, S. K. Gulev, and K. P. Belyaev. 2015. Statisticheskoe modelirovanie turbulentnykh potokov tepla mezhdru okeanom i atmosferoy s pomoshch’yu metoda skol’zyashchego razdeleniya konechnykh normal’nykh smesey [Statistical modeling of air–sea turbulent heat fluxes by the method of moving separation of finite normal mixtures]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(4):3–13.
3. Gorshenin, A. K., and V. Yu. Korolev. 2016. A methodology for the identification of extremal loading in data flows in information systems. *Comm. Com. Inf. Sc.* 638:94–103.
4. Gorshenin, A. K., and V. Yu. Korolev. 2016. A noising method for the identification of the stochastic structure of information flows. *Comm. Com. Inf. Sc.* 678:1–11.
5. Gorshenin, A. K., and V. Yu. Kuzmin. 2016. Primenenie arkhitektury CUDA pri realizatsii setochnykh algoritmov dlya metoda skol’zyashchego razdeleniya smesey [Application of the CUDA architecture for implementation of grid-based algorithms for the method of moving separation of mixtures]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 26(4):60–73.
6. Gorshenin, A. K. 2016. Kontseptsiya onlayn-kompleksa dlya stokhasticheskogo modelirovaniya real’nykh protsessov [Concept of online service for stochastic modeling of real processes]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(1):72–81.
7. Gorshenin, A., S. Frenkel, and V. Korolev. 2016. On a stochastic approach to a code performance estimation. *AIP Conference Proceedings*. 1738:220010. 4 p.
8. Gorshenin, A. K., and V. Kuzmin. 2015. Online system for the construction of structural models of information flows. *7th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT) Proceedings*. Piscataway, NJ. 216–219.
9. Gorshenin, A. K., and V. Kuzmin. 2015. On an interface of the online system for a stochastic analysis of the varied information flows. *AIP Conference Proceedings*. 1738:220010. 4 p.
10. Korolev, V. Yu., A. K. Gorshenin, S. K. Gulev, and K. P. Belyaev. 2015. Statistical modeling of air–sea turbu-

- lent heat fluxes by finite mixtures of Gaussian distributions. *Comm. Com. Inf. Sc.* 564:152–162.
11. Gorshenin, A. K. 2016. Programmnyy modul' analiza statisticheskikh kharakteristik osadkov [The software module to analyze the statistical characteristics of precipitation]. Certificate RF of State Registration of Computer Programs No. 2016618864.
 12. Gorshenin, A. K., and V. Yu. Korolev. 2016. Programmnyy modul' predskazaniya osadkov na osnove istoricheskikh patternov [The software module for precipitation prediction based on historical patterns]. Certificate RF of State Registration of Computer Programs No. 2016618887.
 13. Leadbetter, M. R. 1991. On a basis for “Peaks over Threshold” modeling. *Stat. Probabil. Lett.* 12(4):357–362.
 14. Gnedenko, B. V., and V. Yu. Korolev. 1996. *Random summation: Limit theorems and applications*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996. 288 p.
 15. Balkema, A., and L. de Haan. 1974. Residual life time at great age. *Ann. Probab.* 2(5):792–804.
 16. Pickands, J., III. 1975. Statistical inference using extreme order statistics. *Ann. Stat.* 3(1):119–131.
 17. Brey, J. J., and A. Prados. 1996. Stochastic resonance in a one-dimension Ising model. *Phys. Lett. A* 216:240–246.
 18. Kosko, B., and S. Mitaim. 2003. Stochastic resonance in noisy threshold neurons. *Neural Networks* 16(5):755–761.
 19. Osoba, O., S. Mitaim, and B. Kosko. 2013. The noisy Expectation-Maximization algorithm. *Fluct. Noise Lett.* 12(3):1350012. 30 p.
 20. Ushakov, V. G., and N. G. Ushakov. 2015. Ob usrednenii okruglennykh dannyykh [On averaging of rounded data] *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(4):106–109.
 21. Kuzmin, V. Yu., A. K. Gorshenin, D. S. Ostroumov, and M. G. Uglitskaya. 2015. Application of GPU and parallel programming on grid methods. *AIP Conference Proceedings*. 1648:250006. 4 p.
 22. Gorshenin, A., V. Korolev, V. Kuzmin, and A. Zeifman. 2013. Coordinate-wise versions of the grid method for the analysis of intensities of non-stationary information flows by moving separation of mixtures of gamma-distribution. *27th European Conference on Modelling and Simulation Proceedings*. Dudweiler, Germany. 565–568.
 23. Gorshenin, A. K. 2012. Ustoychivost' masshtabnykh smesey normal'nykh zakonov otnositel'no smeshivayushchego raspredeleniya [Stability of normal scale mixtures with respect to variations in mixing distribution]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 22(1):136–148.
 24. Gorshenin, A. K. 2012. Ob ustoychivosti sdvigoverykh smesey normal'nykh zakonov po otnosheniyu k izmeneniyam smeshivayushchego raspredeleniya [On stability of normal location mixtures with respect to variations in mixing distribution]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 6(2):22–28.
 25. Korolev, V. Yu., A. Yu. Korchagin, and A. K. Gorshenin. 2015. Nekotorye svoystva dispersionno-sdvigoverykh smesey normal'nykh zakonov [Some properties of variance-mean normal mixtures]. *Statisticheskie metody otsenivaniya i proverki gipotez* [Statistical Methods of Estimation and Hypothesis Testing] 26:134–153.
 26. Gorshenin, A. K. 2015. On implementation of EM-type algorithms in the stochastic models for a matrix computing on GPU. *AIP Conference Proceedings*. 1648:250008. 4 p.
 27. Zolina, O., C. Simmer, K. Belyaev, S. Gulev, and P. Koltermann. 2013. Changes in the duration of European wet and dry spells during the last 60 years. *J. Climate* 26(6):2022–2047.
 28. Gorshenin, A. K., and Sh. Sh. Kagermanov. 2016. Modul' graficheskoy identifikatsii pol'zovateley veb-servisa [The module for web service user's graphical identification]. Certificate RF of State Registration Of Computer Programs No. 2016661021.
 29. Batanov, G. M., A. K. Gorshenin, V. Yu. Korolev, D. V. Malakhov, and N. N. Skvortsova. 2012. The evolution of probability characteristics of low-frequency plasma turbulence. *Math. Models Computer Simulations* 4(1): 10–25.

Received January 15, 2017

Contributor

Gorshenin Andrey K. (b. 1986) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilova Str., Moscow 119333, Russian Federation; agorshenin@frccsc.ru

МНОГОУРОВНЕВЫЕ МОДЕЛИ РЕШЕНИЯ МНОГОКЛАССОВЫХ ЗАДАЧ РАСПОЗНАВАНИЯ*

А. А. Докукин¹, В. В. Рязанов², О. В. Шут³

Аннотация: Проблема поиска набора бинарных подзадач для многоклассовых задач распознавания рассмотрена с точки зрения алгебраического и логического подходов к распознаванию. При этом теоретически исследованы границы применимости указанных подходов. Так, рассмотрена связь корректности алгоритмов первого и второго уровня, получено достаточное условие. Кроме того, показана правомерность использования метода объектных резолюций для построения новых объектов на основе информации, заданной прецедентным способом. В качестве прикладных результатов предлагаются две модификации метода ЕСОС (error-correcting output codes — коды, исправляющие ошибки). Первая заключается в оптимизации набора бинарных подзадач с учетом качества решающих их алгоритмов. Вторая представляет собой развитие метода нечеткой объектной резолюции, где в качестве кодового описания класса используется мультимножество кодов обучающих объектов. Предложенные модификации позволяют в различных условиях улучшать качество исходного метода, что продемонстрировано с помощью модельных и прикладных задач.

Ключевые слова: распознавание; многоклассовая задача; ЕСОС; многоуровневый метод; корректность; алгебраический подход; логический подход; кодовое описание класса

DOI: 10.14357/19922264170106

1 Введение

В настоящей статье рассматривается задача распознавания со многими классами. Будем использовать стандартную постановку задачи из [1].

Определение 1. Назовем задачей распознавания Z следующую задачу. Пусть задана обучающая выборка $\tilde{S}_t(Z) = \{S_1, \dots, S_m\}$, описанная векторами вещественных признаков, $S_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$. Выборка разбита на l классов K_1, \dots, K_l . Классификация объектов обучающей выборки задается информационными векторами $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{il})$, где α_{ij} — значение предиката « $S_i \in K_j$ ». Необходимо построить алгоритм A , позволяющий вычислить классификацию нового объекта S .

Если классы не пересекаются, то классификацию объектов можно задавать одним числом $\alpha_i \in \{1, \dots, l\}$, и в дальнейшем будет использоваться именно такая нотация.

Многоклассовой задачей распознавания будем называть задачу с $l > 2$. Особенностью такой постановки является тот факт, что не все эффективные методы распознавания способны непосредственно решать многоклассовые задачи. В отличие от, например, метода ближайших соседей или алго-

ритма вычисления оценок [1, 2], такие методы, как метод опорных векторов [3] или статистически взвешенные синдромы [4], приходится применять в несколько этапов. Сначала решается набор дихотомических подзадач, после чего их результаты объединяются и интерпретируются в терминах исходного набора классов.

Некоторые из таких многоуровневых подходов достаточно очевидны. Это так называемые «один против всех» (one-vs-all) [3] и «каждый с каждым» (one-vs-one) [5]. Применяются и более общие подходы. Так, в методе ЕСОС [6] используются произвольные разбиения множества классов на пары метаклассов. Каждый класс при этом получает двоичный код, как и каждый распознаваемый объект. Решение о классификации принимается на основании близости кодов. Этот метод был, в свою очередь, обобщен в [7]. Отличие заключается в том, что при построении бинарных задач допускается исключение из рассмотрения исходных классов. Таким образом, коды классов становятся троичными. Это важное дополнение позволяет включить схему «каждый с каждым» в общий метод.

В настоящей работе предпринята попытка предложить свой метод построения набора бинарных подзадач и обосновать его. Первые главы посвяще-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-51-04028) и БРФФИ (проект Ф15PM-037).

¹ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, dalex@ccas.ru

² Московский физико-технический институт (государственный университет), vasyarv@mail.ru

³ Белорусский государственный университет, olgashut@tut.by

ны теоретическому исследованию вопроса с точки зрения алгебраического и логического подходов к распознаванию. Затем предлагаются прикладные методы и проводится тестирование.

2 Корректность многоуровневого алгоритма

Вопрос корректности является центральным в алгебраической теории распознавания, созданной академиком Ю. И. Журавлевым в 1970-х гг. [1, 2]. Под корректностью понимается способность алгоритма безошибочно распознать заданную контрольную выборку. Этому вопросу посвящено большое количество теоретических исследований. Так, сам Ю. И. Журавлев сформулировал теорему существования корректного алгоритма для задачи распознавания в алгебраическом замыкании семейства алгоритмов вычисления оценок (АВО) [1, 2] и оценил его сложность, т. е. степень корректного полинома. Эта оценка постепенно уточнялась его учениками, и в итоге точная оценка была получена А. Г. Дьяконовым [8]. Таким образом, вопрос корректности в одноуровневых схемах можно считать закрытым, как минимум, для семейства алгоритмов вычисления оценок. Однако представляет интерес корректность многоуровневых схем, рассматриваемых в данной работе. Перейдем к рассмотрению связи корректности алгоритмов на разных уровнях и для начала запишем несколько формальных определений.

Определение 2. Пусть задана задача распознавания Z и контрольная выборка объектов $\tilde{S}_r(Z) = \{S^1, \dots, S^q\}$ с известной классификацией $\alpha^t \in \{1, \dots, l\}$, т. е. выполняется предикат « $S^t \in K_{\alpha^t}$ », $t = 1, \dots, q$. Будем называть алгоритм A корректным для задачи Z и контрольной выборки $\tilde{S}_r(Z)$, если $A(S^t) = \alpha^t$ для всех $t = 1, \dots, q$. Здесь $A(S^t) \in \{1, \dots, l, \Delta\}$ — ответ алгоритма о классификации объекта S^t , который соответствует номеру класса или отказу от распознавания — Δ .

Определение 3. Пусть задана задача распознавания Z и два непересекающихся подмножества множества классов $K^0 \subset \{K_1, \dots, K_l\}$, $K^1 \subset \{K_1, \dots, K_l\}$, $K^0 \cap K^1 = \emptyset$. Назовем бинарной (дихотомической) подзадачей Z задачу распознавания Z' следующего вида: $\tilde{S}_t(Z') = \tilde{S}_t(Z) \cap (K^0 \cup K^1)$, $\tilde{S}_r(Z') = \tilde{S}_r(Z) \cap (K^0 \cup K^1)$, классы соответствуют метаклассам K^0 и K^1 . Будем говорить, что класс K_i активен в бинарной подзадаче Z' , если $K_i \in (K^0 \cup K^1)$. Бинарную подзадачу, в которой все классы активны, будем называть полной. Число

активных классов будем называть рангом бинарной подзадачи $r(Z_i)$.

Основным условием теоремы существования корректного полинома над алгоритмами вычисления оценок [1, 2] является попарная неизоморфность контрольных объектов, т. е. наличие для любой пары контрольных объектов такого обучающего, что хотя бы по одному признаку расстояния от этих контрольных до него не равны: $\forall S^i, S^j \in \tilde{S}_r(Z), \exists S_k \in \tilde{S}_t(Z), p \in \{1, \dots, n\}$, такие что $|a_{kp} - a_p^i| \neq |a_{kp} - a_p^j|$. Оно и попарное неравенство классов являются достаточным условием существования корректного алгоритма в алгебраическом замыкании семейства АВО [9]. С точки зрения теоремы существования рассматриваемая связь достаточно очевидна. Несложно показать, что выполнение достаточных условий для исходной многоклассовой задачи не гарантирует их выполнения для бинарных подзадач. Подробно этот вопрос и другие доказательства рассмотрены в [10].

При этом также достаточно очевидно, что в обратную сторону следствие выполняется. Если набор бинарных подзадач содержит все контрольные объекты и для них выполняются достаточные условия, то для исходной многоклассовой задачи эти условия также выполняются и корректный алгоритм существует. Однако этот факт сам по себе не дает дополнительных конструктивных средств построения такого корректного алгоритма, кроме уже имеющихся в теореме существования. Исходное же предположение состоит в том, что двухуровневая схема позволит упростить такое построение. Поэтому перейдем к рассмотрению методов построения корректного многоклассового алгоритма на базе корректных двухклассовых слагаемых.

Рассмотрим следующую общую схему двухуровневого распознавания.

Определение 4. Пусть задана задача распознавания Z и набор из W ее бинарных подзадач Z_1, \dots, Z_W . Назовем алгоритмом первого уровня алгоритмы A_i , решающие соответственно подзадачи Z_i , $i = 1, \dots, W$. Назовем алгоритмом второго уровня алгоритм A , решающий задачу Z и использующий для этого выходы алгоритмов первого уровня.

При этом будем называть вектор $\gamma(K_i)$, где

$$\gamma(K_i)_j = \begin{cases} 1, & \text{если } K_i \in K_j^0; \\ -1, & \text{если } K_i \in K_j^1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

кодом класса K_i , $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, W$. Рангом класса $r(K_i)$ будем называть число бинарных подзадач, в которых он активен, или $|\{\gamma(K_i)_j \mid \gamma(K_i)_j \neq 0, j = 1, \dots, W\}|$.

Аналогично определим код объекта $\gamma(S^t)$:

$$\gamma(S^t)_j = \begin{cases} 1, & \text{если } K_{A_j(S^t)} \in K_j^0; \\ -1, & \text{если } K_{A_j(S^t)} \in K_j^1; \\ 0, & \text{если произошел отказ} \\ & \text{от распознавания,} \end{cases}$$

$$t = 1, \dots, q, j = 1, \dots, W.$$

Рассмотрим многоклассовую задачу распознавания Z и набор бинарных подзадач Z_1, \dots, Z_W . Очевидно, если коды классов на данном наборе попарно различаются и бинарные подзадачи полны, то алгоритм, построенный по схеме ЕСОС, будет корректен.

Сложность представляют неполные бинарные подзадачи, поскольку объекты игнорируемых классов будут получать произвольные оценки. При этом если допустить в наборе бинарных подзадач полные, то этот недостаток также легко исправить за счет полных вспомогательных задач.

Таким образом, наибольшую сложность представляет случай, когда все бинарные подзадачи неполны. К тому же он представляет и наибольший интерес, поскольку позволяет упростить бинарные подзадачи за счет сокращения количества объектов. Перейдем к его рассмотрению и для определенности будем считать, что ранг всех бинарных подзадач одинаков.

Определение 5. Назовем расстоянием между двумя классами $d(K_i, K_j)$ число бинарных подзадач, в которых они оба активны и принадлежат различным метаклассам:

$$d(K_i, K_j) = |\{t \in \{1, \dots, W\} \mid \gamma(K_i)_t \neq \gamma(K_j)_t, \gamma(K_i)_t \neq 0, \gamma(K_j)_t \neq 0\}|.$$

Сформулируем достаточное условие корректности алгоритма второго уровня. Пусть задана задача распознавания Z и набор бинарных подзадач Z_1, \dots, Z_W , ранг всех бинарных подзадач одинаков и равен $r < l$. Пусть также алгоритмы первого уровня A_1, \dots, A_W являются корректными на соответствующих бинарных подзадачах.

Теорема 1. Если для любых двух классов разность их рангов меньше расстояния между ними, т. е. выполнено неравенство:

$$r(K_j) - r(K_i) < d(K_j, K_i), \forall i, j = 1, \dots, l, i \neq j,$$

то алгоритм второго уровня A является корректным.

Заметим, что выполнение условия теоремы возможно только при положительном расстоянии между любыми двумя классами.

Обратное утверждение выполняется только для случая трех классов. Действительно, есть следующие типы наборов бинарных подзадач, которые не удовлетворяют условию утверждения: $\{\{1\}-\{2\}\}$, $\{\{1\}-\{2\}, \{1\}-\{3\}\}$ и $\{\{1\}-\{2\}, \{1\}-\{2, 3\}\}$. Легко убедиться, что во всех случаях алгоритм второго уровня будет некорректным.

Для случая четырех классов можно привести контрпример. Возьмем следующие обучающие объекты: $S_1 = (-2, 2) \in K_1$, $S_2 = (2, 2) \in K_2$, $S_3 = (-2, -2) \in K_3$ и $S_4 = (2, -2) \in K_4$. Контрольные построим похожим образом: $S^1 = (-1, 1) \in K_1$, $S^2 = (1, 1) \in K_2$, $S^3 = (-1, -1) \in K_3$ и $S^4 = (1, -1) \in K_4$. В качестве набора бинарных подзадач возьмем схему «каждый с каждым» и исключим пару $\{\{1\}-\{4\}\}$, чтобы нарушить достаточное условие. При этом достаточно несложно построить корректный алгоритм второго уровня.

Рассмотрим теперь случай, когда алгоритмы первого уровня некорректны. Если ошибок незначительное количество, то можно модифицировать теорему 1 и потребовать большего расстояния между классами, чтобы их исправить. Кроме того, в достаточном условии фигурирует верхняя оценка голосов за чужие классы, что может позволить получить корректный результирующий алгоритм в реальной ситуации при более равномерном распределении ошибок между классами.

Если же ошибок значительное количество, то возникают следующие соображения. Во-первых, теряется смысл использования теоремы 1 и появляется необходимость рассматривать уже не коды классов, а коды отдельных объектов, чтобы делать выводы о корректности. Во-вторых, теряется смысл рассмотрения неполных подзадач. Учитывая эти соображения, рассмотрим предельную, в некотором смысле, ситуацию.

Пусть дана задача распознавания Z и набор полных бинарных подзадач Z_1, \dots, Z_W . Пусть также дан набор алгоритмов первого уровня A_1, \dots, A_W , решающих эти подзадачи. Для простоты рассмотрим случай, когда эти алгоритмы не дают отказов на объектах задачи Z . Построим следующую задачу Z' . Число признаков — W , при этом все признаки бинарные. Обучающую выборку составляют коды классов. Объектами контрольной выборки являются коды объектов исходной задачи $S_r(Z)$, полученные алгоритмами первого уровня. При этом в рамках одного класса повторяющиеся объекты исключаются. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть в обучающей выборке $\tilde{S}_t(Z')$ попарно различны классы, тогда для существования алгоритма A' , корректного для задачи Z' , необходимо

и достаточно попарное различие объектов контрольной выборки $\tilde{S}_r(Z')$.

Таким образом, ошибки в результирующем алгоритме возникают, если невозможно предложить такую бинарную подзадачу, в которой два объекта из разных классов относились бы к разным метаклассам. Объекты, неправильно классифицируемые по этой причине, логично считать выбросами и исключать из рассмотрения.

Очевидно, такой подход обладает всеми недостатками теоремы существования. Хотя решение и строится конструктивно, оно громоздко, а получаемый алгоритм склонен к переобучению. Прикладной метод двухуровневого распознавания, основанный на оптимизации набора бинарных подзадач, будет предложен в разд. 4 и испытан на практике.

3 Метод резолюций

В задачах распознавания образов часто используются два способа представления информации: логический, представляющий собой описание объектов с использованием логических формул или правил, и прецедентный, заключающийся в непосредственном перечислении объектов и классов, которым принадлежат эти объекты. Первый из них применяется в продукционных экспертных системах [11], второй характерен для большинства задач распознавания с обучением. Для решения задач, информация в которых представлена логическим или прецедентным способом, соответственно используются метод резолюций и многочисленные алгоритмы распознавания, примером которых может служить семейство алгоритмов, описанное в [12]. Существуют задачи, в которых используются оба способа одновременно, — например, это задача медицинской диагностики [13]. В данной работе предлагается использовать аналогичный подход для построения многоуровневых схем распознавания. При этом на первом уровне могут использоваться любые алгоритмы, а объединение их результатов будет производиться в рамках логического подхода.

Переформулируем задачу распознавания образов Z в общей постановке [13] с использованием принятых в логическом подходе обозначений.

На множестве объектов X произвольной природы заданы подмножества X_1, \dots, X_l , называемые классами. Задана также начальная информация I_0 о классах X_1, \dots, X_l . Требуется указать алгоритм A , определенный на всем множестве X , вычисляющий на основании информации I_0 для произвольного объекта $x \in X$ результат, который может быть

интерпретирован в терминах принадлежности x к классам X_1, \dots, X_l .

Введем систему предикатов, характеризующую принадлежность произвольного объекта $x \in X$ классам X_1, \dots, X_l :

$$P_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_i; \\ 0, & x \notin X_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, l.$$

Информацию I_0 представим в виде:

$$I_0 = \{(x, P(x)) | x \in X, P(x) = (P_1(x), \dots, P_l(x))\},$$

где $P(x)$ называется информационным вектором, который сопоставляется объектам $x \in X$ [1]. Для каждого такого объекта, входящего в описание I_0 , информационный вектор считается известным. В распознавании образов множество таких объектов называется выборкой. Обычно ее принято разделять на две части [1]. Первая часть называется обучающей выборкой и используется для определения параметров или настройки процесса обучения алгоритмов распознавания. Вторая часть называется контрольной выборкой и используется для оценки качества работы алгоритмов. Обозначим эти части через X^0 и X^q соответственно. К введенным выборкам чаще всего предъявляется требование $X^0 \cap X^q = \emptyset$.

Будем говорить, что любой алгоритм A , решающий задачу Z , строит классификационный вектор $P^A(x) = (P_1^A(x), \dots, P_l^A(x))$, где $P_i^A(x) \in \{0, 1\}$. Если $P_i^A(x) = 1$, то результат алгоритма интерпретируется как $x \in X_i$; если $P_i^A(x) = 0$, то $x \notin X_i$.

Для оценки качества работы алгоритма A вводится функционал качества $\Phi_A(X)$, значения которого легко интерпретировались бы в терминах совпадения или близости $P_i(x)$ и $P_i^A(x)$. В общем случае чем ближе значение $\Phi_A(X^q)$ к 1, тем меньше ошибок допускает алгоритм A . Поэтому из нескольких алгоритмов предпочтительным считается тот, который имеет наибольшее значение функционала Φ_A . В предельном случае, если $\Phi_A(X^q) = 1$, то алгоритм A решает задачу Z безошибочно. Такие алгоритмы называются корректными в алгебраической теории распознавания (см. определение 2).

Введем следующие определения и обозначения. Пусть $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ — множество всех признаков в предметной области задачи Z , где $n < \infty$; D_j — множество значений признака $s_j \in S$. Не нарушая общности, можно считать, что $D_j = \{0, 1, \dots, |D_j| - 1\}$. Обозначим

$$D = \left\{ 0, 1, \dots, \max_j \{|D_j| - 1\} \right\} = \{0, 1, \dots, k - 1\}.$$

В дальнейшем предполагается, что все признаки принимают значения из множества D , где $k \neq 1$. Объектом назовем отображение

$$p(s_1, \dots, s_n) = (D_1^p, \dots, D_n^p),$$

где $D_j^p \subset D$ — множество значений признака $s_j \in S$ объекта p , причем $D_j^p \neq \emptyset$. Объекты называются равными, если $\forall j D_j^p = D_j^q$.

Если $D_j^p = \emptyset$, то считается, что p не обладает признаком s_j и потому не рассматривается в рамках задачи Z . В общем случае для произвольного признака существует $|\rho(D)| = 2^k$ возможных комбинаций его допустимых значений, где $\rho(D)$ — множество всех подмножеств D . Поэтому будем считать, что $X = (\rho(D))^n$.

Для удобства рассуждений назовем множество объектов набором.

В [10] показано существование кодировки, использование которой правомерно для описания как нормализованных, так и ненормализованных объектов, откуда следует эквивалентность прецедентного и логического способов представления информации в задаче Z .

Опишем применение метода резолюций для решения задачи Z . Рассмотрим метод резолюций, исходными данными для которого являются не логические формулы, а объекты из X . Этот модифицированный метод назовем методом объектных резолюций.

Объект r называется объектной резольвентой, построенной по объектам p и q , если значения признаков r удовлетворяют следующему условию:

$$D_j^r = \begin{cases} D_j^p \cup D_j^q, & j = h; \\ D_j^p \cap D_j^q, & j \neq h, \end{cases}$$

где h — номер произвольного признака $s_h \in S$.

Операцию построения объектной резольвенты обозначим $r = Or_h(p, q)$.

Также в [10] показана правомерность использования метода объектных резолюций для построения новых объектов на основе информации, заданной прецедентным способом.

Рассмотрим алгоритм использования метода объектных резолюций для решения задачи Z . Зафиксируем номер i класса X_i и определим, принадлежит ли объект x этому классу. Пусть $X_i^0 = X^0 \cap X_i$.

Алгоритм объектных резолюций A_1 :

Шаг 1. Введем множество $Y_i = X_i^0$.

Шаг 2. Если $x \in Y_i$, то переходим к шагу 6, иначе — к шагу 3.

Шаг 3. Выбираем из Y_i нерассмотренную тройку (p, q, h) , где p и q — объекты; h — номер признака. Если все такие тройки уже рассматривались, то переходим к шагу 6.

Шаг 4. Вычисляем $r = Or_h(p, q)$. Если $\exists j D_j^r = \emptyset$, возвращаемся к шагу 3.

Шаг 5. Если $r \notin Y_i$, то $Y_i := Y_i \cup \{r\}$. Возвращаемся к шагу 2.

Шаг 6. Алгоритм завершает работу.

Алгоритм A_1 можно применять как для прямого, так и для обратного вывода. В последнем случае на шаге 1 вводится множество $Y_i = X_i^0 \cup \{x\}$, а в качестве объекта x рассматривается несуществующий объект o : $\exists j D_j^o = \emptyset$. Обратный вывод может использоваться, например, в случае, когда число классов l равно 2. В зависимости от типа вывода результат работы алгоритма A_1 можно интерпретировать следующим образом.

1. Прямой вывод: если алгоритм закончил работу из-за получения объекта x , это значит, что набор $\text{Norm}(X_i^0)$ содержит объект x . Поэтому $x \in X_i$.
2. Обратный вывод: если алгоритм закончил работу из-за получения объекта o , это значит, что $\text{Norm}(Y_i) = X$, т.е. Y_i потенциально содержит все объекты из X . Поэтому $x \notin X_i$.

Если ни один из этих результатов не получен, то с помощью данного алгоритма нельзя сделать никаких выводов о принадлежности x классу X_i .

Приведем результаты алгоритма A_1 к численному виду. По результатам работы алгоритма построим классификационный вектор

$$A_1(x) = (P_1^{A_1}(x), \dots, P_l^{A_1}(x)),$$

где

$$P_i^{A_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_i; \\ 0, & x \notin X_i. \end{cases}$$

Решение о принадлежности x классу X_i принимается алгоритмом A_1 .

Опишем применение метода резолюций на втором уровне многоуровневой схемы. Для этого также построим новую задачу с W бинарными признаками, где объектами являются коды исходных объектов, полученные алгоритмами первого уровня. Только, в отличие от разд. 2, не будем исключать повторы — это позволит в дальнейшем оценить степень вхождения объекта в класс с помощью метода нечеткой резолюции, т.е. метода резолюций для решения задачи Z в случае, когда информация I_0 задана с помощью функций нечеткой логики.

Пусть E — произвольное множество. Введем характеристическую функцию $\mu_E(x)$, значения которой описывают степень принадлежности элемента x множеству E : $\mu_E(x) \in [0, 1]$.

Пусть E_1 и E_2 — нечеткие подмножества E . Рассмотрим следующие операции нечеткой логики [14]:

(1) дополнение:

$$\mu_{\overline{E_1}}(x) = 1 - \mu_{E_1}(x);$$

(2) пересечение:

$$\mu_{E_1 \cap E_2}(x) = \min\{\mu_{E_1}(x), \mu_{E_2}(x)\};$$

(3) объединение:

$$\mu_{E_1 \cup E_2}(x) = \max\{\mu_{E_1}(x), \mu_{E_2}(x)\}.$$

Припишем каждому набору $V \subset X$ характеристическую функцию $\mu_V(p)$, значение которой описывает степень принадлежности объекта p набору V . Приведем пример такой функции. Пусть объекты могут повторяться в обучающей выборке X^0 . Обозначим через N^p общее количество вхождений объекта p в X^0 , а через N_i^p — число вхождений p в X_i^0 . Таким образом, $N^p = \sum_{i=1}^l N_i^p$. Определим $\mu_{X_i}(p)$ следующим образом:

$$\mu_{X_i}(p) = \frac{N_i^p}{N^p}.$$

Тогда $\mu_{X_i}(p) \in [0, 1]$, что и требуется.

Поскольку алгебра нормализованных объектов G^{norm} изоморфна алгебре логических функций L_k , то операции нечеткой логики справедливы и для наборов:

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{V}}(p) &= 1 - \mu_V(p); \\ \mu_{V \cap W}(p) &= \min\{\mu_V(p), \mu_W(p)\}; \\ \mu_{V \cup W}(p) &= \max\{\mu_V(p), \mu_W(p)\}. \end{aligned}$$

Здесь $V \subset X$ и $W \subset X$ — произвольные наборы.

Для нечеткой логики также существуют аналогии метода резолюций. Один из примеров такого аналога приведен в [15]. Рассмотрим обобщение метода объектных резолюций для случая нечеткого описания объектов.

Теорема 3. Пусть заданы наборы x_1 и x_2 . Построим $r = Or_h(x_1, x_2)$. Тогда существует такое значение $t \in [0, 1]$, что $\mu_{x_1}(p) > t$, $\mu_{x_2}(p) > t$ и $\mu_r(p) > t$.

Несложно видеть, что утверждение данной теоремы можно обобщить для произвольного числа объектов. Таким образом, для любых набора объектов V и класса X_i существует такое $t \in [0, 1]$, которое можно принять в качестве порогового значения, интерпретируемого в терминах принадлежности заданному классу:

$$\forall p \in V (p \in X_i \Leftrightarrow \mu_{X_i}(p) > t).$$

В [15] показано, что при выполнении условий $\mu_E(x_1) > 0,5$ и $\mu_E(x_2) > 0,5$ справедливо следующее утверждение:

$$\mu_E(r) > \mu_E(x_1 \wedge x_2),$$

а следовательно, $\mu_E(r) > 0,5$. Поэтому пороговое значение $t = 0,5$ особенно удобно для применения на практике.

Опишем алгоритм использования нечеткого метода объектных резолюций для решения задачи Z . Пусть задано пороговое значение $t \in [0, 1]$.

Алгоритм A_1^f :

Шаг 1. Применим алгоритм A_1 к X . Пусть Y_i — набор объектов, которые по результатам выполнения алгоритма A_1 считаются принадлежащими классу X_i , $i = 1, \dots, l$, т. е. $\forall p \in Y_i, \mu_{X_i}(p) > t$.

Шаг 2. Для каждого объекта $p \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^l Y_i\right)$ выполним шаги 3–4.

Шаг 3. Для каждого класса X_i вычислим $\mu_{X_i}(p)$.

Шаг 4. Пусть $\{\mu_{Y_w}(p)\} = \max_i\{\mu_{Y_i}(p)\}$, $w = \arg \max\{v\}$. Если $\mu_{X_w}(p) > t$, добавим объект p в Y_w :

$$Y_w = Y_w \cup p.$$

Шаг 5. Алгоритм завершает работу.

Результаты алгоритма A_1^f интерпретируются следующим образом: если по окончании работы алгоритма $p \in Y_i$, то $p \in X_i$.

Таким образом, алгоритм A_1^f относит объект p к классу, в котором функция принадлежности этого объекта принимает максимальное значение, а если таких классов несколько, выбирает среди них класс с максимальным номером.

Покажем, что алгоритм A_1^f работает не хуже алгоритма A_1 . Определим $P_i^{A_1^f}(p)$ следующим образом:

$$P_i^{A_1^f}(p) = \begin{cases} 1, & p \in X_i; \\ 0, & p \notin X_i. \end{cases}$$

В определении $P_i^{A_1^f}(p)$ решение о принадлежности p классу X_i принимается алгоритмом A_1^f .

Теорема 4. $\Phi_{A_1^f}(X^q) \geq \Phi_{A_1}(X^q)$.

Метод нечеткой объектной резолюции с некоторыми модификациями будет использован в следующем разделе для объединения результатов алгоритмов первого уровня. Описанием класса при этом будет служить мультимножество кодов объектов обучающей выборки, полученное набором алгоритмов, настроенных на выбранном наборе бинарных подзадач.

4 Прикладная реализация

Перейдем к рассмотрению прикладного метода построения наборов бинарных подзадач. Будем учитывать, во-первых, полученные выше теоретические результаты. Так, потребуем выполнения достаточного условия теоремы 1. Для полностью определенных задач это будет означать различимость кодов классов.

Построим работу метода следующим образом. Сначала получим некоторый набор бинарных подзадач. Единственным условием на этом этапе является различимость классов. Затем найдем веса этих наборов, исходя из оптимальности расстояний между кодами классов. На практике веса дихотомий часто обнуляются, что позволяет сократить исходный набор.

Исходный набор бинарных подзадач строится несколькими способами. Самый очевидный из них — конструировать случайные дихотомии, т. е. полагать вектор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) \in \{0, 1\}$ случайным. Качество полученных дихотомий, или вероятность правильной классификации на два класса, будет различаться. При этом в итоговом наборе выгодно иметь алгоритмы лучшего качества, совершающие меньшее число ошибок.

Для построения таких подзадач, называемых в дальнейшем «оптимальными», будем использовать метод наискорейшего спуска. В качестве начального приближения будет использоваться случайная дихотомия $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) \in \{0, 1\}$. Далее находится и изменяется компонента вектора β_i дихотомии, дающая максимальное увеличение критерия качества. После единичной итерации вектор изменяется следующим образом: $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i-1}, 1 - \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_N)$ — и процесс повторяется. Если требуемой компоненты β_i не существует, то процесс оптимизации завершается.

Исходный набор бинарных подзадач составляется из оптимальных дихотомий. В ряде случаев алгоритм оптимизации оказывается не в состоянии обеспечить разделимость классов. Тогда кодовая матрица пополняется случайными.

Предлагается использовать два подхода к разработке первичного набора бинарных подзадач. В рамках первого этот набор еще раз оптимизируется с целью обеспечения максимального расстояния между кодами классов. Для этого вводятся веса дихотомий и рассматривается следующая задача оптимизации. Пусть $\|\alpha_{ij}\|_{l \times W}$ — кодовая матрица, полученная путем поиска дихотомий, где l — число классов исходной выборки, а W — число дихотомий:

$$\sum_{j=1}^W |\alpha_{\nu j} - \alpha_{\mu j}| x_j \geq y \quad \forall \nu, \mu; \nu > \mu; \nu, \mu = 1, \dots, l;$$

$$\sum_{j=1}^W x_j = W;$$

$$y \rightarrow \max.$$

Кроме отбора существенных бинарных подзадач, т. е. подзадач, у которых $x_i > 0$, найденные веса будем использовать непосредственно при расчете функции близости кода объекта к коду класса:

$$d(S^t, K_j) = \sum_{j=1}^W |\alpha_{ij} - \beta_j| x_j,$$

где β — код объекта S^t , $\gamma(S^t) = \beta_j$. Этот метод будем называть методом оптимизации дихотомий с весами (ОДВ).

Второй подход основан на методе НОР (нечеткой объектной резолюции). Вместо кода класса введем его кодовое описание, вычисленное как мультимножество кодов обучающих объектов, полученных тем же набором алгоритмов. Пусть класс K_j описан набором пар $\{\gamma_{ji}, \nu_{ji}\}$, $i = 1, \dots, W_j$, где $\gamma_{ji} = \gamma(S)$; $S \in K_j \cap \tilde{S}_t(Z)$ — коды объектов класса K_j обучающей выборки; ν_{ji} — частота кода γ_{ji} в описании класса K_j :

$$\nu_{ji} = \frac{|\{S | S \in K_j \cap \tilde{S}_t(Z), \gamma(S) = \gamma_{ji}\}|}{|K_j \cap \tilde{S}_t(Z)|};$$

W_j — число различных кодов в описании класса K_j . Тогда оценку произвольного объекта S за класс K_j будем вычислять по формуле:

$$\Gamma_j(S) = \sum_{i=1}^{W_j} \nu_{ji} \frac{1}{(1 + d(\gamma(S), \gamma_{ji}))^2},$$

где $d(\gamma_1, \gamma_2)$ обозначает расстояние Хэмминга между кодами γ_1 и γ_2 .

Этот подход будем называть методом кодовых описаний классов, или КОК.

Эксперименты для оценки эффективности предлагаемых подходов проводились с модельной задачей model2 (12 классов) и двумя реальными задачами: предсказание года (10 классов, year) и распознавание букв (26 классов, letter recognition, UCI Machine Learning Repository [16]). При этом для каждой задачи генерировались случайные наборы бинарных подзадач заданных мощностей, которые затем использовались для обучения и проверки на независимой выборке предлагаемых подходов: ОДВ и КОК. В качестве ориентира используется алгоритм, основанный на поиске ближайшего кода

Результаты экспериментов

Задача	Число подзадач	ЕСОС	КОК	ОДВ
model2	20	68,0	68,9	66,4
	40	69,1	69,9	69,7
	60	70,2	70,1	69,7
	80	70,5	70,6	70,9
	100	70,8	70,7	71,0
letter	20	85,0	85,3	84,2
	40	86,2	86,2	85,5
	60	86,5	86,5	86,3
	80	86,7	86,8	86,7
	100	87,0	87,0	86,8
year	20	41,8	40,4	44,8
	40	40,1	40,4	40,5
	60	39,7	47,4	40,3
	80	42,1	43,6	44,5

класса, т. е. реализация метода ЕСОС, выполненная авторами работы. Для каждой задачи и каждой мощности генерировались по три случайных набора, после чего результаты усреднялись. Бинарные подзадачи решались с помощью метода опорных векторов из пакета scikit-learn [17].

Модельная задача заслуживает отдельного упоминания. На двумерной плоскости генерировалось 20 выборок из нормального распределения с центрами, расположенными в пять столбцов и четыре строки. После чего некоторые пары и тройки получившихся скоплений точек объединялись в один класс. Всего таких классов было 12.

Результаты экспериментов показаны в таблице. Задачи model2 и letter демонстрируют похожую тенденцию — при небольшом количестве закономерностей метод ОДВ обычно отстает, но с его ростом отставание уменьшается и даже сменяется опережением. Такое поведение метода достаточно ожидаемо, так как чем больше исходного материала для оптимизации, тем проще отобрать хорошие подзадачи. В этих экспериментах отбиралось примерно две трети подзадач.

Вместе с тем при небольшом числе исходных случайных подзадач метод КОК демонстрирует преимущество перед простым методом. Затем, с ростом их числа, преимущество ослабевает. Исключение составила задача year, в которой качество менялось непредсказуемо. Причем даже в рамках одного метода и одного набора подзадач дисперсия качества распознавания была очень высока. С другой стороны, это позволило получить наибольший абсолютный выигрыш от применения предлагаемых подходов. Такое поведение алгоритмов на данной задаче требует дополнительного исследования и объяснения.

Литература

1. Журавлёв Ю. И. Корректные алгебры над множеством некорректных (эвристических) алгоритмов I // Кибернетика, 1977. № 4. С. 14–21.
2. Журавлёв Ю. И. Корректные алгебры над множеством некорректных (эвристических) алгоритмов II // Кибернетика, 1977. № 6. С. 21–27.
3. Cortes C., Vapnik V. Support-vector networks // Mach. Learn., 1995. Vol. 20. No. 3. P. 273–297.
4. Кузнецов В. А., Сенько О. В., Кузнецова А. В., Семенова Л. П., Алещенко А. В., Гладышева Т. Б., Ившина А. В. Распознавание нечетких систем по методу статистически взвешенных синдромов и его применение для иммуногематологической характеристики нормы и хронической патологии // Хим. физика, 1996. Т. 15. № 1. С. 81–100.
5. Knerr S., Personnaz L., Dreyfus G. Single-layer learning revisited: A stepwise procedure for building and training neural network // Neurocomputing: Algorithms, architectures and applications / Eds. F. F. Soulie, J. Hérault. — NATO ASI subser. F. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1990. Vol. 68. P. 41–50.
6. Dietterich T. G., Bakiri G. Solving multiclass learning problems via error-correcting output codes // J. Artif. Intell. Res., 1995. No. 2. P. 263–286.
7. Allwein E., Shapire R., Singer Y. Reducing multi-class to binary: A unifying approach for margin classifiers // J. Mach. Learn. Res., 2000. Vol. 1. No. 1. P. 113–141.
8. Дьяконов А. Г. Алгебра над алгоритмами вычисления оценок: минимальная степень корректного алгоритма // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2005. Т. 45. № 6. С. 1134–1145.
9. Докукин А. А. О построении в алгебраическом замыкании одного алгоритма распознавания // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2001. Т. 41. № 12. С. 1811–1815.
10. Dokukin A., Ryzanov V., Shut O. Multilevel models for solution of multiclass recognition problems // Pattern Recognition Image Anal., 2016. Vol. 26. No. 3. P. 461–473.
11. Джарратано Дж., Райли Г. Экспертные системы: принципы разработки и программирование / Пер. с англ. — М.: Вильямс, 2007. 1152 с. (Giarratano J. C., Riley G. D. Expert systems: Principles and programming. — Boston, MA, USA: PWS Publ. Co., 2004. 856 p.)
12. Краснопрошин В. В., Образцов В. А. Распознавание с обучением как задача выбора // Цифровая обработка изображений, 1998. С. 80–94.
13. Абрамеев С. В., Краснопрошин В. В., Образцов В. А. Модели и технологии распознавания образов с применением в интеллектуальном анализе данных // Вестник БГУ. Сер. 1: Физика. Математика. Информатика, 2011. № 3. С. 62–72.
14. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1982. 432 с. (Kaufman A. Introduction to the theory of fuzzy subsets. — New York, NY, USA: Academic Press, 1975. 432 p.)

15. Lee R. C. T. Fuzzy logic and the resolution principle // J. ACM, 1972. Vol. 19. No. 1. P. 109–119.
16. Lichman M. UCI machine learning repository. — Irvine, CA, USA: University of California, School of Information and Computer Science, 2013. <http://archive.ics.uci.edu/ml>.
17. Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., Michel V., Thirion B., Grisel O., Blondel M., Prettenhofer P., Weiss R., Dubourg V., Vanderplas J., Passos A., Cournapeau D., Brucher M., Perrot M., Duchesnay E. Scikit-learn: Machine learning in Python // J. Mach. Learn. Res., 2011. Vol. 12. P. 2825–2830.

