

Информатика и её применения

Том 3 Выпуск 4 Год 2009

СОДЕРЖАНИЕ

Вероятностные методы построения информационных моделей неравномерности вращения Земли И. Н. Синицын	2
Влияние деформаций на качество биометрической идентификации по отпечаткам пальцев О. С. Урмаев, А. Р. Арутюнян	12
Алгоритм вычисления загруженности телекоммуникационной сети с повторными передачами Я. М. Агаларов	22
Байесовские модели массового обслуживания и надежности: общий эрланговский случай А. А. Кудрявцев, В. С. Шоргин, С. Я. Шоргин	30
Асимптотический анализ системы массового обслуживания $E_r(t) G 1$ О. В. Петрова, В. Г. Ушаков	35
Асимптотические оценки абсолютной постоянной в неравенстве Бери–Эссеена для распределений, не имеющих третьего момента М. О. Гапонова, И. Г. Шевцова	41
Предельное распределение оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов А. В. Маркин	57
Технология хранения слабоформализуемых документов на основе лексикологического синтеза Б. В. Черников	64
Моделирование самоорганизации групп интеллектуальных агентов в зависимости от степени согласованности их взаимодействия И. А. Кириков, А. В. Колесников, С. В. Листопад	76
Нестационарная семиотическая модель компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов И. М. Зацман	87
Рецензии	102
Abstracts	104
Об авторах	107
About Authors	108
Авторский указатель за 2009 г.	109
2009 Author Index	111

Выпускающий редактор *Т. Торжкова*; Технический редактор *Л. Кокушкина*

Художественный редактор *М. Седакова*

Сдано в набор 26.10.09. Подписано в печать 30.11.09. Формат 60 x 84 / 8

Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.-печ. л. 14,0. Уч.-изд. л. 10,5. Тираж 200 экз.

Заказ №

Издательство «ТОРУС ПРЕСС», Москва 121614, ул. Крылатская, 29-1-43

torus@torus-press.ru; <http://www.torus-press.ru>

Отпечатано в ППП «Типография «Наука» с готовых диапозитивов, Москва 121099, Шубинский пер., д. 6.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ*

И. Н. Синицын¹

Аннотация: Рассмотрены новые вероятностные линейные и нелинейные методы построения моделей флуктуаций неравномерности вращения Земли по априорным данным. Методы лежат в основе информационных ресурсов по проблеме «Статистическая динамика вращения Земли». Приведены тестовые примеры.

Ключевые слова: информационная модель; информационные ресурсы; линейные и нелинейные вероятностные методы; спектрально-корреляционные характеристики; эргодические флуктуации; одно- и многомерные распределения; асимметрия; эксцесс; гауссовы и пуассоновы белые шумы; параметризация распределений; моментные методы

1 Введение

В [1–4] построены корреляционные модели внутригодовой приливной неравномерности вращения Земли, основанные на учете аддитивных и параметрических, гармонических (полигармонических) и случайных («окрашенных» и широкополосных) гравитационно-приливных флуктуаций от Солнца и Луны.

В [5] разработана теория одно- и многомерных распределений для нелинейных пуассоновых флуктуаций полюса Земли и неравномерности вращения Земли.

В [6] применительно к линейным гауссовым и негауссовым «окрашенным» и широкополосным флуктуациям неравномерности вращения Земли найдены одно- и многомерные характеристические функции. Вычислены первые четыре статистических момента, а также асимметрия и эксцесс одномерного распределения флуктуаций неравномерности скорости вращения Земли.

Основываясь на [7, 8], изложим новые вероятностные методы построения стохастических информационных моделей флуктуаций неравномерности вращения Земли по априорным данным.