Поступила в редакцию 2.08.16

MULTILEVEL MODELS FOR PATTERN RECOGNITION TASKS WITH MULTIPLE CLASSES

A. A. Dokukin¹, V. V. Ryazanov², and O. V. Shut³

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow, 119333, Russian Federation

²Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141700, Russian Federation

³Belarusian State University, 4 Nezavisimosti Av., Minsk 220030, Republic of Belarus

Abstract: The problem of choosing binary subtasks for recognition tasks with multiple classes is considered from the points of view of the algebraic and logical approaches to recognition. The limits of their applicability were studied theoretically. The sufficient condition of correctness of algorithms is stated as a result of research of dependency between the first and the second level algorithms. Additionally, the paper proves that the object resolution method is applicable to constructing new objects using the precedent information. As an applied result, two modifications of the ECOC (error-correcting output codes) method are proposed. The first one is based on optimization of the binary subtasks set. The second one develops ideas of the fuzzy object resolution method with classes described by multisets of codes of their precedents. The proposed modifications make it possible to increase the initial method’s quality in various situations, which is demonstrated by the example of model and real-world tasks.

Keywords: classification; multiclass task; ECOC; multilevel method; correctness; algebraic approach; logical approach; code class description

DOI: 10.14357/19922264170106

Acknowledgments

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 15-51-04028) and BRFB (grant No. F15PM-037).

References

- Zhuravlev, Yu. I. 1977. Korrektnye algebrы nad mnozhestvom nekorrektnykh (evristicheskikh) algoritmov I [Correct algebras over sets of incorrect (heuristic) algorithms I]. *Kibernetika* [Cybernetics] 4:14–21.
- Zhuravlev, Yu. I. 1977. Korrektnye algebrы nad mnozhestvom nekorrektnykh (evristicheskikh) algoritmov II [Correct algebras over sets of incorrect (heuristic) algorithms II]. *Kibernetika* [Cybernetics] 6:21–27.
- Cortes, C., and V. Vapnik. 1995. Support-vector networks. *Mach. Learn.* 3(20):273–297.
- Kuznetsov, V. A., O. V. Senko, A. V. Kuznetsova, L. P. Semenova, A. V. Aleshchenko, T. B. Gladysheva, and A. V. Ivshina. 1996. Raspoznavanie nechetkikh sistem po metodu statisticheskikh vzveshennykh sindromov i ego primeneniye dlya immunogematologicheskoy kharakteristiki normy i khronicheskoy patologii [Recognition of fuzzy systems by method of statistically weighed syndromes and its using for immunological and hematological norm and chronic pathology]. *Khim. Fiz.* 15(1):81–100.
- Knerr, S., L. Personnaz, and G. Dreyfus. 1990. Single-layer learning revisited: A stepwise procedure for building and training neural network. *Neurocomputing: Algorithms, architectures and applications*. Eds. F. F. Soulie and J. Hertz. NATO ASI subser. F. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag. 68:41–50.
- Dietterich, T. G., and G. Bakiri. 1995. Solving multiclass learning problems via error-correcting output codes. *J. Artif. Intell. Res.* 2:263–286.
- Allwein, E., R. Shapire, and Y. Singer. 2000. Reducing multi-class to binary: A unifying approach for margin classifiers. *J. Mach. Learn. Res.* 1(1):113–141.

8. D'yakonov, A. G. 2005. Algebra over estimation algorithms: The minimal degree of correct algorithms. *Comp. Math. Math. Phys.* 45(6):1095–1106.
9. Dokukin, A. A. 2001. The construction of a recognition algorithm in the algebraic closure. *Comp. Math. Math. Phys.* 41(12):1907–1911.
10. Dokukin, A., V. Ryazanov, and O. Shut. 2016. Multilevel models for solution of multiclass recognition problems. *Pattern Recognition Image Anal.* 26(3):461–473.
11. Giarratano, J. C., and G. D. Riley. 2004. *Expert systems: Principles and programming*. Boston, MA: PWS Publ. Co. 856 p.
12. Krasnoproshin, V. V., and V. A. Obraztsov. 1998. Raspoznavanie s obucheniem kak zadacha vybora [Supervised recognition as selection problem]. *Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy* [Digital image processing]. Minsk: ITK. 80–94.
13. Ablamejko, S. V., V. V. Krasnoproshin, and V. A. Obraztsov. 2011. Modeli i tehnologii raspoznavaniya obrazov s prilozheniem v intellektual'nom analize dannykh [Models and technologies of pattern recognition with application to data mining]. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fizika, Matematika, Informatika* [BSU Herald. Ser. 1, Physics, Mathematics, Informatics] 3:62–72.
14. Kaufman, A. 1975. *Introduction to the theory of fuzzy subsets*. New York, NY: Academic Press. 432 p.
15. Lee, R. C. T. 1972. Fuzzy logic and the resolution principle. *J. ACM* 19(1):109–119.
16. Lichman, M. 2013. *UCI machine learning repository*. Irvine, CA: University of California, School of Information and Computer Science. Available at: <http://archive.ics.uci.edu/ml> (accessed March 3, 2017).
17. Pedregosa, F., G. Varoquaux, A. Gramfort, V. Michel, B. Thirion, O. Grisel, M. Blondel, P. Prettenhofer, R. Weiss, V. Dubourg, J. Vanderplas, A. Passos, D. Cournapeau, M. Brucher, M. Perrot, and E. Duchesnay. 2011. Scikit-learn: Machine learning in Python. *J. Mach. Learn. Res.* 12:2825–2830.

Received August 2, 2016

Contributors

Dokukin Alexander A. (b. 1980) — PhD in physics and mathematics, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow, 119333, Russian Federation; dalex@ccas.ru

Ryazanov Vasily V. (b. 1991) — PhD student, Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141700, Russian Federation; vasyarv@mail.ru

Shut Olga V. (b. 1987) — assistant professor, Belarusian State University, 4 Nezavisimosti Av., Minsk 220030, Republic of Belarus; olgashut@tut.by

АЛГОРИТМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДНОГО ГРАФА В ДРУГОЙ С МИНИМАЛЬНОЙ ЦЕНОЙ*

К. Ю. Горбунов¹, В. А. Любецкий²

Аннотация: Рассматриваются ориентированные графы, состоящие из любого числа дизъюнктивных цепей и циклов, ребрам графов приписаны без повторов их имена — натуральные числа. Фиксирован список операций, каждая из которых по-своему преобразует один граф в другой, ей приписано число — цена данной операции. Нужно найти минимальную по суммарной цене последовательность операций, которая для двух данных графов преобразует один в другой. Эта задача самым широким образом применяется в прикладных вопросах. По-видимому, она является NP-трудной и поэтому может быть эффективно решена только при том или ином условии на цены или при некотором ограничении на графы. Ее решение при достаточно широких условиях получено в виде линейных по времени и памяти алгоритмов, для которых доказана точность (неэвристичность), т. е. доказано, что они всегда находят минимальную по цене последовательность операций. Задача давно решается многими эвристическими алгоритмами, которые тестировались на разных данных, но предлагаемые авторами решения — первые среди точных.

Ключевые слова: ориентированный граф из цепей и циклов; преобразование графов с минимальной ценой; точное линейное решение; условие на графы; условие на цены; условно кратчайшее решение

DOI: 10.14357/19922264170107

1 Введение. Постановка задачи

1.1 СС-графы

В работе рассмотрена следующая комбинаторно-оптимизационная задача. Назовем *СС-графом* ориентированный граф, состоящий из любого числа дизъюнктивных цепей и циклов, включая петли, ребрам которого приписаны без повторов натуральные числа (*имена* ребер). Цепи и циклы являются (без учета ориентации) компонентами связности такого графа, которые будем называть *компонентами*. Фиксирован список операций, которые преобразуют один СС-граф в другой такой же граф.

Можно рассматривать более общий случай графов и любой список операций, но в длительной истории исследования этой задачи (по разным, прежде всего прикладным, причинам) сформировалось указанное определение графа и тот список операций, который приведен в подразд. 1.2. Каждой операции приписано число, которое называется ее *ценой*. В прикладных задачах цены являются строго положительными рациональными числами, но, разумеется, теоретически их можно считать натуральными числами. Любой последовательности операций, применяемых друг за другом, начиная

с данного СС-графа a и заканчивая некоторым результирующим СС-графом b , приписывается *суммарная цена* — сумма цен всех операций в этой последовательности.

Итак, пусть даны два СС-графа a и b . Требуется найти минимальную по функционалу суммарной цены последовательность операций, которая преобразует a в b . Такую последовательность называют *кратчайшей*, а ее цену — *кратчайшей ценой*. Предполагается, хотя это не доказано, что задача нахождения кратчайшей последовательности или кратчайшей цены для переменных a , b и переменных цен операций является NP-трудной. Задача остается таковой, если фиксировать произвольные (случайные) цены операций. Поскольку практический интерес представляют линейные или, во всяком случае, полиномиальные алгоритмы низкой степени, для их поиска приходится накладывать условия на соотношение цен или на вид графов. В части второго популярно такое ограничение: в последовательности операций, которая преобразует a в b , включая и сами a и b , присутствует один и тот же постоянный набор имен. Задачу с этим ограничением назовем задачей с *постоянным составом* (имен ребер). В отсутствие этого ограничения задачу назовем задачей с *переменным составом*. В разд. 2 приводится схема линейного по времени и памяти

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-50-00150).

¹Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, gorbunov@iitp.ru

²Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук; механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, lyubetsk@iitp.ru

алгоритма ее решения в трех случаях: два относятся к постоянному составу и один к переменному составу. Все нюансы работы алгоритма, сопровождаемые рисунками, а также детали доказательств приведены в [1, 2].

1.2 Операции над СС-графами

Фиксируются следующие операции, называемые *стандартными*:

- разрезать две вершины, имеющиеся в графе, и по-новому отождествить (склеить) четыре образовавшихся края (*двойная переклейка*) (рис. 1, а);
- разрезать вершину и по-новому отождествить (склеить) один образовавшийся край с каким-то свободным краем в графе (*полуторная переклейка*) (рис. 1, б);
- разрезать вершину или отождествить два свободных края (одинарные переклейки — *разрез и склейка*) (рис. 1, в).

Также фиксируются две *дополнительные операции*, называемые соответственно *вставкой* и *удалением*: добавить/удалить цепь X в граф или из графа (рис. 2).

Для вставки это означает: добавить в граф саму цепь X или ее же с отождествлением ее концов, т. е. добавить новую цепь или новый цикл; или добавить цепь X в цепь, уже имеющуюся в графе, вместо ее конца или ее внутренней вершины; аналогично для вставки в цикл. И симметрично для операции удаления. При этом добавлять можно цепь, имена которой содержатся в $b \setminus a$, а удалять можно цепь, имена которой содержатся в $a \setminus b$. В [3] предложенный авторами алгоритм был применен в конкретном прикладном исследовании, и там содержатся более подробные, чем в подразд. 1.3, сведения по истории задачи, однако содержание работы [3] не используется в данной статье.

1.3 Обзор непосредственно примыкающей литературы

Приведем несколько математических результатов других авторов по этой задаче. Таких результатов немного. В случае *постоянного* состава и *различных* цен алгоритм решения с его математическим обоснованием не был предложен. В работах [4, 5] рассматривается сразу *переменный состав*. В [4] на цены накладывается условие: у всех стандартных операций они равны 1, а у операций вставки и удаления равны и не больше 1. В [5] на це-

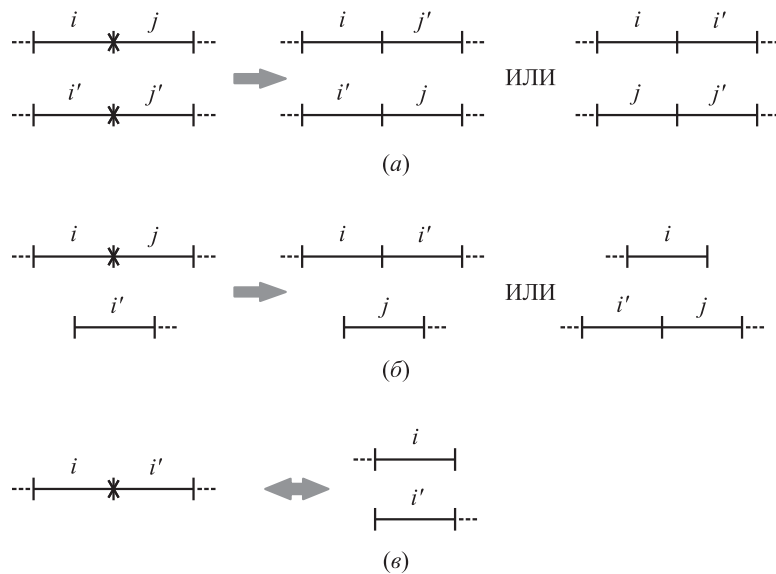


Рис. 1 Четыре стандартные операции над СС-графом: (а) двойная переклейка; (б) полуторная переклейка; (в) разрез и склейка

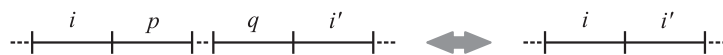


Рис. 2 Две дополнительные операции над СС-графом: удаление и вставка

ны накладывається другое, более слабое условие — опущено «не больше 1», но зато рассматриваются СС-графы только из циклов. По существу, последнее условие эквивалентно тому, что из стандартных операций допускается только двойная переклейка. Насколько авторы понимают, результат в [4] не содержит корректных доказательств, так что указанный случай не получил обоснования. Подходы, которые предложены в [4, 5] (т. е. определения вспомогательных графов — прием, который используется во всех работах на эту тему, включая и данную), отличаются от предлагаемого авторами статьи.

В [2] авторы описали линейный по времени и памяти алгоритм построения кратчайшей последовательности операций, преобразующих один СС-граф a в другой СС-граф b для случая *переменного* состава, если цены всех операций равны. Если все цены равны, кратчайшую последовательность называют *минимальной*, а кратчайшую цену — *минимальной ценой*. Конечно, главный интерес представляет общий случай задачи, в котором цены не равны.

Как и в [2], в разд. 2 изложение строится по такому плану. Определяется понятие общего графа $a + b$, иное, нежели в [4, 5]; показано, что исходная задача эквивалентна приведению $a + b$ к специальному виду, который называется *финальным*, аналогами операций, которые определены в подразд. 1.2. Затем описывается алгоритм и приводится доказательство его точности (неэвристичности, корректности), т. е. доказательство того, что он действительно находит минимум суммарной цены. Как отмечалось выше, некоторые технически громоздкие детали в описании и доказательстве приведены в [1]. Вместо «неэвристический алгоритм» или «неэвристическое решение» иногда говорят *точный алгоритм* или *точное решение* соответственно.

В исследованиях этой задачи используется различная терминология. Так, в [2] СС-граф называется *структурой*; для согласования с этой работой будем далее использовать последний, более привычный термин. В [3] и в других работах СС-граф (структура) называется хромосомной структурой, его ребра называются генами, а компоненты — хромосомами. Это связано с тем, что задача возникла в контексте биоинформатики, где для ее решения разработано большое число более или менее эвристических алгоритмов. В [3] приводится краткий обзор по истории исследований задачи.

Напомним, что минимальная последовательность и минимальная цена являются частными случаями кратчайшей последовательности и кратчайшей цены.

2 Решение задачи

2.1 Общий граф и идея алгоритма

Общий граф $a + b$ двух структур a и b имеет следующие вершины. *Обычные* вершины — имена краев одноименных ребер в a и b ; например, начало ребра с именем 3 будет иметь имя 3_1 . И *особые вершины* — максимальные по включению связные участки из ребер, принадлежащих лишь одной из структур, которые называют *блоками*. Блок принадлежит одной из структур, и соответствующая особая вершина помечается как a - или b -вершина. Ребра общего графа следующие. *Обычное* ребро соединяет две обычных вершины, если соответствующие им края отождествлены (склеены) в a или в b . А *особое* ребро соединяет обычную вершину с особой, если в a или в b край, соответствующий обычной вершине, отождествлен (*склеен*) с краем блока, соответствующего особой вершине. Такое ребро помечается как a - или b -ребро. *Петля* в $a + b$ соответствует циклу, который является блоком; иными словами, особая вершина этого блока соединяется с собой. *Висячим* называется ребро, инцидентное особой вершине степени 1. Пример двух структур и их общего графа приведен в [3] на рис. 1 и 2. Таким образом, общий граф несет информацию о склейках одновременно в a и в b .

Общий граф — неориентированный, он состоит из связных компонент — также цепей и циклов. Невисячие особые ребра присутствуют в нем парами — ребрами, инцидентными одной особой вершине; такую пару удобно считать за одно двойное ребро. Поэтому *размером компоненты* назовем сумму в ней числа обычных ребер с половиной числа особых невисячих ребер (в [2] эта величина названа длиной компоненты, что вызывает путаницу с обычной длиной цепи или цикла). Для изолированных обычных вершин и петель размер считаем равным 0, для изолированных особых вершин (не петель) — равным -1 . Общий граф называется *финального вида*, если каждая его компонента — изолированная обычная вершина или цикл без особых ребер размера (или в данном случае то же самое — длины) 2, одно ребро из a и другое из b .

Эти определения приведены в [2, 3] и частично в [6] и здесь повторяются для удобства читателя.

В [2] доказано: для любых структур a и b существует кратчайшая последовательность, в которой все удаления предшествуют всем вставкам и все операции сохраняют блоки без изменения. Хотя там считалось, что цены всех операций равны, легко проверить, что приведенное доказательство сохраняется без изменения, если равны только цены

стандартных операций. Действительно, в том доказательстве произвольная кратчайшая последовательность преобразуется в последовательность указанного вида, при этом стандартная операция переходит в стандартную, удаление — в удаление, вставка — во вставку. Поэтому как там, так и здесь суммарная цена (иногда будем говорить — цена) последовательности не меняется.

Из этого утверждения следует: в предположении одинаковых цен стандартных операций задача поиска кратчайшей последовательности для структур a и b эквивалентна задаче приведения этих структур к какой-нибудь одной структуре c двумя суммарно кратчайшими последовательностями, причем вставка не используется, а цена удаления, применяемого в преобразованиях b , равна цене вставки.

Действительно, если c — структура в кратчайшей последовательности, полученная после выпол-

нения всех удалений и до всех вставок, то можно преобразовать к ней структуру a (прямыми операциями) и структуру b (обратными операциями). А последняя задача эквивалентна задаче преобразования общего графа $a + b$ к финальному виду $c + c$ следующими аналогами исходных операций (рис. 3).

Двойная переклейка (рис. 3, а): удаление двух одинаково помеченных ребер общего графа и соединение четырех образовавшихся концов двумя новыми неинцидентными ребрами с той же пометкой. Если при этом образуется ребро с особыми концами (оба относятся к a или оба к b), то оно заменяется одной особой вершиной, которой написано объединение блоков двух исходных особых вершин.

Полуторная переклейка (рис. 3, б): удаление ребра общего графа и соединение ребром с той же пометкой, скажем a , одного из его концов с обычной

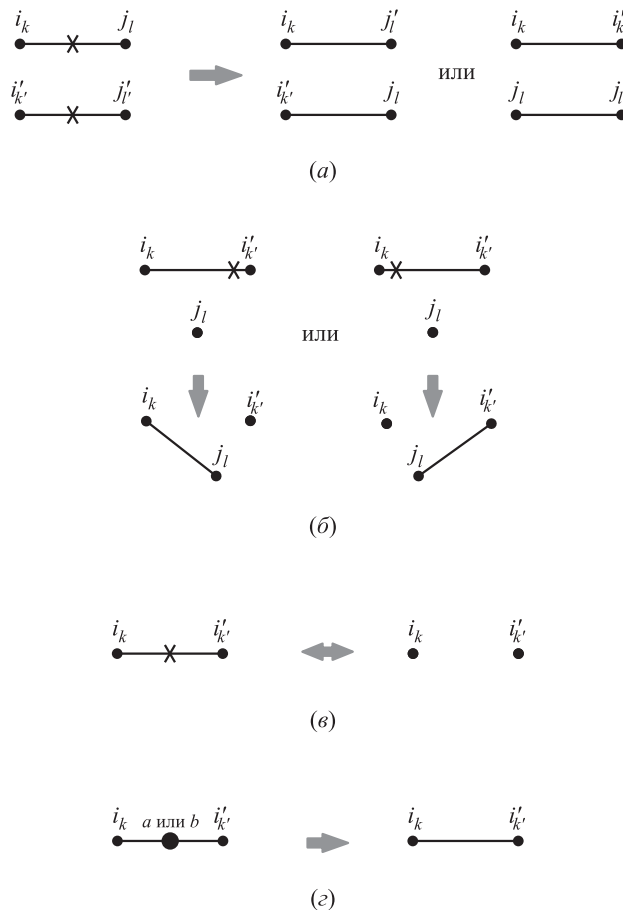


Рис. 3 Операции, разрешенные над общим графом: (а) двойная переклейка; (б) полуторная переклейка; (в) разрез и склейка; (г) a - или b -удаление. Большой кружок показывает особую вершину. Отметим: операция вставки оказывается ненужной, но зато операция удаления применяется в двух вариантах: a -удаления и b -удаления особой вершины; первая — по цене удаления, вторая — по цене вставки

вершиной, не инцидентной ребру с этой пометкой, или с особой вершиной степени не больше 1 с той же пометкой (с возможным последующим отождествлением двух особых вершин).

Склейка (рис. 3, в): добавление ребра (скажем, с пометкой a) между вершинами, каждая из которых является или обычной, не инцидентной ребру с пометкой a , или особой, степени не больше 1, с той же пометкой (с возможным последующим отождествлением двух особых вершин).

Разрез (рис. 3, в): удаление любого ребра.

Удаление особой вершины (рис. 3, г): если ее степень 2, то она удаляется и инцидентные ей ребра склеиваются в одно ребро с той же пометкой; если ее степень 1, то она удаляется вместе с инцидентным ей ребром; если ее степень 0 или это петля, то вершина с петлей удаляется. Удаление особой a -вершины получает цену операции удаления, удаление особой b -вершины — цену операции вставки. Условимся далее в выражении особая a - или b -вершина опускать слово «особая».

Забегая вперед, опишем идею предлагаемого алгоритма. В случае постоянного состава в общем графе имеются лишь обычные вершины и ребра. Алгоритм приводит его к финальному виду в два этапа. Первый этап — двойными переклейками разбить все циклы на циклы длины 2. Второй этап — обработка цепей: если цена двойной переклейки меньше цены полуторной, замкнуть цепи в циклы и обработать их, как на этапе 1. Иначе нужно полуторными переклейками от цепи пошагово отщеплять циклы длины 2.

В случае переменного состава алгоритм из компонента вырезает обычные ребра, замыкая их в циклы длины 2. Затем обрабатываются цепи. Это связано с тем, что совместная обработка цепей позволяет экономить число операций по сравнению с тем их числом, которое получилось бы при обработке каждой цепи в отдельности; это — основная идея алгоритма. Совместная обработка цепей описана в [2], где доказано, что она приводит к максимально возможной экономии числа операций, т. е. к минимизации числа операций.

Ниже в описании алгоритма совместная обработка цепей выполняется на шаге 3, каждый пункт которого соответствует определенной совместной обработке (можно сказать — взаимодействию) цепей. После шага 3 общий граф может еще содержать цепи, а также в нем остаются исходные циклы. Между этими компонентами уже невозможны взаимодействия, которые сэкономили бы число операций. Но возможны взаимодействия, заменяющие дорогое удаление b -вершины на операцию с меньшей ценой. Эти взаимодействия описаны на шаге 4 алгоритма.

2.2 Приведение общего графа в случае постоянного состава и разных цен операций

Рассмотрим случай постоянного состава, вставки и удаления отсутствуют, цены операций различны. Точнее, предполагается, что цены операций удовлетворяют одному из двух условий: $c_2 \leq c_1 \leq c'_1 \leq c_{1,5}$ (циклический вариант) и $c_1 \leq c'_1 \leq c_{1,5} \leq c_2$ (линейный вариант). Здесь указаны соотношения между ценами разреза c_1 , склейки c'_1 , полуторной переклейки $c_{1,5}$, двойной переклейки c_2 .

В этом случае предлагается решение несколько **измененной задачи**: кратчайшая последовательность ищется среди всех минимальных последовательностей. Она называется *условно кратчайшей*. Решение задачи в этом смысле будем называть *условной оптимизацией*. Авторы не знают, существует ли полиномиальный по времени алгоритм решения безусловной задачи даже при одном из указанных соотношений цен, если только не все цены равны. Конечно, если они равны, то *условная* оптимизация совпадает с *безусловной*, т. е. с решением исходной задачи.

В рассматриваемом случае общий граф состоит из циклов и цепей, в которых чередуются a - и b -ребра. В случае постоянного состава *качеством* $H(a + b)$ общего графа $a + b$ назовем число циклов, сложенное с половиной числа четных цепей в нем. Четной называется цепь с четным числом ребер, а также цепь размера ноль; цепи нечетного размера не учитываются; понятия размера и длины в этом пункте совпадают. Пусть структуры a и b имеют по n ребер. Для построения минимальной последовательности решающее значение имеет возрастание качества от значения $H(a + b)$ до значения n на $+1$ при выполнении каждой операции; таким образом, минимальную длину можно указать сразу: она равна $n - H(a + b)$.

Лемма 1.

1. Каждая стандартная операция изменяет качество общего графа на 0 или ± 1 .
2. Для нефинального графа существует операция, увеличивающая его качество на 1.
3. Граф $a + b$ финальный, если и только если $a = b$; для финального графа $a + b$ выполняется $H(a + b) = n$.
4. Как безусловная, так и условная задачи для a и b эквивалентны соответствующим задачам о приведении общего графа $a + b$ к финальному виду.

5. Существует последовательность операций, преобразующая $a + b$ к финальному виду, на каждом шаге которой качество увеличивается ровно на 1; ее длина равна $k = n - H(a + b)$.
6. Минимальная длина равна k .
7. Минимальными последовательностями для $a + b$ являются в точности те, у которых каждая операция увеличивает качество общего графа на 1. Их длины равны k .

Простое доказательство леммы 1 приведено в [1, п. 3].

Опишем точный линейный алгоритм приведения к финальному виду в случаях циклического и линейного соотношений цен. Пункт 3 в [1] содержит рисунки, наглядно поясняющие его работу. Для **циклического варианта** он состоит из трех шагов.

Шаг 1. Если имеется цикл длины, строго большей двух, двойной переклейкой разбиваем его на два цикла, один из которых имеет длину 2.

Шаг 2. Склеивкой каждую нечетную цепь замыкаем в цикл, после чего применяем шаг 1.

Шаг 3. Полуторной переклейкой каждую ненулевую четную цепь замыкаем в цикл, один край цепи становится нулевой цепью. Затем применяем шаг 1.

Алгоритм решения условной задачи для **линейного варианта** состоит также из трех шагов.

Шаг 1. Тот же, что и в предыдущем алгоритме.

Шаг 2. Разрезом от каждой нечетной цепи отделяем крайнюю вершину, получаем четную цепь на 1 меньшей длины и нулевую цепь.

Шаг 3. Полуторной переклейкой каждую ненулевую четную цепь укорачиваем на 2 ребра и замыкаем два ее крайних ребра в цикл, пока в общем графе не останется ненулевых цепей.

Если ни один шаг не применим, то общий граф уже имеет финальный вид и к нему применяется пустая последовательность операций. \square

Отметим: от [4, 5] приведенное ниже доказательство теорем 1 и 2 отличается другими условиями на цены, использованием другого вспомогательного графа, меньшего размера, и индукцией по величине $C(G)$ общего графа, которая и составляет суть приводимых доказательств (не говоря об отсутствии полного доказательства в [4, 5]).

Теорема 1. Указанные линейные алгоритмы точно решают задачу условной оптимизации для циклического и линейного вариантов цен.

Схема доказательства. Минимальность полученной последовательности следует из леммы 1. Из нее же следует линейность алгоритма по времени.

Докажем, что полученная последовательность — кратчайшая. Для этого выразим суммарную цену $c(G)$ в полученной алгоритмом последовательности через числовые характеристики графа G (подробности приведены в [1, п. 3]). Кратчайшую цену для приведения графа G к финальному виду обозначим $C(G)$. Индукцией по величине $C(G)$ покажем, что для всех графов G выполняется неравенство $c(G) \leq C(G)$. Отсюда $c(G) = C(G)$, что и требуется. Число вершин в графе G фиксировано, поэтому множество минимальных цен конечно. Индукция идет по естественному порядку в этом множестве цен. Если $C(G) = 0$, то граф G финального вида и $c(G) = 0$.

Индуктивный шаг. Пусть для всех графов G' , у которых $C(G') < C(G)$, выполняется неравенство $c(G') \leq C(G')$. Докажем его для G . Рассмотрим приводящую последовательность для G . Обозначим через o ее первую операцию, $c(o)$ — ее цену, $o(G)$ — результат ее применения к G . Достаточно проверить неравенство $c(o') \geq c(G) - c(o'(G))$ для каждой операции o' . Действительно, по предположению индукции имеем: $c(o(G)) \leq C(o(G))$. Отсюда $c(G) \leq c(o(G)) + c(o) \leq C(o(G)) + c(o) = C(G)$. Подробности проверки приведены в [1, п. 3]. \square

2.3 Приведение общего графа в случае переменного состава и разных цен операций

Дан общий граф $a + b$ и число ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Разрешены все операции, т. е. в силу утверждения в подразд. 1.1 стандартные операции, удаления a - и b -вершин (особых вершин с пометкой a или b). Пусть цены стандартных операций и a -удаления равны 1, а цена b -удаления вершины равна $1 + \varepsilon$. Термин *конец*, естественно, относится к концу ребра или к изолированной вершине в общем графе.

Предлагаемый алгоритм компьютерно тестировался в общем случае, если цена b -удаления больше цены всех других операций. Как правило, алгоритм находил ответ, близкий к кратчайшей последовательности. Эта более общая ситуация здесь не рассматривается, но с учетом возможного эвристического использования в описание алгоритма, которое приведено ниже, включены соответствующие пояснения; они не используются в доказательстве, которое также приводится ниже.

Краткое описание алгоритма

Шаг 1. Удалить особые a -петли.

Шаг 2. Вырезать все обычные ребра, не входящие в 2-циклы (т. е. циклы размера 2), замыкая их в финальные 2-циклы двойной (если ребро не крайнее) или полуторной (если оно крайнее) переклейками или склейкой (если оно изолированное). В [1, п. 4] содержится подробное описание работы алгоритма на шагах 2 и 3 с рисунками.

Шаг 3. Фактически этот шаг тот же, что и в [2] (более подробно он описан в [1, п. 4]). Напомним его смысл. В множестве цепей общего графа (после шага 2) выделяются небольшие попарно непересекающиеся подмножества мощности от 2 до 4. Внутри каждого подмножества M производится $(|M| - 1)$ операций между цепями (взаимодействий) так, что если каждую цепь из M приводить к финальному виду автономно (т. е. без взаимодействий с другими компонентами), то число требуемых операций будет строго больше числа операций, требуемых, если сначала провести данное взаимодействие. Доказывается, что описанное множество взаимодействий дает максимально возможную экономию числа операций.

Шаг 4. На этом шаге в определенном порядке производятся взаимодействия между связными компонентами общего графа. Каждое взаимодействие производится до тех пор, пока есть компоненты, которые могут служить его аргументами. Эти взаимодействия не уменьшают общее число операций (точнее, сохраняют его), но позволяют заменить «дорогую» операцию удаления b -вершины на другую, более дешевую операцию. Например, если удалить две b -петли по отдельности, будет произведено две операции удаления b -вершины, если же сначала двойной переклейкой слить эти две петли в одну (это частный случай взаимодействия 4.1 из [1]), то одно удаление заменится на двойную переклейку. Подробно шаг 4 описан в [1, п. 4].

Шаг 5. Удаляем изолированные особые вершины и петли. Из оставшихся цепей удаляем особые вершины. Из циклов размера, большего 2, вырезаем 2-циклы так, чтобы происходило отождествление двух b -вершин (соответственно, в 2-цикл включается a -вершина). Из 2-циклов удаляем особые вершины.

Конец описания алгоритма. \square

Докажем теорему о минимальности суммарной цены последовательности операций, которая

получается в алгоритме, т. е. о точности (корректности) алгоритма.

Пусть B' — число циклов в графе $a + b$, содержащих b -вершину, но не содержащих a -вершину (назовем их b -циклами). Напомним обозначения из [2]: B — число особых вершин в $a + b$; S — сумма целых частей половин числа ребер (назовем число *длиной*) максимальных отрезков (*сегментов*) в $a + b$, которые состоят из обычных ребер, плюс число нечетных (т. е. нечетной длины) крайних сегментов минус число циклических сегментов. *Крайним* называется сегмент, расположенный с краю цепи, включая и случай целой цепи. Обычной называется пара, состоящая из одной из стандартных операций вместе с ее аргументом, результат которой не меняет число особых вершин. Далее «обычная» относится к операции, а ее аргумент подразумевается заданным. *Дефект* цепи (или цикла) равен минимальному числу обычных операций в последовательности, которая приводит ее (или его) к финальному виду, не считая вырезания обычных ребер на шаге 2; в последовательности могут встречаться и операции с их аргументами, которые не являются обычными; назовем их *особыми*. В [2] приведена зависимость дефекта от типа компоненты. Обозначим D сумму дефектов компонент графа $a + b$. Обозначим P разность величин D , вычисленных до и после применения шага 3 алгоритма. Заметим, что в любой последовательности операций, финализирующих общий граф, число особых операций равно числу особых вершин в нем, так что экономия числа операций может относиться лишь к обычным операциям. Поскольку все операции на шаге 3 особые, величина P равна числу операций, сэкономленных на шаге 3. Величина ε определена выше. Пусть $C = B + S + D - P + \varepsilon(B' + 1)$.

Теорема 2. Алгоритм строит последовательность операций, суммарная цена которой равна одному из трех значений $C - \varepsilon$, C , $C + \varepsilon$. Минимально возможная суммарная цена последовательности операций, приводящей граф $a + b$ к финальному виду, также равна одному из этих значений. Время работы алгоритма линейное по порядку.

В доказательстве теоремы будут использованы нижеследующие леммы 2 и 3.

Лемма 2. После выполнения шага 4 остается 0, 1 или 2 связных компоненты, имеющих b -вершину и не являющихся исходными b -циклами.

Простое доказательство леммы приведено в [1, п. 4] (там это лемма 3).

Лемма 3. Число обычных операций в алгоритме равно $S + D - P$.

Доказательство. Напомним [2], что минимальное число обычных операций, требуемых для

приведения компоненты (после шага 2) к финальному виду без использования других компонент, равно ее дефекту. Настоящий алгоритм отличается от описанного в [2] наличием шага 4. Любая операция шага 4 либо особая и не меняющая дефект результата по сравнению с суммарным дефектом аргументов, либо обычная и уменьшающая его на 1. Поэтому обычных операций в алгоритме столько же, сколько и раньше, т. е. $S + D - P$. \square

Доказательство теоремы 2. На шаге 5 для каждой компоненты, имеющей b -вершины, применяется ровно одна операция удаления b -вершины. По лемме 2 общее число таких операций равно $B' + n$, где n равно 0, 1 или 2. Всего особых операций B . В силу леммы 3 суммарная цена операций алгоритма равна $(1 + \varepsilon)(B' + n) + (B - B' - n) + (S + D - P) = B + S + D - P + \varepsilon(B' + n)$, откуда следует первое утверждение теоремы.

Второе утверждение теоремы докажем индукцией по минимальной суммарной цене M операций, приводящих общий граф к финальному виду; имеется лишь конечное число возможных значений M на любом ограниченном отрезке, которые рассматриваем по их возрастанию. Рассуждая так же, как и в доказательстве теоремы 1, видим, что достаточно для любой операции o , примененной к произвольному общему графу G , проверить, что цена $c(o)$ операции o не меньше $C(G) - C(o(G))$, где $C(G)$ — величина C , определенная в формулировке теоремы 2. Подробности проверки приведены в [1, п. 4]. \square

Следствие. Цена последовательности операций, которую строит описанный алгоритм, отличается от цены кратчайшей последовательности не более чем на ε .

Доказательство приведено в [7]. \square

3 Обобщение: задача с повторением имен

3.1 Постановка задачи

Важное в прикладных вопросах обобщение рассмотренной выше задачи состоит в том, что в структурах разрешается повторение имен. Это обобщение назовем *задачей с повторениями* (или по историческим причинам говорят: задачей с паралогами). Пусть a и b — такие структуры. Например, имеются в a три ребра с именем k и в b два ребра с тем же именем k . Нужно найти биекцию меньшего из этих двух множеств ребер в большее (для данного имени k); и аналогично для каждого

имени k , если ему соответствуют два таких множества, одно в a и другое в b , с разным числом элементов. Итак, нужно найти семейство биекций, индексированное k , при котором кратчайшая цена достигает минимального значения. Более детально на этом примере: нужно приписать этим пяти ребрам индекс i к их имени k (получатся *полные имена*, которые имеют вид $k.i$, где i меняется от 1 до 3) так, чтобы с новыми именами у всех повторяющихся ребер достиглось минимальное значение кратчайшей цены кратчайшего преобразования a в b . Индекс i определяет частичное соответствие между бывшими одноименными ребрами в a и b и, в частности, определяет, какие ребра общие и какие особые для этих структур. Например, эти три ребра можно индексировать $k.1, k.2, k.3$, а два других ребра индексировать $k.2$ и $k.3$, тогда ребро $k.1$ особое, а остальные ребра общие. Полные имена позволяют перейти от *задачи с повторениями* к *задаче без повторений* (имен), последняя рассматривалась в разд. 1 и 2.

В силу NP-трудности задачи с повторениями, нельзя найти точный полиномиальный алгоритм ее решения. Однако ниже будет показано, как математически строго свести ее к задаче целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Как известно, для задач ЦЛП доступны компьютерные программы, выдающие, как правило, точное решение за время, близкое к линейному, и имеются соответствующие математические результаты.

Для краткости рассмотрим здесь только случай *одинаковых цен всех операций*. В [3] авторы описали сведение задачи с повторениями к задаче ЦЛП в случае, если структуры состоят только из циклических компонент. При этом число переменных и ограничений в соответствующей задаче ЦЛП не более чем квадратично от размера исходных структур, что, конечно, принципиально важно. Далее будет описано такое сведение в общем случае с сохранением той же оценки на число переменных и число ограничений.

3.2 Решение задачи

В исходных структурах a и b выберем произвольно второй индекс у всех повторяющихся имен; структуры с такими полными именами обозначим a' и b' ; в них (полные) имена уже не повторяются.

Рассмотрим булевы переменные z_{abkij} , для которых $z_{abkij} = 1$, если ребро $k.i$ в a' по искомой биекции соответствует ребру $k.j$ в b' , иначе $z_{abkij} = 0$. Таким образом, значения этих переменных определяют соответствие ребер в a' и b' . Переименуем ребра в b' по этому соответствию, результат обозначим $a'(z)$ и $b'(z)$. С помощью ограничений

на эти переменные легко выразить понятия в $a'(z)$ и $b'(z)$: «особое ребро» и «цикл, состоящий из особых ребер» (назовем его *особым циклом*). Конечно, здесь описан только смысл переменной z , который выражен в рамках задачи ЦЛП.

Каждой паре s различных краев ребер в a' (или в b') сопоставим булеву переменную t_{as} (соответственно t_{bs}), ограничения на которые обеспечат следующие три свойства у $a'(z)$ (и у $b'(z)$): если край из s принадлежит общему ребру или лежит в особом цикле, то $t_{as} = 0$; для каждого края существует не более одного края, для которых $t_{as} = 1$ на этой паре в качестве s ; для каждого края особого ребра, не принадлежащего особому циклу, существует край, для которого $t_{as} = 1$ на этой паре в качестве s . И аналогично для t_{bs} .

По значениям переменных t_{as} и t_{bs} определим новые вершины и ребра в $a'(z)$ и $b'(z)$, результат обозначим соответственно $a'(z, t)$ и $b'(z, t)$. Все особые ребра из $b'(z)$, не содержащиеся в особом циклах, добавим в $a'(z)$; края новых ребер склеим, если $t_{bs} = 1$ на этой паре в качестве s . Аналогично особые ребра из $a'(z)$, не содержащиеся в особом циклах, добавим в $b'(z)$; их края аналогично склеим, если $t_{as} = 1$. Таким образом, в структурах $a'(z, t)$ и $b'(z, t)$ все ребра общие, кроме принадлежащих особым циклам. Как раз эти особые циклы удалим из $a'(z, t)$ и $b'(z, t)$, результат обозначим теми же буквами; получены структуры с постоянным составом. Из условий на t_{as} и t_{bs} следует: каждое новое ребро входит в цикл из новых ребер.

Обозначим $G' = G'(z, t) = a'(z, t) + b'(z, t)$. Для графа G' вычислим значение $C_1 + 0,5C_2$, где C_1 и C_2 — число циклов и четных цепей в этом графе соответственно.

Число C_1 вычисляется так же, как в [3] для общего графа вычисляется число S_2 циклов, состоящих из обычных ребер (с учетом цепей и новых ребер).

Для вычисления величины $0,5C_2$ каждому краю p ребра в a и b сопоставим переменную r_p , принимающую значения 0, 1 или -1 . Ограничения обеспечат условия: если для пары склеенных краев в $a'(z, t)$ или $b'(z, t)$ одна из переменных равна 1, то вторая равна -1 , а если первая переменная равна 0, то вторая равна 0 или -1 .

Переменные r_p будут входить в минимизируемую функцию F , которую определим чуть ниже, с отрицательным коэффициентом, поэтому они равны 1 на изолированных вершинах в G' . На вершинах из циклов в G' значения 1 и -1 переменных r_p чередуются или все эти значения нулевые; в любом случае сумма всех r_p вдоль цикла равна 0. Эти значения чередуются и на ненулевой четной цепи, причем на ее краях они равны 1; так что

их сумма вдоль цепи равна 1. На нечетных цепях это чередование перемежается с нулевыми значениями; в любом случае их сумма вдоль такой цепи равна 0. Отсюда вытекает, что полусумма всех значений r_p равна C_2 .

Итак, минимизируемая целевая функция *определяется как* $F = C_0 + n + s_a + s_b - C_1 - 0,5C_2$, где C_0 — сумма чисел особых циклов в $a'(z)$ и $b'(z)$; n — число (однократно учитываемых) общих ребер в них; s_a и s_b — число особых ребер в $a'(z)$ и $b'(z)$, не входящих в особые циклы. Значение $C_0 + n + s_a + s_b$ линейно выражается через введенные переменные z . Значение F линейно выражается через переменные z, t и r_p .

Итак, исходная задача сведена к задаче ЦЛП. Указанная оценка числа переменных и ограничений очевидна. Корректность такого сведения формально доказана в работе авторов, которая представлена в печать. В этом доказательстве решающий шаг состоит в том, что минимальное число операций в последовательности, преобразующей $a'(z)$ в $b'(z)$, равно F . Действительно, минимальная последовательность, преобразующая $a'(z, t)$ в $b'(z, t)$, имеет длину F , что следует из результата в [2]. Она индуцирует последовательность той же длины, преобразующую $a'(z)$ в $b'(z)$. И обратно: кратчайшая последовательность, преобразующая $a'(z)$ в $b'(z)$, индуцирует последовательность той же длины, преобразующую $a'(z, t)$ в $b'(z, t)$.

Идея такого соответствия последовательностей состоит в том, что операции удаления участка ребер ставится в соответствие стандартная операция, вырезающая и закливающая этот участок, а операции вставки участка ребер — стандартная операция, вставляющая этот заклиненный участок в то же место. Такая идея была предложена в [8].

Литература

1. Горбунов К. Ю., Любецкий В. А. Линейный алгоритм кратчайшей перестройки графов при разных ценах операций // Информационные процессы, 2016. Т. 16. № 2. С. 223–236.
2. Горбунов К. Ю., Любецкий В. А. Линейный алгоритм минимальной перестройки структур // Проблемы передачи информации, 2017 (в печати). Т. 53. Вып. 1.
3. Lyubetsky V. A., Gershgorin R. A., Seliverstov A. V., Gorbunov K. Yu. Algorithms for reconstruction of chromosomal structures // BMC Bioinformatics, 2016. Vol. 17. P. 40.1–40.23.
4. Da Silva P. H., Machado R., Dantas S., and Braga M. D. V. DCJ-indel and DCJ-substitution distances with distinct operation costs // Algorithm. Mol. Biol., 2013. Vol. 8. P. 21.1–21.15.

5. Compeau P. E. C. A generalized cost model for DCJ-indel sorting // *Algorithms in bioinformatics* / Eds. D. G. Brown, B. Morgenstern. — Lecture notes in computer science ser. — Springer, 2014. Vol. 8701. P. 38–51.
6. Горбунов К. Ю., Гершгорин Р. А., Любецкий В. А. Перестройка и реконструкция хромосомных структур // *Молекулярная биология*, 2015. Т. 49. № 3. С. 372–383.
7. Горбунов К. Ю., Любецкий В. А. Модифицированный алгоритм преобразования хромосомных структур: условия абсолютной точности // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*, 2016. Т. 12. № 1. С. 162–172.
8. Compeau P. E. C. DCJ-indel sorting revisited // *Algorithm. Mol. Biol.*, 2013. Vol. 8. P. 6.1–6.9.

Поступила в редакцию 26.04.16

ALGORITHM OF TRANSFORMATION OF A GRAPH INTO ANOTHER ONE WITH MINIMAL COST

K. Yu. Gorbunov¹ and V. A. Lyubetsky^{1,2}

¹A. A. Kharkevich Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences, 19-1 Bolshoy Karetny Per., Moscow 127051, Russian Federation

²Faculty of Mechanics and Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Main Building, Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract: The authors study orgraphs with any number of chains and cycles. Edges of orgraphs have unique names — natural numbers. There is a fixed list of operations that transform one graph into another. A cost is assigned to each operation. The task is to find the path of transformations with minimal total cost. This problem has a wide range of practical applications. The task is probably NP-hard and, thus, can be solved only under constraints imposed on costs or graphs. Such solutions are proposed in the study. The corresponding algorithms are linear in time and memory and are proved to be exact (nonheuristic), i. e., to find the path of transformations with minimal cost. Many heuristic algorithms solving this problem are known and tested on various data, but the proposed solutions are the first exact solutions.

Keywords: orgraph with chains and cycles; graph transformation; graph transformation with minimal total cost; exact linear algorithm; graph constraint; cost constraint; conditional shortest solution

DOI: 10.14357/19922264170107

Acknowledgments

The study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 14-50-00150).

References

1. Gorbunov, K. Yu., and V. A. Lyubetsky. 2016. Lineynyy algoritm krachayshey perestroyki grafov pri raznykh tsenakh operatsiy [A linear algorithm of the shortest transformation of graphs under different operation costs]. *Informatsionnye protsessy* [Information Processes] 16(2):223–236.
2. Gorbunov, K. Yu., and V. A. Lyubetsky. 2017 (in press). Lineynyy algoritm minimal'noy perestroyki struktur [Linear algorithm of the minimal reconstruction of structures under different operation costs]. *Problemy peredachi informatsii* [Problems of Information Transmission] 53(1).
3. Lyubetsky, V. A., R. A. Gershgorin, A. V. Seliverstov, and K. Yu. Gorbunov. 2016. Algorithms for reconstruction of chromosomal structures. *BMC Bioinformatics* 17:40.1–40.23.
4. Da Silva, P. H., R. Machado, S. Dantas, and M. D. V. Braga. 2013. DCJ-indel and DCJ-substitution distances with distinct operation costs. *Algorithm. Mol. Biol.* 8:21.1–21.15.
5. Compeau, P. E. C. 2014. A generalized cost model for DCJ-indel sorting. *Algorithms in bioinformatics*. Eds. D. G. Brown and B. Morgenstern. Lecture notes in computer science ser. Springer. 8701:38–51.
6. Gorbunov, K. Yu., R. A. Gershgorin, and V. A. Lyubetsky. 2015. Rearrangement and inference of chromosome structures. *Mol. Biol.* 49(3):327–338.
7. Gorbunov, K. Yu., and V. A. Lyubetsky. 2016. Modifitsirovannyy algoritm preobrazovaniya khromosomnykh struktur: Usloviya absolyutnoy tochnosti [Modified algorithm for transformation of chromosome structures: Conditions of absolute accuracy]. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie* [Modern Information Technologies and IT Education] 12(1):162–172.
8. Compeau, P. E. C. 2013. DCJ-indel sorting revisited. *Algorithm. Mol. Biol.* 8:6.1–6.9.

Received April 26, 2016

Contributors

Gorbunov Konstantin Yu. (b. 1965) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, leading scientist, A. A. Kharkevich Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences, 19-1 Bolshoy Karetny Per., Moscow 127051, Russian Federation; gorbunov@iitp.ru

Lyubetsky Vassily A. (b. 1945) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Head of Laboratory, A. A. Kharkevich Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences, 19-1 Bolshoy Karetny Per., Moscow 127051, Russian Federation; professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Main Building, Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; lyubetsk@iitp.ru

ИНДИВИДУАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ В РЕЖИМЕ ВЕБ-КОНФЕРЕНЦИИ НА ОСНОВЕ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ НЕЧЕТКОЙ ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЫ

А. С. Алексейчук¹, А. В. Пантелеев²

Аннотация: Рассматривается модель учебного процесса, реализуемого системой дистанционного обучения (СДО) в формате веб-конференции. Приводится постановка задачи индивидуализации учебного процесса (построения индивидуальной траектории обучения) для каждого студента путем выбора подходящего уровня сложности заданий. Предложен способ индивидуализации процесса обучения при помощи методов искусственного интеллекта и приведено описание программного комплекса, реализующего как дистанционное обучение в формате веб-конференции, так и управление процессом обучения при помощи входящей в его состав иерархической нечеткой экспертной системы. Данная система назначает каждому студенту наиболее рекомендуемый уровень сложности предстоящего занятия, исходя из имеющихся исходных данных о студенте и данных об оценках за предыдущие занятия, и таким образом автоматически формирует расписание занятий, группируя студентов с близким уровнем подготовки. Приведен пример расчетов, производимых экспертной системой при построении индивидуальной траектории обучения студента.

Ключевые слова: дистанционное обучение; веб-конференция; экспертная система; иерархический нечеткий вывод

DOI: 10.14357/19922264170108

1 Введение

В настоящее время перспективным направлением информатизации образования в вузах является применение СДО со встроенными системами веб-конференций, позволяющими всем участникам учебного процесса видеть и слышать друг друга в режиме реального времени. Особенностью подобных СДО является то, что взаимодействие студентов и преподавателя происходит в заранее определенное время, а трудоемкость проведения занятий быстро возрастает с ростом числа участников конференции. В данной статье предложен подход к планированию занятий, заключающийся в разделении студентов на группы и проведении занятий отдельно с использованием задач различного уровня сложности. Это позволит обеспечить присутствие на каждом практическом занятии студентов с сопоставимым уровнем подготовки и одновременно индивидуализировать процесс обучения каждого студента. Для реализации индивидуального подхода предлагается использовать иерархическую нечеткую экспертную систему, основанную на модели нечеткого логического вывода [1]. Ее задача в СДО, предназначенной для выработки навыков решения типовых задач предмета, — выбирать

для каждого студента очередной уровень сложности решаемых задач в зависимости от текущего уровня его подготовки.

Нечеткие системы уже нашли применение в сфере высшего образования. Так, в [2] предлагается использовать иерархическую нечеткую базу знаний для вычисления общего рейтинга студента, учитывающего его академическую успеваемость, общественную и научно-исследовательскую деятельность и т. д. В [3] рассмотрено проектирование иерархической нечеткой экспертной системы, предназначенной для планирования набора студентов в вуз. В [4] предлагается использовать систему иерархического нечеткого вывода для построения рейтинга студентов на основе информации об оценке за каждое задание, затраченном времени и экспертных оценках сложности данного задания. Имеются примеры применения методов искусственного интеллекта для индивидуализации процесса обучения в СДО, не относящихся к системам реального времени [5]. Описаний систем управления учебным процессом в СДО реального времени, а также примеров применения нечетких систем в сфере обучения в режиме реального времени в отечественной и зарубежной научной литературе не приводилось. Поэтому предметом исследо-

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), alexejchuk@gmail.com

²Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), avpanteliev@inbox.ru

вательского интереса стало применение нечеткой экспертной системы при практическом использовании СДО для управления учебным процессом и индивидуализации процесса обучения каждого студента.

2 Постановка задачи формирования индивидуальной траектории обучения

Пусть учебным планом по дисциплине предусмотрено некоторое число занятий N . Сценарий обучения включает встречу участников в назначенное время в виртуальной аудитории, объяснение материала преподавателем с использованием доступных мультимедийных средств, а также решение всеми участниками одного или нескольких типовых заданий (упражнений) в реальном времени под контролем преподавателя. После каждого занятия по его результатам с учетом предыстории и данных о начальном уровне подготовки студенты делятся на три нечетких класса: «сильные», «средние» и «слабые». Преподаватель для одного и того же занятия составляет несколько вариантов (уровней) учебных заданий, различающихся по сложности, и дает оценки сложности каждого созданного уровня для каждого класса студентов. Перед следующим занятием происходит процедура составления расписания, при котором каждому студенту из числа изучающих данную дисциплину назначается один определенный уровень сложности заданий предстоящего занятия. Соответственно, множество студентов S разбивается на подмножества, соответствующие уровням сложности этого занятия. Количество и состав этих подмножеств зависят от числа уровней сложности занятий и меняется от занятия к занятию. Последовательность уровней сложности, проходимых каждым студентом при посещении всех занятий изучаемой дисциплины, образует его индивидуальную траекторию обучения.

Определение. Индивидуальная траектория обучения студента T — это последовательность пар вида $\langle \text{номер занятия; номер уровня сложности решаемых студентом на занятии задач} \rangle$.

Обозначим через $i \in [1, N]$ номер текущего занятия, т. е. ближайшего предстоящего занятия, для которого составляется расписание, если $(i - 1)$ -е занятие уже проведено. Модель занятия в рассматриваемой СДО представляет собой кортеж

$$(M_i, (X_{i1}, \bar{C}_i(1)), (X_{i2}, \bar{C}_i(2)), \dots, (X_{iM_i}, \bar{C}_i(M_i))), i \in [1, N],$$

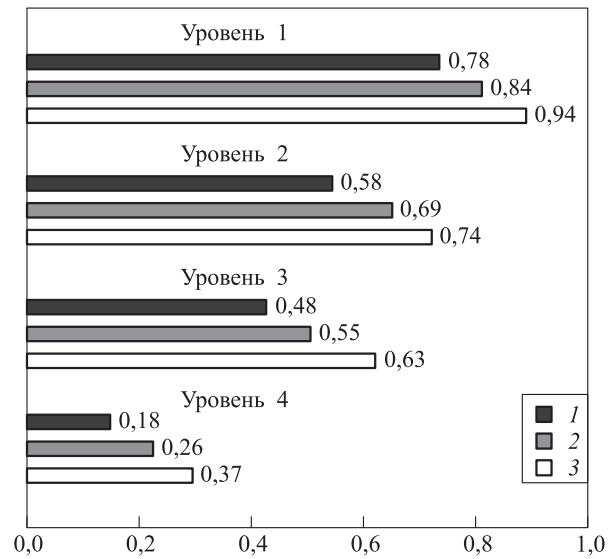


Рис. 1 Пример оценок сложности задания: 1 — сильные студенты; 2 — средние; 3 — слабые студенты

где M_i — число уровней сложности i -го занятия; X_{i1}, \dots, X_{iM_i} — текстовые, графические и формульные материалы для каждого уровня сложности, хранящиеся в базе данных; $\bar{C}_i(1), \dots, \bar{C}_i(M_i)$ — оценки сложности каждого уровня. Обозначим через $j \in [1; M_i]$ номер рассматриваемого уровня сложности текущего занятия. Оценка сложности для j -го уровня представляется вектором $\bar{C}_i(j) = (C_{i1}(j), C_{i2}(j), C_{i3}(j))$, где $C_{i1}(j) \in [0, 1]$ — оценка сложности j -го уровня i -го занятия для класса «сильные»; $C_{i2}(j)$ — оценка сложности для класса «средние»; $C_{i3}(j)$ — оценка для класса «слабые». На рис. 1 проиллюстрирован пример оценок сложности для занятия, включающего четыре уровня сложности.

В качестве модели студента используются тройки величин $\langle \langle w \rangle_1^{i-1}, w_{i-1}, \bar{D} \rangle$. Здесь

- $\langle w \rangle_1^{i-1} \in [0; 1]$ — средневзвешенная сумма оценок, полученных студентом по данной дисциплине с первого до $(i - 1)$ -го занятия включительно (при их наличии), вычисляемая по формуле:

$$\langle w \rangle_1^{i-1} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} e^{-\beta(i-k-1)} w_k}{\sum_{k=1}^{i-1} e^{-\beta(i-k-1)}}, i \geq 2, \quad (1)$$

где $w_k \in [0; 1]$ — оценка за k -е занятие, $k = 1, \dots, N$; $\beta \in [0, \beta_{\max}]$ — задаваемый преподавателем параметр, характеризующий скорость уменьшения влияния предыдущих оценок на средневзвешенную сумму и позволяющий учи-

тывать изменение подготовленности студента по данной дисциплине со временем;

- $w_{i-1} \in [0; 1]$ — оценка, полученная студентом за предыдущее занятие (при наличии);
- \bar{D} — вектор, содержащий общие данные о студенте, имеющиеся на момент его поступления в учебное заведение: возраст, пол, отделение (платное или бюджетное), средний балл в аттестате, оценка за единый государственный экзамен (ЕГЭ) по дисциплине и оценка за вступительный тест. Пол студента и отделение представлены числовыми значениями: 0 — мужской пол, 1 — женский пол; 0 — бюджетное отделение, 1 — платное отделение.

Требуется создать модель работы информационной системы, автоматически составляющей расписание проведения текущего занятия для различных уровней, т. е. формирующей разбиение множества студентов S на подмножества S_1, S_2, \dots, S_{M_i} , соответствующие уровням сложности занятия.

Для разбиения множества S требуется вычислить рекомендуемый номер уровня J_i текущего занятия для каждого студента с использованием всей доступной информации, содержащейся в модели студента и модели занятия, т. е. $J_i = J_i(\langle w \rangle_1^{i-1}, w_{i-1}, \bar{D}, \bar{C}_{i-1}(J_{i-1}), \{\bar{C}_i(j)\}_{j=1}^{M_i})$, $i \geq 2$. Для $i = 1$ (первого занятия) номер рекомендуемого уровня должен определяться без учета оценки за предыдущее занятие и истории оценок, т. е. $J_1 = J_1(\bar{D}, \{\bar{C}_1(j)\}_{j=1}^{M_1})$.

Для построения математической модели задачи выбора рекомендуемого уровня сложности введем понятие степени рекомендуемости.

Определение. Степень рекомендуемости — это числовой параметр $Q_i(j) \in [0; 1]$, соответствующий

данному студенту и j -му уровню сложности i -го занятия и отражающий степень соответствия этого уровня сложности текущему состоянию модели студента.

Вычислив $Q_i(j)$ для всех $j = 1, \dots, M_i$, можно определить рекомендуемый уровень, для которого достигается максимум степени рекомендуемости:

$$J_i = \arg \max_{j=1, \dots, M_i} Q_i(j).$$

Индивидуальная траектория обучения, сформированная в соответствии с этой моделью, будет иметь вид:

$$T = (\langle 1, J_1 \rangle, \langle 2, J_2 \rangle, \langle 3, J_3 \rangle, \dots, \langle N, J_N \rangle).$$

3 Структура иерархической нечеткой экспертной системы

Для построения траекторий обучения студентов предлагается экспертная система, интегрированная в единую среду с рассматриваемой СДО. Она представляет собой информационную систему, основанную на методах искусственного интеллекта и использующую механизм нечеткого вывода. Структура экспертной системы приведена на рис. 2. В ее состав входят следующие компоненты: пять блоков фаззификации, два блока композиции, три блока нечеткого вывода и блок дефаззификации.

Для моделирования переменных используются лингвистические переменные с конечным набором термов, выбранных таким образом, чтобы экспертам было удобно составлять правила нечеткого вывода на естественном языке, например: «Если сбалансированная оценка за предыдущее занятие отличная, текущая задача сложная и текущая успеваемость студента средняя, то значение степени рекомендуемости текущей задачи — высокое».

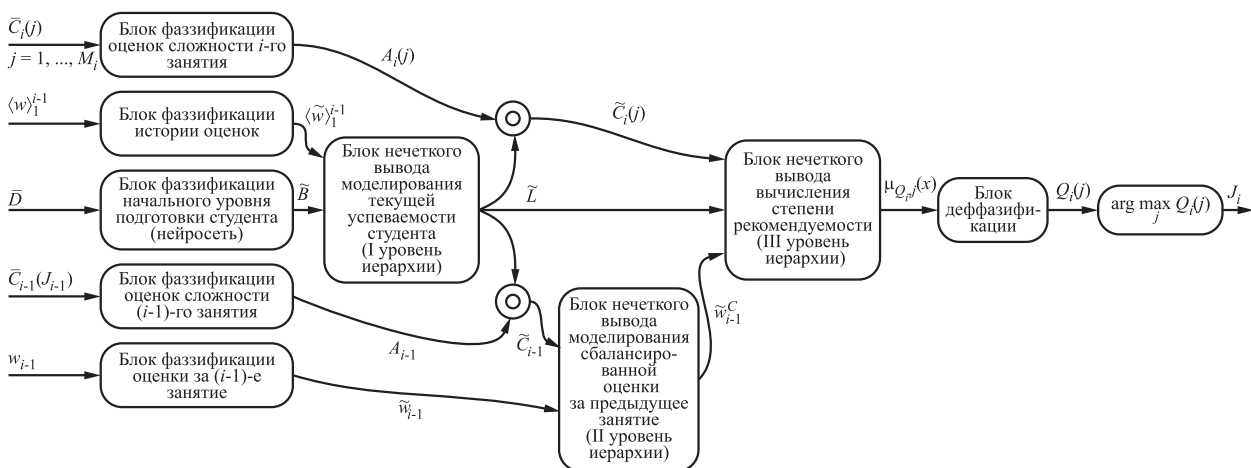


Рис. 2 Структурная схема иерархической нечеткой экспертной системы

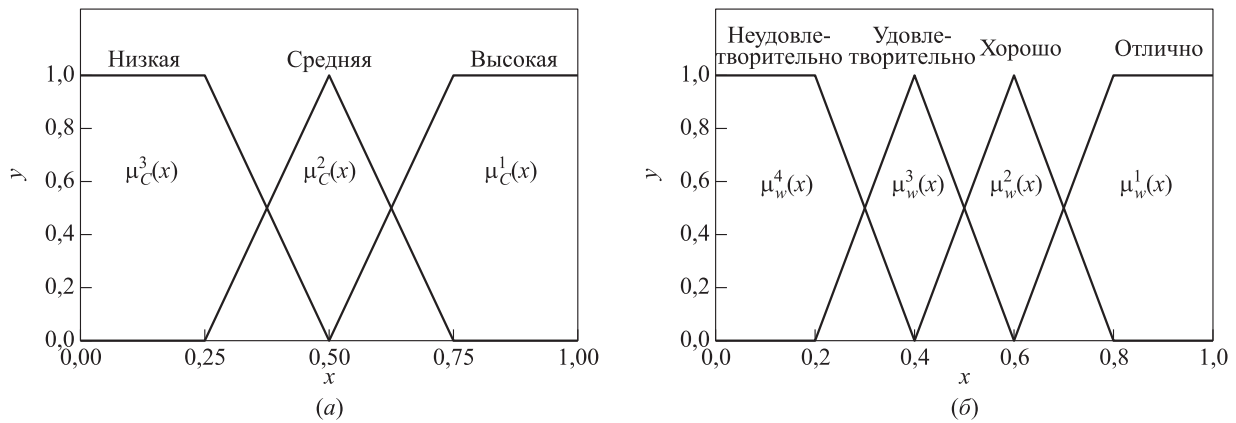


Рис. 3 Функции принадлежности термов переменных C «сложность занятия» (а) и W «оценка за занятие» (б)

Блок фаззификации оценок сложности i -го занятия осуществляет фаззификацию оценок сложности j -го уровня текущего занятия, представленных компонентами вектора $\bar{C}_i(j) = (C_{i1}(j), C_{i2}(j), C_{i3}(j))$. Графики функций принадлежности термов $\mu_C^1(x)$, $\mu_C^2(x)$ и $\mu_C^3(x)$ лингвистической переменной C «сложность занятия» приведены на рис. 3, а. Выход блока — матрица $A_i(j) = \|a_{kp,i}(j)\|$, где $a_{kp,i}(j) = \mu_C^k(C_{ip}(j))$, $k = \overline{1,3}$, $p = \overline{1,3}$, $j = 1, \dots, M_i$.

Следующий за ним блок композиции осуществляет вычисление вектора $\tilde{C}_i(j)$, соответствующего степеням принадлежности сложности текущего задания для данного студента термам лингвистической переменной C «сложность задания» с термножеством $T_C = \{\text{«высокая»}, \text{«средняя»}, \text{«низкая»}\}$. Для расчета используется модель текущей успеваемости студента, которой соответствует лингвистическая переменная L «текущая успеваемость» с термножеством $T_L = \{\text{«высокая»}, \text{«средняя»}, \text{«низкая»}\}$. Вычисление производится при помощи оператора максиминной композиции по формуле $\tilde{C}_i(j) = A_i(j) \circ \bar{L}$, где $A_i(j)$ — матрица, представляющая результат фаззификации всех компонент вектора $\bar{C}_i(j)$; \bar{L} — вектор, представляющий значение лингвистической переменной L «текущая успеваемость». Компоненты вектора $\tilde{C}_i(j)$ вычисляются по формуле:

$$\tilde{C}_{k,i}(j) = \max_{p=\overline{1,3}} \min \{a_{kp,i}(j), L_p\}, \quad k = \overline{1,3}.$$

Блок фаззификации оценок сложности ($i - 1$)-го занятия осуществляет фаззификацию оценок сложности предыдущего пройденного занятия $\bar{C}_{i-1}(J_{i-1})$. Номер предыдущего уровня сложности J_{i-1} известен и хранится в базе данных. Выходом блока является матрица $A_{i-1}(J_{i-1}) = \|a_{kp}(J_{i-1})\|_{i-1}$, где $a_{kp}(J_{i-1}) = \mu_C^k(C_{i-1,p}(J_{i-1}))$.

Принцип работы этого блока и следующего за ним блока композиции аналогичны принципам работы блока фаззификации оценок сложности i -го занятия и следующего за ним блока композиции.

Блок фаззификации оценки за ($i - 1$)-е занятие осуществляет вычисление вектора, соответствующего степеням принадлежности оценки за предыдущее пройденное занятие термам лингвистической переменной W «оценка за занятие». Входной переменной блока является значение оценки w_{i-1} , принимающее непрерывные значения из отрезка $[0, 1]$, а выход — вектор

$$\tilde{w}_{i-1} = (\mu_w^1(w_{i-1}) \mu_w^2(w_{i-1}) \mu_w^3(w_{i-1}) \mu_w^4(w_{i-1}))^T.$$

Поскольку для составления правил вывода преподавателю удобно оперировать привычными оценками из четырехбалльной системы, то в качестве термножества лингвистической переменной W выбрано множество $T_W = \{\text{«отлично»}, \text{«хорошо»}, \text{«удовлетворительно»}, \text{«неудовлетворительно»}\}$. Функции принадлежности термов приведены на рис. 3, б. Если система оценки знаний имеет вид «зачет–незачет», то используются два термина и соответствующие функции принадлежности.

Блок фаззификации средневзвешенной суммы оценок осуществляет вычисление вектора, соответствующего степеням принадлежности средневзвешенной суммы оценок термам лингвистической переменной W «оценка за занятие». В случае отсутствия истории оценок у данного студента блок исключается из работы системы. Входной переменной является средневзвешенная сумма оценок $\langle w \rangle_1^{i-1}$, вычисленная по формуле (1). Работа блока аналогична работе блока фаззификации оценки за ($i - 1$)-е занятие.

Блок фаззификации начального уровня подготовки студента предназначен для моделирования начального уровня успеваемости каждого студента на основе общей информации о студентах, хра-

нящейся в базе данных. Модель начального уровня успеваемости студента представлена лингвистической переменной «начальный уровень успеваемости» с терм-множеством $T_B = \{\text{«сильный»}, \text{«средний»}, \text{«слабый»}\}$.

Задачу вычисления степеней принадлежности уровня данного студента термам лингвистической переменной B можно рассматривать как задачу нечеткой классификации при наличии обучающей выборки. Нечеткая классификация представляет собой разбиение множества студентов на три класса — «сильные», «средние» и «слабые», при которой каждый студент может принадлежать одновременно нескольким классам с различной степенью принадлежности. Каждый элемент обучающей выборки содержит вектор признаков \bar{D} , а также экспертную информацию о том, к каким классам и с какой степенью принадлежности относится данный студент.

Блок фаззификации реализован на основе нейронной сети. Вход блока — вектор признаков рассматриваемого студента \bar{D} с координатами, приведенными линейным преобразованием к отрезку $[-1, 1]$. Выход блока — вектор-столбец $\bar{B} = \|b_i\|$, $i = \overline{1, 3}$, где b_i — степень принадлежности студента i -му классу. Для экспериментального определения конфигурации сети и ее обучения была использована выборка из 220 записей о студентах. Проведено многократное обучение сети с различными вариантами архитектуры и параметрами алгоритмов обучения. В результате получена следующая конфигурация. Архитектура сети представляет собой многослойный перцептрон с 6 входными нейронами (в соответствии с размерностью вектора \bar{D}), двумя скрытыми слоями (4 нейрона в первом скрытом слое, 5 нейронов во втором) и 3 нейронами выходного слоя. Функция активации нейронов скрытых слоев — симметричная сигмоидная, описываемая формулой

$$f_z(x) = \frac{2}{1 + e^{-zx}} - 1$$

с крутизной функции активации $z = 0,7$. Алгоритм обучения — «быстрый алгоритм обратного распространения ошибки» (resilient propagation algorithm) [6], число эпох обучения — 70.

Следующие друг за другом три блока нечеткого вывода образуют иерархическую систему, где результаты работы первого и второго блоков не подвергаются дефаззификации, а непосредственно передаются на вход третьего блока. Каждый из блоков нечеткого вывода использует схему нечеткого вывода Мамдани [1, 7]. Структура базы знаний каждого из блоков представляется в виде набора лингвистических правил вида:

$$R_l : \text{Если } x_1 \text{ есть } A_{l1} \text{ и } x_2 \text{ есть } A_{l2} \text{ и } \dots \\ \dots \text{ и } x_p \text{ есть } A_{lp}, \text{ то } y \text{ есть } B_l^m, \quad l = 1, \dots, L,$$

где L — количество правил вывода блока; x_1, \dots, x_p — входные лингвистические переменные; A_{l1}, \dots, A_{lp} — термы входных переменных; y — выходная лингвистическая переменная; B_l^m ($m = 1, \dots, K_y$) — m -й терм выходной переменной, находящийся в заключении l -го правила; K_y — число термов выходной переменной; p — количество входных переменных блока.

Блок нечеткого вывода I уровня иерархии (моделирования текущей успеваемости студента) принимает на вход средневзвешенную сумму оценок $\langle \tilde{w} \rangle_1^{i-1}$ и начальный уровень подготовки студента \bar{B} . Выход блока — вектор \tilde{L} , представляющий значение лингвистической переменной L «текущая успеваемость студента». Правила вывода блока приведены в табл. 1.

Блок нечеткого вывода II уровня иерархии (моделирования сбалансированной оценки за предыдущее занятие) принимает на вход переменные: \tilde{C}_{i-1} — нечеткая оценка сложности пройденного уровня ($i - 1$)-го занятия для данного студента; \tilde{w}_{i-1} — оценка, полученная студентом на предыдущем занятии. Выход блока — вектор \tilde{w}_{i-1}^C , представляющий степени принадлежности сбалансированной оценки термам лингвистической переменной W «оценка за занятие». Сбалансированная оценка — это оценка, скорректированная с учетом соответствия сложности данной задачи уровню подготовки студента. Правила вывода блока II уровня приведены в табл. 2.

В случае отсутствия оценки за предыдущее занятие блок исключается из работы экспертной системы.

Таблица 1 Значения переменной «текущая успеваемость студента»

Начальный уровень студента	Взвешенная средняя оценка				
	Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно	Отсутствует
Сильный	Высокая	Средняя	Средняя	Низкая	Высокая
Средний	Высокая	Средняя	Низкая	Низкая	Средняя
Слабый	Средняя	Средняя	Низкая	Низкая	Низкая

Таблица 2 Значения переменной «сбалансированная оценка»

Оценка за занятие	Сложность занятия		
	Высокая	Средняя	Низкая
Отлично	Отлично	Отлично	Хорошо
Хорошо	Хорошо	Хорошо	Удовлетворительно
Удовлетворительно	Хорошо	Удовлетворительно	Удовлетворительно
Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Неудовлетворительно	Неудовлетворительно

Таблица 3 Значения переменной «степень рекомендуемости»

Успеваемость	Сложность		
	Высокая	Средняя	Низкая
Сильный	Очень высокая	Высокая	Очень низкая
Средний	Высокая	Высокая	Низкая
Слабый	Средняя	Очень высокая	Высокая

Блок нечеткого вывода III уровня иерархии (вычисления степени рекомендуемости) принимает на вход переменные: \tilde{C}_i — оценка сложности j -го уровня i -го (текущего) занятия для данного студента; \tilde{L} — текущий уровень подготовки студента; \tilde{w}_{i-1}^C — сбалансированная оценка за предыдущее занятие (при наличии). Выход блока представляет собой агрегированную функцию принадлежности $\mu_{Q,i,j}(x)$ лингвистической переменной Q «степень рекомендуемости» с терм-множеством $T_Q = \{\text{«очень высокая», «высокая», «средняя», «ниже среднего», «низкая»}\}$.

Правила вывода блока при оценке «отлично» за предыдущее занятие представлены в табл. 3. Подобным образом составлены правила вывода и для других значений оценки за предыдущее занятие — «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» и для случая отсутствия оценки.

Нечеткий вывод по схеме Мамдани включает следующие этапы.

Первый этап — нахождение степени истинности антецедента каждого правила с использованием операции вычисления минимума:

$$\alpha_l = \min_{k=1,\dots,p} A_{lk}, \quad l = 1, \dots, L.$$

Второй этап — это процедура нахождения степени принадлежности выходной переменной \tilde{y} термам выходной переменной блока. Обозначим через $\{l_n\}$ множество номеров правил вывода, содержащих в заключении n -й терм выходной переменной B_l^n . Тогда в блоках I и II уровня иерархии n -я компонента вектора выходной переменной \tilde{y} будет определяться по формуле:

$$y_n = \max_{l \in \{l_n\}} \{\alpha_l\} = \max_{l \in \{l_n\}} \left\{ \min_{k=1,\dots,p} A_{lk} \right\}.$$

Для I и II блоков на этом этапе алгоритм работы заканчивается, и вектор выходной переменной \tilde{y} передается на следующий уровень иерархии вывода. В III блоке предусмотрены еще два этапа — активизация подзаключений и агрегация. Пусть $\mu_{Q_l,i,j}(x)$ — функция принадлежности l -го термина выходной переменной Q для j -го уровня i -го занятия. Активизация подзаключений представляет собой построение усеченных функций принадлежности $\mu_{Q_l,i,j}^*(x)$ с уровнем отсечения α_l :

$$\mu_{Q_l,i,j}^*(x) = \min \{ \mu_{Q_l,i,j}(x), \alpha_l \}, \quad l = 1, \dots, L.$$

Затем производится агрегация путем объединения полученных усеченных функций принадлежности:

$$\mu_{Q,i,j}(x) = \max_{l=1,\dots,L} \mu_{Q_l,i,j}^*(x).$$

Блок дефаззификации принимает на вход агрегированную функцию принадлежности $\mu_{Q,i,j}(x)$ из III блока нечеткого вывода, а выходом блока является окончательное числовое значение степе-

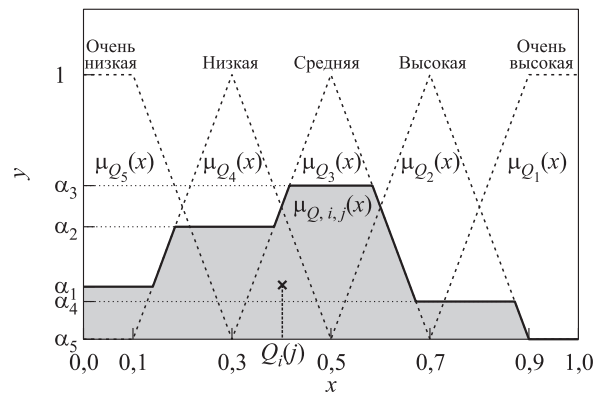


Рис. 4 Дефаззификация выходной переменной

ни рекомендуемости $Q_i(j)$. Дефаззификация в этом блоке производится методом поиска «центра тяжести» (рис. 4) по формуле:

$$Q_i(j) = \frac{\int_0^1 x \mu_{Q_i,j}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{Q_i,j}(x) dx} \quad (2)$$

Интегралы в формуле (2) находятся численно с использованием метода трапеций.

После нахождения искомой степени рекомендуемости $Q_i(j)$ для всех $j = 1, \dots, M_i$ студенту назначается уровень J_i с наибольшим значением Q_i . Расчет по приведенной выше методике производится для каждого студента, и в соответствии с результатами расчетов составляется расписание, в котором каждому студенту назначен наиболее рекомендуемый ему уровень.

4 Структура системы дистанционного обучения

Экспертная система, рассмотренная в статье, входит в состав системы дистанционного обучения, обеспечивающей полноценный учебный процесс и включающей в себя функции администрирования, управления пользователями (студентами

и преподавателями), составления учебных планов и заданий, подготовки и проведения занятий, анализа результатов студентов в различных разрезах, проведения открытых веб-конференций и консультаций. Набор функций системы и порядок работы с ней подробно рассмотрены в [8].

Структура компонентов СДО показана на рис. 5 в виде UML (unified modeling language) диаграммы. В структуре можно выделить пять основных компонентов: клиентское приложение, серверное приложение, медиасервер, HTTP (hypertext transfer protocol) сервер и система управления базой данных (СУБД). В качестве HTTP-сервера и СУБД использованы готовые программные решения — Nginx и PostgreSQL, остальные компоненты являются оригинальными.

Серверное приложение обрабатывает HTTP-запросы от клиентов, создает и обрабатывает запросы к базе данных, формирует страницы веб-интерфейса (front-end) программного комплекса, отвечает за авторизацию пользователей. Приложение создано с использованием фреймворка Ruby on Rails. Экспертная система входит в состав серверного приложения в виде библиотеки алгоритмов, написанных на языке Ruby.

Клиентское приложение для проведения веб-конференций представляет собой графическое SWF (Small Web Format) приложение, встроенное в веб-

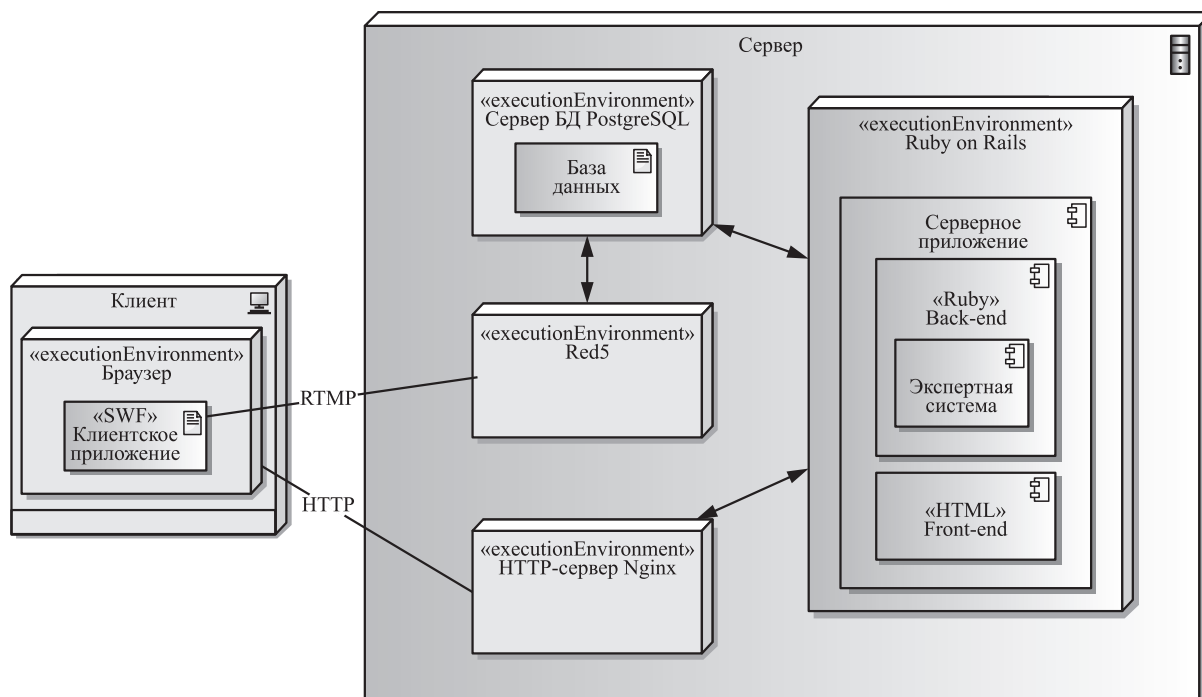


Рис. 5 Структурная схема СДО

интерфейс программного комплекса. Приложение служит для отображения пользовательского интерфейса веб-конференции, обработки и синхронизации действий пользователей, кодирования и декодирования аудио- и видеопотоков. Приложение реализовано на основе Flash-технологии.

HTTP-сервер — это промежуточный компонент, который перенаправляет HTTP-запросы пользователей серверному приложению и передает ответы приложения обратно пользователям, а также передает статические ресурсы — файлы изображений, CSS (cascading style sheet) и JS (Java Script) файлы, SWF-файл клиентского приложения.

Медиасервер — это компонент, осуществляющий обмен аудио- и видеопотоками между всеми участниками веб-конференции и обеспечивающий работу мультимедийных функций режима реального времени: показ презентаций, рисование на виртуальной доске, обмен файлами, показ рабочего стола, общение в чате, решение математических задач в графическом интерфейсе с WYSIWYG (what you see is what you get) редактором. Медиасервер реализован при помощи технологии Java.

5 Моделирование траектории обучения для одного студента

Рассмотрим результат моделирования индивидуальной траектории для одного студента при помощи указанной СДО.

Моделируемый курс состоит из $N = 7$ занятий, для каждого из которых задано $M_i = 4$ уровня сложности заданий. Уровни пронумерованы в порядке уменьшения сложности. Пример оценок сложности для одного из занятий приведен на рис. 1, для остальных занятий оценки сложности выглядят аналогично. В случае получения оценки ниже

порогового значения в 60% по какому-либо занятию студенту назначается повторное прохождение того же занятия, а требуемый уровень сложности вновь определяется экспертной системой с учетом последней полученной оценки. Обучение считается законченным, когда выполняется условие $w_N \geq 60\%$, т. е. студент получил положительные оценки за все занятия курса.

В табл. 4 приведены результаты расчета траектории. Показаны степени рекомендуемости для каждого уровня сложности и выделен уровень с наибольшей степенью рекомендуемости. В последнем столбце приведена последовательность оценок w_i , использованных для моделирования процесса обучения. Выбраны следующие исходные данные о студенте: возраст — 17 лет; пол — мужской; отделение — бюджетное; средняя оценка в аттестате — 4,0; оценка за ЕГЭ по изучаемой дисциплине — 52 балла; оценка за вступительный тест — 57 баллов.

На рис. 6 приведена визуализация полученной траектории. Прямоугольниками выделено повторное прохождение одного и того же занятия после получения оценки ниже 60%.

Как видно из графика, экспертная система рекомендовала начать обучение со второго уровня сложности ввиду хороших, но не самых высоких входных результатов студента. После получения высокой оценки (100%) система предложила решать задачи первого, самого сложного уровня. После получения низкой оценки (45%) за третье занятие студенту предложено пройти второй, более простой уровень того же занятия. Далее после получения высоких оценок траектория возвращается к первому уровню. После получения очень низких оценок траектория спускается до самого простого, четвертого уровня. Далее траектория вновь поднимается до второго уровня, но не до первого, так

Таблица 4 Результаты моделирования траектории обучения

Номер попытки	Номер занятия	Степень рекомендуемости уровней сложности				Рекомендуемый уровень	Оценка за занятие
		1	2	3	4		
1	1	0,525	0,560	0,493	0,475	2	100
2	2	0,793	0,773	0,547	0,528	1	100
3	3	0,853	0,755	0,425	0,147	1	45
4	3 (повтор)	0,580	0,620	0,519	0,419	2	90
5	4	0,595	0,634	0,567	0,438	2	95
6	5	0,832	0,683	0,549	0,167	1	40
7	5 (повтор)	0,474	0,698	0,640	0,512	2	30
8	5 (повтор)	0,405	0,577	0,577	0,601	4	70
9	6	0,470	0,552	0,567	0,557	3	80
10	7	0,487	0,556	0,506	0,457	2	100

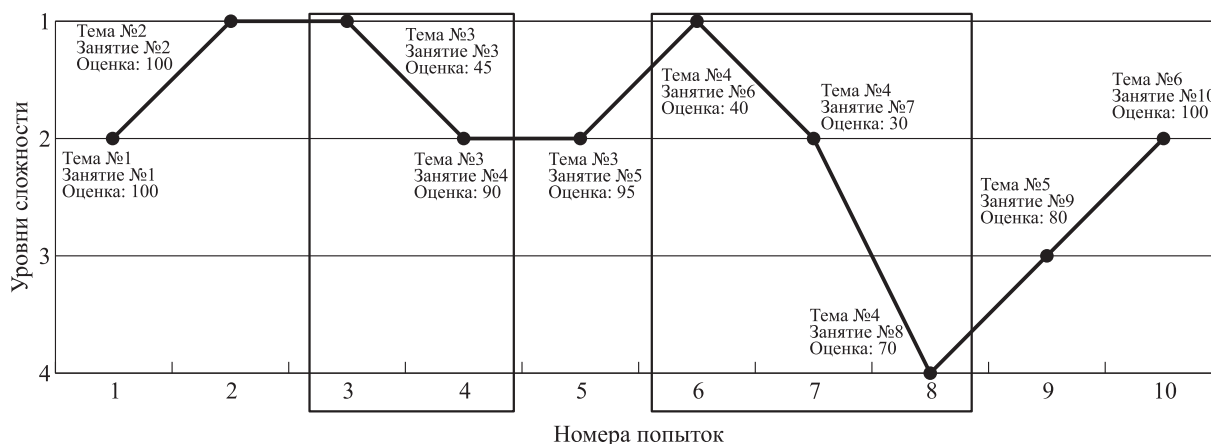


Рис. 6 Пример траектории обучения студента

как сказывается недавняя история низких оценок за 5-е занятие.

6 ВЫВОДЫ

В статье приведено описание системы дистанционного обучения на основе веб-конференций, позволяющей планировать и проводить занятия в режиме реального времени.

Предложена иерархическая нечеткая экспертная система, основанная на методах искусственного интеллекта, позволяющая автоматически обрабатывать информацию о студентах и экспертные данные для помощи преподавателю в формировании стратегии обучения каждого студента. Как следует из результатов моделирования, разработанная система эффективно справляется с построением индивидуальной траектории студента, учитывая начальный уровень подготовки студента и изменение его уровня подготовки в процессе накопления истории полученных результатов обучения и оперативно реагируя на получение различных текущих оценок.

На кафедре «Математическая кибернетика» МАИ было проведено тестирование созданной системы для дистанционного обучения студентов факультета, расположенного в г. Луховицы. Получены положительные отзывы студентов и администрации об удобстве и функциональности разработанной СДО, а также значительно упрощена работа преподавателя благодаря разделению занятий разного уровня сложности со студентами сопоставимого уровня подготовки.

Литература

1. Passino K. M., Yurkovich S. Fuzzy control. — Addison Wesley Longman, 1998. 502 p.
2. Гоннов С. И. Разработка нечеткой модели общего рейтинга студента на основе иерархической базы // Студенческий научный форум: Мат-лы III конф. — СПб: СПбГЭУ, 2011. С. 1–6.
3. Берёза А. Н., Ершова Е. А. Поддержка принятия решения при планировании набора абитуриентов в вузе на основе нечетких моделей // Известия Южного федерального университета. Технические науки, 2011. № 7. С. 131–136.
4. Saleh I., Kim S. A fuzzy system for evaluating students' learning achievement // Expert Syst. Appl., 2009. Vol. 36. P. 6236–6243.
5. Stathacopoulou R., Magoulas G. D., Grigoriadou M., Samarakou M. Neuro-fuzzy knowledge processing in intelligent learning environments for improved student diagnosis // Inform. Sciences, 2005. Vol. 170. P. 273–307.
6. Igel Ch., Husken M. Empirical evaluation of the improved Rprop learning algorithms // Neurocomputing, 2003. Vol. 50. P. 105–123.
7. Mamdani E. H. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis // Fuzzy Set. Syst., 1977. Vol. 26. P. 1182–1191.
8. Алексейчук А. С. Программная система для обучения студентов экономических специальностей в режиме веб-конференции // Научный альманах. Вып. 21: Инновации в экономике и менеджменте в аэрокосмической промышленности: Мат-лы XII конф. молодых ученых и студентов. — М.: Доброе слово, 2016. С. 190–198.

Поступила в редакцию 7.10.16

MODELING INDIVIDUALIZATION OF THE LEARNING PROCESS IN THE FORM OF WEB CONFERENCE USING A HIERARCHICAL FUZZY EXPERT SYSTEM

A. S. Alekseychuk and A. V. Panteleev

Faculty of Applied Mathematics and Physics, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Highway, A-80, GSP-3, Moscow 125993, Russian Federation

Abstract: The paper describes a model of educational process in the form of web conference. The problem of individualization of learning process for each student is solved by selecting the appropriate level of difficulty for each lesson. The proposed method of individualization is implemented using artificial intelligence methods. The paper describes a software system that implements distance learning in the form of web conference as well as management of the learning process with a built-in hierarchical fuzzy expert system. This system assigns the most recommended level of difficulty of the upcoming lessons to each student using available initial data about the student and his or her previous grades. The system automatically generates a schedule where students with similar levels of performance are grouped together. An example of calculations made by the expert system is provided.