2 Нелинейные стохастические дифференциальные уравнения флуктуаций неравномерности вращения Земли

Обобщая [2–6], представим дифференциальное уравнение изменения угла собственного осевого вращения $\delta\varphi$ Земли, вызванного гравитационно-приливными гармоническими (полигармоническими) и случайными («окрашенными» и широкополосными) моментами сил от Солнца $M^S(t)$ и Луны $M^L(t)$ в виде

$$\delta\ddot{\varphi} = M^S(t) + M^L(t) + \Delta M^{SL}. \quad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M^S(t) &= M_0^S(t) + Z_1 + Z_2; \\ M_0^S(t) &= M_{10}^S \cos(2\pi f_{\Gamma} t + \chi_1^S) + \\ &\quad + M_{20}^S \cos(4\pi f_{\Gamma} t + \chi_2^S); \\ M^L(t) &= M_0^L(t) + Z_3 + Z_4; \end{aligned} \quad (2)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №07-07-00031) и программы ОНИТ РАН «Информационные технологии и анализ сложных систем» (проект 1.5).

¹Институт проблем информатики Российской академии наук, sinitsin@dol.ru

$$M_0^L(t) = M_{m0}^L \cos(2\pi\nu_m t + \chi_m^L) + M_{f0}^L \cos(2\pi\nu_f t + \chi_f^L); \quad (3)$$

$$\ddot{Z}_h + 2\varepsilon_h \omega_h \dot{Z}_h + \omega_h^2 Z_h = V_h \quad (h = \overline{1,4}); \quad (4)$$

$$\delta\varphi = \varphi - r_* \omega_*^{-1} t,$$

где φ — угол собственного вращения Земли, значения которого определены на дату t (он является параметром, характеризующим вращение земной системы координат по отношению к небесной); $r_* = 7,292115 \cdot 10^{-5}$ рад/с — постоянная средняя составляющая угловой скорости собственного вращения Земли; ω_* — угловая скорость обращения Земли по орбите; t — безразмерное время, измеряемое стандартными годами; $M_0^S(t)$ и $M_0^L(t)$ — регулярные возмущения, обусловленные гравитационно-приливными возмущениями от Солнца и Луны; $f_\Gamma, 2f_\Gamma, \nu_m, \nu_f, M_{10}^S, M_{20}^S, M_{m0}^L, M_{f0}^L, \chi_1^S, \chi_2^S, \chi_m^L, \chi_f^L$ — частоты, амплитуды и начальные фазы аддитивных гармонических возмущений, соответствующих годовому, полугодовому, месячному и двухнедельному циклам; $\Delta M^{SL} = \Delta M^{SL}(\delta\varphi, \delta\dot{\varphi}, Z_h)$ — параметрические и нелинейные возмущения отмеченных переменных; Z_h ($h = \overline{1,4}$) — «окрашенные» случайные моменты (в общем случае негауссовы случайные процессы), определяемые линейными дифференциальными уравнениями второго порядка формирующего фильтра (4) с параметрами ε_h ($0 < \varepsilon_h < 1$) и ω_h ($\omega_1 = 2\pi f_\Gamma, \omega_2 = 4\pi f_\Gamma, \omega_3 = 2\pi\nu_m, \omega_4 = 2\pi\nu_f$); V_h ($h = \overline{1,4}$) — независимые негауссовы белые шумы с интенсивностями G_h^V ($h = \overline{1,4}$). Уравнение (4) для $t \gg t_0$ определяет и асимптотически устойчивый формирующий фильтр (ФФ) для «окрашенного» стационарного случайного процесса Z_h , на входе которого действует входной сигнал в виде белого шума V_h . Для широкополосного случайного процесса Z_h ($h = \overline{1,4}$) уравнения ФФ возьмем в следующем виде [1–4]:

$$\dot{Z}_h = -\alpha_h Z_h + \sigma_h \sqrt{2\alpha_h} V_h \quad (h = \overline{1,4}), \quad (5)$$

где V_h — белый шум единичной интенсивности, $G_h^V = 1$.