Keywords: distance learning; web conference; expert system; hierarchical fuzzy inference

DOI: 10.14357/19922264170108

References

1. Passino, K. M., and S. Yurkovich. 1998. *Fuzzy control*. Addison Wesley Longman, Inc. 502 p.
2. Goppov, S. I. 2011. Razrabotka nechetkoy modeli obshchego reytinga studenta na osnove ierarkhicheskoy bazy [The fuzzy model of general student rating based on hierarchical database]. *Mat-ly III konf. "Studencheskiy nauchnyy forum"* [3rd "Students Scientific Forum" Conference Proceedings]. Saint Petersburg: Saint Petersburg State University of Economics. 1–6.
3. Bereza, A. N., and E. A. Ershova. 2011. Podderzhka prinyatiya resheniya pri planirovanii nabora abiturientov v vuze na osnove nechetkikh modeley [Decision support in planning a set of entrants into university based on fuzzy models]. *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki* [Southern Federal University Izvestiya, Engineering Sciences] 7:131–136.
4. Saleh, I., and S. Kim. 2009. A fuzzy system for evaluating students' learning achievement. *Expert Syst. Appl.* 36:6236–6243.
5. Stathacopoulou, R., G. D. Magoulas, M. Grigoriadou, and M. Samarakou. 2005. Neuro-fuzzy knowledge processing in intelligent learning environments for improved student diagnosis. *Inform. Sciences* 170:273–307.
6. Igel, Ch., and M. Husken. 2003. Empirical evaluation of the improved Rprop learning algorithms. *Neurocomputing* 50:105–123.
7. Mamdani, E. H. 1977. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. *Fuzzy Set. Syst.* 26:1182–1191.
8. Alekseychuk, A. S. 2016. Programmnaya sistema dlya obucheniya studentov ekonomicheskikh spetsial'nostey v rezhime veb-konferentsii [Software system for teaching students of economic specialties in web conference form]. *Nauchnyy al'manakh. Vypusk 21: Mat-ly XII konf. molodykh uchenykh i studentov "Innovatsii v ekonomike i menedzhmente v aerokosmicheskoy promyshlennosti"* [Scientific almanac. Vol. 21: 12th Conference of Young Scientists and Students "Innovations in Economics and Management in the Aerospace Industry" Proceedings]. Moscow. 190–198.

Received October 7, 2016

Contributors

Alekseychuk Andrei S. (b. 1985) — PhD student, Faculty of Applied Mathematics and Physics, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Highway, A-80, GSP-3, Moscow 125993, Russian Federation; alexejchuk@gmail.com

Panteleev Andrei V. (b. 1955) — Doctor of Science in physics and mathematics; professor, Head of Department, Faculty of Applied Mathematics and Physics, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Highway, A-80, GSP-3, Moscow 125993, Russian Federation; avpanteleev@inbox.ru

НАДКОРПУСНАЯ БАЗА ДАННЫХ КОННЕКТОРОВ: ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ТЕРМИНОВ*

Анна А. Зализняк¹, И. М. Зацман², О. Ю. Инькова³

Аннотация: Рассматривается задача контрастивного исследования коннекторов русского языка с помощью надкорпусной базы данных (НБД), которая представляет собой новую категорию информационных лингвистических ресурсов. Надкорпусная база данных содержит параллельные выровненные тексты, в которых одному или нескольким предложениям поставлены в соответствие одно или несколько предложений их перевода. Первая характерная черта НБД заключается в возможности аннотирования исследуемых языковых единиц (ЯЕ), в данном случае коннекторов. Вторая состоит в том, что решение задачи аннотирования привело к появлению широкого спектра новых сущностей и понятий как в информатике, так и в лингвистике. Для их описания предлагается система терминов, носящая междисциплинарный характер. С одной стороны, эти термины используются лингвистами для представления новых фундаментальных знаний, полученных ими в процессе контрастивного исследования коннекторов русского языка. С другой стороны, они применяются при разработке архитектуры и функциональных подсистем НБД, а также для разработки информационного, лингвистического и программного видов обеспечения. Кроме того, эта система терминов необходима для сопоставления полученных результатов с имеющимися отечественными и зарубежными аналогами.

Ключевые слова: надкорпусная база данных; система терминов; аннотирование коннекторов; параллельные тексты; корпусная лингвистика; хронотипическая фасетная классификация

DOI: 10.14357/19922264170109

1 Введение

Аннотирование коннекторов с помощью НБД является одной из задач совместного российско-швейцарского проекта «Контрастивное корпусное исследование коннекторов русского языка», который в настоящее время выполняется в Институте проблем информатики ФИЦ ИУ РАН и на филологическом факультете Женевского университета. Одной из целей аннотирования является контрастивное исследование и статистический анализ с помощью НБД универсальных и лингвоспецифичных черт семантики русских коннекторов, т. е. служебных слов различных грамматических классов (сочинительные и подчинительные союзы, некоторые наречия, предлоги и частицы, а также единицы комплексной грамматической природы, получившие название «дискурсивные слова»), выполняющих связующую функцию [1–4].

Основная цель статьи заключается в описании системы терминов, разрабатываемой совместными усилиями лингвистов, переводчиков и специалистов в области информатики в рамках этого проек-

та. Определяемые термины, с одной стороны, необходимы лингвистам для разработки принципов аннотирования и представления новых фундаментальных знаний, полученных в процессе контрастивного исследования коннекторов русского языка и статистического анализа результатов их аннотирования. С другой стороны, они необходимы для описания требований к архитектуре, функциональным подсистемам, информационному, программному и лингвистическому видам обеспечения НБД.

В совместной работе лингвистов и специалистов по информатике, не владеющих, как правило, профессиональной лексикой друг друга, эта система терминов выполняет функцию *лингва франка*. Она создается ими с целью обеспечить когнитивную интероперабельность (взаимное понимание) участников в процессе выполнения ими проекта, в котором лингвистическая и информационно-компьютерная составляющие вплетены друг в друга.

Кроме того, создаваемая система терминов необходима для сопоставления получаемых в проекте

* Работа выполнена в Институте проблем информатики ФИЦ ИУ РАН при поддержке РФФИ (проект № 16-24-41002) и ШННФ (проект № IZLRZ1.164059).

¹ Институт языкознания Российской академии наук; Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, anna.zalizniak@gmail.com

² Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, izatsman@yandex.ru

³ Женевский университет, Olga.Inkova@unige.ch

результатов с имеющимися отечественными и зарубежными аналогами.

2 Надкорпусная база данных

Надкорпусная база данных, обеспечивающая возможность аннотирования анализируемых ЯЕ, относится к новой категории информационных лингвистических ресурсов [5, 6]. В ней одному или нескольким предложениям текста на русском языке поставлены в соответствие одно или несколько предложений их перевода на французский язык¹. Поставленные в соответствие предложения (или их последовательности) называются *текстовыми парами*. Надкорпусная база данных обеспечивает поиск пар по словам, сочетаниям слов и меткам их морфологической разметки (табл. 1).

В настоящее время в НБД загружены тексты параллельного французского подкорпуса Национального корпуса русского языка. Общий объем этого подкорпуса составляет около 3,5 млн словоупотреблений. В НБД предложениям на русском языке поставлены в соответствие их переводы на французский язык, всего 104 471 пара, а предложениям на французском языке — их переводы на русский язык, всего 13 402 пары. В обоих случаях объектом исследования являются коннекторы русского языка. При этом в первом случае одновременно

анализируются и их функционально эквивалентные фрагменты (ФЭФ — термин Д. Добровольского [7]), а во втором случае — те *стимулы* французского текста, переводами которых на русский язык являются исследуемые коннекторы² [4, 8, 9]. Поэтому в первом случае будем говорить о *прямом переводе*, а во втором — о *реверсивном*³.

Первое отличие НБД от параллельных корпусов текстов заключается в возможности аннотирования исследуемых ЯЕ в обоих направлениях перевода. В параллельных корпусах такая функция отсутствует. Более того, сам замысел электронных корпусов текстов не предполагает реализации в них подобных функций. Второе отличие состоит в том, что в процессе аннотирования конкретных ЯЕ в НБД программно формируются информационные объекты разной степени генерализации. Их формирование позволяет проводить многоаспектный статистический анализ исследуемых ЯЕ.

Для описания результатов аннотирования и порождаемых информационных объектов на первом этапе выполнения проекта стала создаваться система терминов. Отдельные термины, например *двухязычный кортеж*, *фасетная классификация (ФК) ЯЕ*, были определены в работе [10]. Фасетная классификация, используемая при аннотировании анализируемых ЯЕ в НБД, была названа *хронометрической* (термин вводится впервые); это обозначение отражает тот факт, что производимые экспертами по

Таблица 1 Первые четыре текстовые пары найденных в НБД коннекторов по сочетанию слов «не только» в русском тексте

Оригинальный текст	Перевод
Захар не старался изменить не только данного ему Богом образа, но и своего костюма, в котором ходил в деревне	Zakhar n'avait rien fait pour changer l'apparence que Dieu lui avait donnée ni le costume qu'il avait porté à la campagne
Он его представлял себе чем-то вроде второго отца, который только и дышит тем, как бы за дело и не за дело, сплошь да рядом, награждать своих подчиненных и заботиться не только о их нуждах, но и об удовольствиях	Il se l'imaginait comme une sorte de second père qui ne pensait qu'à distribuer des primes à ses employés, qu'ils le méritent ou non, à tort et à travers, et qu'à veiller non seulement à leurs besoins mais aussi à leur bien-être
Это происходило, как заметил Обломов впоследствии, оттого, что есть такие начальники, которые в испуганном до одурения лице подчиненного, выскочившего к ним навстречу, видят не только почтение к себе, но даже ревность, а иногда и способности к службе	Comme Oblomov le remarqua plus tard, la cause en était que certains supérieurs voyaient dans la mine effrayée d'un employé qui s'empressait à leur rencontre, non seulement une preuve de respect pour eux, mais aussi un signe de zèle et même d'aptitude au service
Со времени смерти стариков хозяйственные дела в деревне не только не улучшились, но, как видно из письма старосты, становились хуже	Depuis la mort des parents, les affaires du domaine non seulement ne s'amélioraient pas, mais, à en croire la lettre du régisseur, empiraient

¹ Использование в качестве единицы аннотирования последовательности из двух и более предложений обусловлено спецификой коннекторов как ЯЕ, устанавливающих логико-семантические отношения как между частями одного предложения, так и между предложениями.

² Термин *стимул перевода* в том значении, в котором он применяется в данных исследованиях ЯЕ, в том числе коннекторов, введен в работе [8] (см. также [4, 9]).

³ Термин *реверсивный перевод* предложен Н. В. Бунтман при обсуждении этой статьи.

ходу работы изменения числа и состава рубрик классификации фиксируются в форме *хронотипов* — состояний классификационных систем в последовательные дискретные моменты времени.

Следующий раздел содержит дефиниции основных терминов разработанной системы, которые относятся к моно- и двуязычным аннотациям, а также иллюстрирующие их примеры. В разд. 4 рассматриваются поливариантные и полиязычные аннотации.

3 Моно- и двуязычные аннотации

Выше уже были определены термины: *текстовая пара*, *прямой и реверсивный перевод*, *хронопическая классификация (классификационная система)* и ее *хронотипы*. Определение других терминов будет во многом основано на понятиях «*аннотация*» и «*аннотирование*» исследуемых ЯЕ, их ФЭФ, а также переводных соответствий ЯЕ и ФЭФ. Проиллюстрируем значение дефиниции понятия «*аннотация*» в контексте сопоставления ожидаемых результатов проекта с имеющимися аналогами.

Наиболее близким аналогом НБД совместного проекта является база данных Penn Discourse Treebank (PDTB), содержащая тексты на английском языке, объем которых равен приблизительно 1 млн словоупотреблений [11]. База данных PDTB была создана для исследования дискурсивных отношений и коннекторов как средств их выражения как внутри предложения, так и между предложениями. В PDTB сформировано 18 459 аннотаций коннекторов. В рассматриваемом совместном проекте на момент его завершения запланировано сформировать 5000 аннотаций коннекторов русского языка и их французских ФЭФ, полученных в процессе выполнения профессионального перевода, который будем называть *референтным переводом* (РП), так как в НБД он является эталоном при исследовании качества машинного перевода (МП) коннекторов [12, 13]. Одновременно будут сформированы 5000 аннотаций для МП, т. е. всего 10 000, при этом для МП берутся те же предложения оригинального текста, что и для РП. Тогда общее число аннотаций в НБД (10 000) будет почти в два раза

меньше, чем в PDTB (18 459). Однако реальное соотношение количества аннотаций в двух сравниваемых базах данных совсем иное, поскольку аннотации в PDTB являются моноязычными (МА), а в НБД — двуязычными (анализируются и описываются одновременно исследуемые коннекторы и их ФЭФ).

Приведенный пример иллюстрирует необходимость четкого определения как минимум трех видов аннотации: моно-, дву- и полиязычной (определения 1 и 2 даны без учета *вариантности* переводов; это понятие вводится в следующем разделе).

Определение 1. *Моноязычной аннотацией* исследуемой ЯЕ в НБД называется совокупность рубрик ФК ЯЕ, сформированная лингвистами в процессе семантического анализа ЯЕ, которой они приписывают структурированный текстовый комментарий; при этом идентификатор автора и дата создания аннотации формируются программно.

Аналогично определяется МА для ФЭФ исследуемой ЯЕ с использованием рубрик соответствующей ФК (ФК ФЭФ).

Определение 2. *Двуязычной аннотацией* исследуемой ЯЕ и ее ФЭФ в НБД называется кортеж, т. е. упорядоченная пара вида $\langle \text{МА ЯЕ}; \text{МА ФЭФ ЯЕ} \rangle$, которому лингвисты приписывают рубрики ФК кортежа и структурированный текстовый комментарий; при этом идентификатор автора и дата создания записи формируются программно для всего кортежа, а не для каждой из двух МА.

Пример русско-французской двуязычной аннотации, сформированной в НБД в результате семантического анализа ЯЕ «*не только... но*» и ее контекста из четвертой текстовой пары табл. 1, приведен в табл. 2 (без рубрик кортежа, комментария, идентификатора и даты). Моноязычная аннотация ЯЕ «*не только... но*» состоит из первого и второго столбцов этой таблицы, МА ФЭФ ЯЕ — из третьего и четвертого столбцов. Третий столбец содержит ФЭФ «*non seulement... mais*» в контексте перевода всего русского предложения на французский язык. Второй и четвертый столбцы содержат рубрики, которые выбраны лингвистом в процессе аннотирования этой ЯЕ и ее ФЭФ из ФК ЯЕ и ФК ФЭФ

Таблица 2 Пример русско-французской двуязычной аннотации

Со времени смерти стариков хозяйственные дела в деревне не только не улучшились, но , как видно из письма старосты, становились хуже	не только но < TBD > < CNT p CNT q > < CNT > < Дистант >	Depuis la mort des parents, les affaires du domaine non seulement ne s'amélioraient pas, mais , à en croire la lettre du régisseur, empiraient	non seulement mais < TBD > < CNT p CNT q > < CNT > < Дистант >
--	---	--	---

Таблица 3 Пример русско-французской поливариантной двуязычной аннотации

Со времени смерти стариков хозяйственные дела в деревне не только не улучшились, но , как видно из письма старосты, становились хуже	не только но < неединственности > < CNT p CNT q > < CNT > < Дистант >	Depuis la mort des parents, les affaires du domaine non seulement ne s'amélioreraient pas, mais , à en croire la lettre du régisseur, empiraient Avec le temps de la mort des personnes âgées les affaires économiques dans le village, non seulement ne s'est pas améliorée, mais , comme on peut le voir à partir de la lettre des chefs, de s'aggraver	non seulement mais < неединственности > < CNT p CNT q > < CNT > < Дистант > non seulement mais < неединственности > < CNT p CNT q > < CNT > < AgramTotal >
--	---	--	---

соответственно. В обеих МА выделяется главная рубрика ФК, которая характеризует форму и смысловое содержание ЯЕ (**не только||но**) и ее ФЭФ (**non seulement||mais**). Кроме этих главных рубрик обе МА содержат по четыре дополнительные рубрики, которые в этом примере у них одинаковые, а именно:

- (1) специальная рубрика-метка TBD (to be defined), которая говорит о том, что отношение, выраженное коннектором, еще не определено;
- (2) рубрика <CNT p CNT q> говорит о том, что элементы многокомпонентного коннектора находятся в каждом из соединяемых фрагментов текста p и q;
- (3) рубрика <CNT> говорит о том, что кортеж построен для всего коннектора, а не для отдельных составляющих его блоков или элементов;
- (4) рубрика <Дистант> говорит о том, что части коннектора разделены текстом.

Отметим, что в общем случае рубрики во втором и четвертом столбцах могут не совпадать.

В этом примере специальная рубрика-метка TBD говорит о том, что логико-семантическое отношение, выражаемое ЯЕ «не только... но», в момент формирования этой русско-французской двуязычной аннотации не было определено. Одна из возможных причин простановки этой пометки заключается в том, что в ФК в момент формирования этой аннотации отсутствовала релевантная рубрика. Это служит сигналом того, что соответствующий фасет используемой классификации необходимо расширить. После добавления новой рубрики в ФК эта аннотация будет отредактирована следующим образом: рубрику-метку TBD впоследствии заменит рубрика отношения «неединственности»

(см. табл. 3, где используется очередной «хроно-тип» ФК, уже включающий данную рубрику). Более подробное описание этого примера, а также фасетов используемых классификаций и их рубрик приведено в работе [10].

4 Поливариантные и полиязычные аннотации

При наличии в НБД двух и более вариантов перевода одного и того же текста появляется новый вид аннотации, который определим следующим образом.

Определение 3. Поливариантной двуязычной аннотацией исследуемой ЯЕ и ее ФЭФ в НБД называется кортеж вида $\langle \text{МА ЯЕ}; \{\text{МА ФЭФ}_1 \text{ ЯЕ}, \dots, \text{МА ФЭФ}_n \text{ ЯЕ}\} \rangle$, где $\text{ФЭФ}_1, \dots, \text{ФЭФ}_n$ соответствуют n разным вариантам перевода на один и тот же язык, при этом лингвисты кортежу вида $\langle \text{МА ЯЕ}; \text{МА ФЭФ}_i \text{ ЯЕ} \rangle$, где $i = 1, 2, \dots, n$, присваивают рубрики и комментарий, а идентификатор автора и дата формирования приписываются программно каждому кортежу.

Из этого определения следует, что в НБД поливариантная двуязычная аннотация формируется поэтапно (на каждом этапе создается, как правило, один кортеж вида $\langle \text{МА ЯЕ}; \text{МА}_i \text{ ФЭФ ЯЕ} \rangle$). При наличии в НБД переводов одних и тех же текстов на два и более языков появляется еще один вид аннотации.

Определение 4. Полиязычной аннотацией исследуемой ЯЕ и ее ФЭФ в НБД называется кортеж вида $\langle \text{МА ЯЕ}; \{\text{МА}_1 \text{ ФЭФ ЯЕ}, \dots, \text{МА}_n \text{ ФЭФ ЯЕ}\} \rangle$, где $\text{МА}_1, \dots, \text{МА}_n$ соответствуют n разным языкам перевода; при этом лингвисты кортежу вида

Таблица 4 Пример французско-русской РМЭ

<p>Joli calembour. Il est non-seulement très-fort, mais encore très-spirituel</p>	<p>non seulement mais encore { неединственности } { CNT p CNT q } { CNT } { Дистант }</p>	<p>Прекрасный каламбур, не только складный, но и остроумный</p>	<p>не только но и { неединственности } { CNT p CNT q } { CNT } { Дистант }</p>
---	--	---	---

$\langle MA \text{ ЯЕ}; MA_i \text{ ФЭФ ЯЕ} \rangle$, где $i = 1, 2, \dots, n$, присваивают рубрики и комментарий, а идентификатор и дата формируются программно для каждого кортежа.

В совместном проекте по исследованию коннекторов русского языка формируются только моно- и поливариантные двуязычные аннотации согласно определениям 2 и 3. Полиязычные аннотации для переводов на два и более языков в проекте не используются и далее в статье не рассматриваются.

Пример русско-французской поливариантной двуязычной аннотации, сформированной в НБД в результате семантического анализа ЯЕ «не только... но», ее контекста в четвертой текстовой паре в табл. 1, одного ее РП и одного МП приведен в табл. 3 (без рубрик кортежей, комментариев, идентификаторов и дат формирования кортежей).

Отметим, что определения 2 и 3 применимы только к прямому переводу, поэтому два определяемых ими термина будем называть «прямая двуязычная аннотация» (кратко — моноэквиваленция или МЭ) и «прямая поливариантная двуязычная аннотация» (кратко — полиэквиваленция или ПЭ)¹.

Для реверсивного перевода определим еще два вида аннотации.

Определение 5. *Реверсивной двуязычной аннотацией* (реверсивной МЭ, или РМЭ) исследуемой ЯЕ и ее ФЭФ в НБД называется кортеж вида $\langle MA \text{ ФЭФ ЯЕ}; MA \text{ ЯЕ} \rangle$, в котором лингвист приписывает рубрики ФК и структурированный текстовый комментарий для ФЭФ и для ЯЕ, а идентификатор и дата формируются программно; при этом в качестве ФЭФ выступает стимул для появления исследуемой ЯЕ в переводе.

Пример французско-русской РМЭ, сформированной в НБД в результате семантического анализа стимула для появления исследуемой ЯЕ «не только... но и» в переводе, а также его контекста, приведен в табл. 4. Моноязычная аннотация ЯЕ «не только... но и» состоит из третьего и четвертого столбцов этой таблицы, MA ФЭФ ЯЕ, т.е. сти-

мула, — из первого и второго столбцов. Первый столбец содержит ФЭФ «non seulement... mais encore» в контексте всего французского предложения, а третий столбец содержит перевод этого предложения на русский язык. Второй и четвертый столбцы содержат рубрики, которые выбраны лингвистом в процессе аннотирования стимула для появления исследуемой ЯЕ и аннотирования самой ЯЕ из ФК ФЭФ и ФК ЯЕ соответственно.

Определение 6. *Реверсивной поливариантной двуязычной аннотацией* (реверсивной ПЭ, или РПЭ) ЯЕ, исследуемой в двух и более переводах одного и того же текста на русский язык, и ее ФЭФ в НБД называется кортеж вида $\langle MA \text{ ФЭФ ЯЕ}; \{MA_1 \text{ ЯЕ}, \dots, MA_n \text{ ЯЕ}\} \rangle$, где MA_1, \dots, MA_n соответствуют n разным вариантам перевода на русский язык; при этом ФЭФ ЯЕ является стимулом для появления в переводах одной и той же исследуемой ЯЕ, но в n разных ее контекстах.

Для каждой из прямых и реверсивных МЭ и ПЭ в работе [10] были определены три частных случая аннотации коннекторов, обозначаемых в НБД следующим образом:

- I тип — аннотация для всего коннектора в целом (см. МЭ I типа в табл. 2, ПЭ I типа в табл. 3 и РМЭ I типа в табл. 4),
- II тип — аннотация для компонента (блока) коннектора, состоящего из двух и более неделимых элементов (табл. 5),
- III тип — аннотация для неделимого элемента коннектора (табл. 6).

Таким образом, с учетом деления на три типа всего в статье определено 12 видов прямых и реверсивных МЭ и ПЭ (см. нижний ряд на рисунке), которые являются основой создаваемой системы терминов, развитие и уточнение которой планируется продолжить в процессе выполнения совместного проекта и наполнения НБД.

¹Принцип представления отношения переводной эквивалентности в форме двухместного кортежа как единицы базы данных, а также термины «моноэквиваленция» и «полиэквиваленция» предложены Анной А. Зализняк в работе [8].

Таблица 5 Пример русско-французской МЭ II типа

Со времени смерти стариков хозяйственные дела в деревне не только не улучшились, но, как видно из письма старосты, становились хуже	не только < с предикацией > < неначальная > < Part > < Контакт >	Depuis la mort des parents, les affaires du domaine non seulement ne s'amélioraient pas, mais, à en croire la lettre du régisseur, empiraient	non seulement < неначальная > < с предикацией > < Part > < Контакт >
--	---	--	---

Примечания.

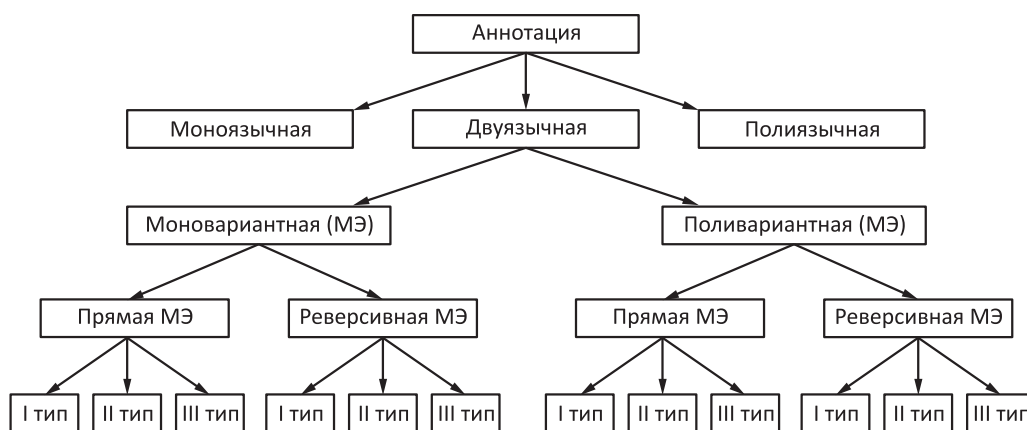
1. Рубрика «Part» говорит о том, что аннотация сформирована для части (здесь — блока) «не только» коннектора «не только. . . , но и».
2. Рубрика «с предикацией» говорит о том, что аннотируемая часть коннектора маркирует фрагмент текста, представляющий собой предикативную единицу.
3. Рубрика «неначальная» говорит о том, что аннотируемая часть коннектора занимает в маркируемом им фрагменте текста неначальную позицию.
4. Рубрика «контакт» говорит о том, что элементы, составляющие аннотируемую часть коннектора, находятся в контактном расположении.

Таблица 6 Пример русско-французской МЭ III типа

Петрович, [...] был совсем заспавшись; но при всем том, как только узнал, в чем дело, точно как будто его черт толкнул	но < Part >	Pétrovitch [...] semblait tout endormi. Malgré cela, dès qu'il eut compris de quoi il s'agissait, ce fut comme si quelque diable l'eût poussé	zero
---	-----------------------	---	-------------

Примечания.

1. Рубрика «Part» говорит о том, что аннотация сформирована для части (здесь — неделимого элемента) «но» коннектора «но при всем том».
2. Специальная рубрика «zero» говорит о том, что неделимый элемент коннектора здесь не переведен.



Виды аннотаций, определенные в статье, с учетом деления их на типы

В заключение этого раздела определим тот процесс, который выполняется лингвистами при выполнении ими НБД.

Определение 7. Формирование аннотации любого вида: моноязычной, полиязычной, прямых и реверсивных МЭ и ПЭ всех трех типов — будем называть *аннотированием ЯЕ*, при необходимости соответственно эксплицируя частные его случаи, например: *реверсивное поливариантное двуязычное аннотирование I типа*.

5 Заключение

Решение задачи двуязычного аннотирования в НБД коннекторов, других исследуемых ЯЕ и их переводных соответствий привело к появлению широкого спектра новых сущностей и понятий как в информатике, так и в лингвистике. Их появление свидетельствует о том, что НБД стали новой категорией информационных лингвистических ресурсов, обеспечивающих целенаправленную генерацию новых фундаментальных знаний [14–18].

Определение и типологизация перечисленных видов аннотаций, а также формализация самого процесса аннотирования служат одновременно нескольким целям. Рассмотренные дефиниции обеспечивают единое понимание содержания целей, задач и ожидаемых результатов совместного проекта как лингвистами, так и специалистами в области информатики, а также когнитивную интероперабельность участников проекта. Создаваемая система терминов необходима для согласованного понимания методики аннотирования и описания результатов, получаемых в процессе выполнения проекта, а также для их сопоставления с отечественными и зарубежными аналогами.

Для исполнителей совместного проекта, отвечающих за его информационно-компьютерное обеспечение, рассмотренные дефиниции служат основой создания и развития архитектуры НБД в соответствии с целями и задачами проекта. Задача представления в НБД прямых и реверсивных МЭ и ПЭ всех трех типов, которые состоят из двух и более МА исследуемых ЯЕ и их ФЭФ, во многом определяет основные принципы проектирования НБД. В частности, количество оснований ФК и состав рубрик по каждому основанию может изменяться в процессе наполнения НБД, что требует соответствующих архитектурных решений.

Описание взаимосвязей основных принципов проектирования НБД с разрабатываемой системой терминов выходит за рамки этой статьи и должно стать предметом отдельного исследования.

Литература

1. Баранов А. Н., Плунгян В. А., Рахилина Е. В. Путеводитель по дискурсивным словам русского языка. — М.: Помовсий и Партнеры, 1993. 207 с.
2. Дискурсивные слова русского языка. Опыт контекстно-семантического описания / Под ред. К. Киселевой, Д. Пайллард. — М.: Метатекст, 1998. 446 с.
3. Инькова-Манзотти О. Ю. Коннекторы противопоставления во французском и русском языках. Сопоставительное исследование. — М.: Информэлектро, 2001. 434 с.
4. Зализняк Анна А. База данных межъязыковых эквиваленций как инструмент лингвистического анализа // Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии: По мат-лам ежегодной Междунар. конф. «Диалог» (2016). — М.: РГГУ, 2016. С. 763–775.
5. Кружков М. Г. Информационные ресурсы контрастных лингвистических исследований: электронные корпуса текстов // Системы и средства информатики, 2015. Т. 25. № 2. С. 140–159.
6. Зализняк Анна А., Зацман И. М., Инькова О. Ю., Кружков М. Г. Надкорпусные базы данных как лингвистический ресурс // Корпусная лингвистика-2015: Труды 7-й Междунар. конф. — СПб.: СПбГУ, 2015. С. 211–218.
7. Добровольский Д. О., Кретов А. А., Шаров С. А. Корпус параллельных текстов: архитектура и возможности использования // Национальный корпус русского языка: 2003–2005. — М.: Индрик, 2005. С. 263–296.
8. Loiseau S., Sitchinava D. V., Zalizniak Anna A., Zatsman I. M. Information technologies for creating the database of equivalent verbal forms in the Russian-French multivariant parallel corpus // Информатика и её применения, 2013. Т. 7. Вып. 2. С. 100–109.
9. Сичинава Д. В. Использование параллельного корпуса для количественного изучения лингвоспецифичной лексики // Язык, литература, культура: актуальные проблемы изучения и преподавания. — М.: МАКС ПРЕСС, 2014. Вып. 10. С. 37–44.
10. Зацман И. М., Инькова О. Ю., Кружков М. Г., Попкова Н. А. Представление кроссязыковых знаний о коннекторах в надкорпусных базах данных // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 1. С. 106–118.
11. Prasad R., Dinesh N., Lee A., Miltakaki E., Robaldo L., Joshi A., Webber B. The Penn Discourse TreeBank 2.0 // 6th Conference (International) on Language Resources and Evaluation (LREC) Proceedings. — Paris: European Language Resources Association (ELRA), 2008. P. 2961–2968.
12. Learning machine translation / Eds. C. Goutte, N. Cancedda, M. Dymetan, G. Foster. — London: MIT Press, 2009. 316 p.
13. Lo C., Wu D. MEANT: An inexpensive, high-accuracy, semi-automatic metric for evaluating translation utility via semantic frames // Human Language Technologies: 49th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics Proceedings. — Stroudsburg: Association for Computational Linguistics, 2011. Vol. 1. P. 220–229.
14. Zatsman I. Tracing emerging meanings by computer: Semiotic framework // 13th European Conference on Knowledge Management Proceedings. — Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd., 2012. Vol. 2. P. 1298–1307.
15. Zatsman I., Buntman N., Kruzchkov M., Nuriev V., Zalizniak Anna A. Conceptual framework for development of computer technology supporting cross-linguistic knowledge discovery // 15th European Conference on Knowledge Management Proceedings. — Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd., 2014. Vol. 3. P. 1063–1071.
16. Zatsman I., Buntman N. Outlining goals for discovering new knowledge and computerised tracing of emerging meanings discovery // 16th European Conference on Knowledge Management Proceedings. — Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd., 2015. P. 851–860.

17. Зацман И. М. Процессы целенаправленной генерации и развития кроссязыковых экспертных знаний: семиотические основания моделирования // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 3. С. 106–123.
18. Zatsman I., Buntman N., Coldefy-Faucard A., Nuriev V. WEB knowledge base for asynchronous brainstorming // 17th European Conference on Knowledge Management Proceedings. — Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd., 2016. P. 976–983.

Поступила в редакцию 17.01.17

SUPRACORPORA DATABASE ON CONNECTIVES: TERM SYSTEM DEVELOPMENT

Anna A. Zaliznyak^{1,2}, I. M. Zatsman², and O. Yu. Inkova³

¹Institute of Linguistics, Russian Academy of Sciences, 1-1 Bolshoy Kislovskiy Per., Moscow 125009, Russian Federation

²Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

³University of Geneva, 22 Bd des Philosophes, CH-1205 Geneva 4, Switzerland

Abstract: The article considers a supracorpora database (SCDB) — a new type of linguistic information resource. The SCDB contains aligned parallel texts wherein source language sentences are aligned with target language sentences. One distinctive feature of the SCDB is that it supports annotating the examined linguistic items (in this case, connectives). Another important feature is that cross-linguistic annotating makes it possible to reveal a wide spectrum of new entities and concepts, both in informatics and linguistics. For description of these entities and concepts, a new multidisciplinary term system is proposed. On the one hand, the proposed terms are used by linguists for description of new basic knowledge generated as a result of contrastive analysis of Russian connectives. On the other hand, the design of architecture and functional subsystems of the SCDB is based on these terms, and they are used for the development of respective information, linguistic and software tools. Finally, the term system is required for comparison of the presented outcomes of the project with similar results of other projects.

Keywords: supracorpora database; term system; connectives; linguistic annotation; parallel texts; corpus linguistics; chronotypical faceted classification

DOI: 10.14357/19922264170109

Acknowledgments

This research was performed in the Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, with financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project No. 16-24-41002) and Swiss National Science Foundation (project No. IZLRZ1_164059).

References

1. Baranov, A. N., V. A. Plungyan, and E. V. Rakhilina. 1993. *Ptevoditel' po diskursivnym slovam russkogo yazyka* [Guide to the Russian discourse words]. Moscow: Pomovskiy i Partnery. 207 p.
2. Kiseleva, K., and D. Paillard, eds. 1998. *Diskursivnye slova russkogo yazyka. Opyt kontekstno-semanticheskogo opisaniya* [Russian discourse words: A contextual-semantic description]. Moscow: Metatext. 446 p.
3. Inkova-Manzotti, O. Yu. 2001. *Konnektory protivopostavleniya vo frantsuzskom i russkom yazykakh: Sopostavitel'noe issledovanie* [Connectives of opposition in French and Russian: A comparative study]. Moscow: Informelektro. 434 p.
4. Zaliznyak, Anna A. 2016. Baza dannykh mezhyazykovykh ekvivalentsiy kak instrument lingvisticheskogo analiza [Database of cross-linguistic equivalences as a tool for linguistic analysis]. *Computer Linguistics and Intellectual Technologies: Conference (International) “Dialog” Proceedings*. Moscow: RGGU. 763–775.
5. Kruzhkov, M. G. 2015. Informatsionnye resursy kontrastivnykh lingvisticheskikh issledovaniy: Elektronnyye korpusa tekstov [Information resources for contrastive studies: Digital text corpora]. *Sistemy i Sredstva Informatsionnykh Sistem i Sredstva Informatsionnykh Sistem i Sredstva Informatsionnykh Sistem* 25(2):140–159.
6. Zaliznyak, Anna A., I. M. Zatsman, O. Yu. Inkova, and M. G. Kruzhkov. 2015. Nadkorpurnyye bazy dannykh kak lingvisticheskiy resurs [Supracorpora databases as linguistic resource]. *7th Conference (International) on*

- Corpus Linguistics Proceedings*. St. Petersburg: SPbGU. 211–218.
7. Dobrovol'skiy, D. O., A. A. Kretov, and S. A. Sharov. 2005. Korpus parallel'nykh tekstov: Arkhitektura i vozmozhnosti ispol'zovaniya [Corpus of parallel texts: Architecture and applications]. *Natsional'nyy korpus russkogo yazyka: 2003–2005* [Russian National Corpus: 2003–2005]. Moscow: Indrik. 263–296.
 8. Loiseau, S., D. V. Sitchinava, Anna A. Zalizniak, and I. M. Zatsman. 2013. Information technologies for creating the database of equivalent verbal forms in the Russian-French multivariant parallel corpus. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 7(2):100–109.
 9. Sitchinava, D. V. 2014. Ispol'zovanie parallel'nogo korpusa dlya kolichestvennogo izucheniya lingvospetsifichnoy leksiki [Using a parallel corpus for the quantitative study of language-specific units]. *Yazyk, literatura, kul'tura: Aktual'nye problemy izucheniya i prepodavaniya* [Language, literature, culture: Actual problems of research and teaching]. Moscow: MAKS PRESS. 10:37–44.
 10. Zatsman, I. M., O. Yu. Inkova, M. G. Kruzhev, and N. A. Popkova. 2016. Predstavlenie krossyazykovykh znaniy o konnektorakh v nadkorpusnykh bazakh danykh [Representation of cross-lingual knowledge about connectives in supracorpora databases]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(1):106–118.
 11. Prasad, R., N. Dinesh, A. Lee, E. Miltsakaki, L. Robaldo, A. Joshi, and B. Webber. 2008. The Penn Discourse TreeBank 2.0. *6th Conference (International) on Language Resources and Evaluation (LREC) Proceedings*. Paris: European Language Resources Association (ELRA). 2961–2968.
 12. Goutte, C., N. Cancedda, M. Dymetian, and G. Foster, eds. 2009. *Learning machine translation*. London: MIT Press. 316 p.
 13. Lo, C., and D. Wu. 2011. MEANT: An inexpensive, high-accuracy, semi-automatic metric for evaluating translation utility via semantic frames. *Human Language Technologies: 49th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics Proceedings*. Stroudsburg: Association for Computational Linguistics. 1:220–229.
 14. Zatsman, I. 2012. Tracing emerging meanings by computer: Semiotic framework. *13th European Conference on Knowledge Management Proceedings*. Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd. 2:1298–1307.
 15. Zatsman, I., N. Buntman, M. Kruzhev, V. Nuriev, and Anna A. Zalizniak. 2014. Conceptual framework for development of computer technology supporting cross-linguistic knowledge discovery. *15th European Conference on Knowledge Management Proceedings*. Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd. 3:1063–1071.
 16. Zatsman, I., and N. Buntman. 2015. Outlining goals for discovering new knowledge and computerised tracing of emerging meanings discovery. *16th European Conference on Knowledge Management Proceedings*. Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd. 851–860.
 17. Zatsman, I. 2015. Protsessy tselenapravlennoy generatsii i razvitiya krossyazykovykh ekspertnykh znaniy: Semioticheskie osnovaniya modelirovaniya [Goal-oriented processes of cross-lingual expert knowledge creation: Semiotic foundations for modeling]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(3):106–123.
 18. Zatsman, I., N. Buntman, A. Coldefy-Faucard, and V. Nuriev. 2016. WEB knowledge base for asynchronous brainstorming. *17th European Conference on Knowledge Management Proceedings*. Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd. 976–983.

Received January 17, 2017

Contributors

Zaliznyak Anna A. (b. 1959) — Doctor of Science in philology, leading scientist, Institute of Linguistics, Russian Academy of Sciences, 1-1 Bolshoy Kislovskiy Per., Moscow 125009, Russian Federation; leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; anna.zalizniak@gmail.com

Zatsman Igor M. (b. 1952) — Doctor of Science in technology, Head of Department, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; izatsman@yandex.ru

Inkova Olga Yu. (b. 1965) — Doctor of Science in philology, Faculty member, University of Geneva, 22 Bd des Philosophes, CH-1205 Geneva 4, Switzerland; Olga.Inkova@unige.ch

ON UNIQUENESS OF CLEARING VECTORS REDUCING THE SYSTEMIC RISK

Kh. El Bitar¹, Yu. Kabanov², and R. Mokbel³

Abstract: Clearing of financial system, i. e., of a network of interconnecting banks, is a procedure of simultaneous repaying debts to reduce their total volume. The vector whose components are repayments of each bank is called clearing vector. In simple models considered by Eisenberg and Noe (2001) and, independently, by Suzuki (2002), it was shown that the clearing to the minimal value of debts accordingly to natural rules can be formulated as fixpoint problems. The existence of their solutions, i. e., of clearing vectors, is rather straightforward and can be obtained by a direct reference to the Knaster–Tarski or Brouwer theorems. The uniqueness of clearing vectors is a more delicate problem which was solved by Eisenberg and Noe using a graph structure of the financial network. The uniqueness results have been proved in two generalizations of the Eisenberg–Noe model: in the Elsinger model with seniority of liabilities and in the Amini–Filipovic–Minca type model with several types of illiquid assets whose firing sale has a market impact.

Keywords: systemic risk; financial networks; clearing; Knaster–Tarski theorem; Eisenberg–Noe model; debt seniority; price impact

DOI: 10.14357/19922264170110

1 Introduction

To explain the clearing problem, let us start with the simplest example of a financial system with two agents each having in a cash 10 dollars. The first agent gets from the second a credit of 1M dollars, the second gets from the first a credit of 1 M and 1 dollars. Apparently, as a result, both agents have a huge liabilities with respect to each other. Of course, the agents can be asked to reduce their liabilities by reimbursing credits partially (e. g., to the levels 0.5 M and 0.5 M + 1 in liabilities and 10 dollars both in cash) or completely, with zero liabilities and cash reserves 11 and 9 dollars, respectively. Intuitively, the situation where the liability is reduced (i. e., the system is cleared) seems to be less risky: if one of the agents became bankrupt and only the percentage of the huge debt value can be reimbursed, the creditor’s losses will be also huge. For complex financial systems involving large numbers of agents with chains of borrowing, the clearing problem, that is, the reduction of absolute values by reimbursement, looks much more complicated.

In the influential paper [1] published in 2001, Eisenberg and Noe suggested a clearing procedure in the model describing a financial system composed by N banks

(under “banks” can be understood various financial institutions); a more general model was introduced independently at the same time by Suzuki [2]. The assets of the bank are cash and interbank exposures which are, in turn, liabilities for its debtors. The clearing consists in simultaneous paying all debts. Each bank pays to its counterparties the debts *pro rata* of their relative volume using its cash reserve and money collected from the credited banks. The rule is: either all debts are paid in full or the zero level of the equity is attained and the bank defaults. The totals reimbursed by banks form an N -dimensional clearing vector. A remarkable feature is that this vector is a fixed point of a monotone mapping of a complete lattice into itself and its existence follows immediately from the Knaster–Tarski theorem, a beautiful and fairly simple result which proof needs only a few lines of arguments [3]. The uniqueness of the clearing vector is a more delicate result involving the graph structure of the system.

The ideas of the Eisenberg–Noe paper happened to be very fruitful and their model was generalized in many directions having not only financial importance but posing interesting mathematical questions. One of them is the question on uniqueness of clearing vector or equilibrium on financial market.

¹Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray, 25030 Besançon, CEDEX, France, khalilbitar_aw@hotmail.com

²Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray, 25030 Besançon, CEDEX, France; Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; National Research University “MPEI,” 14 Krasnokazarmennaya Str., Moscow, 111250, Russian Federation, Youri.Kabanov@univ-fcomte.fr

³Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray, 25030 Besançon, CEDEX, France, ritamokbel@hotmail.com

The first theorem provides a new sufficient condition for the Elsinger model of clearing with debts priority structure. This model is given by a set of liability matrices corresponding to each seniority. The idea of the present approach is to use the largest clearing vector which always exists to construct a new liability matrix generating a graph structure with which one can work in a similar way as in the Eisenberg–Noe model. The second theorem deals with the uniqueness of equilibrium in a clearing model with several illiquid assets and a market impact. In the presence of several illiquid assets, the banks are faced the choice of asset selling strategies. The proportional scheme of selling similar to that in the paper by Cont–Wagalath [4] has been used leaving game-theoretical versions for future studies. In the case of one illiquid asset, the obtained result is close to that of the study by Amini–Filipovic–Minca [5], but the present definition of the equilibrium is different (but equivalent).

The structure of the note is as follows. In the introductory section 2, the general principle and results are discussed briefly in the framework of the Eisenberg–Noe model. To facilitate the comparison with further development, also, short proofs are provided. In section 3, a uniqueness of the clearing vector for the Elsinger model where senior liabilities should be reimbursed before the juniors ones. Section 4 contains the sufficient condition for the uniqueness of the equilibrium in the model where clearing requires selling of the illiquid assets with price impact. Economically speaking, it is oriented to the recovering of the market after fire sales. For the reader convenience, in Appendix, a short information about the Knaster–Tarski theorem adapted to the present authors’ needs is provided.

Notations. The partial ordering in \mathbb{R}^n and its subsets induced by the cone \mathbb{R}_+^n is denoted by \geq . In other words, the inequality $y \geq x$ is understood componentwise. Also, the symbols $x \wedge y$ and $x \vee y$ mean, respectively, the componentwise minimum and maximum, $x^+ := x \vee 0$ and $x^- := (-x)^+$. The notation $[x, z]$ is used for the order interval, i. e., $[x, z] = \{y \in \mathbb{R}^n : x \leq y \leq z\}$. If $A \subseteq [x, z]$, then $\inf A$ is the unique element $\underline{y} \in [x, z]$ such that $\underline{y} \leq y$ for all $y \in A$ and for any \tilde{y} such that $\tilde{y} \leq y$ for all $y \in A$, one has $\tilde{y} \leq \underline{y}$, that is, the component $\underline{y}^i = \inf\{y^i : y \in A\}$ for $i = 1, \dots, n$.

The matrix notations are used where the vectors are columns, $'$ is the symbol of transpose, and $\mathbf{1}' := (1, \dots, 1)$ (the dimension of the vector is supposed to be clear from the context).

2 The Eisenberg–Noe Model

In [1], Eisenberg and Noe investigated the model describing a financial system composed of N banks (under

“banks” can be understood various financial institutions). In the aggregate oversimplified form, the balance sheet of the bank i can be split into two parts: assets and liabilities. The assets are of two types: interbank assets (exposures) \tilde{X}^i and cash e^i . The liabilities are: interbank debts (liabilities) \tilde{L}^i and the equity C^i (or proper capital reserve) equalizing the two sides of the balance sheet:

$$e^i + \tilde{X}^i = \tilde{L}^i + C^i.$$

All these values are assumed to be greater or equal to zero. The condition that $C^i \geq 0$ means that the bank is solvent.

More detailed balance sheet provides the information on the values of liabilities of the bank i to the bank j , namely, vectors $(L^{i1}, \dots, L^{iN})'$ of liabilities and $(X^{i1}, \dots, X^{iN})'$ of exposures. With this, one has $\tilde{X}^i = X^{i1} + \dots + X^{iN}$ and $\tilde{L}^i = L^{i1} + \dots + L^{iN}$.

The matrix $L = (L^{ij})$ with positive entries and zero diagonal defines the total interbank exposures. Since the value of the exposure of i to j is the value of the liability of j to i , one has that $L' = X$. So, the matrix L and the vector e give a description of a financial system in this model.

Put

$$\Pi^{ij} := \begin{cases} \frac{L^{ij}}{\tilde{L}^i} = \frac{L^{ij}}{\sum_j L^{ij}} & \text{if } \tilde{L}^i \neq 0; \\ \delta^{ij} & \text{otherwise} \end{cases}$$

where the Kronecker symbol $\delta^{ij} = 0$ for $i \neq j$ and $\delta^{ii} = 1$. Then, Π^{ij} describes the proportion of the value debtor i due to the creditor j of the total interbank debt of i ; $\Pi = (\Pi^{ij})$ is called relative liabilities matrix. Note that in this definition, to get a stochastic matrix Π , we deviate from [1] where $\Pi^{ii} = 0$ when $L^i = 0$.

In general, financial system may have a complicated structure with cyclical interdependences and banks may have large exposures within cycles. To reduce them, one can impose a clearing mechanism satisfying several natural requirements: limited liability and proportionality. Formally, this leads to the concept of a *clearing payment vector* $p^* \in \prod_i [0, \tilde{L}^i]$ satisfying the following properties:

a. *Limiting liability.* For every i ,

$$p_i^* \leq e^i + \sum_j \Pi^{ji} p_j^*.$$

b. *Absolute priority.* For every i , either $p_i^* = \tilde{L}^i$, or

$$p_i^* = e^i + \sum_j \Pi^{ji} p_j^*.$$

One may think that the central clearing authority forces each bank to make a “fair” payment of debts in such

a way that, having the total payment p_i^* , the bank i remains solvent and pays to j the fraction $p_i^* \Pi^{ij}$ in such a way that either its total debts are paid, or all the resources are exhausted.

Alternatively, the conditions a and b can be written in the following way:

$$p^* = \min \left\{ e + \Pi' p^*, \tilde{L} \right\} \quad (1)$$

where the minimum is understood in the componentwise sense, i. e., accordingly to the partial ordering defined by the cone \mathbb{R}_+^N .

The main result of Eisenberg and Noe asserts that the set of clearing vectors is nonempty. Moreover, there are the minimal and the maximal clearing vectors, denoted here \underline{p} and \bar{p} , respectively. This assertion follows immediately from the Knaster–Tarski fixed point theorem: the monotone mapping $f : p \mapsto (e + \Pi' p) \wedge \tilde{L}$ of a complete lattice $[0, \tilde{L}]$ into itself has the largest and the smallest fixed points (for details, see section 5). The set $[0, \tilde{L}]$ is convex and compact and f is a continuous mapping. So, the existence of its fixed point follows also from the classical Brouwer theorem.

Using the obvious identity $(x - y)^+ = x - x \wedge y$, one can rewrite Eq. (1) in the following equivalent form:

$$(e + \Pi' p^* - \tilde{L})^+ = e + \Pi' p^* - p^* \quad (2)$$

where the left-hand side is the equity vector of the system after clearing.

An important but simple observation: *the equity (after clearing) does not depend on the clearing vector*. Indeed, Π being a stochastic matrix, $\mathbf{1}' \Pi = \mathbf{1}'$. Therefore, multiplying the above representation (2) from the left by $\mathbf{1}'$, one gets that the sum of equities

$$\mathbf{1}' (e + \Pi' p^* - \tilde{L})^+ = \mathbf{1}' e$$

is equal to the sum of the initial cash reserves, that is, invariant with respect to the choice of the clearing vector. On the other hand, by monotonicity, one has that

$$(e + \Pi' p^* - \tilde{L})^+ \leq (e + \Pi' \bar{p} - \tilde{L})^+.$$

If the both sides here are not equal, then

$$\mathbf{1}' (e + \Pi' p^* - \tilde{L})^+ < \mathbf{1}' (e + \Pi' \bar{p} - \tilde{L})^+$$

in contradiction with the invariance of the total of equities.

Sufficient condition for the uniqueness of the clearing vector. As in [1], let us assume for simplicity that $\tilde{L}^i > 0$ for all i .

For a stochastic matrix Π , we say that $I \subseteq \{1, \dots, N\}$ is a (Π) -surplus set if $\Pi^{ij} = 0$ for all $i \in I, j \in I^c$, and $\sum_{j \in I} e^j > 0$.

Recall that j is the creditor of i if $\Pi^{ij} > 0$ (i. e., $\Pi^{ij} > 0$); in this case, let us use, as in the theory of Markov chains or in the graph theory, the notation $i \rightarrow j$.

Let us denote by $o(i)$ the orbit of i that is the set of all j for which there is a directed path

$$i \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow j,$$

i. e., $o(i)$ is the set of all direct or indirect creditors of i .

Note that the orbit $o(i)$ with $\sum_{j \in I} e^j > 0$ is a surplus set. Indeed, if $\Pi^{jj'} > 0$ for some $j \in o(i), j' \notin o(i)$, i. e., $j \rightarrow j'$, then there is a path

$$i \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow j \rightarrow j'.$$

Lemma 1. *Suppose that the market is cleared by a vector $p^* \in [0, \tilde{L}]$. Let I be a surplus set. Then, at least one node of I has a strictly positive equity value.*

In particular, any orbit $o(i)$ with $\sum_{j \in o(i)} e^j > 0$ has an element with strictly positive equity value.

Proof. Multiplying the identity (2) by $\mathbf{1}'_I$ and noticing that $(\mathbf{1}'_I \Pi)^i = 1$ for $i \in I$, one obtains that

$$\mathbf{1}'_I (e + \Pi' p^* - \tilde{L})^+ \geq \mathbf{1}'_I e > 0$$

implying the claim. \square

A financial system is called *regular* if for every i , the orbit $o(i)$ is a surplus set.

Theorem 1. *Suppose that the financial system is regular. Then, $\underline{p} = \bar{p}$.*

Proof. Suppose that \underline{p} and \bar{p} are not equal, i. e., $\underline{p} \leq \bar{p}$ but for some i , one has the strict inequality $\underline{p}^i < \bar{p}^i$. Denote by C the vector of equities (it is common for all clearing vectors). By assumption, the orbit $o(i)$ is a surplus set and by Lemma 1, it contains an element m with the equity value $C^m > 0$. By definition of the orbit, there is a path $i \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow m$ and one may assume without loss of generality that in this path, m is the first node with strictly positive equity value.

First, let us prove that one may consider only the case where the path consists of one step, i. e., $i \rightarrow m$. To this end, let us check that $\underline{p}^{i_1} < \bar{p}^{i_1}$ if $i_1 \neq m$. In other words, the property that $\underline{p}^i \neq \bar{p}^i$ propagates along the path.

Suppose that $\bar{p}^{i_1} < \tilde{L}^{i_1}$. Then, also, $\underline{p}^{i_1} < \tilde{L}^{i_1}$. In such a case,

$$\underline{p}^{i_1} = e^{i_1} + \sum_j \Pi^{j i_1} \underline{p}^j, \quad \bar{p}^{i_1} = e^{i_1} + \sum_j \Pi^{j i_1} \bar{p}^j$$

and one has that

$$\bar{p}^{i_1} - \underline{p}^{i_1} = \sum_j \Pi^{j i_1} (\bar{p}^j - \underline{p}^j) > 0$$

because $\Pi^{i_1 i} > 0$, that is, $\underline{p}^{i_1} < \bar{p}^{i_1}$. This inequality also holds trivially, if $\bar{p}^{i_1} = \tilde{L}^{i_1}$ but $\underline{p}^{i_1} < \tilde{L}^{i_1}$. The remaining

case where $\underline{p}^{i_1} = \bar{p}^{i_1} = \tilde{L}^{i_1}$ is excluded as it is supposed that $C^{i_1} = 0$. Indeed, according to (2), this leads to the equalities:

$$e^{i_1} + \sum_j \Pi^{j i_1} \bar{p}^j - \tilde{L}^{i_1} = 0; \quad e^{i_1} + \sum_j \Pi^{j i_1} \underline{p}^j - \tilde{L}^{i_1} = 0,$$

implying the identity

$$\sum_j \Pi^{j i_1} (\bar{p}^j - \underline{p}^j) = 0$$

which cannot be true since in the above sum, the term corresponding to $j = i$ is strictly positive.

So, it is sufficient to consider only one-step case. Since $C^m > 0$, one has the representations:

$$C^m = e^m + \sum_j \Pi^{j m} \underline{p}^j - \tilde{L}^m;$$

$$C^m = e^m + \sum_j \Pi^{j m} \bar{p}^j - \tilde{L}^m.$$

As above, one again obtains the impossible equality:

$$\sum_j \Pi^{j m} (\bar{p}^j - \underline{p}^j) = 0.$$

Therefore, the assumption $\underline{p}^i < \bar{p}^i$ leads to a contradiction. The uniqueness of clearing vector is proven. \square

Remark 1. The above theorem reveals that the problem to find a clearing vector is ill-posed. Indeed, adding an infinitesimally small amount $\varepsilon > 0$ (say, one cent) to the initial endowments leads to a unique clearing vector. Similar effect will have small increase in liabilities. One can think that the “true” liability matrix has all elements strictly positive and that in the model matrix, zero elements appeared because liabilities are neglected. These phenomena are related to the ill-posedness of the spectral problem for stochastic matrices. Another question is which clearing vector is natural.

The above proof is rather straightforward and uses graph-theoretical language. One can get another one appealing to the contraction property of the mapping $f : p \mapsto (e + \Pi'p) \wedge \tilde{L}$ defined on the set $[0, \tilde{L}]$ equipped with l_1 -distance $|p - \tilde{p}|_1$.

Proposition. For every $p, \tilde{p} \in [0, \tilde{L}]$

$$|f(p) - f(\tilde{p})|_1 \leq |\Pi'(p - \tilde{p})|_1 \leq |p - \tilde{p}|_1.$$

Moreover, the first relation above is the equality if and only if the union of subsets $A := \{i : (\Pi'p)^i = (\Pi'\tilde{p})^i\}$ and $B := \{i : (\Pi'p)^i, (\Pi'\tilde{p})^i \leq \tilde{L}^i - e^i\}$ is the set of indices $\{1, \dots, N\}$.

Proof. Using the elementary inequality $|a \wedge c - b \wedge c| \leq |a - b|$ which holds as the equality if and only if when

$a = b$ or $a, b \leq c$, one obtains that $|f(p) - f(\tilde{p})|_1 \leq |\Pi'p - \Pi'\tilde{p}|_1$ where the equality holds if and only if for every i , one has $(\Pi'p)^i = (\Pi'\tilde{p})^i$ or $(\Pi'p)^i, (\Pi'\tilde{p})^i \leq \tilde{L}^i - e^i$. Since $|\Pi'y|_1 \leq |\Pi'|_1|y|_1$ and $|\Pi'|_1 = 1$, one has the claim. \square

Let us consider the case where the matrix Π is irreducible. Suppose that $\mathbf{1}'e > 0$ and p and \tilde{p} are two different fixed points of the mapping f . According to above proposition,

$$\sum_{j \in B} \Pi^{j i} (p^j - \tilde{p}^j) = p^i - \tilde{p}^i, \quad i \in B.$$

This means that the nonzero vector with the coordinates $p^i - \tilde{p}^i, i \in B$, is a left eigenvector of the matrix $(\Pi^{ij})_{i,j \in B}$ corresponding to unit eigenvalue. This is possible only if the latter matrix coincides with Π . Thus, $p = f(p) = e + \Pi'p$. Since $\mathbf{1}'\Pi'p = \mathbf{1}'p$, one gets that $\mathbf{1}'e = 0$ which is a contradiction. Using the decomposition of the matrix Π on the irreducible component, one gets that the clearing vector is unique if for any irreducible component, there is a node with strictly positive initial endowment.

3 The Elsinger Model

In the present paper, a simplified version of the Elsinger model introduced in [6], where the interbank debts may be senior and junior, is considered. In this model, the system of N banks is described by the vector of cash reserves and by M matrices $L_1 = (L_1^{ij}), \dots, L_M = (L_M^{ij})$ representing the hierarchy of liabilities with decreasing seniority, that is, the element L_1^{ij} represents the debt of the bank i to the bank j of the highest seniority, etc., $\sum_j L_S^{ij}$ is the total of debts of the bank i of the seniority S .

The relative liabilities are defined by the matrix Π_S with

$$\Pi_S^{ij} = \frac{L_S^{ij}}{\tilde{L}_S^i} = \frac{L_S^{ij}}{\sum_j L_S^{ij}}.$$

The clearing procedure requires the complete reimbursement of the debts starting from the highest priority and for each seniority level, the distribution is proportional to the volume of debts of this seniority. For the bank i , let us denote by p_S^i the value distributed to cover the debts of the seniority S . So, the clearing can be described by the set of vectors $p_S, S = 1, \dots, M$, which can be considered as a “long” vector from $(\mathbb{R}^N)^M$ satisfying the system of equations:

$$p_1^i = \min \left\{ e^i + \sum_S \sum_j \Pi_S^{ij} p_S^j, \tilde{L}_1^i \right\};$$

$$p_S^i = \min \left\{ \left(e^i + \sum_S \sum_j \Pi_S^{ji} p_S^j - \sum_{r < S} \tilde{L}_r^i \right)^+, \tilde{L}_S^i \right\}, \\ 1 < S \leq M.$$

In a vector form, these equations can be written as follows:

$$p_S = \left(e + \sum_S \Pi'_S p_S - \sum_{r < S} \tilde{L}_r \right)^+ \wedge \tilde{L}_S, \\ S = 1, \dots, M. \quad (3)$$

It is clear that for the partial ordering in $(\mathbb{R}^N)^M$ induced by the cone $(\mathbb{R}_+^N)^M$, the function

$$(p_1, \dots, p_M) \mapsto \left(\left(e + \sum_S \Pi'_S p_S^* \right)^+ \wedge \tilde{L}_1, \dots \right. \\ \left. \dots, \left(e + \sum_S \Pi'_S p_S^* - \sum_{r < M} \tilde{L}_r \right)^+ \wedge L_M \right)$$

is a monotone mapping of the order interval

$$[0, \tilde{L}_1] \times \dots \times [0, \tilde{L}_M] \subset (\mathbb{R}^N)^M$$

into itself. Thus, according to the Knaster–Tarski theorem, the set of fixed points of this mapping, i. e., the solutions of Eq. (3), is nonempty and has the maximal and the minimal elements.

In the case of liabilities of different seniority after clearing by the vector $p \in (\mathbb{R}^N)^M$, the equity vector $C \in \mathbb{R}^N$ has the form:

$$C = \left(e + \sum_S \Pi'_S p_S - \sum_S \tilde{L}_S \right)^+.$$

Lemma 2. *The equity vector does not depend on the clearing vector.*

Proof. Note that

$$\left(e + \sum_S \Pi'_S p_S \right) \wedge \sum_S \tilde{L}_S^i = \sum_S p_S.$$

Therefore,

$$\left(e + \sum_S \Pi'_S p_S - \sum_S \tilde{L}_S \right)^+ = e + \sum_S \Pi'_S p_S - \sum_S p_S.$$

With this identity, the reasoning is analogous to that with a single seniority class. \square

The aim of this section is to provide a sufficient condition for the uniqueness of clearing vector using a specific graph structure induced by the matrices Π_S .

For a given clearing vector p , let us define the *default index* d^i of the node i as the smallest r such that

$$\bar{p}_r^i = e^i + \sum_S \sum_j \Pi_S^{ji} \bar{p}_S^j - \sum_{r' < r} \tilde{L}_{r'}^i.$$

In another words, d^i is the lowest seniority for which the bank equity after clearing is equal to zero. Define the matrix $\Delta = \Delta(p)$ by putting

$$\Delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \Pi_{d(i)}^{ij} > 0; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let us use the notation $i \rightsquigarrow j$ if $\Delta^{ij} = 1$ and denote by $O(i)$ the Δ -orbit of i that is the set of all j for which there is a directed path $i \rightsquigarrow i_1 \rightsquigarrow i_2 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow j$.

Theorem 2. *Suppose that for the clearing vector \bar{p} , any Δ -orbit is a surplus set. Then, the clearing vector is unique.*

Proof. By definition, the default index

$$d^i := \min \left\{ r : \bar{p}_r^i = e^i + \sum_S \sum_j \Pi_S^{ji} \bar{p}_S^j - \sum_{r' < r} \tilde{L}_{r'}^i \right\}.$$

It follows that $\bar{p}_r^i = 0$; hence, $\underline{p}_r^i = 0$ for every $r > d^i$. Suppose that $\underline{p}_{d^i}^i < \bar{p}_{d^i}^i$ and consider a path

$$i \rightsquigarrow i_1 \rightsquigarrow i_2 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow m$$

ending up at the node with strictly positive equity value.

First, let us show that at least for one seniority $\underline{p}_S^{i_1} < \bar{p}_S^{i_1}$.

Let $r' := d^{i_1}$. By definition, one has:

$$\bar{p}_r^{i_1} = \begin{cases} \tilde{L}_r^{i_1}, & r \leq r'; \\ 0, & r > r'. \end{cases}$$

The claim holds, if $\underline{p}_r^{i_1} < \tilde{L}_r^{i_1}$ for some $r < r'$. Thus, it remains to consider only the case where $\underline{p}_r^{i_1} = \bar{p}_r^{i_1} = \tilde{L}_r^{i_1}$ for all $r < r'$ and prove that $\underline{p}_{r'}^{i_1} < \bar{p}_{r'}^{i_1}$. One has the alternative: either $\underline{p}_{r'}^{i_1} < \bar{p}_{r'}^{i_1} \leq \tilde{L}_{r'}^{i_1}$ (what is needed), or $\underline{p}_{r'}^{i_1} = \bar{p}_{r'}^{i_1} \leq \tilde{L}_{r'}^{i_1}$. The second case is impossible, since the equalities

$$\bar{p}_{r'}^{i_1} = e^{i_1} + \sum_S \sum_j \Pi_S^{ji_1} \bar{p}_S^j - \sum_{r < r'} \tilde{L}_r^{i_1};$$

$$\underline{p}_{r'}^{i_1} = e^{i_1} + \sum_S \sum_j \Pi_S^{ji_1} \underline{p}_S^j - \sum_{r < r'} \tilde{L}_r^{i_1}$$

imply that

$$\bar{p}_{r'}^{i_1} - \underline{p}_{r'}^{i_1} = \sum_S \sum_j \Pi_S^{ji_1} (\bar{p}_S^j - \underline{p}_S^j) \\ \geq \Pi_{d^i}^{i_1} (\bar{p}_{d^i}^i - \underline{p}_{d^i}^i) > 0.$$

This is a contradiction.

The above argument reduces the problem to the case $i \rightsquigarrow m$ and the node m has a strictly positive equity. The equity C^m does not depend on the clearing vector. Therefore,

$$C^m = e^m + \sum_S \sum_j \Pi_S^{jm} \bar{p}_S^j - \sum_S \tilde{L}_S^m;$$

$$C^m = e^m + \sum_S \sum_j \Pi_S^{jm} \underline{p}_S^j - \sum_S \tilde{L}_S^m.$$

It follows that

$$0 = \sum_S \sum_j \Pi_S^{jm} (\bar{p}_S^j - \underline{p}_S^j) \geq \Pi_{d^i}^{im} (\bar{p}_{d^i}^i - \underline{p}_{d^i}^i) > 0.$$

This contradiction shows that $\underline{p} = \bar{p}$.

3.1 Example 1

Let us consider the system consisting of 3 nodes with the initial cash endowments given by the vector $e = (0.1, 0, 0)$ and the liability and the "distribution" matrices corresponding to senior and junior debts:

$$L_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Pi_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Pi_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

For this model, the vectors of total liabilities corresponding to the senior and junior debts are, respectively, $\tilde{L}_S = (1, 2, 2)$ and $\tilde{L}_J = (0, 2, 0)$.

The equations for clearing vectors are:

$$p_S^1 = (0.1 + 0.5 p_S^2) \wedge 1;$$

$$p_S^2 = (p_S^1 + p_S^3) \wedge 2;$$

$$p_S^3 = (0.5 p_S^2 + p_J^2) \wedge 2;$$

$$p_J^1 = 0;$$

$$p_J^2 = (p_S^1 + p_S^3 - 2)^+ \wedge 2;$$

$$p_J^3 = 0.$$

It is not difficult to check that there are infinite set of clearing vectors. Namely, one has that $p_S = (1, 2, 1 + t)$ and $p_J = (0, t, 0)$ where $t \in [0, 1]$. The minimal clearing vector corresponds to $t = 0$ and the maximal corresponds to $t = 1$.

3.2 Example 2

The vector of cash endowments and the matrix of the senior debts is the same as in Example 1. The junior debts

matrix L_J and the corresponding distribution matrix Π_J are now:

$$L_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 1.6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Pi_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We are looking for positive solutions of the following equations:

$$p_S^1 = (0.1 + 0.5 p_S^2 + 0.2 p_J^2) \wedge 1;$$

$$p_S^2 = (p_S^1 + p_S^3) \wedge 2;$$

$$p_S^3 = (0.5 p_S^2 + 0.8 p_J^2) \wedge 2;$$

$$p_J^1 = 0;$$

$$p_J^2 = (p_S^1 + p_S^3 - 2)^+ \wedge 2;$$

$$p_J^3 = 0.$$

Note that $p_S^1 \leq 1$ and $p_S^2 \leq 2$; hence, $p_J^2 \leq 1$ and the 3rd equation is linear:

$$p_S^3 = 0.5 p_S^2 + 0.8 p_J^2. \quad (4)$$

Substituting into the 2nd equation this expression for p_S^3 and the expression for p_S^1 from the 1st equation, one gets that

$$p_S^2 = ((0.1 + 0.5 p_S^2 + 0.2 p_J^2) \wedge 1 + 0.5 p_S^2 + 0.8 p_J^2) \wedge 2.$$

The inequality $p_S^1 < 1$ is impossible since in this case, $0.1 + 0.5 p_S^2 + 0.2 p_J^2 < 1$, implying that

$$p_S^2 = (0.1 + p_S^2 + p_J^2) \wedge 2.$$

For positive values of unknown variables, the last equality may hold only if $p_S^2 = 2$ but then, the 1st equation tells one that $p_S^1 = 1$.

Thus, it was determined that $p_S^1 = 1$.

Combining the 2nd equation with (4), one obtains the equality

$$p_S^2 = (1 + 0.5 p_S^2 + 0.8 p_J^2) \wedge 2$$

implying that $p_S^2 = 2$.

Available information allows one to reduce the 5th equation to the simple one of the form $p_J^2 = 0.8 (p_J^2)^+ \wedge 2$ having the unique solution $p_J^2 = 0$.

Summarizing, one gets that $p_S = (1, 2, 1)$ and $p_J = (0, 0, 0)$.

Comment. In the first example, the bank 1 has met all liabilities and finished with a positive equity, the bank 2 has payed the senior liabilities but defaulted on the junior debts, the bank 3 has defaulted already at the senior debts; and the bank 2 has no junior liabilities with the bank 1. So, the Δ -orbit of the banks 2 and 3 are not surplus sets and there are infinite many clearing vectors. In the second example, the bank 2 has a junior debt to bank 1, all Δ -orbits are surplus sets, and the clearing vector is unique.

4 Models with Illiquid Assets and a Price Impact

Let us consider the clearing problem without seniority structure where the bank i owns not only cash e^i but also K illiquid assets, in quantities y^{i1}, \dots, y^{iK} represented in the model by the row i of the matrix $Y = (y^{im})$, $i \leq N$, $m \leq K$. The nominal prices per unit of illiquid assets are strictly positive numbers Q^1, \dots, Q^K . The clearing might require their partial sale influencing the market price. If the bank sells $u^{im} \in [0, y^{im}]$ units of the m th assets for the price q_m , its total increase in cash is

$$(Uq)^i = \sum_{m=1}^K u^{im} q^m.$$

The price formation is modeled by the inverse demand function $F_0 : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$ assumed to be continuous and monotone decreasing ($F_0(z) \leq F_0(x)$ when $z \geq x$ in the sense of partial ordering defined by \mathbb{R}_+^K) and such that $F_0(0) = Q$ and $F_0^m(Y'1) > 0$ for $m = 1, \dots, K$. The first condition means that in the absence of supply, the prices are just the nominal prices while the second one shows that even in the case of total sale, the prices of illiquid assets remain strictly positive.

The clearing rules: each bank pays debts in accordance to the matrix of relative liabilities and sells illiquid assets if it has insufficient amount of cash. The result of clearing should be: all debts of the bank are covered or its equity falls down to zero.

In the case of several illiquid assets, there is a problem how the banks chose their strategies of selling. In principle, one can imagine the situation that they have full freedom and, acting in the noncooperative way, drop down the market of illiquid assets because of an excessive supply. It seems reasonable that the central authority may impose extra rules on selling illiquid assets. Let us suppose that this is done by prescribing that the bank i must sell all assets in the same proportion α^i :

$$\alpha^i(q) = \frac{(\tilde{L}^i - e^i - \sum_j \Pi^{ji} p^j)^+}{\sum_k y^{ik} q^k} \wedge 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

This formula means that for a fixed market price, the bank does not sell illiquid assets if its cash reserve together with collected debts covers the liabilities. In the another extreme case where

$$\tilde{L}^i - e^i - \sum_j \Pi^{ji} p^j \geq \sum_k y^{ik} q^k = (Yq)^i,$$

all illiquid assets have to be sold and the bank defaults. In the intermediate case, the bank sells a share $\alpha^i \in]0, 1[$ of the m th asset adding to its cash an extra amount

$((\tilde{L}^i - e^i - \sum_j \Pi^{ji} p^j) / \sum_k y^{ik} q^k) y^{im} q_m$. The total increase in cash allows to cover the liabilities.

Under such a rule, the i th bank sells $u^{im} := u^{im}(p, q)$ units of the m th asset where

$$u^{im} := \frac{y^{im} (\tilde{L}^i - e^i - \sum_j \Pi^{ji} p^j)^+}{\sum_k y^{ik} q^k} \wedge y^{im}.$$

The total supply of the illiquid assets is given by the vector $1'U(p, q)$ where $U(p, q)$ is the matrix with entries given by the above formula.

Define the equilibrium vector

$$(p^*, q^*) \in [0, \tilde{L}] \times [F_0(1Y), Q]$$

as the solution of the system of $N + K$ equations written in the matrix form as

$$p = (e + U(p, q)q + \Pi'p) \wedge \tilde{L}; \quad (5)$$

$$q = F_0(U'(p, q)1). \quad (6)$$

The existence of the equilibrium is easy. Indeed, check that

$$U'(p, q)1 \geq U'(\tilde{p}, \tilde{q})1;$$

$$U(p, q)q + \Pi'p \leq U(\tilde{p}, \tilde{q})\tilde{q} + \Pi'\tilde{p}$$

when $(\tilde{p}, \tilde{q}) \geq (p, q)$. Denoting $F(p, q)$ the right-hand side of the first equation, one obtains that

$$(p, q) \mapsto (F(p, q), F_0(U'(p, q)1))$$

is a monotone mapping of the order interval $[0, \tilde{L}] \times [F_0(1Y), Q]$ into itself. According to Knaster–Tarski theorem, the set of its fixed points is nonempty and contains the minimal and maximal elements $(\underline{p}^*, \underline{q}^*)$ and (\bar{p}^*, \bar{q}^*) .

For a fixed q , the function $p \rightarrow F(p, q)$ is monotone. Thus, by the Knaster–Tarski theorem, the set of solutions of Eq. (5) is nonempty and contains, in particular, the maximal element $\bar{p}(q)$.

For any fixed $q \in [F_0(Y), Q]$, the largest solution $\bar{p} = \bar{p}(q)$ of (5) is given by formula:

$$\bar{p} = \sup \left\{ p \in [0, \tilde{L}] : p \leq (e + U(p, q)q + \Pi'p) \wedge \tilde{L} \right\}$$

implying that $q \mapsto \bar{p}(q)$ is an increasing (and continuous) function on $[F_0(Y), Q]$. It follows that the supply function

$$q \mapsto \zeta(q) := U'(\bar{p}(q), q)1$$

is decreasing and, therefore, $q \mapsto F_0(\zeta(q))$ is an increasing (and continuous) mapping of the interval $[F_0(Y), Q]$ into itself and, therefore, it has the minimal and maximal fixed points that will be denoted by q_1 and q_2 .

Lemma 3. *Suppose that the scalar function $x \rightarrow x'F_0(x)$ is strictly increasing on $[F_0(Y), Q]$. Then, the solution of the equation $q = F_0(\zeta(q))$ is unique, i. e., $q_1 = q_2$.*

Proof. Arguing by contradiction, suppose that $q_1 \neq q_2$. Since $q_1 \leq q_2$ and $\zeta(\cdot)$ is decreasing, $\zeta(q_1) \geq \zeta(q_2)$. Moreover, $\zeta(q_1) \neq \zeta(q_2)$ as the values of F_0 at these points are q_1 and q_2 . The assumed strict monotonicity implies that

$$\zeta'(q_1)F_0(\zeta(q_1)) > \zeta'(q_2)F_0(\zeta(q_2)).$$

It follows that

$$\zeta'(q_1)q_1 > \zeta'(q_2)q_2.$$

To get a contradiction, it is sufficient to show that

$$\Delta := \zeta'(q_2)q_2 - \zeta'(q_1)q_1 \geq 0.$$

Let $\bar{p}_k := \bar{p}(q_k)$ and let

$$D_k := \left\{ i : \left(\tilde{L} - e - \Pi' \bar{p}(q_k) \right)^i \geq (Yq_k)^i \right\},$$

i. e., D_k is the set of banks that are forced to sell all their illiquid assets for the price q_k , $k = 1, 2$. Since $\bar{p}(\cdot)$ is increasing, $D_2 \subseteq D_1$. With the notation $\mathbf{1}'_A$ for the row-vector representing the indicator function of the subset $A \subseteq \{1, \dots, N\}$, one has, taking into account that $a^+ = a + a^-$:

$$\begin{aligned} \zeta'(q_k)q_k &= \mathbf{1}'_{D_k} Yq_k \\ &+ \mathbf{1}'_{D_k^c} \left(\tilde{L} - e - \Pi' \bar{p}_k \right) + \mathbf{1}'_{D_k^c} \left(\tilde{L} - e - \Pi' \bar{p}_k \right)^- . \end{aligned}$$

This formula leads to the representation:

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathbf{1}'_{D_2} Y(q_2 - q_1) - \mathbf{1}'_{D_1 \setminus D_2} Yq_1 \\ &- \mathbf{1}'_{D_1^c} \Pi' (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) + \mathbf{1}'_{D_2^c \setminus D_1^c} \left(\tilde{L} - e - \Pi' \bar{p}_2 \right) \\ &+ \mathbf{1}'_{D_1^c} \left(\left(\tilde{L} - e - \Pi' \bar{p}_2 \right)^- - \left(\tilde{L} - e - \Pi' \bar{p}_1 \right)^- \right) \\ &+ \mathbf{1}'_{D_2^c \setminus D_1^c} \left(\tilde{L} - e - \Pi' \bar{p}_2 \right)^- . \end{aligned}$$

Since the function $x \rightarrow x^-$ (on \mathbb{R}^N) is positive and decreasing, the last two terms in the right-hand side are positive. Regrouping the third and the fourth terms, one gets that

$$\begin{aligned} \Delta &\geq \mathbf{1}'_{D_2} Y(q_2 - q_1) - \mathbf{1}'_{D_1 \setminus D_2} q_1 Y - \mathbf{1}'_{D_2^c} \Pi' (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \\ &+ \mathbf{1}'_{D_1 \setminus D_2} \left(\tilde{L} - e - \Pi' \bar{p}_1 \right) . \end{aligned} \quad (7)$$

From Eq. (5), it follows that

$$\begin{aligned} \mathbf{1}' \Pi' (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) &= \mathbf{1}' (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) = \mathbf{1}'_{D_1} (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \\ &= \mathbf{1}'_{D_2} (q_2 u(\bar{p}_2, q_2) - q_1 u(\bar{p}_1, q_1) + \Pi' (\bar{p}_2 - \bar{p}_1)) \\ &+ \mathbf{1}'_{D_1 \setminus D_2} \left(\tilde{L} - (e + q_1 u(\bar{p}_1, q_1) + \Pi' \bar{p}_1) \right) \end{aligned}$$

implying that

$$\begin{aligned} \mathbf{1}'_{D_2^c} \Pi' (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) &= \mathbf{1}'_{D_2} (U(\bar{p}_2, q_2) q_2 \\ &- U(\bar{p}_1, q_1) q_1) - \mathbf{1}'_{D_1 \setminus D_2} U(\bar{p}_1, q_1) q_1 \\ &+ \mathbf{1}'_{D_1 \setminus D_2} \left(\tilde{L} - e - \Pi' \bar{p}_1 \right) . \end{aligned}$$

Substituting this expression in (7), one has:

$$\begin{aligned} \Delta &\geq \mathbf{1}'_{D_2} Y(q_2 - q_1) - \mathbf{1}'_{D_1 \setminus D_2} Yq_1 \\ &- \mathbf{1}'_{D_2} (U(\bar{p}_2, q_2) q_2 - U(\bar{p}_1, q_1) q_1) \\ &+ \mathbf{1}'_{D_1 \setminus D_2} q_1 u(\bar{p}_1, q_1) = 0 \end{aligned}$$

since the cash increment $(U(\bar{p}_2, q_2) q_2)^i = (Yq)^i$ for the bank $i \in D_2$ and $(U(\bar{p}_1, q_1) q_1)^i = (Yq_1)^i$ for $i \in D_1 \supseteq D_2$. \square

Theorem 3. *Suppose that the scalar function $x \rightarrow x'F_0(x)$ is strictly increasing on $[F_0(Y), Q]$. Then, there is q^* such that the set of solutions of the system (5), (6) is contained in the interval with the extremities $(\underline{p}(q^*), q^*)$ and $(\bar{p}(q^*), q^*)$. In particular, if for each q the solution of (5) is unique, then the solution of the system is also unique.*

Proof. Let Γ be the set of q for which (p, q) is a solution of the system (5), (6). If $q^* \in \Gamma$, then $(\bar{p}(q^*), q^*)$ is the solution of (5), (6). According to lemma 3, the point q^* is uniquely defined. This implies the result. \square

Note that the uniqueness of the solution of (5) is guaranteed if for each i , the orbit of i contains an element with positive cash reserve.

Remark 2. In [5], it was considered a model coinciding with studied above in the case of a single illiquid asset. The difference is that in the cited paper, the equilibrium is defined as a vector (p, q) satisfying the system of equations:

$$\begin{aligned} p &= (e + qy + \Pi' p)^+ \wedge \tilde{L}; \quad (8) \\ q &= F_0 \left(\mathbf{1}' \left(\left(q^{-1} \left(\tilde{L} - e - \Pi' p \right)^+ \right) \wedge y \right) \right) . \end{aligned}$$

To our opinion, the definition of the equilibrium given by the system (5), (6), which is in the one liquid asset case has the form:

$$\begin{aligned} p &= \left(e + \left(\tilde{L} - e - \Pi' p \right)^+ \wedge (qy) + \Pi' p \right) \wedge \tilde{L}; \quad (9) \\ q &= F_0 \left(\mathbf{1}' \left(\left(q^{-1} \left(\tilde{L} - e - \Pi' p \right)^+ \right) \wedge y \right) \right) , \end{aligned}$$

is more natural. In fact, the right-hand sides of (8) and (9) as functions $R_1(p, q)$ and $R_2(p, q)$ defined on $[0, \tilde{L}] \times [F_0(1Y), Q]$ coincide. To see this, fix i and consider the three possible cases.

1. Let $e^i + qy + (\Pi'p)^i \leq \tilde{L}^i$. Then, the expressions for $R_1^i(p, q)$ and $R_2^i(p, q)$ have the same form $e^i + qy + (\Pi'p)^i$.
2. Let $e^i + qy + (\Pi'p)^i > \tilde{L}^i$ and $\tilde{L}^i - e^i - (\Pi'p)^i \geq 0$. Then, the values $R_1^i(p, q)$ and $R_2^i(p, q)$ are equal to \tilde{L}^i .
3. Let $e^i + qy + (\Pi'p)^i > \tilde{L}^i$ and $\tilde{L}^i - e^i - (\Pi'p)^i < 0$. Then, the value of $R_1^i(p, q)$ is \tilde{L}^i and the value of $R_2^i(p, q)$ is $(e^i + (\Pi'p)^i) \wedge \tilde{L}^i = \tilde{L}^i$.

Then, the smallest and the largest fixed points are also increasing in y .

Proof. The claim is obvious because the sets

$$L(y) := \{x : f(x, y) \leq x\}$$

are decreasing and the sets

$$U(y) := \{x : f(x, y) \geq x\}$$

are increasing in y (see [7]).

These general results are applied to the order intervals $[a, b] \subset \mathbb{R}^d$ with the ordering induced by \mathbb{R}_+^d .

Appendix

Knaster–Tarski Fixpoint Theorem

Let X be a set with a partial ordering \geq and let A be its nonempty subset. By definition, $\sup A$ is an element \bar{x} such that $\bar{x} \geq x$ for all $x \in A$ and if \bar{x}' is such that $\bar{x}' \geq x$ for all $x \in A$, then $\bar{x}' \geq \bar{x}$. The definition of $\inf A$ follows the same pattern but with the dual ordering \leq . A partially ordered set X is *complete lattice* if for any its nonempty subset A , there exist $\inf A$ and $\sup A$.

Theorem 4. *Let X be a complete lattice and let $f : X \mapsto X$ be an order-preserving mapping, $L := \{x : f(x) \leq x\}$, $U := \{x : f(x) \geq x\}$. The set $L \cap U$ of fixed points of f is nonempty and has the smallest and the largest fixed points which are, respectively, $\underline{x} := \inf L$ and $\bar{x} := \sup U$.*

Proof. Note that $L \neq \emptyset$ since it contains the element $\sup X$. Take arbitrary $x \in L$. Then, $\underline{x} \leq x$ implying that $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq x$. Thus, $f(\underline{x}) \leq \underline{x}$ as \underline{x} is $\inf L$. So, $\underline{x} \in L$. Since $f(L) \subseteq L$, also $f(\underline{x}) \in L$; hence, $\underline{x} \leq f(\underline{x})$, i. e., $\underline{x} = f(\underline{x})$. All fixed points belong to L and, therefore, \underline{x} is the smallest one.

The proof of the statement for the largest fixed point is analogous. \square

Corollary. *Let $f(\cdot; y)$ be an order-preserving mapping of a complete lattice (X, \geq) into itself, depending on the parameter y from a partially ordered set (Y, \succeq) . Suppose that $f(\cdot, y)$ is increasing in y , that is, $f(x, y') \geq f(x, y)$ for all $x \in X$ when $y' \succeq y$.*

Acknowledgments

The research of Yuri Kabanov was done under partial financial support of the grant of the Russian Science Foundation No. 14-49-00079.

References

1. Eisenberg, L., and T. H. Noe. 2001. Systemic risk in financial systems. *Manag. Sci.* 47(2):236–249.
2. Suzuki, T. 2002. Valuing corporate debt: The effect of cross-holdings of stock and debt. *J. Oper. Res. Soc. Japan* 45(2):123–144.
3. Tarski, A. 1955. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific J. Math.* 5(2):285–309.
4. Cont, R., and L. Wagalath. 2015. Fire sale forensics: Measuring endogenous risk. *Math. Finance* 26:835–866.
5. Amini, H., D. Filipović, and A. Minca. 2015. To fully net or not to net: Adverse effects of partial multilateral netting. *Oper. Res.* 64(5):1135–1142.
6. Elsinger, H. 2009. Financial networks, cross holdings, and limited liability. Working paper from Oesterreichische Nationalbank.
7. Milgrom, J., and J. Roberts. 1994. Comparing equilibria. *Am. Econ. Rev.* 84:441–454.

Received September 25, 2016

Contributors

El Bitar Khalil (b. 1981) — PhD student, Laboratoire de Mathematiques, Universite de Franche-Comte, 16 Route de Gray, 25030, Besançon, CEDEX, France; khalilbitar_aw@hotmail.com

Kabanov Yuri M. (b. 1948) — professor, Laboratoire de Mathematiques, Universite de Franche-Comte, 16 Route de Gray, 25030, Besançon, CEDEX, France; leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; National Research University “MPEI,” 14 Krasnokazarmennaya Str., Moscow 111250, Russian Federation; Youri.Kabanov@univ-fcomte.fr

Mokbel Rita (b. 1981) — PhD student, Laboratoire de Mathematiques, Universite de Franche-Comte, 16 Route de Gray, 25030, Besançon, CEDEX, France; ritamokbel@hotmail.com

О ЕДИНСТВЕННОСТИ КЛИРИНГОВЫХ ВЕКТОРОВ, РЕДУЦИРУЮЩИХ СИСТЕМНЫЙ РИСК*

Х. Эль Битар¹, Ю. Кабанов^{1,2,3}, Р. Мокбель¹

¹Лаборатория математики Университета Франш-Конте, г. Безансон, Франция

²Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, Российский университет дружбы народов

³Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Аннотация: В финансовых системах, т. е. в сети взаимосвязанных банков, процедура взаимозачета, или клиринга, состоит в одновременной выплате задолженностей с целью уменьшения общей их суммы в системе. Вектор, компоненты которого есть суммарные выплаты каждого банка системы, называется клиринговым вектором. В простых моделях, предложенных Айзенбергом и Ноэ (2001) и независимо Судзуки (2002) было показано, что полный клиринг описывается вектором, который является неподвижной точкой некоторого отображения. Существование клирингового вектора может быть получено прямой ссылкой на теоремы о неподвижной точке Кнастера–Тарского или Брауэра. Вопрос о его единственности является более деликатным. Айзенберг и Ноэ получили достаточное условие единственности в терминах графа связей финансовой системы. В настоящей работе доказывается единственность для двух более общих моделей: модели Эльсингера с приоритетами долгов и модели типа Амини–Филиповича–Минки, в которой банки имеют неликвидные активы, продажа которых влияет на их рыночную цену.