Совокупность нелинейных стохастических дифференциальных уравнений (1)–(4) путем введения информационных $X = [X_1 X_2]^T$ и инструментальных $Y = [Y_1 \dots Y_8]^T$ переменных на основе соотношений

$$X_1 = \delta\varphi; \quad X_2 = \delta\dot{\varphi};$$

$$Y_1 = Z_1; \quad \dot{Z}_1 = Y_2; \quad Y_3 = Z_2; \quad \dot{Z}_2 = Y_4;$$

$$Y_5 = Z_3; \quad \dot{Z}_3 = Y_6; \quad Y_7 = Z_4; \quad \dot{Z}_4 = Y_8$$

вместе с соответствующими начальными условиями приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2; \quad \dot{X}_2 = M_0^S + M_0^L + \\ &+ \sum_{j=1,3,5,7} Y_j + \Delta M^{SL}(X, Y); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_j &= Y_{j+1}; \quad \dot{Y}_{j+1} = -2\varepsilon_{j+1}\omega_{j+1}Y_{j+1} - \omega_{j+1}^2 Y_j + \\ &+ V_{j+1} \quad (j = 1, 3, 5, 7) \end{aligned} \quad (7)$$

или в векторно-матричной форме

$$\dot{X} = a_0 + aX + bY + \Delta M^{SL}(X, Y); \quad X(t_0) = X_0; \quad (8)$$

$$\dot{Y} = \alpha_0 + \alpha Y + \beta V; \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (9)$$

где $V = [V_1 \dots V_4]^T$; элементы векторов a_0 и α_0 , матриц a, α, b, β находятся из (6) и (7). Для широкополосных случайных процессов Z_h имеем уравнения (1)–(3) и (5). При этом входящие в уравнения (8) и (9) векторы и матрицы $a_0, \alpha_0, a, \alpha, b, \beta$ определяются из (1)–(3) и (5).

Замечание 1. Нелинейная дифференциальная стохастическая векторно-матричная модель (8), (9) положена в основу компьютерного статистического моделирования одно- и многомерных распределений неравномерностей вращения Земли в составе информационных ресурсов по проблеме «Статистическая динамика вращения Земли».

Замечание 2. Как было отмечено в [2], использование укороченных уравнений флуктуаций неравномерности вращения Земли различных порядков позволяет строить достаточно простые и эффективные алгоритмы анализа и синтеза стохастических моделей по априорным данным. Для построения соответствующих укороченных уравнений необходимо в уравнениях (8) и (9) перейти к соответствующим нормальным координатам и воспользоваться формулой Ито [7, 8].

3 Линейные вероятностные методы определения одно- и многомерных распределений флуктуаций неравномерности вращения Земли и их уклонений от гауссовых. Тестовые примеры

Рассмотрим линейную дифференциальную стохастическую модель (8) и (9) при $\Delta M^{SL} \equiv 0$. Обозначим через

$$\chi^V(\mu; t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln h_1^V(\mu; t)$$

логарифмическую производную от одномерной характеристической функции векторного белого шума V . Точное выражение для n -мерной характеристической функции информационных переменных X для моментов времени t_1, \dots, t_n будет иметь следующий вид [7, 8]:

$$g_n^x(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n) = g_0^x \left(\sum_{k=1}^n u_{11}(t_k, t_0)^T \lambda \right) \times g_0^y \left(\sum_{k=1}^n u_{12}(t_k, t_0)^T \lambda \right) \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^n \lambda_k^T \times \left[\int_{t_0}^{t_k} u_{11}(t_k, \tau) a_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_k} u_{12}(t_k, \tau) \alpha_0(\tau) d\tau \right] + \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \chi^V \left(\beta(\tau)^T \sum_{l=k}^n u_{12}(t_l, \tau)^T \lambda_l; \tau \right) \right\}. \quad (10)$$

Здесь $g_0^x(\sigma)$ и $g_0^y(\rho)$ — характеристические функции начальных значений Y_0 и X_0 ; $u_{11}(t, \tau)$, $u_{12}(t, \tau)$, $u_{22}(t, \tau)$ — фундаментальные решения однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_{11} = a u_{11}, \quad \dot{u}_{12} = a u_{12} + b u_{22}, \quad \dot{u}_{22} = \alpha u_{22}, \quad (11)$$

где a, b, α — матрицы в уравнениях (8) и (9). Из (10) и (11) по известным формулам теории линейных стохастических систем [7, 8] находятся одно- и многомерные плотности и функции распределения.