Ключевые слова: системный риск; финансовые сети; клиринг; теорема Кнастера–Тарского; модель Айзенберга–Ноэ; приоритет финансовых обязательств; влияние на ценообразование

DOI: 10.14357/19922264170110

Литература

1. Eisenberg L., Noe T. H. Systemic risk in financial systems // *Manag. Sci.*, 2001. Vol. 47. No. 2. P. 236–249.
2. Suzuki T. Valuing corporate debt: The effect of cross-holdings of stock and debt // *J. Oper. Res. Soc. Japan*, 2002. Vol. 45. No. 2. P. 123–144.
3. Tarski A. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications // *Pacific J. Math.*, 1955. Vol. 5. No. 2. P. 285–309.
4. Cont R., Wagalath L. Fire sale forensics: Measuring endogenous risk // *Math. Finance*, 2015. Vol. 26. P. 835–866.
5. Amini H., Filipović D., Minca A. To fully net or not to net: Adverse effects of partial multilateral netting // *Oper. Res.*, 2015. Vol. 62. No. 5. P. 1135–1142.
6. Elsingher H. Financial networks, cross holdings, and limited liability. Working paper from Oesterreichische Nationalbank, 2009.
7. Milgrom J., Roberts J. Comparing equilibria // *Am. Econ. Rev.*, 1994. Vol. 84. P. 441–454.

Поступила в редакцию 25.09.2016

*Представленные в настоящей статье результаты исследований, проведенных Ю. М. Кабановым, были получены при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-49-00079).

INFORMATICS AND ITS ROLE FOR THE STUDY OF GENESIS AND PROPERTIES OF COMPLEX NATURAL SYSTEMS*

R. B. Seyful-Mulyukov¹

Abstract: The paper considers the history of cognition of information as a phenomenon and informatics as its quantitative and qualitative development. The logical connection between such notions as information, informatics, complexity, and complex natural self-organizing systems is investigated. It is considered that information, besides its usual traditional meaning, is one of the main properties of matter. Informatics is considered as an instrument for cognition of development and structure of complex natural systems. Petroleum is chosen as an example of such system. It is proved that petroleum, as well as each its hydrocarbon molecule, possesses corpuscular properties, and petroleum as a whole has information volume calculated in bits. A new approach is proposed for petroleum accumulations exploration. It is based on the fact that petroleum generation is a discrete process. Consequently, the process of discovering petroleum accumulations has two stages. The first stage is characterized by static uncertainty and the second stage is characterized by dynamic uncertainty. Both types of uncertainty need to be removed. The paper presents technologies and methods of solving these problems.

Keywords: informatics; informatization; complex natural system; petroleum origin; petroleum exploration; static uncertainty; dynamic uncertainty

DOI: 10.14357/19922264170111

Historically, “information” was understood as data about an event, a state, or other characteristics of a phenomenon that living species transmitted to each other. In particular, information is a light, heat, or sound signal from a natural phenomenon, which plants receive or to which they react. Information is a signal of different types that terrestrial animals, pests, birds, as well as marine creatures receive or exchange with each other.

In economics, main data are expressed with digits. In industry and agriculture, “information” is the name of specifications of goods and services or unit measurements, such as weight, mass, volume, size, distance, and others. In education, “information” is all totality of the basic knowledge about nature, history, and laws. This knowledge has vital importance for development of mankind. In each sphere of activities, “information” is understood in a specific way.

The notion of “informatization” appeared in the information theory and different spheres of information applications. Its appearance was caused by a rapid increase of flow of information, which was used in everyday life, industry, science, culture, education, social, and other spheres.

Information has to be transmitted, received, processed, interpreted, stored, and undergo many other

manipulations. It is necessary for the right positioning of an individual or a community in a society and has vital importance for economic independency and national security. All of these activities are informatization.

Informatization is not a one-time campaign. Everyday activities introduced the public consciousness to the necessity of informatization of all spheres of social activities. K. Kolin proved that informatization has to be perceived in the public consciousness as a powerful instrument for qualitative modification of education, science development, new technologies application, improving management, and other activities. All of these activities have vital importance for development and national security [1].

This paper presents application of informatization to solving one of fundamental problems of natural sciences — the problem of genesis of petroleum and natural hydrocarbon gas. For this reason, the paper contains a short introduction to the history of cognition of the notion of “information.” It does not mean only social phenomena or informatics as an instrument, which provides information storage, usage, transmission, and processing. “Information” also means the properties of matter, which are associated with the notion of a “complex natural system.” These systems can be cognized using the laws of informatics.

*The investigation was carried out according to the Program “Informatics methods in development of the petroleum origin theory and elaboration of new technologies for exploring petroleum and gas accumulations and providing energy security of the Russian Federation” under the general theme “Society informatization and information security.”

¹Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation, rust@ipiran.ru

Understanding of the notion of “information” depends on means of its transmission, usage, application, and many other factors and is always subjective. There is no exact definition of “information,” which would be universally recognized, and such definition is not possible in principle. The development of civilization and growth of our knowledge about matter, movement, time, and space resulted in a new deeper and more comprehensive understanding of “information.” The most important achievement was the identification of “information” and “uncertainty” that were measured by the C. Shannon’s mathematical theory of information [2]. It was a qualitative definition of “information.” For the first time in the history of information science, A. Ursul presented an integrated philosophical definition of “information” that shows the relation between its quantitative and qualitative content [3].

The revolution of information cognition was the result of detection of its new meaning. Physicists M. Planck and L. de Broglie [4] investigated matter on atomic and subatomic levels and proved that besides its usual meaning as something existing in our consciousness, information is also one of the main properties of matter that exists beyond men’s consciousness or wish. A. Zeilinger proved that each elementary particle of an atom contains one bit of information [5].

Further investigation of qualitative and quantitative characteristics of information caused the appearance of new disciplines. First among them was cybernetics that N. Wiener defined as a “scientific study of control and communication in animals and machines” [6]. The practical application of this idea was the computer. Later, the term “informatics” was introduced by K. Steinbuch [7]. Since 1966, informatics was positioned as a science about collection, storage, distribution, retrieval, and use of scientific and technical information [8].

Russian and American scientists continued to investigate informatics and information science theory and applied problems, which are based on achievements of mathematics, physics, cybernetics, and philosophy. The approach of American information specialists and their understanding of “information” and “information science” is best described in two monographs. The first one considers information science as a metascience [9]. Its integral parts are mathematics, linguistics, psychology, library science, engineering science, and computer science [10]. Physics and cybernetics were predecessors of information science; therefore, they are not present in this list. However, these disciplines proved physical nature of information as one of its main properties.

Another monograph is an official publication of the American Society for Information Science and Technology (ASIS&T). The monograph follows the ideas of Otten and Debone. Information science is considered

mainly as investigation of mental perception and interpretation of information as a phenomenon existing in our consciousness. A considerable part of the monograph is devoted to information in economics. In the case of market economy, “information” (in other words, “uncertainty” or “information entropy”) is related to the notion of “value.” It means that the Shannon’s theory, which deals with quantity of information, represents the quantitative side of information with its value. In this context, information has value since it can be bought or sold in order to decrease uncertainty and create a product with a larger value.

The development of the information theory relates to I. Gurevich [11]. Basing on the postulate that information is one of the main fundamental properties of matter, he calculated information content of each chemical element of the Mendeleev table in bits. Besides, he proved that laws of fundamental sciences including informatics make it possible to understand development of complex natural and social systems.

An indicative example, which demonstrates effectiveness of applying informatics laws to the study of complex natural systems, is the problem of origin of petroleum and natural hydrocarbon gas. According to the currently dominating model, petroleum origin is mainly the problem of petroleum geology and geochemistry. This model has become insufficient, which results in a considerable decrease of effectiveness of exploration works. Surprisingly, application of informatics laws solves this problem. In informatics, the nature and properties of petroleum are represented as direct or indirect consequences of the fact that petroleum is a complex self-developing natural system [12, 13]. Its nature, main properties, and genesis become understandable, if one considers them in the context of the phenomenon of complexity and informatics laws.

The new understanding of deep inorganic nature of petroleum as a phenomenon that is not related to the biosphere in any way leads to the necessity of changing the ideology of exploration of its commercial accumulations. The current methodology is based on the assumption that remainders of the biosphere’s plants and animals served as raw material for petroleum and gas generation. However, nobody has ever proved the existence of mother rocks generating petroleum and their ability to transform organic matter into hydrocarbon molecules for sure. Nobody has ever proved that petroleum is able to migrate through geological rocks, so media keeps its initial hydrocarbon composition. The deep inorganic nature of petroleum proves its place in the hierarchy of organization of matter on the Earth. There are three main forms of organization of matter. The higher form is represented by billions of *cells* of living species. The intermediary form is represented

by thousands of petroleum hydrocarbon *molecules*. The lower form is represented by several *atoms* of chemical elements composing crystals of rocks.

The most simple petroleum hydrocarbon molecules transform into the most complex ones, which is a self-organizing discrete process. As the result, a complex natural system appears, which possesses several properties. This paper considers the properties, which are the most significant for petroleum generation, namely, *existence*, *development*, and *cognoscibility* [14]. These properties are typical for any complex natural system.

System uniqueness is one of existence features. Petroleum is a unique phenomenon that is created by a unique set of geological, geochemical, fluid-dynamic, and other natural conditions. They are always different for each period of the Earth's history. Petroleum composition and structure correspond completely to the current period of the Earth's development.

System constant movement is one of *development* features. Petroleum is permanently migrating and therefore changing. Petroleum, which is conserved in one place by geological media and keeps its original hydrocarbon composition for hundreds of millions of years, does not exist anymore. Consequently, inside the Earth, there is no Devonian (360 M years old), Carboniferous (300 M years old), Permian (251 M years old), and Jurassic (145 M years old) petroleum. Its generation does not take millions of years, but hundreds or thousands of years. Petroleum generation has the following stages: hydrocarbon radicals and methane molecules appear in the Earth's upper mantle, migrate through the Earth's crust, interact with rocks of geological media, transform into hydrocarbon molecules of different kinds, and finally, accumulate within a reservoir as petroleum.

Cognoscibility of a complex system pertains to the noseological aspect of petroleum nature. There is a principal question: Is our perception of petroleum adequate to its real nature and age or nonadequate? There are two possible answers to this question. One answer corresponds to the organic paradigm of petroleum genesis, which considers that composition, properties, and other features of petroleum just pumped from a reservoir are related to the phenomena, which were generated hundreds of millions years ago. It means that animals and plants of the previous epoch, which served as a source for kerogen generation, had the same composition as they have now. Another opposite idea is that petroleum composition and genesis correspond completely to the modern epoch of the Earth's development.

It is absolutely clear that we cognize composition and features of a complex system as a natural phenomenon, which is generated by all totality of modern geological, geochemical, thermodynamic, and other conditions. Otherwise, one has to accept that 300, 200,

and 100 M years ago geology, geochemistry, thermodynamics, and many other natural conditions of the Earth's interior were the same as they are now. It is impossible in principle. So, according to the *cognoscibility* feature, petroleum is a modern complex abiogenic natural system, which consists of several thousands of hydrocarbon molecules, which are not related to the biosphere.

The petroleum example allows demonstrating one more important feature. The necessity of informatization of scientific research follows from the fact that information is one of the main properties of matter. Petroleum characteristics have never been considered before in this context. Petroleum possesses physical and chemical properties, as well as information content, which corresponds to the quantity of carbon and hydrogen atoms, which compose hydrocarbon molecules [13]. In this case, one has to consider that any atom has information volume that is calculated in bits. Petroleum consists of hydrocarbon molecules on 95%. They are divided into three main groups: paraffin (30%–35%), naphthenic (25%–75%), and aromatic (10%–15%). There are different kinds of petroleum with different quantities of hydrocarbon molecules of different kinds: light oil ($C_{32}H_{66}SN$), low-gravity oil ($C_{32}H_{66}OSN$), and bitumen ($C_{45}H_{51}O_2SN$). Correspondingly, their information volume is 16 224, 16 729, and 17 789 bits.

Application of the complex natural system ideology and informatics laws opens new possibilities for petroleum, such as exploration in different geological media. Therefore, the procedure of exploration of commercial petroleum accumulations requires reconsideration. Static and dynamic uncertainty are typical for a complex natural self-organizing system. Both types of uncertainty have to be removed in order to find the place where petroleum is accumulated. This exploration strategy was proposed for the first time in [12].

Static uncertainty applies to geological elements, whose location in the Earth's interior has not changed during all the time of petroleum generation and accumulation. These geological elements are trap, reservoir, impermeable covering, and canal for petroleum migration. Petroleum accumulation could not have happened without these geological elements. They must be present together, and their static uncertainty has to be removed in the Aristotelian logic terms — “yes” or “no” only. The units used to express exact characteristics of a given geological element are its size, density, permeability, fracturing, degree, as well as petrographic and chemical composition of reservoir, trap, and others. All of these characteristics can be successfully determined by seismic survey technologies. However, problems arise when all geological elements, provided by three-dimensional (3D) mathematical models of petroleum bearing basins, are present, but exploration wells turn out to be dry.

Currently, the average statistical percent of successful exploration does not exceed 30%.

Therefore, besides static uncertainty, there exists another type of uncertainty that does not deal with stable geological elements, but with results of a dynamic discrete process. The result is a petroleum accumulation, which is located sometimes under 10 km of sedimentary rocks. Fixing the stages of petroleum generation and the trajectory of its migration in time and space is impossible. It means that one cannot present a discrete process as a Cantorian set and the result of a discrete process cannot be determined unambiguously by the Boolean classic logic, since mathematical calculation of this logic needs alternating values “1” or “0” only.

Hence, the problem of removing dynamic uncertainty and deciding whether a petroleum accumulation exists or not does not have a unique unambiguous solution. If a problem does not have a unique solution in principle, one can pass to its multiple-valued solution. In this case, intermediate values are introduced. The probability of accumulation presence in deep strata can be expressed with values 0.1, 0.2, 0.25, . . . , 0.7, . . . until 0.95. It means that if static uncertainty was removed for sure, then the probability of removing its dynamic uncertainty could be calculated by applying the fuzzy set theory equations [15]. Petroleum geologists and geophysicists possess all totality of information about the Earth's interior, including its 3D mathematical model, as well as experience and intuition. However, in many cases, this information is insufficient for planning well drilling in a certain point. One can get additional data on that point calculated mathematically to be sure that the probability of discovering a petroleum accumulation is equal to 25%, 75%, or even 95%.

The fuzzy set can consist of multiple direct and indirect geochemical indices of hydrocarbon molecules detected in different elements of environment. Light gasiform hydrocarbon molecules belong only to petroleum, which migrated from the pool to the surface and accumulated in the soil, snow, plants, air located close to the surface, and other elements of environment. Hydrocarbon molecules can be detected by modern geochemical methods.

The new approach described in the paper made it possible to propose a solution of the fundamental problems of petroleum and gas genesis and of exploration of their commercial accumulations in a nontraditional, nontrivial way.

Contributor

Seyful-Mulyukov Rustem B. (b. 1928) — Doctor of Science in geology, professor, Head of Laboratory, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str, Moscow 119333, Russian Federation; rust@ipiran.ru

References

1. Kolin, K. K. 2010. *Filosofskie problemy informatiki* [Philosophic problems of informatics]. Moscow: BINOM. 259 p.
2. Shannon, C. E. 1948. A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. J.* 27:379–423, 623–656.
3. Ursul, A. D. 2010. *Priroda informatsii: Filosofskiy ocherk* [The nature of information: A philosophic essay]. 2nd ed. Chelyabinsk: CHGAKI. 231 p.
4. De Broigle, L. 1927. Wave mechanics and the atomic structure of matter and radiation. *J. Phys. Radium* 8(5):225–241.
5. Zeilinger, A. 1999. A foundation principal for quantum mechanics. *Found. Phys.* 29(4):631–643.
6. Wiener, N. 1961. *Cybernetics, or control and communication in the animal and the machine*. 2nd rev. ed. Cambridge: MIT Press. 232 p.
7. Steinbuch, K. 1957. Informatik. *Automatische Informationsverarbeitung, SEG-Nachrichten* (Technische Mitteilungen der Standard Elektrik Gruppe). No. 4. 171 p.
8. Mikhaylov, A. I., A. I. Chernyy, and R. S. Gilyarevskiy. 1968. *Osnovy informatiki* [The foundations of informatics]. Moscow: Nauka. 425 p.
9. Otten, K., and A. Debons. 1970. Towards a metascience of information: Informatology. *J. Am. Soc. Inform. Sci.* 21:89–94.
10. Norton, M. J. 2010. *Introductory concepts in information science*. 2nd ed. ASIST monograph ser. Information Today. 210 p.
11. Gurevich, I. M. 2007. *Zakony informatiki — osnova stroeniya i poznaniya slozhnykh system* [The laws of informatics as a basis of cognizing complex systems]. Moscow: TORUS PRESS. 399 p.
12. Heylighen, F. 2008. Complexity and self-organization. *Encyclopedia of library and information sciences*. Eds. M. J. Bates and M. N. Maack. Taylor & Frances. 9 p. Available at: <http://pespmc1.vub.ac.be/Papers/ELIS-complexity.pdf> (accessed February 8, 2017).
13. Seyful-Mulyukov, R. B. 2012. *Neft' i gaz. Glubinnaya priroda i ee prikladnoe znachenie* [Petroleum and gas. Deep nature and its applied meaning]. Moscow: TORUS PRESS. 214 p.
14. Seyful-Mulyukov, R. B. 2010. *Neft' — uglevodorodnye posledovatel'nosti: Analiz modeley genezisa i evolyutsii* [Petroleum — hydrocarbon sequences: An analysis of models of genesis and evolution]. Moscow: 11 format. 173 p.
15. Zadeh, L. A. 1975. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Inform. Sci.* 8:199–249, 310–357; 9:43–80.

Received October 11, 2016

ИНФОРМАТИКА И ЕЕ РОЛЬ В ПОЗНАНИИ ОБРАЗОВАНИЯ И СВОЙСТВ СЛОЖНОЙ ПРИРОДНОЙ СИСТЕМЫ

Р. Б. Сейфуль-Мулюков

Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Аннотация: Рассматривается история познания феномена «информации» и информатики как междисциплинарной науки, изучающей качественные и количественные особенности ее практических приложений. Представляется логическая связь таких широко распространенных понятий, как информация, информатика, сложность, сложные природные самоорганизующиеся системы. Принимается во внимание, что информация кроме традиционного, общепринятого значения является одним из свойств материи. Информатика наряду с другими особенностями является инструментом познания развития и строения сложных природных самоорганизующихся систем. В качестве примера такой системы выбрана нефть. Доказывается, что нефть обладает корпускулярными свойствами и каждая молекула углеводорода имеет объем информации в битах. Предлагается новый подход к поиску месторождений нефти, основанный на том факте, что ее образование — это дискретный процесс. Соответственно, обнаружение его результата является раскрытием статической и динамической неопределенности. Рассматриваются методы и технологии их раскрытия.

Ключевые слова: информатика; информатизация; природные сложные системы; образование нефти; поиски нефти; статическая неопределенность; динамическая неопределенность

DOI: 10.14357/19922264160111

Литература

1. *Коллин К. К.* Философские проблемы информатики. — М.: БИНОМ, 2010. 259 с.
2. *Shannon C. E.* A mathematical theory of communication // *Bell Syst. Tech. J.*, 1948. Vol. 27. P. 379–423, 623–656.
3. *Урсул А. Д.* Природа информации: Философский очерк. — 2-е изд. — Челябинск: ЧГАКИ, 2010. 231 с.
4. *De Broigle L.* Wave mechanics and the atomic structure of matter and radiation // *J. Phys. Radium*, 1927. Vol. 8. No. 5. P. 225–241.
5. *Zeilinger A.* A foundation principal for quantum mechanics // *Found. Phys.*, 1999. Vol. 29. No. 4. P. 631–643.
6. *Wiener N.* Cybernetics, or control and communication in the animal and the machine. — 2nd rev. ed. — Cambridge: MIT Press, 1961. 232 p.
7. *Steinbuch K.* Informatik // *Automatische Informationsverarbeitung, SEG-Nachrichten (Technische Mitteilungen der Standard Elektrik Gruppe)*, 1957. No. 4. 171 p.
8. *Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С.* Основы информатики. — М.: Наука, 1968. 425 с.
9. *Otten K., Debons A.* Towards a metascience of information: *Informatology* // *J. Am. Soc. Inform. Sci.*, 1970. Vol. 21. P. 89–94.
10. *Norton M. J.* Introductory concepts in information science. — 2nd ed. — ASIST monograph ser. — *Information Today*, 2010. 210 p.
11. *Гуревич И. М.* Законы информатики — основа строения и познания сложных систем. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2007. 399 с.
12. *Heylighen F.* Complexity and self-organization // *Encyclopedia of library and information sciences* / Eds. M. J. Bates, M. N. Maack. — Taylor & Frances, 2008. 20 p. <http://pespmc1.vub.ac.be/Papers/ELIS-complexity.pdf>.
13. *Сейфуль-Мулюков Р. Б.* Нефть и газ. Глубинная природа и ее прикладное значение. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. 214 с.
14. *Сейфуль-Мулюков Р. Б.* Нефть — углеводородные последовательности: анализ моделей генезиса и эволюции. — М.: 11 формат, 2010. 173 с.
15. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. 176 с.

Поступила в редакцию 11.10.2016

Алексейчук Андрей Сергеевич (р. 1985) — аспирант факультета прикладной математики и физики Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Басок Борис Моисеевич (р. 1948) — кандидат технических наук, доцент Московского технологического университета (МИРЭА)

Борисов Андрей Владимирович (р. 1965) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Горбунов Константин Юрьевич (р. 1965) — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем передачи информации Российской академии наук

Горшенин Андрей Константинович (р. 1986) — кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Докукин Александр Александрович (р. 1980) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Зализняк Анна Андреевна (р. 1959) — доктор филологических наук, ведущий научный сотрудник Института языкознания Российской академии наук; ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Захаров Виктор Николаевич (р. 1948) — доктор технических наук, доцент, ученый секретарь Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Зацман Игорь Моисеевич (р. 1952) — доктор технических наук, заведующий отделом Института проблем информатики Федерального исследовательского

центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Инькова Ольга Юрьевна (р. 1965) — доктор филологических наук, сотрудник Университета Женевы

Кабанов Юрий Михайлович (р. 1948) — профессор Лаборатории математики Университета Франш-Конте, г. Безансон, Франция; ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Любецкий Василий Александрович (р. 1945) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Института проблем передачи информации Российской академии наук; профессор механико-математического факультета МГУ

Мокбель Рита (р. 1981) — аспирант Лаборатории математики Университета Франш-Конте, г. Безансон, Франция

Пантелеев Андрей Владимирович (р. 1955) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой факультета прикладной математики и физики Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Рязанов Василий Владимирович (р. 1991) — аспирант Московского физико-технического института

Сейфуль-Мулоков Рустем Бадриевич (р. 1928) — доктор геолого-минералогических наук, профессор, заведующий лабораторией Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Синицын Игорь Николаевич (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Стефанович Алексей Игоревич (р. 1983) — научный сотрудник Института проблем информатики Феде-

рального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Сушко Дмитрий Викторович (р. 1962) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Френкель Сергей Лазаревич (р. 1951) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник Ин-

ститута проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Шут Ольга Викторовна (р. 1987) — ассистент Белорусского государственного университета

Эль-Битар Халил (р. 1981) — аспирант Лаборатории математики Университета Франш-Конте, г. Безансон, Франция

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ЗА 2007–2016 гг.

	Год	Том(вып.)	Стр.
Абрамов М. О., Катаев М. Ю. Влияние морфологических операций на распознавание фигуры движущегося человека по потоку изображений	2015	9(3)	124–130
Абрамова Е. М. см. Захарова Т. В.	2013	7(4)	105–111
Агаларов М. Я. Аналитическая модель расчета эффективности плана распределения вычислительных ресурсов многопроцессорной системы при решении специального класса задач	2011	5(4)	29–35
Агаларов М. Я. см. Агаларов Я. М.	2016	10(2)	70–79
Агаларов Я. М. Алгоритм вычисления загруженности телекоммуникационной сети с повторными передачами	2009	3(4)	22–29
Агаларов Я. М. Алгоритм вычисления характеристик модели телекоммуникационной сети с повторами передач и неполнодоступной схемой управления буферами	2012	6(2)	2–13
Агаларов Я. М. Модели для сравнительного анализа методов классификации в некоторых распределенных системах распознавания образов	2014	8(3)	45–52
Агаларов Я. М. Пороговая стратегия ограничения доступа к ресурсам в системе массового обслуживания $M/D/1$ с функцией штрафов за несвоевременное обслуживание заявок	2015	9(3)	55–64
Агаларов Я. М. Приближенный метод вычисления характеристик узла телекоммуникационной сети с повторными передачами	2009	3(2)	34–42
Агаларов Я. М. Функция стоимости ресурсов в экономической модели управления ГРИД	2008	2(3)	26–33
Агаларов Я. М., Агаларов М. Я., Шоргин В. С. Об оптимальном пороговом значении длины очереди в одной задаче максимизации дохода системы массового обслуживания типа $M/G/1$	2016	10(2)	70–79
Адигеев М. Г. О полиномиальной разрешимости ультраметрических версий некоторых NP-трудных задач	2014	8(2)	70–76
Алексеевский Д. А. Применение контекстно-свободных грамматик для извлечения онтологии из текстов коротких описаний статей биологической тематики	2016	10(1)	119–128
Андреев А. М., Березкин Д. В., Козлов И. А., Симаков К. В. Подход к автоматизированному контролю работы системы извлечения данных с веб-сайтов	2013	7(3)	2–13
Андреев С. Д. см. Гайдамака Ю. В.	2016	10(4)	2–10
Андреев С. Д. см. Омётов А. Я.	2016	10(3)	23–31
Артюхов С. В. Оценки скорости сходимости распределений экстремумов обобщенных процессов Кокса с ненулевым средним к сдвиговым смесям нормальных законов	2009	3(1)	69–73
Артюхов С. В., Королев В. Ю. Неоднородные рекуррентные модели изменения надежности модифицируемых систем. Непрерывное время	2008	2(4)	57–65
Арутюнян А. Р. Моделирование влияния деформаций отпечатков пальцев на точность дактилоскопической идентификации	2010	4(1)	51–57
Арутюнян А. Р. см. Ушмаев О. С.	2009	3(4)	12–21
Архипов О. П., Архипов П. О., Сидоркин И. И. Вариант создания локальной системы координат для синхронизации изображений выбранных снимков	2016	10(3)	91–97
Архипов О. П., Зыкова З. П. Интеграция гетерогенной информации о цветных пикселях и их цветовосприятии	2010	4(4)	14–25
Архипов О. П., Зыкова З. П. Оптимизация функций Lab-контрастного градиционного преобразования	2013	7(4)	44–51

	Год	Том(вып.)	Стр.
Архипов О. П., Зыкова З. П. Применение полутоновых представлений при анализе изменений цветных изображений	2014	8(3)	90–99
Архипов О. П., Маньяков Ю. А. Текстурирование воксельных моделей на основе цветовой информации об опорных точках	2014	8(3)	100–104
Архипов О. П., Маньяков Ю. А., Сиротинин Д. О. Информационная модель технологии представления натурального объекта и изменения его пространственного положения	2014	8(1)	71–76
Архипов П. О. см. Архипов О. П.	2016	10(3)	91–97
Бабанин А. В. см. Янушко А. В.	2011	5(4)	53–63
Батракова Д. А., Королев В. Ю., Шоргин С. Я. Новый метод вероятностно-статистического анализа информационных потоков в телекоммуникационных сетях	2007	1(1)	40–53
Баша Н. С., Шульга Л. А. Алгоритм автоматического выделения лица на термографических изображениях	2011	5(1)	73–77
Бекетова И. В. см. Каратеев С. Л.	2010	4(1)	65–73
Белоусов В. В. см. Сеницын И. Н.	2010	4(1)	2–11
Белоусов В. В. см. Шнурков П. В.	2016	10(1)	82–95
Белоусов В. В. см. Шнурков П. В.	2016	10(4)	72–88
Белых И. Н., Капустин А. И., Козлов А. В., Лоханова А. И., Матвеев Ю. Н., Пеховский Т. С., Симончик К. К., Шулипа А. К. Система идентификации дикторов по голосу для конкурса <i>NIST SRE 2010</i>	2012	6(1)	91–98
Беляев К. П. см. Королев В. Ю.	2015	9(4)	3–13
Беляев К. П., Тучкова Н. П. Предельные распределения для характеристик при усвоении данных наблюдений в стационарном режиме	2015	9(2)	50–55
Бендерина М. В., Борохов С. В., Будзко В. И., Степанов П. В., Сучков А. П. Управление учетными записями и правами доступа пользователей в центрах обработки данных высокой доступности	2012	6(1)	59–69
Бенинг В. Е. Вычисление асимптотического дефекта некоторых статистических процедур, основанных на выборках случайного объема	2016	10(4)	34–45
Бенинг В. Е. см. Королев В. Ю.	2012	6(4)	34–39
Бенинг В. Е., Галиева Н. К., Королев В. Ю. Асимптотические разложения для функций распределения статистик, построенных по выборкам случайного объема	2013	7(2)	75–83
Бенинг В. Е., Галиева Н. К., Королев В. Ю. Об оценках функций концентрации регулярных статистик, построенных по выборкам случайного объема	2013	7(1)	116–123
Бенинг В. Е., Горшенин А. К., Королев В. Ю. Асимптотически оптимальный критерий проверки гипотез о числе компонент смеси вероятностных распределений	2011	5(3)	4–16
Бенинг В. Е., Драницына М. А., Захарова Т. В., Карпов П. И. Решение обратной задачи в многодипольной модели источников магнитоэнцефалограмм методом независимых компонент	2014	8(2)	77–85
Бенинг В. Е., Закс Л. М., Королев В. Ю. Оценки скорости сходимости распределений случайных сумм к дисперсионным гамма-распределениям	2012	6(3)	69–73
Бенинг В. Е., Королев В. Ю. Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа	2008	2(2)	19–34
Бенинг В. Е., Королев Р. А. О предельном поведении мощностей критериев в случае распределения Лапласа	2010	4(2)	63–74
Бенинг В. Е., Лямин О. О. О мощностях критериев в случае обобщенного распределения Лапласа	2009	3(3)	79–85
Бенинг В. Е., Сипина А. В. Асимптотическое разложение для мощности критерия, основанного на выборочной медиане, в случае распределения Лапласа	2010	4(1)	18–23
Березин С. В., Заяц О. И. Применение уравнения Пугачёва–Свешникова к решению задачи Бакстера о длительности выбросов	2015	9(2)	39–49

	Год	Том(вып.)	Стр.
Березкин Д. В. см. Андреев А. М.	2013	7(3)	2–13
Бирюкова Т. К. см. Киреев В. И.	2014	8(1)	118–126
Бобков С. Г. см. Соколов И. А.	2014	8(1)	45–70
Боков М. В. см. Гудков В. Ю.	2012	6(1)	99–107
Бондаренко А. В. см. Каратеев С. Л.	2010	4(1)	65–73
Борисов А. В. Байесовское оценивание в системах наблюдения с марковскими скачкообразными процессами: игровой подход	2007	1(2)	65–75
Борисов А. В. Применение алгоритмов оптимальной фильтрации для решения задачи мониторинга доступности удаленного сервера	2014	8(3)	53–69
Борисов А. В., Босов А. В., Миллер Г. Б. Моделирование и мониторинг состояния VoIP-соединения	2016	10(2)	2–13
Боровикова О. И. см. Загоруйко Ю. А.	2012	6(3)	22–31
Бородакий В. Ю. Вероятностная модель обслуживания трафика в системе сетевидного типа	2009	3(3)	35–39
Бородина А. В., Морозов Е. В. Об оценивании асимптотики вероятности большого отклонения стационарной регенеративной очереди с одним прибором	2010	4(3)	29–37
Бородина А. В., Морозов Е. В. Об оценивании эффективной пропускной способности системы с регенеративным входным процессом	2013	7(2)	26–33
Борохов С. В. см. Бендерина М. В.	2012	6(1)	59–69
Босов А. В. Задачи анализа и оптимизации для модели пользовательской активности. Часть 1. Анализ и прогнозирование	2011	5(4)	40–52
Босов А. В. Задачи анализа и оптимизации для модели пользовательской активности. Часть 2. Оптимизация внутренних ресурсов	2012	6(1)	19–26
Босов А. В. Задачи анализа и оптимизации для модели пользовательской активности. Часть 3. Оптимизация внешних ресурсов	2012	6(2)	14–21
Босов А. В. Обобщенная задача распределения ресурсов программной системы	2014	8(2)	39–47
Босов А. В. Порталы в системах органов государственной власти	2008	2(1)	44–54
Босов А. В. см. Борисов А. В.	2016	10(2)	2–13
Босов А. В., Иванов А. В. Программная инфраструктура информационного Web-портала	2007	1(2)	50–64
Бронштейн Е. М., Вагапова Д. М. Сравнительный анализ применения эвристического и метаэвристического алгоритмов к задаче о школьном автобусе	2015	9(2)	56–62
Бронштейн Е. М., Зелёв П. А. Об оптимальной доставке грузов транспортным средством с учетом зависимости стоимости перевозок от загрузки транспортных средств по нескольким циклическим маршрутам	2014	8(4)	53–57
Брюхов Д. О. см. Ступников С. А.	2016	10(1)	23–33
Брюхов Д. О., Вовченко А. Е., Захаров В. Н., Желенкова О. П., Калинин Л. А., Мартынов Д. О., Скворцов Н. А., Ступников С. А. Архитектура промежуточного слоя предметных посредников для решения задач над множеством интегрируемых неоднородных распределенных информационных ресурсов в гибридной грид-инфраструктуре виртуальных обсерваторий	2008	2(1)	2–34
Будзко В. И. см. Бендерина М. В.	2012	6(1)	59–69
Бунтман Н. В., Зализняк Анна А., Зацман И. М., Кружков М. Г., Лощилова Е. Ю., Сичинава Д. В. Информационные технологии корпусных исследований: принципы построения кросслингвистических баз данных	2014	8(2)	98–110
Вагапова Д. М. см. Бронштейн Е. М.	2015	9(2)	56–62
Васильев Н. С. Использование принципа равновесия для управления маршрутизацией в транспортных сетях	2014	8(1)	28–35
Васильев Н. С. Коалиционно устойчивые эффективные равновесия в моделях коллективного поведения с обменом информацией	2015	9(2)	2–13

	Год	Том(вып.)	Стр.
Визильтер Ю. В. см. Каратеев С. Л.	2010	4(1)	65–73
Визильтер Ю. В., Горбацевич В. С., Каратеев С. Л., Костромов Н. А. Обучение алгоритмов выделения кожи на цветных изображениях лиц	2012	6(1)	108–113
Виноградова А. В. см. Королев В. Ю.	2008	2(2)	3–18
Вихрова О. Г., Самуйлов К. Е., Сопин Э. С., Шоргин С. Я. К анализу показателей качества обслуживания в современных беспроводных сетях	2015	9(4)	48–55
Вовченко А. Е. см. Брюхов Д. О.	2008	2(1)	2–34
Вовченко А. Е., Калиниченко Л. А., Ковалев Д. Ю. Методы разрешения сущностей и слияния данных в ETL-процессе и их реализация в среде Nadoop	2014	8(4)	94–109
Вольнова А. А. см. Калиниченко Л. А.	2016	10(1)	2–22
Ворфоломеева О. В. см. Тырсин А. Н.	2013	7(4)	3–10
Гавриленко С. В. Оценки скорости сходимости распределений случайных сумм с безгранично делимыми индексами к нормальному закону	2010	4(4)	80–87
Гавриленко С. В. Уточнение неравномерной оценки скорости сходимости распределений пуассоновских случайных сумм к нормальному закону	2011	5(1)	12–24
Гайдамака Ю. В., Андреев С. Д., Сопин Э. С., Самуйлов К. Е., Шоргин С. Я. Анализ характеристик интерференции в модели взаимодействия устройств с учетом среды распространения сигнала	2016	10(4)	2–10
Гайдамака Ю. В., Ефимушкина Т. В., Самуйлов А. К., Самуйлов К. Е. Задачи оптимального планирования межуровневого интерфейса в беспроводных сетях	2012	6(3)	74–80
Гайдамака Ю. В., Печинкин А. В., Разумчик Р. В., Самуйлов А. К., Самуйлов К. Е., Соколов И. А., Сопин Э. С., Шоргин С. Я. Распределение времени выхода из множества состояний перегрузки в системе $M M 1 \langle L, H \rangle \langle H, R \rangle$ с гистерезисным управлением нагрузкой	2013	7(4)	20–33
Гайдамака Ю. В., Самуйлов А. К. Метод расчета характеристик интерференции двух взаимодействующих устройств в беспроводной гетерогенной сети	2015	9(1)	9–14
Галиева Н. К. см. Бенинг В. Е.	2013	7(1)	116–123
Галиева Н. К. см. Бенинг В. Е.	2013	7(2)	75–83
Галина И. В. см. Михеев М. Ю.	2014	8(4)	70–77
Галина И. В. см. Шарнин М. М.	2013	7(2)	92–99
Галина И. В., Козеренко Е. Б., Морозова Ю. И., Сомин Н. В., Шарнин М. М. Ассоциативные портреты предметной области — инструмент автоматизированного построения систем big data для извлечения знаний: теория, методика, визуализация, возможное применение	2015	9(2)	93–110
Гапонова М. О., Шевцова И. Г. Асимптотические оценки абсолютной постоянной в неравенстве Бери–Эссеена для распределений, не имеющих третьего момента	2009	3(4)	41–56
Гасилов А. В. см. Яковлев О. А.	2016	10(3)	98–104
Гершкович М. М. см. Киреев В. И.	2014	8(1)	118–126
Глушановский А. В., Калёнов Н. Е. Проблемы сетевого доступа к научным журналам	2013	7(3)	56–61
Голованов С. А. см. Кривенко М. П.	2013	7(4)	82–93
Голованов С. А. см. Кривенко М. П.	2013	7(4)	94–104
Гончаров А. В., Стрижов В. В. Метрическая классификация временных рядов со взвешенным выравниванием относительно центроидов классов	2016	10(2)	36–47
Горбацевич В. С. см. Визильтер Ю. В.	2012	6(1)	108–113
Горбунова А. В., Зарядов И. С., Матюшенко С. И., Самуйлов К. Е., Шоргин С. Я. Аппроксимация времени отклика системы облачных вычислений	2015	9(3)	32–38
Гордов Е. П. см. Калиниченко Л. А.	2016	10(1)	2–22
Горшенин А. К. Визуализация результатов для метода скользящего разделения смесей	2014	8(4)	78–84
Горшенин А. К. Концепция онлайн-комплекса для стохастического моделирования реальных процессов	2016	10(1)	72–81

	Год	Том(вып.)	Стр.
Горшенин А. К. Об устойчивости сдвиговых смесей нормальных законов по отношению к изменениям смешивающего распределения	2012	6(2)	22–28
Горшенин А. К. см. Бенинг В. Е.	2011	5(3)	4–16
Горшенин А. К. см. Королев В. Ю.	2013	7(1)	12–21
Горшенин А. К. см. Королев В. Ю.	2015	9(4)	3–13
Горшенин А. К. см. Шнурков П. В.	2016	10(1)	82–95
Горшенин А. К. см. Шнурков П. В.	2016	10(4)	72–88
Горшенин А. К., Королев В. Ю., Турсунбаев А. М. Медианные модификации EM- и SEM-алгоритмов для разделения смесей вероятностных распределений и их применение к декомпозиции волатильности финансовых временных рядов	2008	2(4)	12–47
Горькавый И. Н. см. Сухомлин В. А.	2009	3(2)	53–64
Григорьева М. Е., Королев В. Ю. О сходимости распределений случайных сумм к скошенным экспоненциально-степенным законам	2013	7(4)	66–74
Григорьева М. Е., Королев В. Ю., Соколов И. А. Предельная теорема для геометрических сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин и ее применение к прогнозированию вероятности катастроф в неоднородных потоках экстремальных событий	2013	7(4)	11–19
Григорьева М. Е., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Каца–Берри–Эссеена	2010	4(2)	75–82
Грушо А. А., Грушо Н. А., Забейайло М. И., Тимонина Е. Е. Интеграция статистических и детерминистских методов анализа информационной безопасности	2016	10(3)	2–8
Грушо А. А., Грушо Н. А., Тимонина Е. Е. Анализ меток в скрытых каналах ..	2014	8(4)	41–45
Грушо А. А., Грушо Н. А., Тимонина Е. Е. Включение новых запретов в случайные последовательности	2014	8(4)	46–52
Грушо А. А., Грушо Н. А., Тимонина Е. Е. Оценки скорости передачи информации и пропускной способности в скрытых каналах с метками	2015	9(4)	85–90
Грушо А. А., Грушо Н. А., Тимонина Е. Е. Поиск конфликтов в политиках безопасности: модель случайных графов	2010	4(3)	38–41
Грушо А. А., Грушо Н. А., Тимонина Е. Е. Статистические методы определения запретов вероятностных мер на дискретных пространствах	2013	7(1)	54–57
Грушо А. А., Забейайло М. И., Зацаринный А. А. Контроль и управление информационными потоками в облачной среде	2015	9(4)	91–97
Грушо А. А., Забейайло М. И., Зацаринный А. А. Об одном способе сокращения вычислений при формировании замыканий Галуа	2016	10(4)	96–104
Грушо А. А., Тимонина Е. Е. Модель случайных графов для описания взаимодействий в сети	2012	6(4)	57–60
Грушо А. А., Тимонина Е. Е., Ченцов В. М. Существование состоятельных последовательностей статистических критериев в дискретных статических задачах при сложной нулевой гипотезе	2008	2(2)	64–66
Грушо Н. А. см. Грушо А. А.	2010	4(3)	38–41
Грушо Н. А. см. Грушо А. А.	2013	7(1)	54–57
Грушо Н. А. см. Грушо А. А.	2014	8(4)	41–45
Грушо Н. А. см. Грушо А. А.	2014	8(4)	46–52
Грушо Н. А. см. Грушо А. А.	2015	9(4)	85–90
Грушо Н. А. см. Грушо А. А.	2016	10(3)	2–8
Гуда С. А. Операции над представлениями кусочно-квазиаффинных функций в виде деревьев	2013	7(1)	58–69
Гудков В. Ю. Математические модели изображения отпечатка пальца на основе описания линий	2010	4(1)	58–64
Гудков В. Ю., Боков М. В. Быстрая обработка изображений отпечатков пальцев	2012	6(1)	99–107
Гулев С. К. см. Королев В. Ю.	2015	9(4)	3–13

	Год	Том(вып.)	Стр.
Гуртов А. В. см. Лукьяненко А. С.	2010	4(2)	46–52
Данишевский В. И. см. Колесников А. В.	2016	10(4)	114–120
Демин П. В. О двух моделях распределения ресурсов при организации инвестиционных процессов	2011	5(1)	65–67
Драницына М. А. см. Бенинг В. Е.	2014	8(2)	77–85
Дулин С. К., Розенберг И. Н., Уманский В. И. Обработка геопространственной информации на базе репозитория геоинформационной системы	2012	6(2)	29–42
Дурново А. А. см. Зацман И. М.	2011	5(4)	84–98
Дучицкий И. А., Королев В. Ю., Соколов И. А. О точности некоторых математических моделей катастрофически накапливающихся эффектов при прогнозировании риска экстремальных событий	2012	6(4)	9–17
Дьяченко Ю. Г. см. Соколов И. А.	2014	8(1)	45–70
Дюкова Е. В., Сизов А. В., Сотнезов Р. М. Об оптимальном корректном перекодировании целочисленных данных в распознавании	2012	6(4)	61–65
Егоров В. Б. Вопросы реализации объединяющей среды в архитектуре децентрализованной пакетной коммутации	2009	3(2)	43–52
Егоров В. Б. Концепция создания отечественных интегрированных коммуникационных микроконтроллеров для пакетной коммутации	2009	3(1)	34–46
Егоров В. Б. см. Соколов И. А.	2008	2(4)	2–11
Егоров В. Ю., Матвеев Е. А. Регионы времени как объекты операционной системы общего назначения	2008	2(4)	74–84
Ерошенко А. А., Шестаков О. В. Асимптотические свойства оценки риска в задаче восстановления изображения с коррелированным шумом при обращении преобразования Радона	2014	8(4)	32–40
Ерошенко А. А., Шестаков О. В. Асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов в модели с коррелированным шумом	2014	8(1)	36–44
Ефимушкина Т. В. см. Гайдамака Ю. В.	2012	6(3)	74–80
Жаворонкова Ю. В., Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовская рекуррентная модель роста надежности: бета-равномерное распределение параметров	2015	9(1)	98–105
Жаворонкова Ю. В., Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовская рекуррентная модель роста надежности: бета-распределение параметров	2014	8(2)	48–54
Жевнерчук Д. В., Николаев А. В. Методика моделирования нагрузки на сервер в открытых системах облачных вычислений	2012	6(2)	43–50
Желенкова О. П. Исследование радиоисточников средствами виртуальной обсерватории	2012	6(3)	5–21
Желенкова О. П. см. Брюхов Д. О.	2008	2(1)	2–34
Желтов С. Ю. см. Каратеев С. Л.	2010	4(1)	65–73
Жижимов О. Л. см. Скачков Д. М.	2012	6(3)	43–51
Забейайло М. И. см. Грушо А. А.	2015	9(4)	91–97
Забейайло М. И. см. Грушо А. А.	2016	10(3)	2–8
Забейайло М. И. см. Грушо А. А.	2016	10(4)	96–104
Загоруйко Ю. А., Боровикова О. И., Кононенко И. С., Соколова Е. Г. Методологические аспекты разработки электронного русско-английского тезауруса по компьютерной лингвистике	2012	6(3)	22–31
Закс Л. М. см. Бенинг В. Е.	2012	6(3)	69–73
Закс Л. М. см. Королев В. Ю.	2012	6(4)	34–39
Закс Л. М. см. Королев В. Ю.	2013	7(2)	84–91
Закс Л. М. см. Королев В. Ю.	2013	7(3)	102–105
Закс Л. М., Королев В. Ю. Обобщенные дисперсионные гамма-распределения как предельные для случайных сумм	2013	7(1)	105–115
Зализняк Анна А. см. Бунтман Н. В.	2014	8(2)	98–110
Зализняк Анна А., Кружков М. Г. База данных безличных глагольных конструкций русского языка	2016	10(4)	132–141

	Год	Том(вып.)	Стр.
Зарядов И. С. см. Горбунова А. В.	2015	9(3)	32–38
Засыпко В. В. см. Шнурков П. В.	2016	10(1)	82–95
Захаров А. А., Серебряков В. А. Система управления электронной библиотекой LibMeta	2010	4(4)	2–13
Захаров В. Н. см. Брюхов Д. О.	2008	2(1)	2–34
Захаров В. Н. см. Соколов И. А.	2008	2(3)	70–76
Захаров В. Н. см. Соколов И. А.	2014	8(1)	45–70
Захаров В. Н., Калининченко Л. А., Соколов И. А., Ступников С. А. Конструирование канонических информационных моделей для интегрированных информационных систем	2007	1(2)	15–38
Захаров В. Н., Козмидиади В. А. Средства обеспечения отказоустойчивости приложений	2007	1(1)	14–26
Захарова Т. В. Оптимизация расположения станций обслуживания в пространстве	2008	2(2)	41–46
Захарова Т. В. Размещения систем массового обслуживания, минимизирующие среднюю длину очереди	2008	2(1)	63–66
Захарова Т. В. см. Бенинг В. Е.	2014	8(2)	77–85
Захарова Т. В. см. Матвеева С. С.	2010	4(3)	22–28
Захарова Т. В., Абрамова Е. М. О методе прогнозирования и классификации для цензурированных данных	2013	7(4)	105–111
Захарова Т. В., Шестаков О. В. Анализ точности вейвлет-обработки аэродинамических картин обтекания	2016	10(3)	46–54
Зацаринный А. А. см. Грушо А. А.	2015	9(4)	91–97
Зацаринный А. А. см. Грушо А. А.	2016	10(4)	96–104
Зацаринный А. А., Сучков А. П. Системотехнические подходы к созданию системы поддержки принятия решений на основе ситуационного анализа	2016	10(4)	105–113
Зацаринный А. А., Чупраков К. Г. Некоторые аспекты выбора технологии для построения систем отображения информации ситуационного центра	2010	4(3)	59–68
Зацаринный А. А., Чупраков К. Г. Об эргономических зависимостях между параметрами ситуационного зала с использованием изогнутого коллективного экрана	2014	8(4)	85–93
Зацаринный А. А., Шабанов А. П. Аналитические аспекты оценки эффективности в технологии поддержки деятельности организационной системы	2014	8(3)	126–133
Зацаринный А. А., Шабанов А. П. Управление инфокоммуникационными проектами: «своевременность–производительность–информация»	2011	5(4)	76–83
Зацман И. М. Нестационарная семиотическая модель компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов	2009	3(4)	87–101
Зацман И. М. Процессы целенаправленной генерации и развития кросс-языковых экспертных знаний: семиотические основания моделирования	2015	9(3)	106–123
Зацман И. М. Семиотическая модель взаимосвязей концептов, информационных объектов и компьютерных кодов	2009	3(2)	65–81
Зацман И. М. см. Бунтман Н. В.	2014	8(2)	98–110
Зацман И. М. см. Минин В. А.	2013	7(1)	70–81
Зацман И. М. см. Минин В. А.	2014	8(3)	114–125
Зацман И. М. см. Минин В. А.	2015	9(2)	111–123
Зацман И. М. см. Минин В. А.	2016	10(2)	107–122
Зацман И. М., Дурново А. А. Моделирование процессов формирования экспертных знаний для мониторинга программно-целевой деятельности	2011	5(4)	84–98
Зацман И. М., Инькова О. Ю., Кружков М. Г., Попкова Н. А. Представление кроссязыковых знаний о коннекторах в надкорпусных базах данных ...	2016	10(1)	106–118
Зацман И. М., Кожунова О. С. Предпосылки и факторы конвергенции информационной и компьютерной наук	2008	2(1)	77–97

	Год	Том(вып.)	Стр.
Зацман И. М., Косарик В. В., Курчавова О. А. Задачи представления личностных и коллективных концептов в цифровой среде	2008	2(3)	54–69
Зацман И. М., Хавансков В. А., Шубников С. К. Метод извлечения библиографической информации из полнотекстовых описаний изобретений	2013	7(4)	52–65
Заяц О. И. см. Березин С. В.	2015	9(2)	39–49
Зейфман А. И. см. Королев В. Ю.	2012	6(4)	34–39
Зейфман А. И. см. Королев В. Ю.	2013	7(2)	84–91
Зейфман А. И. см. Королев В. Ю.	2016	10(4)	11–20
Зейфман А. И. см. Королев В. Ю.	2016	10(4)	21–33
Зейфман А. И. см. Сатин Я. А.	2011	5(4)	18–25
Зейфман А. И., Королев В. Ю., Коротышева А. В., Шоргин С. Я. Общие оценки устойчивости для нестационарных марковских цепей с непрерывным временем	2014	8(1)	106–117
Зейфман А. И., Коротышева А. В., Киселева К. М., Королев В. Ю., Шоргин С. Я. Об оценках скорости сходимости и устойчивости для некоторых моделей массового обслуживания	2014	8(3)	19–27
Зейфман А. И., Коротышева А. В., Панфилова Т. Л., Шоргин С. Я. Оценки устойчивости для некоторых систем обслуживания с катастрофами	2011	5(3)	27–33
Зейфман А. И., Коротышева А. В., Сатин Я. А., Шоргин С. Я. Об устойчивости нестационарных систем обслуживания с катастрофами	2010	4(3)	9–15
Зейфман А. И., Коротышева А. В., Сатин Я. А., Шоргин С. Я. Оценки в нуль-эргодическом случае для некоторых систем обслуживания	2012	6(4)	27–33
Зейфман А. И., Сатин Я. А., Коротышева А. В., Терёшина Н. А. О предельных характеристиках системы обслуживания $M(t)/M(t)/S$ с катастрофами	2009	3(3)	16–22
Зейфман А. И., Сатин Я. А., Чегодаев А. В. О нестационарных системах обслуживания с катастрофами	2009	3(1)	47–54
Зейфман А. И., Чегодаев А. В., Шоргин В. С. Некоторые оценки для близких к поглощающим марковских моделей	2008	2(2)	35–40
Зелёв П. А. см. Бронштейн Е. М.	2014	8(4)	53–57
Змеев Д. Н., Климов А. В., Левченко Н. Н., Окунев А. С., Стемповский А. Л. Поточковая модель вычислений как парадигма программирования будущего	2015	9(4)	29–36
Золотарев О. В. см. Михеев М. Ю.	2014	8(4)	70–77
Зыкин В. С. Ссылочная целостность данных в корпоративных информационных системах	2015	9(3)	97–105
Зыкин С. В. Динамические контексты базы данных реляционного типа	2014	8(1)	77–88
Зыкова З. П. см. Архипов О. П.	2010	4(4)	14–25
Зыкова З. П. см. Архипов О. П.	2013	7(4)	44–51
Зыкова З. П. см. Архипов О. П.	2014	8(3)	90–99
Иванов А. В. см. Босов А. В.	2007	1(2)	50–64
Игнатьев М. Б. Теория сложных систем и кибернетическая картина мира ...	2011	5(2)	58–68
Ильин В. Д., Соколов И. А. Символьная модель системы знаний информатики в человеко-автоматной среде	2007	1(1)	66–78
Илюшин Г. Я., Соколов И. А. Организация управляемого доступа пользователей к разнородным ведомственным информационным ресурсам	2010	4(1)	24–40
Инькова О. Ю. см. Зацман И. М.	2016	10(1)	106–118
Исаченко Р. В., Стрижов В. В. Метрическое обучение в задачах мультиклассовой классификации временных рядов	2016	10(2)	48–57
Кавагучи Ю., Ульянов В. В., Фуджикоши Я. Приближения для статистик, описывающих геометрические свойства данных большой размерности, с оценками ошибок	2010	4(1)	12–17
Каганов В. Ю., Королёв А. К., Крылов М. Н., Машечкин И. В., Петровский М. И. Методы активной аутентификации на основе анализа динамики работы пользователей с клавиатурой	2013	7(3)	40–55

	Год	Том(вып.)	Стр.
Каданер А. И. см. Черток А. В.	2016	10(4)	46–56
Калёнов Н. Е. Задачи и функции библиотек РАН в современных условиях	2012	6(2)	51–58
Калёнов Н. Е. см. Глушановский А. В.	2013	7(3)	56–61
Калиниченко Л. А. см. Брюхов Д. О.	2008	2(1)	2–34
Калиниченко Л. А. см. Вовченко А. Е.	2014	8(4)	94–109
Калиниченко Л. А. см. Захаров В. Н.	2007	1(2)	15–38
Калиниченко Л. А., Вольнова А. А., Гордов Е. П., Киселева Н. Н., Ковалева Д. А., Малков О. Ю., Окладников И. Г., Подколотный Н. Л., Позаненко А. С., Пономарева Н. В., Ступников С. А., Фазлиев А. З. Проблемы доступа к данным в исследованиях с интенсивным использованием данных в России	2016	10(1)	2–22
Калиниченко Л. А., Ступников С. А. Унификация языков систем на правилах для обеспечения интероперабельности декларативных программ	2012	6(2)	59–76
Кантор О. Г. см. Спивак С. И.	2015	9(1)	87–97
Кантор О. Г., Спивак С. И. Построение моделей системной динамики в условиях ограниченной экспертной информации	2014	8(2)	111–121
Капнин А. В. см. Кузнецов Л. А.	2013	7(3)	106–113
Капустин А. И. см. Белых И. Н.	2012	6(1)	91–98
Карасиков М. Е., Стрижов В. В. Классификация временных рядов в пространстве параметров порождающих моделей	2016	10(4)	121–131
Каратеев С. Л. см. Визильтер Ю. В.	2012	6(1)	108–113
Каратеев С. Л., Бекетова И. В., Ососков М. В., Князь В. А., Визильтер Ю. В., Бондаренко А. В., Желтов С. Ю. Автоматизированный контроль качества цифровых изображений для персональных документов	2010	4(1)	65–73
Карпов А. А. Когнитивные исследования ассистивного многомодального интерфейса для бесконтактного человеко-машинного взаимодействия ...	2012	6(2)	77–86
Карпов П. И. см. Бенинг В. Е.	2014	8(2)	77–85
Катаев М. Ю. см. Абрамов М. О.	2015	9(3)	124–130
Киреев В. И., Гершкович М. М., Бирюкова Т. К. Об аппроксимации и сходимости одномерных параболических интегродифференциальных многочленов и сплайнов	2014	8(1)	118–126
Кириков И. А., Колесников А. В., Листопад С. В. Моделирование самоорганизации групп интеллектуальных агентов в зависимости от степени согласованности их взаимодействия	2009	3(4)	76–86
Кириков И. А., Колесников А. В., Листопад С. В. Моделирование систем поддержки принятия решений синергетическим искусственным интеллектом	2013	7(3)	62–69
Кириков И. А., Колесников А. В., Листопад С. В., Румовская С. Б. «Виртуальный консилиум» — инструментальная среда поддержки принятия сложных диагностических решений	2016	10(3)	81–90
Кириков И. А., Колесников А. В., Листопад С. В., Румовская С. Б. Мелкозернистые гибридные интеллектуальные системы. Часть 1: Лингвистический подход	2015	9(4)	98–105
Кириков И. А., Колесников А. В., Листопад С. В., Румовская С. Б. Мелкозернистые гибридные интеллектуальные системы. Часть 2: Двухнаправленная гибридизация	2016	10(1)	96–105
Киселева К. М. см. Зейфман А. И.	2014	8(3)	19–27
Киселева Н. Н. см. Калиниченко Л. А.	2016	10(1)	2–22
Клеменков П. А. Построение новостного рекомендательного сервиса реального времени с использованием NoSQL СУБД	2013	7(3)	14–21
Климов А. В. см. Змеев Д. Н.	2015	9(4)	29–36
Князь В. А. см. Каратеев С. Л.	2010	4(1)	65–73
Ковалев Д. Ю. см. Вовченко А. Е.	2014	8(4)	94–109
Ковалева Д. А. см. Калиниченко Л. А.	2016	10(1)	2–22

	Год	Том(вып.)	Стр.
Ковалёв С. П. Применение метапрограммирования для повышения технологичности больших автоматизированных систем	2016	10(1)	56–66
Ковалёв С. П. Семантика аспектно-ориентированного моделирования данных и процессов	2013	7(3)	70–80
Ковалёв С. П. Формальный аксиоматический подход к аспектно-ориентированному расширению технологий программирования	2015	9(1)	55–69
Когаловский М. Р., Паринов С. И. Классификация и использование семантических связей между информационными объектами в научных электронных библиотеках	2012	6(3)	32–42
Кожунова О. С. Когнитивная интероперабельность экспертного взаимодействия в задаче обработки русско-французских параллельных текстов: лингвокогнитивные аспекты	2013	7(3)	81–93
Кожунова О. С. EuroWordNet: задачи, структура и отношения	2008	2(4)	85–92
Кожунова О. С. см. Зацман И. М.	2008	2(1)	77–97
Козеренко Е. Б. Интегральное моделирование языковых структур в лингвистических процессорах систем обработки знаний и машинного перевода	2014	8(1)	89–98
Козеренко Е. Б. Лингвистические фильтры в статистических моделях машинного перевода	2010	4(2)	83–92
Козеренко Е. Б. Лингвистическое моделирование для систем машинного перевода и обработки знаний	2007	1(1)	54–65
Козеренко Е. Б. Стратегии выравнивания параллельных текстов: семантические аспекты	2013	7(1)	82–89
Козеренко Е. Б. см. Галина И. В.	2015	9(2)	93–110
Козеренко Е. Б. см. Михеев М. Ю.	2014	8(4)	70–77
Козеренко Е. Б. см. Шарнин М. М.	2013	7(2)	92–99
Козеренко Е. Б., Кузнецов И. П. Когнитивно-лингвистические представления в системах обработки текстов	2010	4(3)	69–76
Козлов А. В. см. Белых И. Н.	2012	6(1)	91–98
Козлов И. А. см. Андреев А. М.	2013	7(3)	2–13
Козмидиади В. А. Дерево работ и массово-параллельная обработка	2011	5(2)	90–99
Козмидиади В. А. Резервное копирование, использующее снимки	2009	3(2)	15–24
Козмидиади В. А. см. Захаров В. Н.	2007	1(1)	14–26
Колесников А. В. см. Кириков И. А.	2009	3(4)	76–86
Колесников А. В. см. Кириков И. А.	2013	7(3)	62–69
Колесников А. В. см. Кириков И. А.	2015	9(4)	98–105
Колесников А. В. см. Кириков И. А.	2016	10(1)	96–105
Колесников А. В. см. Кириков И. А.	2016	10(3)	81–90
Колесников А. В., Листопад С. В., Румовская С. Б., Данишевский В. И. Неформальная аксиоматическая теория ролевых визуальных моделей	2016	10(4)	114–120
Колесников А. В., Солдатов С. А. Алгоритм координации для гибридной интеллектуальной системы решения сложной задачи оперативно-производственного планирования	2010	4(4)	60–66
Колесов С. В. см. Спивак С. И.	2015	9(1)	87–97
Коллин К. К. Гуманитарные аспекты проблемы информационной безопасности	2016	10(3)	111–121
Коллин К. К. см. Соколов И. А.	2008	2(1)	67–76
Кольцов П. П. Использование метрик при сравнительном исследовании качества работы алгоритмов сегментации изображений	2011	5(3)	53–63
Коновалов М. Г. Об адаптивных стратегиях и условиях их существования ...	2012	6(4)	18–26
Коновалов М. Г. Об одной задаче оптимального управления нагрузкой на сервер	2013	7(4)	34–43
Коновалов М. Г. О планировании потоков в системах вычислительных ресурсов	2010	4(2)	3–12
Коновалов М. Г. Оптимизация работы вычислительного комплекса с помощью имитационной модели и адаптивных алгоритмов	2012	6(1)	37–48

	Год	Том(вып.)	Стр.
Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. Обзор моделей и алгоритмов размещения заданий в системах с параллельным обслуживанием	2015	9(4)	56–67
Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. О размещении заданий на двух серверах при неполном наблюдении	2016	10(4)	57–67
Кононенко И. С. см. Загоруйко Ю. А.	2012	6(3)	22–31
Конушин А. С. см. Конушин В. С.	2010	4(1)	74–78
Конушин В. С., Кривовязь Г. Р., Конушин А. С. Алгоритм распознавания людей в видеопоследовательности по одежде	2010	4(1)	74–78
Кореньков В. В., Нечаевский А. В., Трофимов В. В. Разработка имитационной модели сбора и обработки данных экспериментов на ускорительном комплексе НИКА	2013	7(3)	94–101
Корепанов Э. Р. Стохастические информационные технологии на основе фильтров Пугачёва	2011	5(2)	36–57
Корепанов Э. Р. см. Синицын И. Н.	2010	4(1)	2–11
Корепанов Э. Р. см. Синицын И. Н.	2015	9(1)	2–8
Корепанов Э. Р. см. Синицын И. Н.	2015	9(1)	70–75
Корепанов Э. Р. см. Синицын И. Н.	2015	9(2)	23–29
Корепанов Э. Р. см. Синицын И. Н.	2015	9(2)	30–38
Корепанов Э. Р. см. Синицын И. Н.	2016	10(2)	14–23
Корепанов Э. Р. см. Синицын И. Н.	2016	10(2)	24–35
Королев В. Ю. О распределении размеров частиц при дроблении	2009	3(3)	60–68
Королев В. Ю. см. Артюхов С. В.	2008	2(4)	57–65
Королев В. Ю. см. Батракова Д. А.	2007	1(1)	40–53
Королёв В. Ю. см. Бенинг В. Е.	2008	2(2)	19–34
Королев В. Ю. см. Бенинг В. Е.	2011	5(3)	4–16
Королев В. Ю. см. Бенинг В. Е.	2012	6(3)	69–73
Королев В. Ю. см. Бенинг В. Е.	2013	7(1)	116–123
Королев В. Ю. см. Бенинг В. Е.	2013	7(2)	75–83
Королев В. Ю. см. Горшенин А. К.	2008	2(4)	12–47
Королев В. Ю. см. Григорьева М. Е.	2013	7(4)	11–19
Королев В. Ю. см. Григорьева М. Е.	2013	7(4)	66–74
Королев В. Ю. см. Дучицкий И. А.	2012	6(4)	9–17
Королев В. Ю. см. Закс Л. М.	2013	7(1)	105–115
Королев В. Ю. см. Зейфман А. И.	2014	8(1)	106–117
Королев В. Ю. см. Зейфман А. И.	2014	8(3)	19–27
Королев В. Ю. см. Соколов И. А.	2009	3(3)	2–3
Королев В. Ю. см. Соколов И. А.	2010	4(2)	2
Королев В. Ю. см. Соколов И. А.	2011	5(3)	2–3
Королев В. Ю. см. Соколов И. А.	2012	6(4)	3
Королев В. Ю. см. Соколов И. А.	2013	7(2)	3
Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Закс Л. М., Зейфман А. И. Обобщенное распределение Лапласа как предельное для случайных сумм и статистик, построенных по выборкам случайного объема	2012	6(4)	34–39
Королев В. Ю., Горшенин А. К., Гулев С. К., Беляев К. П. Статистическое моделирование турбулентных потоков тепла между океаном и атмосферой с помощью метода скользящего разделения конечных нормальных смесей	2015	9(4)	3–13
Королев В. Ю., Закс Л. М. Оценки скорости сходимости распределений некоторых случайных сумм к устойчивым законам	2013	7(3)	102–105
Королев В. Ю., Закс Л. М., Зейфман А. И. О сходимости случайных блужданий, порожденных обобщенными процессами Кокса, к процессам Леви	2013	7(2)	84–91
Королев В. Ю., Зейфман А. И., Корчагин А. Ю. Несимметричные распределения Линника как предельные законы для случайных сумм независимых случайных величин с конечными дисперсиями	2016	10(4)	21–33

	Год	Том(вып.)	Стр.
Королев В. Ю., Корчагин А. Ю. Модифицированный сеточный метод разделения дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных законов	2014	8(4)	11–19
Королев В. Ю., Корчагин А. Ю., Зейфман А. И. Теорема Пуассона для схемы испытаний Бернулли со случайной вероятностью успеха и дискретный аналог распределения Вейбулла	2016	10(4)	11–20
Королев В. Ю., Корчагин А. Ю., Соколов И. А. Обобщенные дисперсионные гамма-распределения как модели статистических закономерностей на финансовых рынках	2015	9(4)	14–28
Королев В. Ю., Крылов В. А., Кузьмин В. Ю. Устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений относительно возмущений параметров	2011	5(1)	31–38
Королев В. Ю., Непомнящий Е. В., Рыбальченко А. Г., Виноградова А. В. Сеточные методы разделения смесей вероятностных распределений и их применение к декомпозиции волатильности финансовых индексов	2008	2(2)	3–18
Королев В. Ю., Смелянский Р. Л., Смелянский Т. Р., Шалимов А. В. Статистическая проверка неисполнимости фрагментов кода последовательной программы	2013	7(2)	50–54
Королев В. Ю., Соколов И. А. Об условиях сходимости распределений экстремальных порядковых статистик к распределению Вейбулла	2014	8(3)	3–11
Королев В. Ю., Соколов И. А. Скошенные распределения Стьюдента, дисперсионные гамма-распределения и их обобщения как асимптотические аппроксимации	2012	6(1)	3–11
Королев В. Ю., Черток А. В., Корчагин А. Ю., Горшенин А. К. Вероятностно-статистическое моделирование информационных потоков в сложных финансовых системах на основе высокочастотных данных	2013	7(1)	12–21
Королев В. Ю., Шевцова И. Г., Шоргин С. Я. О неравенствах типа Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм	2011	5(3)	64–66
Королев Р. А. см. Бенинг В. Е.	2010	4(2)	63–74
Королёв А. К. см. Каганов В. Ю.	2013	7(3)	40–55
Коротышева А. В. см. Зейфман А. И.	2009	3(3)	16–22
Коротышева А. В. см. Зейфман А. И.	2010	4(3)	9–15
Коротышева А. В. см. Зейфман А. И.	2011	5(3)	27–33
Коротышева А. В. см. Зейфман А. И.	2012	6(4)	27–33
Коротышева А. В. см. Зейфман А. И.	2014	8(1)	106–117
Коротышева А. В. см. Зейфман А. И.	2014	8(3)	19–27
Коротышева А. В. см. Сатин Я. А.	2011	5(4)	18–25
Корчагин А. Ю. см. Королев В. Ю.	2013	7(1)	12–21
Корчагин А. Ю. см. Королев В. Ю.	2014	8(4)	11–19
Корчагин А. Ю. см. Королев В. Ю.	2015	9(4)	14–28
Корчагин А. Ю. см. Королев В. Ю.	2016	10(4)	11–20
Корчагин А. Ю. см. Королев В. Ю.	2016	10(4)	21–33
Корчажкина О. М. К оценке эффективности учебно-познавательной деятельности учащихся с использованием информационных технологий	2015	9(1)	106–117
Косарик В. В. см. Зацман И. М.	2008	2(3)	54–69
Костромов Н. А. см. Визильтер Ю. В.	2012	6(1)	108–113
Кривенко М. П. Критерии значимости отбора признаков классификации ...	2016	10(3)	32–40
Кривенко М. П. Модели для представления и обработки референсных значений	2015	9(2)	63–74
Кривенко М. П. Непараметрическое оценивание элементов байесовского классификатора	2010	4(2)	13–24
Кривенко М. П. Предварительная обработка при распознавании текстов по изображению низкого качества	2012	6(4)	49–56
Кривенко М. П. Расщепление смеси вероятностных распределений на две составляющие	2008	2(4)	48–56

	Год	Том(вып.)	Стр.
Кривенко М. П. Сравнительный анализ процедур регрессионного анализа	2014	8(3)	70–78
Кривенко М. П., Голованов С. А., Савченко П. А., Сивков А. В., Сучков А. П. Информационно-аналитическая автоматизированная система «Мега-лит» в оптимизации диагностики и лечения мочекаменной болезни ...	2013	7(4)	82–93
Кривенко М. П., Голованов С. А., Сивков А. В. Анализ однородности данных о химическом составе камней при уролитиазе	2013	7(4)	94–104
Кривовязь Г. Р. см. Конушин В. С.	2010	4(1)	74–78
Кристоф Г., Ульянов В. В. О точности приближений нормированных хи-квадрат распределений асимптотическими разложениями Эджворта–Чебышева	2011	5(1)	25–30
Кружков М. Г. см. Бунтман Н. В.	2014	8(2)	98–110
Кружков М. Г. см. Зализняк Анна А.	2016	10(4)	132–141
Кружков М. Г. см. Зацман И. М.	2016	10(1)	106–118
Кружков М. Г. см. Минин В. А.	2013	7(1)	70–81
Крылов А. С. см. Насонов А. В.	2009	3(1)	19–28
Крылов А. С. см. Павельева Е. А.	2010	4(1)	79–82
Крылов А. С. см. Павельева Е. А.	2011	5(1)	68–72
Крылов В. А. Моделирование и классификация многоканальных дистанционных изображений с использованием копул	2010	4(4)	33–37
Крылов В. А. см. Королев В. Ю.	2011	5(1)	31–38
Крылов М. Н. см. Каганов В. Ю.	2013	7(3)	40–55
Крючин О. В. Разработка параллельных эвристических алгоритмов подбора весовых коэффициентов искусственной нейронной сети	2010	4(2)	53–56
Кудрявцев А. А. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: априорные распределения с компактным носителем	2016	10(1)	67–71
Кудрявцев А. А. Зависимые от коэффициента баланса характеристики в байесовских моделях с компактным носителем априорных распределений	2016	10(3)	77–80
Кудрявцев А. А. см. Жаворонкова Ю. В.	2014	8(2)	48–54
Кудрявцев А. А. см. Жаворонкова Ю. В.	2015	9(1)	98–105
Кудрявцев А. А., Палионная С. И. Байесовская рекуррентная модель роста надежности: параболическое распределение параметров	2016	10(2)	80–83
Кудрявцев А. А., Соколов И. А., Шоргин С. Я. Байесовская рекуррентная модель роста надежности: равномерное распределение параметров	2013	7(2)	55–59
Кудрявцев А. А., Титова А. И. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: вырожденно-вейбулловский случай	2016	10(4)	68–71
Кудрявцев А. А., Шоргин В. С., Шоргин С. Я. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: общий эрланговский случай	2009	3(4)	30–34
Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: характеристики среднего числа заявок в системе $M M 1 \infty$	2010	4(3)	16–21
Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: экспоненциально-эрланговский случай	2009	3(1)	55–59
Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовский подход к анализу систем массового обслуживания и показателей надежности	2007	1(2)	76–82
Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Об уточнении некоторых результатов для одной байесовской модели массового обслуживания	2011	5(1)	78–79
Кудрявцева И. А., Пантелеев А. В. Приближенные методы решения задачи диагностики плоским зондом сильноионизованной плазмы с учетом Кулоновских столкновений	2011	5(3)	46–52
Кузнецов А. А. Связь между временными и структурно-топологическими характеристиками диаграмм ритма сердца здоровых людей	2010	4(4)	38–47
Кузнецов В. В. см. Ушмаев О. С.	2012	6(1)	132–140
Кузнецов И. П. см. Козеренко Е. Б.	2010	4(3)	69–76
Кузнецов И. П. см. Шарнин М. М.	2012	6(2)	113–121
Кузнецов И. П. см. Шарнин М. М.	2013	7(2)	92–99

	Год	Том(вып.)	Стр.
Кузнецов И. П., Сомин Н. В. Выявление имплицитной информации из текстов на естественном языке: проблемы и методы	2012	6(1)	49–58
Кузнецов Л. А. Вероятностно-статистическая оценка адекватности информационных объектов	2011	5(4)	64–75
Кузнецов Л. А. Универсальная технология оценки близости информационных объектов	2014	8(2)	130–144
Кузнецов Л. А., Кузнецова В. Ф. Оценка семантической адекватности текстов информационным методом	2013	7(1)	94–104
Кузнецов Л. А., Кузнецова В. Ф., Капнин А. В. Универсальный метрический тезаурус русского языка	2013	7(3)	106–113
Кузнецов С. И. см. Спивак С. И.	2015	9(1)	87–97
Кузнецова В. Ф. см. Кузнецов Л. А.	2013	7(1)	94–104
Кузнецова В. Ф. см. Кузнецов Л. А.	2013	7(3)	106–113
Кузнецова М. Г. см. Шестаков О. В.	2013	7(4)	75–81
Кузнецова О. А. см. Янушко А. В.	2011	5(4)	53–63
Кузьмин В. Ю. см. Королев В. Ю.	2011	5(1)	31–38
Кульберг Н. С. см. Яковлева Т. В.	2014	8(3)	79–89
Купалов-Ярополк И. К., Малащенко Ю. Е., Назарова И. А., Ронжин А. Ф. Методы оценки эффективности и директивных сроков выполнения ресурсоемких вычислительных заданий	2013	7(2)	17–25
Куракин А. В. Распознавание жестов ладони в реальном времени на основе плоских и пространственных скелетных моделей	2012	6(1)	114–121
Курчавова О. А. см. Зацман И. М.	2008	2(3)	54–69
Кучерявый Е. А. см. Омётов А. Я.	2016	10(3)	23–31
Лебедев А. В. Максимумы активности в безмасштабных случайных сетях с тяжелыми хвостами	2011	5(4)	25–29
Лебедев А. В. Экстремальные индексы в схеме серий и их приложения	2015	9(3)	39–54
Левченко Н. Н. см. Змеев Д. Н.	2015	9(4)	29–36
Леонтьев Н. Д., Ушаков В. Г. Анализ системы обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа	2014	8(3)	39–44
Леонтьев Н. Д., Ушаков В. Г. Анализ системы обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа и относительным приоритетом	2016	10(3)	15–22
Лери М. М. Пожар на конфигурационном графе со случайными переходами огня по ребрам	2015	9(3)	65–71
Лери М. М., Чеплюкова И. А. Об одной статистической задаче для случайных графов интернет-типа	2011	5(3)	34–40
Листопад С. В. см. Кириков И. А.	2009	3(4)	76–86
Листопад С. В. см. Кириков И. А.	2013	7(3)	62–69
Листопад С. В. см. Кириков И. А.	2015	9(4)	98–105
Листопад С. В. см. Кириков И. А.	2016	10(1)	96–105
Листопад С. В. см. Кириков И. А.	2016	10(3)	81–90
Листопад С. В. см. Колесников А. В.	2016	10(4)	114–120
Лоханова А. И. см. Белых И. Н.	2012	6(1)	91–98
Лошилова Е. Ю. см. Бунтман Н. В.	2014	8(2)	98–110
Лукашенко О. В., Морозов Е. В. Асимптотика максимума процесса нагрузки для некоторого класса гауссовских очередей	2012	6(3)	81–89
Лукашенко О. В., Морозов Е. В. О сходимости в пространстве L_p максимума процесса нагрузки для одного класса гауссовских систем обслуживания	2013	7(1)	36–43
Лукьяненко А. С., Морозов Е. В., Гуртов А. В. Анализ сетевого протокола с общей функцией расширения окна передачи сообщения при конфликтах	2010	4(2)	46–52
Лупенцов О. С. см. Маренко В. А.	2014	8(1)	99–105
Лучко О. Н. см. Маренко В. А.	2014	8(1)	99–105

	Год	Том(вып.)	Стр.
Лямин О. О. О предельном поведении мощностей критериев в случае обобщенного распределения Лапласа	2010	4(3)	47–58
Лямин О. О. см. Бенинг В. Е.	2009	3(3)	79–85
Малашенко Ю. Е. см. Купалов-Ярополк И. К.	2013	7(2)	17–25
Малашенко Ю. Е., Назарова И. А. Анализ задержек при диспетчеризации однородных заданий в условиях неопределенности	2014	8(1)	12–20
Малков О. Ю. см. Калиниченко Л. А.	2016	10(1)	2–22
Маньяков Ю. А. см. Архипов О. П.	2014	8(1)	71–76
Маньяков Ю. А. см. Архипов О. П.	2014	8(3)	100–104
Маренко В. А., Лучко О. Н., Лупенцов О. С. Разработка модели управления процессом обучения с использованием когнитивных технологий	2014	8(1)	99–105
Маркин А. В. Предельное распределение оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов	2009	3(4)	57–63
Маркин А. В., Шестаков О. В. Асимптотики оценки риска при пороговой обработке вейвлет-вейвлет коэффициентов в задаче томографии	2010	4(2)	36–45
Маркин А. В., Шестаков О. В. Отсев эктопических импульсов из ритмограммы с использованием робастных оценок	2008	2(2)	47–54
Марков А. С., Монахов М. М., Ульянов В. В. Разложения типа Корниша–Фишера для распределений статистик, построенных по выборкам случайного размера	2016	10(2)	84–91
Марков Ю. Г., Перепелкин В. В., Сеницын И. Н., Семендяев Н. Н. Информационные модели неравномерности вращения Земли	2011	5(2)	17–35
Маркова Н. А. Логика биографических фактов	2012	6(2)	87–96
Мартынов Д. О. см. Брюхов Д. О.	2008	2(1)	2–34
Матвеев Е. А. см. Егоров В. Ю.	2008	2(4)	74–84
Матвеев Ю. Н. см. Белых И. Н.	2012	6(1)	91–98
Матвеева С. С., Захарова Т. В. Сети массового обслуживания с наименьшей длиной очереди	2010	4(3)	22–28
Матюшенко С. И. Стационарные характеристики двухканальной системы обслуживания с переупорядочиванием заявок и распределениями фазового типа	2010	4(4)	67–71
Матюшенко С. И. см. Горбунова А. В.	2015	9(3)	32–38
Мацкевич А. Г. Декларативные структуры знаний в проблемно-ориентированных системах искусственного интеллекта	2014	8(2)	122–129
Машечкин И. В. см. Каганов В. Ю.	2013	7(3)	40–55
Мейханаджян Л. А. Стационарные вероятности состояний в системе обслуживания конечной емкости с инверсионным порядком обслуживания и обобщенным вероятностным приоритетом	2016	10(2)	123–131
Мейханаджян Л. А., Милованова Т. А., Печинкин А. В., Разумчик Р. В. Стационарные вероятности состояний в системе обслуживания с инверсионным порядком обслуживания и обобщенным вероятностным приоритетом	2014	8(3)	28–38
Мейханаджян Л. А., Милованова Т. А., Разумчик Р. В. Время ожидания в системе обслуживания с инверсионным порядком обслуживания и обобщенным вероятностным приоритетом	2015	9(2)	14–22
Мельников А. К., Ронжин А. Ф. Обобщенный статистический метод анализа текстов, основанный на расчете распределений вероятностей значений статистик	2016	10(4)	89–95
Миллер Г. Б. см. Борисов А. В.	2016	10(2)	2–13
Милованова Т. А. см. Мейханаджян Л. А.	2014	8(3)	28–38
Милованова Т. А. см. Мейханаджян Л. А.	2015	9(2)	14–22
Милованова Т. А., Печинкин А. В. Стационарные характеристики системы обслуживания с инверсионным порядком обслуживания, вероятностным приоритетом и гистерезисной политикой	2013	7(1)	22–35

	Год	Том(вып.)	Стр.
Минин В. А., Зацман И. М., Кружков М. Г., Норемян Т. П. Методологические основы создания информационных систем для вычисления индикаторов тематических взаимосвязей науки и технологий	2013	7(1)	70–81
Минин В. А., Зацман И. М., Хавансков В. А., Шубников С. К. Индикаторы тематических взаимосвязей науки и технологий: от текста к числам	2014	8(3)	114–125
Минин В. А., Зацман И. М., Хавансков В. А., Шубников С. К. Индикаторы тематических взаимосвязей отраслей науки и информационно-компьютерных технологий в начале XXI века	2015	9(2)	111–123
Минин В. А., Зацман И. М., Хавансков В. А., Шубников С. К. Интенсивность цитирования научных публикаций в изобретениях по информационно-компьютерным технологиям, патентуемых в России отечественными и зарубежными заявителями	2016	10(2)	107–122
Миронов А. М. О сходимости распределений случайных сумм к скошенным экспоненциально-степенным законам	2014	8(2)	55–69
Миронов А. М. Реализуемость вероятностных реакций конечными вероятностными автоматами	2015	9(3)	85–96
Миронов А. М., Френкель С. Л. Метод повышения эффективности решения задач вероятностной верификации вычислительных и телекоммуникационных систем	2014	8(4)	58–69
Михеев М. Ю., Сомин Н. В., Галина И. В., Золотарев О. В., Козеренко Е. Б., Морозова Ю. И., Шарнин М. М. Фальштексты: классификация и методы опознания текстовых имитаций и документов с подменой авторства ...	2014	8(4)	70–77
Монахов М. М. см. Марков А. С.	2016	10(2)	84–91
Морозов Е. В. Асимптотики вероятностей больших отклонений стационарной очереди	2009	3(3)	23–34
Морозов Е. В. см. Бородина А. В.	2010	4(3)	29–37
Морозов Е. В. см. Бородина А. В.	2013	7(2)	26–33
Морозов Е. В. см. Лукашенко О. В.	2012	6(3)	81–89
Морозов Е. В. см. Лукашенко О. В.	2013	7(1)	36–43
Морозов Е. В. см. Лукьяненко А. С.	2010	4(2)	46–52
Морозов Е. В., Некрасова Р. С. Об оценивании вероятности переполнения конечного буфера в регенеративных системах обслуживания	2012	6(3)	90–98
Морозов Е. В., Румянцев А. С. Вероятностные модели многопроцессорных систем: стационарность и моментные свойства	2012	6(3)	99–106
Морозова Ю. И. Построение семантических векторных пространств различных предметных областей	2013	7(1)	90–93
Морозова Ю. И. Трансформационные модели языковых структур для французско-русского машинного перевода	2011	5(4)	99–106
Морозова Ю. И. см. Галина И. В.	2015	9(2)	93–110
Морозова Ю. И. см. Михеев М. Ю.	2014	8(4)	70–77
Морозова Ю. И. см. Шарнин М. М.	2013	7(2)	92–99
Мотренко А. П., Стрижов В. В. Построение агрегированных прогнозов объемов железнодорожных грузоперевозок с использованием расстояния Кульбака–Лейблера	2014	8(2)	86–97
Мурашов Д. М. Комбинированный подход к локализации различий много-модальных изображений	2012	6(1)	122–131
Назаров А. Л. Нижние оценки устойчивости смесей нормальных распределений к возмущениям смешивающих распределений	2012	6(4)	40–48
Назарова И. А. см. Купалов-Ярополк И. К.	2013	7(2)	17–25
Назарова И. А. см. Малашенко Ю. Е.	2014	8(1)	12–20
Насонов А. В., Крылов А. С., Урмаев О. С. Развитие методов повышения качества изображений лиц в видеопотоке	2009	3(1)	19–28
Наумов В. А., Самуйлов К. Е. О связи ресурсных систем массового обслуживания с сетями Эрланга	2016	10(3)	9–14

	Год	Том(вып.)	Стр.
Некрасова Р. С. см. Морозов Е. В.	2012	6(3)	90–98
Непомнящий Е. В. см. Королев В. Ю.	2008	2(2)	3–18
Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм	2011	5(1)	39–45
Нечаевский А. В. см. Кореньков В. В.	2013	7(3)	94–101
Николаев А. В. см. Жевнерчук Д. В.	2012	6(2)	43–50
Норекян Т. П. см. Минин В. А.	2013	7(1)	70–81
Окладников И. Г. см. Калинин Л. А.	2016	10(1)	2–22
Окунев А. С. см. Змеев Д. Н.	2015	9(4)	29–36
Оленин А. С. Структурная декомпозиция матричных систем	2008	2(3)	2–6
Омётов А. Я., Андреев С. Д., Тюрликов А. М., Кучерявый Е. А. Анализ производительности беспроводной системы агрегации данных с состязанием для современных сенсорных сетей	2016	10(3)	23–31
Ососков М. В. см. Каратеев С. Л.	2010	4(1)	65–73
Павельева Е. А., Крылов А. С. Алгоритм сравнения изображений радужной оболочки глаза на основе ключевых точек	2011	5(1)	68–72
Павельева Е. А., Крылов А. С. Поиск и анализ ключевых точек радужной оболочки глаза методом преобразования Эрмита	2010	4(1)	79–82
Павлов И. В. Оценка надежности сложных систем с восстановлением по результатам испытаний элементов	2014	8(1)	21–27
Павлов И. В. Расчет и оптимизация некоторых характеристик для модели вычислительного комплекса	2012	6(2)	97–100
Пагурова В. И. Об асимптотическом распределении максимальной порядковой статистики в выборке случайного объема	2008	2(2)	55–59
Палионная С. И. см. Кудрявцев А. А.	2016	10(2)	80–83
Пантелеев А. В. см. Кудрявцева И. А.	2011	5(3)	46–52
Пантелеев А. В., Рыбаков К. А. Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом	2011	5(2)	69–81
Панфилова Т. Л. см. Зейфман А. И.	2011	5(3)	27–33
Паринов С. И. см. Коголовский М. Р.	2012	6(3)	32–42
Перепелкин В. В. см. Марков Ю. Г.	2011	5(2)	17–35
Петрова О. В., Ушаков В. Г. Асимптотический анализ системы массового обслуживания $E_r(t) G 1$	2009	3(4)	35–40
Петровский М. И. см. Каганов В. Ю.	2013	7(3)	40–55
Петрушенко С. В. см. Янушко А. В.	2011	5(4)	53–63
Пеховский Т. С. см. Белых И. Н.	2012	6(1)	91–98
Печинкин А. В. Двухприоритетная система с резервированием каналов и марковским входящим потоком	2011	5(1)	2–11
Печинкин А. В. см. Гайдамака Ю. В.	2013	7(4)	20–33
Печинкин А. В. см. Мейханаджян Л. А.	2014	8(3)	28–38
Печинкин А. В. см. Милованова Т. А.	2013	7(1)	22–35
Печинкин А. В., Разумчик Р. В. Система Geo/Geo/1/R с гистерезисной политикой	2014	8(2)	15–27
Печинкин А. В., Разумчик Р. В. Совместное стационарное распределение числа заявок в накопителе и в бункере переупорядочения в многоканальной системе обслуживания с переупорядочением заявок	2014	8(4)	3–10
Печинкин А. В., Разумчик Р. В. Совместное стационарное распределение числа заявок в m очередях в N -канальной системе обслуживания с переупорядочением заявок	2015	9(3)	25–31
Печинкин А. В., Соколов И. А. Система массового обслуживания с ненадежным прибором в дискретном времени	2011	5(4)	6–17
Печинкин А. В., Соколов И. А., Чаплыгин В. В. Многолинейная система массового обслуживания с групповым отказом приборов	2009	3(3)	4–15