При гауссовых белых шумах V и гауссовых начальных условиях X_0, Y_0 все одно- и многомерные распределения гауссовы. Поэтому достаточно использовать формулы корреляционной теории [1–5] соответственно для «окрашенных» и широкополосных процессов Z_h .

Для стационарных и независимых негауссовых белых шумов V при $t_0 = -\infty$ и с учетом того, что $a_0 = a_0(\tau)$, $\alpha_0 = 0$, $b, \beta = const$, $\chi^V(\mu; t) = \chi^V(\mu)$, формула (10) при $n = 1$ дает следующее точное выражение для нестационарной одномерной характеристической функции информационной переменной $X_2 = \delta\dot{\varphi}$:

$$g_1^x(\lambda; t) = g_0^x(u_{11}(t, -\infty)^T \lambda) g_0^y(u_{12}(t, -\infty)^T \lambda) \times \exp \left\{ -i \lambda^T \int_{-\infty}^t u_{11}(t, \tau) a_0(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \chi^V(\beta^T u_{12}(t, \tau)^T \lambda; \tau) d\tau \right\}. \quad (12)$$

Из (12) для производной центрированной информационной переменной $X_2^0 = X_2 - m_2^x$ (m_2^x — математическое ожидание $\delta\dot{\varphi}$, определяемое $M_0^S(t)$ и $M_0^L(t)$) получаем следующее точное выражение стационарного одномерного распределения:

$$g_1^{\dot{x}}(\lambda) = \prod_{j=1,3,5,7} g_1^{y_j}(\lambda). \quad (13)$$

Здесь $g_1^{y_j}(\lambda)$ ($j = 1, 3, 5, 7$) — характеристические функции инструментальных переменных $Z_j = Y_j$ ($j = 1, 3, 5, 7$), определяемые уравнениями $\Phi\Phi$, причем согласно [7, 8] точное выражение имеет вид

$$g_1^{y_j}(\lambda) = \exp \left\{ \int_0^\infty \chi^{V_j}(w_j(\rho)\lambda) d\rho \right\}, \quad (14)$$

где $\chi^{V_j}(\mu)$ — логарифмическая производная одномерной характеристической функции белого шума V_j ($j = 1, 3, 5, 7$); $w_j(\rho)$ — весовая $\Phi\Phi$. В частности, для (4) и (5) имеем

$$\left. \begin{aligned} w_j(\rho) &= \frac{1}{\bar{\omega}_j} e^{-\varepsilon_j \omega_j \rho} \sin \omega_j \rho; \\ \bar{\omega}_j &= \omega \sqrt{1 - \varepsilon_j^2}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где $0 < \varepsilon_j < 1$ ($j = 1, 3, 5, 7$),

$$w_h(\rho) = \sigma_h \sqrt{2\alpha_h} e^{-\alpha_h \rho} \quad (h = \overline{1, 4}). \quad (16)$$

Для расчета уклонения одномерного распределения информационных переменных X_1 и X_2 от гауссового обычно или составляются уравнения для начальных α_r и центральных μ_r моментов r -го порядка, или непосредственно используются известные формулы [7, 8]:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r^{\dot{x}} &= \alpha_{r_1, \dots, r_n}^{\dot{x}} = i^{-r} \left[\frac{\partial^r g_1^{\dot{x}}(\lambda)}{\partial \lambda_1^{r_1} \dots \partial \lambda_n^{r_n}} \right]_{\lambda=0}; \\ \mu_r^{\dot{x}} &= \mu_{r_1, \dots, r_n}^{\dot{x}} = i^{-r} \left[\frac{\partial^r}{\partial \lambda_1^{r_1} \dots \partial \lambda_n^{r_n}} e^{-i\lambda^T m^{\dot{x}}} g_1^{\dot{x}}(\lambda) \right]_{\lambda=0}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_n]^T$; $r_1 + \dots + r_n = r$, $r = 1, 2, \dots$

Для производной информационной переменной X_2^0 выберем в качестве меры уклонения распределения от гауссового две безразмерные величины: асимметрию γ_1 и эксцесс γ_2 . Тогда будем иметь следующие расчетные формулы:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}; \quad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3, \quad (18)$$