	Год	Том(вып.)	Стр.
Печинкин А. В., Соколов И. А., Чаплыгин В. В. Многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем и ненадежными приборами	2007	1(1)	27–39
Печинкин А. В., Соколов И. А., Чаплыгин В. В. Стационарные характеристики многолинейной системы массового обслуживания с одновременными отказами приборов	2007	1(2)	39–49
Печинкин А. В., Соколов И. А., Шоргин С. Я. Ограничение на суммарный объем заявок в дискретной системе Geo/G/1/∞	2012	6(3)	107–113
Печинкин А. В., Френкель С. Л. Вероятностный анализ времени проявления неисправности в сети автоматов	2009	3(2)	2–14
Печинкин А. В., Шоргин С. Я. Система Geo/G/1/∞ с одной «нестандартной» дисциплиной обслуживания	2008	2(1)	55–62
Плеханов Л. П. Проектирование самосинхронных схем: структурные методы в иерархическом анализе	2014	8(3)	105–113
Подколотный Н. Л. см. Калиниченко Л. А.	2016	10(1)	2–22
Позаненко А. С. см. Калиниченко Л. А.	2016	10(1)	2–22
Пономарева Н. В. см. Калиниченко Л. А.	2016	10(1)	2–22
Попкова Н. А. см. Зацман И. М.	2016	10(1)	106–118
Попов С. В. Уточнение неравномерных оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме при существовании моментов не выше второго	2012	6(1)	32–36
Попова М. С., Стрижов В. В. Выбор оптимальной модели классификации физической активности по измерениям акселерометра	2015	9(1)	76–86
Преображенский Н. Б., Файзулхаков Я. Р. Проблема компенсации Рэлеевских замираний в радиоканалах подвижных систем голосовой связи	2011	5(2)	82–89
Протасов В. И. Составление субъективного портрета с использованием эволюционного морфинга и квалиметрия метода	2010	4(1)	83–88
Пугачёв В. С., Сеницын И. Н. Структурная теория сложных стохастических систем	2011	5(2)	4–16
Разумчик Р. В. Система массового обслуживания с отрицательными заявками, бункером для вытесненных заявок и различными интенсивностями обслуживания	2011	5(3)	41–45
Разумчик Р. В. Стационарное распределение времени ожидания в системе обслуживания с отрицательными заявками, бункером для вытесненных заявок, различными интенсивностями обслуживания при дисциплине FIRST–FIFO–FIFO	2013	7(2)	34–39
Разумчик Р. В. см. Гайдамака Ю. В.	2013	7(4)	20–33
Разумчик Р. В. см. Коновалов М. Г.	2015	9(4)	56–67
Разумчик Р. В. см. Коновалов М. Г.	2016	10(4)	57–67
Разумчик Р. В. см. Мейханаджян Л. А.	2014	8(3)	28–38
Разумчик Р. В. см. Мейханаджян Л. А.	2015	9(2)	14–22
Разумчик Р. В. см. Печинкин А. В.	2014	8(2)	15–27
Разумчик Р. В. см. Печинкин А. В.	2014	8(4)	3–10
Разумчик Р. В. см. Печинкин А. В.	2015	9(3)	25–31
Рождественский Ю. В. см. Соколов И. А.	2014	8(1)	45–70
Розенберг И. Н. см. Дулин С. К.	2012	6(2)	29–42
Ронжин А. Ф. см. Купалов-Ярополк И. К.	2013	7(2)	17–25
Ронжин А. Ф. см. Мельников А. К.	2016	10(4)	89–95
Рудаков К. В., Торшин И. Ю. Анализ информативности мотивов на основе критерия разрешимости в задаче распознавания вторичной структуры белка	2012	6(1)	79–90
Рудаков К. В., Торшин И. Ю. Вопросы разрешимости задачи распознавания вторичной структуры белка	2010	4(2)	25–35
Рудой Г. И., Стрижов В. В. Алгоритмы индуктивного порождения суперпозиций для аппроксимации измеряемых данных	2013	7(1)	44–53

	Год	Том(вып.)	Стр.
Румовская С. Б. см. Кириков И. А.	2015	9(4)	98–105
Румовская С. Б. см. Кириков И. А.	2016	10(1)	96–105
Румовская С. Б. см. Кириков И. А.	2016	10(3)	81–90
Румовская С. Б. см. Колесников А. В.	2016	10(4)	114–120
Румянцев А. С. см. Морозов Е. В.	2012	6(3)	99–106
Рыбаков К. А. см. Пантелеев А. В.	2011	5(2)	69–81
Рыбальченко А. Г. см. Королев В. Ю.	2008	2(2)	3–18
Савченко П. А. см. Кривенко М. П.	2013	7(4)	82–93
Садовой И. А. см. Шестаков О. В.	2013	7(4)	75–81
Самуйлов А. К. см. Гайдамака Ю. В.	2012	6(3)	74–80
Самуйлов А. К. см. Гайдамака Ю. В.	2013	7(4)	20–33
Самуйлов А. К. см. Гайдамака Ю. В.	2015	9(1)	9–14
Самуйлов К. Е. см. Вихрова О. Г.	2015	9(4)	48–55
Самуйлов К. Е. см. Гайдамака Ю. В.	2012	6(3)	74–80
Самуйлов К. Е. см. Гайдамака Ю. В.	2013	7(4)	20–33
Самуйлов К. Е. см. Гайдамака Ю. В.	2016	10(4)	2–10
Самуйлов К. Е. см. Горбунова А. В.	2015	9(3)	32–38
Самуйлов К. Е. см. Наумов В. А.	2016	10(3)	9–14
Сатин Я. А. см. Зейфман А. И.	2009	3(1)	47–54
Сатин Я. А. см. Зейфман А. И.	2009	3(3)	16–22
Сатин Я. А. см. Зейфман А. И.	2010	4(3)	9–15
Сатин Я. А. см. Зейфман А. И.	2012	6(4)	27–33
Сатин Я. А., Зейфман А. И., Коротышева А. В., Шоргин С. Я. Об одном классе марковских систем обслуживания	2011	5(4)	18–25
Сейфуль-Мулюков Р. Б. Нефть как носитель информации о своем происхождении, структуре и эволюции	2010	4(1)	41–50
Семендяев Н. Н. см. Марков Ю. Г.	2011	5(2)	17–35
Семендяев Н. Н. см. Сеницын И. Н.	2010	4(1)	2–11
Семенов К. К. Нечеткие переменные как способ формализации характеристик погрешности в задачах математической обработки	2012	6(2)	101–112
Серебряков В. А. см. Захаров А. А.	2010	4(4)	2–13
Серебрянский С. М. см. Тырсин А. Н.	2016	10(2)	58–64
Сивков А. В. см. Кривенко М. П.	2013	7(4)	82–93
Сивков А. В. см. Кривенко М. П.	2013	7(4)	94–104
Сидоркин И. И. см. Архипов О. П.	2016	10(3)	91–97
Сизов А. В. см. Дюкова Е. В.	2012	6(4)	61–65
Симаков К. В. см. Андреев А. М.	2013	7(3)	2–13
Симончик К. К. см. Белых И. Н.	2012	6(1)	91–98
Сеницын В. И. см. Сеницын И. Н.	2010	4(1)	2–11
Сеницын В. И. см. Сеницын И. Н.	2014	8(3)	12–18
Сеницын В. И. см. Сеницын И. Н.	2015	9(1)	2–8
Сеницын В. И. см. Сеницын И. Н.	2015	9(2)	23–29
Сеницын В. И. см. Сеницын И. Н.	2016	10(1)	45–55
Сеницын В. И. см. Сеницын И. Н.	2016	10(2)	24–35
Сеницын И. Н. Анализ и моделирование распределений в эредитарных стохастических системах	2014	8(1)	2–11
Сеницын И. Н. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными бесселевыми нелинейностями дробного порядка	2016	10(3)	55–65
Сеницын И. Н. Аналитическое моделирование процессов в динамических системах с цилиндрическими бесселевыми нелинейностями	2015	9(4)	37–47
Сеницын И. Н. Аналитическое моделирование распределений методом ортогональных разложений в нелинейных стохастических системах на многообразиях	2015	9(3)	17–24

	Год	Том(вып.)	Стр.
Синицын И. Н. Аналитическое моделирование распределений с инвариантной мерой в негауссовских дифференциальных и приводимых к ним эрдитарных стохастических системах	2014	8(2)	2–14
Синицын И. Н. Аналитическое моделирование распределений с инвариантной мерой в стохастических системах с автокоррелированными шумами ...	2012	6(4)	4–8
Синицын И. Н. Аналитическое моделирование распределений с инвариантной мерой в стохастических системах с разрывными характеристиками	2013	7(1)	3–11
Синицын И. Н. Вероятностные методы построения информационных моделей неравномерности вращения Земли	2009	3(4)	2–11
Синицын И. Н. Квазилинейные методы построения информационных моделей флуктуаций неравномерности вращения Земли	2008	2(1)	35–43
Синицын И. Н. Корреляционные методы построения аналитических информационных моделей флуктуаций полюса Земли по априорным данным	2007	1(2)	2–14
Синицын И. Н. Математическое обеспечение для анализа нелинейных многоканальных круговых стохастических систем, основанное на параметризации распределений	2012	6(1)	12–18
Синицын И. Н. Методы построения информационных моделей эрдитарных флуктуаций неравномерности вращения Земли	2009	3(1)	2–7
Синицын И. Н. Ортогональные субоптимальные фильтры для нелинейных стохастических систем на многообразиях	2016	10(1)	34–44
Синицын И. Н. Параметрическое статистическое и аналитическое моделирование распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях	2013	7(2)	4–16
Синицын И. Н. Развитие теории фильтров Пугачева для оперативной обработки информации в стохастических системах	2007	1(1)	3–13
Синицын И. Н. Стохастические информационные технологии для исследования нелинейных круговых стохастических систем	2011	5(4)	2–5
Синицын И. Н. см. Марков Ю. Г.	2011	5(2)	17–35
Синицын И. Н. см. Пугачёв В. С.	2011	5(2)	4–16
Синицын И. Н. см. Соколов И. А.	2011	5(2)	2–3
Синицын И. Н., Корепанов Э. Р. Нормальные условно-оптимальные фильтры и экстраполяторы Пугачёва для стохастических систем, линейных относительно состояния	2016	10(2)	14–23
Синицын И. Н., Корепанов Э. Р. Нормальные условно-оптимальные фильтры Пугачёва для дифференциальных стохастических систем, линейных относительно состояния	2015	9(2)	30–38
Синицын И. Н., Корепанов Э. Р. Устойчивые линейные условно оптимальные фильтры и экстраполяторы для стохастических систем с мультипликативными шумами	2015	9(1)	70–75
Синицын И. Н., Синицын В. И. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными нелинейностями	2014	8(3)	12–18
Синицын И. Н., Синицын В. И. Аналитическое моделирование распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях методом эллипсоидальной аппроксимации	2016	10(1)	45–55
Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р. Моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными иррациональными нелинейностями	2015	9(1)	2–8
Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р. Моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными трансцендентными нелинейностями	2015	9(2)	23–29
Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р. Эллипсоидальные субоптимальные фильтры для нелинейных стохастических систем на многообразиях	2016	10(2)	24–35

	Год	Том(вып.)	Стр.
Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Семендяев Н. Н. Оперативное построение информационных моделей движения полюса Земли методами линейных и линеаризованных фильтров	2010	4(1)	2–11
Сипина А. В. см. Бенинг В. Е.	2010	4(1)	18–23
Сиротинин Д. О. см. Архипов О. П.	2014	8(1)	71–76
Сичинава Д. В. см. Бунтман Н. В.	2014	8(2)	98–110
Скачков Д. М., Жижимов О. Л. Об интеграции географических метаданных посредством ретроспективного тезауруса	2012	6(3)	43–51
Скворцов Н. А. см. Брюхов Д. О.	2008	2(1)	2–34
Скворцов Н. А. см. Ступников С. А.	2016	10(1)	23–33
Смелянский Р. Л. см. Королев В. Ю.	2013	7(2)	50–54
Смелянский Т. Р. см. Королев В. Ю.	2013	7(2)	50–54
Соколов И. А. О работах заслуженного деятеля науки Российской Федерации И. Н. Синицына в области информационных технологий и автоматизации (к 70-летию со дня рождения)	2010	4(3)	84–86
Соколов И. А. см. Гайдамака Ю. В.	2013	7(4)	20–33
Соколов И. А. см. Григорьева М. Е.	2013	7(4)	11–19
Соколов И. А. см. Дучицкий И. А.	2012	6(4)	9–17
Соколов И. А. см. Захаров В. Н.	2007	1(2)	15–38
Соколов И. А. см. Ильин В. Д.	2007	1(1)	66–78
Соколов И. А. см. Илюшин Г. Я.	2010	4(1)	24–40
Соколов И. А. см. Королев В. Ю.	2012	6(1)	3–11
Соколов И. А. см. Королев В. Ю.	2014	8(3)	3–11
Соколов И. А. см. Королев В. Ю.	2015	9(4)	14–28
Соколов И. А. см. Кудрявцев А. А.	2013	7(2)	55–59
Соколов И. А. см. Печинкин А. В.	2007	1(1)	27–39
Соколов И. А. см. Печинкин А. В.	2007	1(2)	39–49
Соколов И. А. см. Печинкин А. В.	2009	3(3)	4–15
Соколов И. А. см. Печинкин А. В.	2011	5(4)	6–17
Соколов И. А. см. Печинкин А. В.	2012	6(3)	107–113
Соколов И. А. см. Черток А. В.	2016	10(4)	46–56
Соколов И. А., Егоров В. Б. Дезинтегрированная архитектура пакетной коммутации	2008	2(4)	2–11
Соколов И. А., Захаров В. Н. К 25-летию Института проблем информатики РАН	2008	2(3)	70–76
Соколов И. А., Колин К. К. Новый этап информатизации общества и актуальные проблемы образования	2008	2(1)	67–76
Соколов И. А., Королев В. Ю. Предисловие	2009	3(3)	2–3
Соколов И. А., Королев В. Ю. Предисловие	2010	4(2)	2
Соколов И. А., Королев В. Ю. Предисловие	2011	5(3)	2–3
Соколов И. А., Королев В. Ю. Предисловие	2012	6(4)	3
Соколов И. А., Королев В. Ю. Предисловие	2013	7(2)	3
Соколов И. А., Синицын И. Н. Предисловие	2011	5(2)	2–3
Соколов И. А., Степченков Ю. А., Бобков С. Г., Захаров В. Н., Дьяченко Ю. Г., Рождественский Ю. В., Сурков А. В. Базис реализации супер-ЭВМ экскафлопсного класса	2014	8(1)	45–70
Соколов И. А., Шоргин С. Я. К 60-летию члена редколлегии журнала «Информатика и её применения», заместителя директора ИПИ РАН по научной работе, доктора технических наук А. А. Зацаринного	2011	5(3)	86
Соколова Е. Г. см. Загоруйко Ю. А.	2012	6(3)	22–31
Солдатов С. А. см. Колесников А. В.	2010	4(4)	60–66
Сомин Н. В. см. Галина И. В.	2015	9(2)	93–110
Сомин Н. В. см. Кузнецов И. П.	2012	6(1)	49–58
Сомин Н. В. см. Михеев М. Ю.	2014	8(4)	70–77

	Год	Том(вып.)	Стр.
Сомин Н. В. см. Шарнин М. М.	2013	7(2)	92–99
Сопин Э. С. см. Вихрова О. Г.	2015	9(4)	48–55
Сопин Э. С. см. Гайдамака Ю. В.	2013	7(4)	20–33
Сопин Э. С. см. Гайдамака Ю. В.	2016	10(4)	2–10
Сотнезов Р. М. см. Дюкова Е. В.	2012	6(4)	61–65
Спивак С. И. см. Кантор О. Г.	2014	8(2)	111–121
Спивак С. И., Кантор О. Г., Юнусова Д. С., Кузнецов С. И., Колесов С. В. Оценка погрешности и значимости измерений для линейных моделей	2015	9(1)	87–97
Стемпковский А. Л. см. Змеев Д. Н.	2015	9(4)	29–36
Стенина М. М., Стрижов В. В. Согласование прогнозов при решении задач прогнозирования иерархических временных рядов	2015	9(2)	75–87
Степанов П. В. см. Бендерина М. В.	2012	6(1)	59–69
Степанов С. Ю. Использование координатного метода фрагментации комму- таторной нейронной сети для сокращения трафика	2010	4(2)	57–62
Степченков Ю. А. см. Соколов И. А.	2014	8(1)	45–70
Стрижов В. В. см. Гончаров А. В.	2016	10(2)	36–47
Стрижов В. В. см. Исаченко Р. В.	2016	10(2)	48–57
Стрижов В. В. см. Карасиков М. Е.	2016	10(4)	121–131
Стрижов В. В. см. Мотренко А. П.	2014	8(2)	86–97
Стрижов В. В. см. Попова М. С.	2015	9(1)	76–86
Стрижов В. В. см. Рудой Г. И.	2013	7(1)	44–53
Стрижов В. В. см. Стенина М. М.	2015	9(2)	75–87
Стрижов В. В. см. Токмакова А. А.	2012	6(4)	66–75
Ступников С. А. Верифицируемое отображение модели данных, основанной на многомерных массивах, в объектную модель данных	2013	7(3)	22–34
Ступников С. А. см. Брюхов Д. О.	2008	2(1)	2–34
Ступников С. А. см. Захаров В. Н.	2007	1(2)	15–38
Ступников С. А. см. Калиниченко Л. А.	2012	6(2)	59–76
Ступников С. А. см. Калиниченко Л. А.	2016	10(1)	2–22
Ступников С. А., Брюхов Д. О., Скворцов Н. А. Анализ системного риска совместного кредитования над неоднородными коллекциями данных	2016	10(1)	23–33
Сурков А. В. см. Соколов И. А.	2014	8(1)	45–70
Сухомлин В. А., Горькавый И. Н. Технологическая система для построения программных комплексов автоматизации обработки трехмерных данных лазерного сканирования	2009	3(2)	53–64
Сучков А. П. см. Бендерина М. В.	2012	6(1)	59–69
Сучков А. П. см. Зацаринный А. А.	2016	10(4)	105–113
Сучков А. П. см. Кривенко М. П.	2013	7(4)	82–93
Терёшина Н. А. см. Зейфман А. И.	2009	3(3)	16–22
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.	2008	2(2)	64–66
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.	2010	4(3)	38–41
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.	2012	6(4)	57–60
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.	2013	7(1)	54–57
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.	2014	8(4)	41–45
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.	2014	8(4)	46–52
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.	2015	9(4)	85–90
Тимонина Е. Е. см. Грушо А. А.	2016	10(3)	2–8
Тимофеев В. С., Шеколдин В. Ю., Тимофеева А. Ю. Идентификация зависи- мости признаков стохастической природы на основе регрессии Деминга	2013	7(2)	60–68
Тимофеева А. Ю. см. Тимофеев В. С.	2013	7(2)	60–68
Титова А. И. см. Кудрявцев А. А.	2016	10(4)	68–71
Токмакова А. А., Стрижов В. В. Оценивание гиперпараметров линейных регрессионных моделей при отборе шумовых и коррелирующих при- знаков	2012	6(4)	66–75

	Год	Том(вып.)	Стр.
Торчигин А. В. Об одном подходе к формированию изображений без использования экрана	2009	3(1)	60–68
Торшин И. Ю. см. Рудаков К. В.	2010	4(2)	25–35
Торшин И. Ю. см. Рудаков К. В.	2012	6(1)	79–90
Трофимов В. В. см. Кореньков В. В.	2013	7(3)	94–101
Турсунбаев А. М. см. Горшенин А. К.	2008	2(4)	12–47
Тучкова Н. П. см. Беляев К. П.	2015	9(2)	50–55
Тырсин А. Н., Ворфоломеева О. В. Исследование динамики многомерных стохастических систем на основе энтропийного моделирования	2013	7(4)	3–10
Тырсин А. Н., Серебрянский С. М. Распознавание зависимостей на основе обратного отображения	2016	10(2)	58–64
Тюрликов А. М. см. Омётов А. Я.	2016	10(3)	23–31
Ульянов В. В. см. Кавагучи Ю.	2010	4(1)	12–17
Ульянов В. В. см. Кристоф Г.	2011	5(1)	25–30
Ульянов В. В. см. Марков А. С.	2016	10(2)	84–91
Уманский В. И. см. Дулин С. К.	2012	6(2)	29–42
Ушаков А. В. Анализ системы обслуживания с гиперэкспоненциальным входящим потоком в условиях критической загрузки	2012	6(3)	114–118
Ушаков А. В. О виртуальном времени ожидания в системе с относительным приоритетом и гиперэкспоненциальным входящим потоком	2012	6(1)	27–31
Ушаков В. Г. Система обслуживания с гиперэкспоненциальным входящим потоком и профилактиками прибора	2016	10(2)	92–97
Ушаков В. Г. см. Леонтьев Н. Д.	2014	8(3)	39–44
Ушаков В. Г. см. Леонтьев Н. Д.	2016	10(3)	15–22
Ушаков В. Г. см. Петрова О. В.	2009	3(4)	35–40
Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Декомпозиция при частично известном распределении ошибки	2011	5(4)	36–39
Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Об одной ядерной оценке плотности	2011	5(3)	67–73
Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Об усреднении округленных данных	2015	9(4)	106–109
Ушаков В. Г., Шестаков О. В. Восстановление вероятностных характеристик случайных функций в задачах однофотонной эмиссионной томографии	2009	3(1)	29–33
Ушаков В. Г., Шестаков О. В. Реконструкция распределений случайных функций в задачах однофотонной эмиссионной томографии при помощи аппроксимации экспоненциального множителя тригонометрическими многочленами	2011	5(3)	17–20
Ушаков Н. Г. см. Ушаков В. Г.	2011	5(3)	67–73
Ушаков Н. Г. см. Ушаков В. Г.	2011	5(4)	36–39
Ушаков Н. Г. см. Ушаков В. Г.	2015	9(4)	106–109
Ушакова А. Н. Оценивание распределения задержки в биологических динамических системах на примере модели, описывающей ВИЧ-инфекцию	2008	2(2)	60–63
Ушмаев О. С. Адаптация биометрической системы к искажающим факторам на примере дактилоскопической идентификации	2009	3(2)	25–33
Ушмаев О. С. Информационная технология интеграции идентификации по изображению лица для ускорения автоматической дактилоскопической идентификации	2008	2(4)	66–73
Ушмаев О. С. Проблемы распараллеливания биометрических вычислений в крупномасштабных идентификационных системах	2009	3(1)	8–18
Ушмаев О. С. Сервисно-ориентированный подход к разработке мультибиометрических технологий	2008	2(3)	41–54
Ушмаев О. С. см. Насонов А. В.	2009	3(1)	19–28
Ушмаев О. С., Арутюнян А. Р. Влияние деформаций на качество биометрической идентификации по отпечаткам пальцев	2009	3(4)	12–21

	Год	Том(вып.)	Стр.
Ушмаев О. С., Кузнецов В. В. Алгоритмы защищенной биометрической верификации на основе бинарного представления топологии отпечатков пальцев	2012	6(1)	132–140
Фазекаш И. см. Чупрунов А. Н.	2010	4(3)	42–46
Фазекаш И. см. Чупрунов А. Н.	2011	5(3)	80–85
Фазлиев А. З. см. Калиниченко Л. А.	2016	10(1)	2–22
Файзулхаков Я. Р. см. Преображенский Н. Б.	2011	5(2)	82–89
Федосеев А. А. К вопросу об уменьшении объема порций учебного материала при электронном обучении	2016	10(3)	105–110
Френкель С. Л. см. Миронов А. М.	2014	8(4)	58–69
Френкель С. Л. см. Печинкин А. В.	2009	3(2)	2–14
Фуджикоши Я. см. Кавагучи Ю.	2010	4(1)	12–17
Хавансков В. А. см. Зацман И. М.	2013	7(4)	52–65
Хавансков В. А. см. Минин В. А.	2014	8(3)	114–125
Хавансков В. А. см. Минин В. А.	2015	9(2)	111–123
Хавансков В. А. см. Минин В. А.	2016	10(2)	107–122
Хазеева Г. Т. см. Черток А. В.	2016	10(4)	46–56
Хамлеев Б. И. см. Чупрунов А. Н.	2009	3(3)	52–59
Хапланов А. Ю. Асимптотическая нормальность оценки параметров многомерной логистической регрессии	2013	7(2)	69–74
Хохлов Ю. С. Многомерное дробное движение Леви и его приложения	2016	10(2)	98–106
Целищев М. А. см. Яковенко Д. О.	2011	5(3)	21–26
Цискаридзе А. К. Математическая модель и метод восстановления позы человека по стереопаре силуэтных изображений	2010	4(4)	26–32
Чаплыгин В. В. Многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем, блокировкой полумарковского потока заявок и выбиванием заявок из накопителя	2008	2(3)	34–40
Чаплыгин В. В. см. Печинкин А. В.	2007	1(1)	27–39
Чаплыгин В. В. см. Печинкин А. В.	2007	1(2)	39–49
Чаплыгин В. В. см. Печинкин А. В.	2009	3(3)	4–15
Чегодаев А. В. см. Зейфман А. И.	2008	2(2)	35–40
Чегодаев А. В. см. Зейфман А. И.	2009	3(1)	47–54
Ченцов В. М. см. Грушо А. А.	2008	2(2)	64–66
Чеплюкова И. А. см. Лери М. М.	2011	5(3)	34–40
Черников Б. В. Технология хранения слабоформализуемых документов на основе лексикологического синтеза	2009	3(4)	64–75
Черток А. В. О формализации понятия токсичности потока заявок на финансовых рынках	2014	8(4)	20–31
Черток А. В. см. Королев В. Ю.	2013	7(1)	12–21
Черток А. В., Каданер А. И., Хазеева Г. Т., Соколов И. А. Метод кумулятивных сумм для поиска смены режима в процессе Орнштейна–Уленбека на основе процесса Леви	2016	10(4)	46–56
Чиркунов К. С. Агентное моделирование развития территориальной системы	2011	5(1)	58–64
Чичагов В. В. Асимптотические разложения высокого порядка для несмещенных оценок и их дисперсий в модели однопараметрического экспоненциального семейства	2015	9(3)	72–84
Чичагов В. В. Асимптотические разложения средней абсолютной ошибки несмещенной оценки с равномерно минимальной дисперсией и оценки максимального правдоподобия в модели однопараметрического экспоненциального семейства решетчатых распределений	2016	10(3)	66–76
Чичагов В. В. Стохастические разложения несмещенных оценок в случае однопараметрического экспоненциального семейства	2008	2(2)	67–75
Чубич В. М. Информационная технология активной параметрической идентификации стохастических квазилинейных дискретных систем	2011	5(1)	46–57

	Год	Том(вып.)	Стр.
Чупраков К. Г. К вопросу о размещении коллективных средств отображения в ситуационном зале с заданными параметрами	2010	4(4)	88–95
Чупраков К. Г. см. Зацаринный А. А.	2010	4(3)	59–68
Чупраков К. Г. см. Зацаринный А. А.	2014	8(4)	85–93
Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Законы повторного логарифма для числа безошибочных блоков при помехоустойчивом кодировании	2010	4(3)	42–46
Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Усиленные законы больших чисел для числа безошибочных блоков при помехоустойчивом кодировании	2011	5(3)	80–85
Чупрунов А. Н., Хамдеев Б. И. О вероятности исправления ошибок при помехоустойчивом кодировании, когда число ошибок принадлежит некоторому конечному множеству	2009	3(3)	52–59
Шабанов А. П. см. Зацаринный А. А.	2011	5(4)	76–83
Шабанов А. П. см. Зацаринный А. А.	2014	8(3)	126–133
Шалимов А. В. см. Королев В. Ю.	2013	7(2)	50–54
Шарапов Р. В. см. Шарапова Е. В.	2012	6(3)	52–58
Шарапова Е. В., Шарапов Р. В. Универсальная система проверки текстов на плагиат «Автор.NET»	2012	6(3)	52–58
Шарнин М. М. см. Галина И. В.	2015	9(2)	93–110
Шарнин М. М. см. Михеев М. Ю.	2014	8(4)	70–77
Шарнин М. М., Кузнецов И. П. Особенности семантического поиска информационных объектов на основе технологии баз знаний	2012	6(2)	113–121
Шарнин М. М., Сомин Н. В., Кузнецов И. П., Морозова Ю. И., Галина И. В., Козеренко Е. Б. Статистические механизмы формирования ассоциативных портретов предметных областей на основе естественно-языковых текстов больших объемов для систем извлечения знаний	2013	7(2)	92–99
Шевцова И. Г. Некоторые оценки для характеристических функций с применением к уточнению неравенства Мизеса	2009	3(3)	69–78
Шевцова И. Г. Об абсолютных константах в неравенстве Берри–Эссеена и его структурных и неравномерных уточнениях	2013	7(1)	124–125
Шевцова И. Г. см. Гапонова М. О.	2009	3(4)	41–56
Шевцова И. Г. см. Григорьева М. Е.	2010	4(2)	75–82
Шевцова И. Г. см. Королев В. Ю.	2011	5(3)	64–66
Шевцова И. Г. см. Нефедова Ю. С.	2011	5(1)	39–45
Шестаков О. В. Аппроксимация распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов нормальным распределением при использовании выборочной дисперсии	2010	4(4)	72–79
Шестаков О. В. Непараметрическое оценивание многомерной плотности с помощью вейвлет-оценок одномерных проекций	2015	9(2)	88–92
Шестаков О. В. Об устойчивости реконструкции изображений в задачах эмиссионной томографии	2009	3(3)	47–51
Шестаков О. В. О скорости сходимости оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов к нормальному закону при использовании робастных оценок дисперсии	2012	6(2)	122–128
Шестаков О. В. О скорости сходимости распределения выборочного абсолютного медианного отклонения к нормальному закону	2011	5(3)	74–79
Шестаков О. В. Статистические свойства метода подавления шума, основанного на стабилизированной жесткой пороговой обработке	2016	10(2)	65–69
Шестаков О. В. Усиленный закон больших чисел для оценки риска в задаче реконструкции томографических изображений из проекций с коррелированным шумом	2016	10(3)	41–45
Шестаков О. В. Центральная предельная теорема для функции обобщенной кросс-валидации при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов	2013	7(2)	40–49
Шестаков О. В. см. Ерошенко А. А.	2014	8(1)	36–44
Шестаков О. В. см. Ерошенко А. А.	2014	8(4)	32–40

	Год	Том(вып.)	Стр.
Шестаков О. В. см. Захарова Т. В.	2016	10(3)	46–54
Шестаков О. В. см. Маркин А. В.	2008	2(2)	47–54
Шестаков О. В. см. Маркин А. В.	2010	4(2)	36–45
Шестаков О. В. см. Ушаков В. Г.	2009	3(1)	29–33
Шестаков О. В. см. Ушаков В. Г.	2011	5(3)	17–20
Шестаков О. В., Кузнецова М. Г., Садовой И. А. Обращение сферического преобразования Радона в классе дискретных случайных функций	2013	7(4)	75–81
Шкотин А. В. Исследование графа категорий английской версии Википедии	2013	7(3)	35–39
Шнурков П. В., Горшенин А. К., Белоусов В. В. Аналитическое решение задачи оптимального управления полумарковским процессом с конечным множеством состояний	2016	10(4)	72–88
Шнурков П. В., Засыпко В. В., Белоусов В. В., Горшенин А. К. Разработка алгоритма численного решения задачи оптимального управления инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики	2016	10(1)	82–95
Шоргин В. С. см. Агаларов Я. М.	2016	10(2)	70–79
Шоргин В. С. см. Зейфман А. И.	2008	2(2)	35–40
Шоргин В. С. см. Кудрявцев А. А.	2009	3(4)	30–34
Шоргин С. Я. см. Батракова Д. А.	2007	1(1)	40–53
Шоргин С. Я. см. Вихрова О. Г.	2015	9(4)	48–55
Шоргин С. Я. см. Гайдамака Ю. В.	2013	7(4)	20–33
Шоргин С. Я. см. Гайдамака Ю. В.	2016	10(4)	2–10
Шоргин С. Я. см. Горбунова А. В.	2015	9(3)	32–38
Шоргин С. Я. см. Жаворонкова Ю. В.	2014	8(2)	48–54
Шоргин С. Я. см. Жаворонкова Ю. В.	2015	9(1)	98–105
Шоргин С. Я. см. Зейфман А. И.	2010	4(3)	9–15
Шоргин С. Я. см. Зейфман А. И.	2011	5(3)	27–33
Шоргин С. Я. см. Зейфман А. И.	2012	6(4)	27–33
Шоргин С. Я. см. Зейфман А. И.	2014	8(1)	106–117
Шоргин С. Я. см. Зейфман А. И.	2014	8(3)	19–27
Шоргин С. Я. см. Королев В. Ю.	2011	5(3)	64–66
Шоргин С. Я. см. Кудрявцев А. А.	2007	1(2)	76–82
Шоргин С. Я. см. Кудрявцев А. А.	2009	3(1)	55–59
Шоргин С. Я. см. Кудрявцев А. А.	2009	3(4)	30–34
Шоргин С. Я. см. Кудрявцев А. А.	2010	4(3)	16–21
Шоргин С. Я. см. Кудрявцев А. А.	2011	5(1)	78–79
Шоргин С. Я. см. Кудрявцев А. А.	2013	7(2)	55–59
Шоргин С. Я. см. Печинкин А. В.	2008	2(1)	55–62
Шоргин С. Я. см. Печинкин А. В.	2012	6(3)	107–113
Шоргин С. Я. см. Сатин Я. А.	2011	5(4)	18–25
Шоргин С. Я. см. Соколов И. А.	2011	5(3)	86
Шубников С. К. см. Зацман И. М.	2013	7(4)	52–65
Шубников С. К. см. Минин В. А.	2014	8(3)	114–125
Шубников С. К. см. Минин В. А.	2015	9(2)	111–123
Шубников С. К. см. Минин В. А.	2016	10(2)	107–122
Шулипа А. К. см. Белых И. Н.	2012	6(1)	91–98
Шульга Л. А. см. Баша Н. С.	2011	5(1)	73–77
Щеколдин В. Ю. см. Тимофеев В. С.	2013	7(2)	60–68
Юнусова Д. С. см. Спивак С. И.	2015	9(1)	87–97
Яковенко Д. О., Целищев М. А. Диверсификация и ее связь с мерами риска	2011	5(3)	21–26
Яковлев О. А., Гасилов А. В. Ускоренный алгоритм стереосопоставления на основе геодезических вспомогательных коэффициентов	2016	10(3)	98–104
Яковлева Т. В., Кульберг Н. С. Методы математической статистики как инструмент двухпараметрического анализа магнитно-резонансного изображения	2014	8(3)	79–89

	Год	Том(вып.)	Стр.
Янушко А. В., Бабанин А. В., Кузнецова О. А., Петрушенко С. В. Решение проблем взаимодействия с СУБД в кроссплатформенной библиотеке EFFIDB	2011	5(4)	53–63
Baranov S., Frenkel S., Sinelnikov V., and Zakharov V. Concurrent design and verification of digital hardware	2008	2(3)	7–25
Baranov S., Frenkel S., and Zakharov V. Semiformal verification for pipelined digital designs based on Algorithmic State Machines	2010	4(4)	48–59
Belyaev K. P., Tanajura C. A. S., and Tuchkova N. P. Mathematical foundation, application, and comparison of general data assimilation method based on diffusion approximation with other data assimilation schemes	2012	6(4)	84–94
Belyaev M. G. and Bunaev E. V. Approximation of a multidimensional dependency based on linear expansion in a dictionary of parametric functions	2013	7(3)	114–125
Belyaev Yu. K. and Kriström B. Analysis of survey data containing rounded censoring intervals	2015	9(3)	2–16
Borovsky P. see Frenkel S.	2015	9(4)	78–84
Budsaba K. see Sung S. H.	2012	6(4)	95–102
Bunaev E. V. see Belyaev M. G.	2013	7(3)	114–125
Buntman N., Minel J.-L., Le Pesant D., and Zatsman I. Typology and computer modeling of translation difficulties	2010	4(3)	77–83
Callaos N. and Seyful-Mulyukov R. Complexity and its information content	2016	10(1)	129–139
Cohen A. see Dolev S.	2012	6(4)	76–83
De Nikola C., Khokhlov Y. S., Pagano M., and Sidorova O. I. Fractional Levy motion with dependent increments and its application to network traffic modeling ...	2012	6(3)	59–63
De Turck K. see Morozov E.	2014	8(1)	127–134
Dolev S., Frenkel S., and Cohen A. Holographic coding by Walsh–Hadamard transformation of randomized and permuted data	2012	6(4)	76–83
Dolev S., Frenkel S., and Tamir D. E. Probabilistic methods for self-correcting hardware design	2013	7(4)	140–147
Dolev S., and Kogan-Sadetsky M. Heuristic certificates via approximations	2015	9(1)	15–27
Ermakov P. V. see Kozerenko E. B.	2011	5(4)	107–113
Frenkel S. see Baranov S.	2008	2(3)	7–25
Frenkel S. see Baranov S.	2010	4(4)	48–59
Frenkel S. see Dolev S.	2012	6(4)	76–83
Frenkel S. see Dolev S.	2013	7(4)	140–147
Frenkel S., Kopeetsky M., Molotkovski R., and Borovsky P. Performance improvement of Lempel–Ziv–Welch compression algorithm	2015	9(4)	78–84
Frenkel S. and Pechinkin A. Estimation of self-healing time for digital systems under transient faults	2010	4(3)	2–8
Kalinichenko L., Kovalev D., Kovaleva D., and Malkov O. Methods and tools for hypothesis-driven research support: A survey	2015	9(1)	28–54
Kalinichenko L., Stupnikov S., Vovchenko A., and Kovalev D. Conceptual declarative problem specification and solving in data intensive domains	2013	7(4)	112–139
Kalinichenko L., Stupnikov S., Vovchenko A., and Kovalev D. Conceptual modeling of multidialect workflows	2014	8(4)	110–124
Kalinichenko L., Stupnikov S., and Zakharov V. Extending information integration technologies for problem solving over heterogeneous information resources	2012	6(1)	70–78
Khokhlov Y. S. see De Nikola C.	2012	6(3)	59–63
Kogan-Sadetsky M. see Dolev S.	2015	9(1)	15–27
Kopeetsky M. see Frenkel S.	2015	9(4)	78–84
Kovalev D. see Kalinichenko L.	2013	7(4)	112–139
Kovalev D. see Kalinichenko L.	2014	8(4)	110–124
Kovalev D. see Kalinichenko L.	2015	9(1)	28–54
Kovaleva D. see Kalinichenko L.	2015	9(1)	28–54

	Год	Том(вып.)	Стр.
Kozerenko E. B. and Ermakov P. V. The strategies of syntactic analysis based on head-driven grammars and the methods of their implementation in information systems	2011	5(4)	107–113
Kriström B. see Belyaev Yu. K.	2015	9(3)	2–16
Kucherenko S. see Temnov G.	2009	3(3)	40–46
Le Pesant D. see Buntman N.	2010	4(3)	77–83
Loiseau S., Sitchinava D. V., Zalizniak A. A., and Zatsman I. M. Information technologies for creating the database of equivalent verbal forms in the Russian-French multivariant parallel corpus	2013	7(2)	100–109
Lukashenko O. V., Morozov E. V., and Pagano M. On the overflow probability asymptotics in a Gaussian queue	2014	8(2)	28–38
Malkov O. see Kalinichenko L.	2015	9(1)	28–54
Minel J.-L. see Buntman N.	2010	4(3)	77–83
Molotkovski R. see Frenkel S.	2015	9(4)	78–84
Morozov E. see Lukashenko O. V.	2014	8(2)	28–38
Morozov E., Potakhina L., and De Turck K. Stability analysis of an optical system with random delay lines lengths	2014	8(1)	127–134
Pagano M. see De Nikola C.	2012	6(3)	59–63
Pagano M. see Lukashenko O. V.	2014	8(2)	28–38
Pechinkin A. see Frenkel S.	2010	4(3)	2–8
Potakhina L. see Morozov E.	2014	8(1)	127–143
Razumchik R. Algebraic method for approximating joint stationary distribution in finite capacity queue with negative customers and two queues	2015	9(4)	68–77
Seyful-Mulyukov R. see Callaos N.	2016	10(1)	129–139
Sidorova O. I. see De Nikola C.	2012	6(3)	59–63
Sinelnikov V. see Baranov S.	2008	2(3)	7–25
Sitchinava D. V. see Loiseau S.	2013	7(2)	100–109
Sorokin A. Automation beyond WEB 2.0	2014	8(4)	125–136
Stupnikov S. see Kalinichenko L.	2012	6(1)	70–78
Stupnikov S. see Kalinichenko L.	2013	7(4)	112–139
Stupnikov S. see Kalinichenko L.	2014	8(4)	110–124
Sung S. H., Budsaba K., and Volodin A. Complete convergence for arrays of negatively dependent random variables	2012	6(4)	95–102
Tamir D. E. see Dolev S.	2013	7(4)	140–147
Tanajura C. A. S. see Belyaev K. P.	2012	6(4)	84–94
Temnov G. and Kucherenko S. An approach to actuarial modeling with quasi-Monte Carlo: Simulation of random sums depending on stochastic factors	2009	3(3)	40–46
Tuchkova N. P. see Belyaev K. P.	2012	6(4)	84–94
Volodin A. see Sung S. H.	2012	6(4)	95–102
Vovchenko A. see Kalinichenko L.	2013	7(4)	112–139
Vovchenko A. see Kalinichenko L.	2014	8(4)	110–124
Yanushkevichiene O. and Yanushkevichius R. About the rate of convergence of one U-statistic	2012	6(3)	64–68
Yanushkevichius R. see Yanushkevichiene O.	2012	6(3)	64–68
Zakharov V. see Baranov S.	2008	2(3)	7–25
Zakharov V. see Baranov S.	2010	4(4)	48–59
Zakharov V. see Kalinichenko L.	2012	6(1)	70–78
Zalizniak A. A. see Loiseau S.	2013	7(2)	100–109
Zatsman I. see Buntman N.	2010	4(3)	77–83
Zatsman I. see Loiseau S.	2013	7(2)	100–109

Правила подготовки рукописей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации предоставленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.

3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам.

Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.

5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.

6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или \LaTeX (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи необязательно.

7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 15 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны примеров оформления представлены в Интернете: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>

8. Статья должна содержать следующую информацию на **русском и английском языках**:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием почтового адреса организации и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_rus/authors.asp и
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами;
- источники финансирования работы (ссылки на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.).

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала;
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://translit.ru/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу, при этом в закладке «варианты. . . » следует выбрать опцию BGN.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Ниже приведены примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”.

Описание статьи из журнала:

Zagurenko, A. G., V. A. Korotovskikh, A. A. Kolesnikov, A. V. Timonov, and D. V. Kardymon. 2008. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizayna gidrorazryva plasta [Technical and economic optimization of the design of hydraulic fracturing]. *Neftyanoe hozyaystvo [Oil Industry]* 11:54–57.

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Rus. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S10231935080077.

Описание статьи из электронного журнала:

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.

Описание материалов конференций:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

Описание книги (монографии, сборники):

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Latyshev, V. N. 2009. *Tribologiya rezaniya. Kn. 1: Friksionnye protsessy pri rezanii metallov* [Tribology of cutting. Vol. 1: Frictional processes in metal cutting]. Ivanovo: Ivanovskii State Univ. 108 p.

Описание переводной книги (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. *Vibration problems in engineering*. — 4th ed. — N.Y.: Wiley, 1974. 521 p.)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. N.Y.: Wiley. 521 p.

Описание неопубликованного документа:

Latypov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004. Geology and production (NGT GiD). Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198. (In Russian, unpubl.)

Описание интернет-ресурса:

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

Описание диссертации или автореферата диссертации:

Semenov, V. I. 2003. *Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyy tor* [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. D.Sc. Diss. Moscow. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. *Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa* [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. PhD Thesis. Moscow: IPI RAN. 23 p.

Описание ГОСТа:

GOST 8.586.5-2005. 2007. *Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichstva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv* [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publs. 10 p.

Описание патента:

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. *Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya* [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- использовать attach (присоединение);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

12. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

Адрес редакции журнала «Информатика и её применения»:

Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН

Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05

e-mail: rust@ipiran.ru (Сейфуль-Мулюков Рустем Бадриевич)

<http://www.ipiran.ru/journal/issues/>

Requirements for manuscripts submitted to Journal “Informatics and Applications”

Journal “Informatics and Applications” (Inform. Appl.) publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of informatics and its applications.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

The topics covered include the following areas:

- theoretical fundamentals of informatics;
- mathematical methods for studying complex systems and processes;
- information systems and networks;
- information technologies; and
- architecture and software of computational complexes and networks.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

Agreement on the transfer of rights to publish:

“We, the undersigned authors of the manuscript “. . .”, pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Informatics and Applications” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations.

Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If the authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved for publication. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or \LaTeX (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.
7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 15 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>.

8. The articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author’s name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format: (see site)

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp and

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;

- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae;
 - indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.
Important! Keywords must not be sentences;
 - Acknowledgments.
9. References. Russian references have to be presented both in English translation and Latin transliteration (refer <http://www.translit.ru>, option BGN).
Please take into account the following examples of Russian references appearance:
- Article in journal:**
Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Rus. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.
- Journal article in electronic format:**
Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).
- Article from the continuing publication (collection of works, proceedings):**
Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental’noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.
- Conference proceedings:**
Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma “Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol’zovaniya i povysheniya neftegazoidachi” [6th Symposium (International) “New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact” Proceedings]*. Moscow. 267–272.
- Books and other monographs:**
Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem [Operation of turbine generators with direct cooling]*. Moscow: Energy Publs. 352 p.
- Dissertation and Thesis:**
Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. PhD Thesis. Moscow: IPI RAN. 23 p.
- State standards and patents:**
GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch’yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publs. 10 p.
Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel’nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.
- References in Latin transcription are presented in the original language.
References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets.
All items from the reference list should be cited.
10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.
11. Submissions of files by e-mail must include:
- the journal title and author’s name in the “Subject” field;
 - an article and additional materials have to be attached using the “attach” function;
 - an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.
12. “Informatics and Applications” journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

Editorial Board address:

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia
Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05
e-mail: rust@ipiran.ru (to Prof. Rustem Seyful-Mulyukov)
<http://www.ipiran.ru/english/journal.asp>