где в силу (17)

$$\mu_r = \mu_r^{\dot{x}_2} = (i)^{-r} \left[\frac{dg_1^r(\lambda)}{d\lambda^r} \right]_{\lambda=0} \quad (r = 2, 3, 4); \quad (19)$$

$$g_1(\lambda) = g_1^{\dot{x}_2}(\lambda) = \exp \left\{ \sum_{j=1,3,5,7} \int_0^\infty \chi^{V_j}(w_j(\rho)\lambda) d\rho \right\}. \quad (20)$$

Замечание 3. Выражения (10)–(20) лежат в основе информационных ресурсов по проблеме «Статистическая динамика вращения Земли».

Тестовый пример 1. Формулы (13)–(15), (17), (18) для независимых гауссовых белых шумов V_j ($j = 1, 3, 5, 7$), когда

$$\chi^{V_j}(\mu) = -\frac{1}{2} \mu^2 G^V \quad \left(G^V = \sum_{j=1,3,5,7} G_j^V \right),$$

принимают вид

$$g_1(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{2j} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} I_{2j} &= \int_0^\infty w_j^2(\rho) d\rho; \\ \mu_1 = \mu_3 &= 0; \quad \mu_2 = \sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{2j}; \\ \mu_4 &= 3\mu_2^2; \quad \gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Таким образом, смесь гауссовых «окрашенных» процессов Z_h в уравнениях (1)–(3) приводит к суммарному гауссову процессу. При этом из формул (21) для дисперсии μ_2 вытекает следующее условие эквивалентной замены «окрашенных» гауссовых процессов с весовыми функциями $w_j(\rho)$ одним гауссовым «окрашенным» процессом с весовой функцией $w^\ominus(\rho)$:

$$\left. \begin{aligned} G^\ominus I_2^\ominus &= \sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{2j}; \\ I_2^\ominus &= \int_0^\infty [w^\ominus(\rho)]^2 d\rho. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Тестовый пример 2. Для независимых простых пуассоновых шумов V_j ($j = 1, 3, 5, 7$), когда

$$\chi^{V_j}(\mu) = (e^{i\mu} - 1) G_j^V,$$

находим

$$\left. \begin{aligned} g_1(\lambda) &= \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1,3,5,7} \int_0^\infty \left(e^{iw_j(\rho)\lambda} - 1 \right) G_j^V d\rho \right\}; \\ \mu_1 = \mu_3 &= 0; \quad \mu_2 = \sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{2j}; \\ \mu_4 &= \sum_{j=1,3,5,7} \left[G_j^V I_{4j} + 3(G_j^V I_{2j})^2 \right]; \\ I_{4j} &= \int_0^\infty w_j^4(\rho) d\rho; \\ \gamma_1 &= 0; \quad \gamma_2 = \frac{\sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{4j}}{\left(\sum_{j=1,3,5,7} G_j^V I_{2j} \right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Таким образом, «окрашенное» стационарное негауссово распределение (23) будет симметричным ($\gamma_1 = 0$) с положительным эксцессом $\gamma_2 > 0$. При одинаковых шумах $V_j = V$, $G_j^V = G^V$ и одинаковых ФФ $w_j(\rho) = w(\rho)$ получаем

$$\gamma_2 = \frac{I_4}{4G^V I_2^2} < \frac{\varepsilon\omega}{4G^V}.$$

Отсюда видно, что с ростом интенсивности G^V «окрашенный» пуассонов процесс Z_h стремится к гауссовому. Как следует из формул (21) и (23), дисперсии совпадают $\mu_2^\Gamma = \mu_2^\Pi$, а условием эквивалентности будет условие (22).

Тестовый пример 3. Для широкополосных гауссовых шумов единичной интенсивности имеем

$$\left. \begin{aligned} \chi^{V_h}(\mu) &= -\frac{\mu^2}{2}; \\ g_1(\lambda) &= \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1}^4 \sigma_j^2 \right\}; \\ \mu_1 = \mu_3 &= 0; \quad \mu_2 = \sum_{j=1}^4 \sigma_j^2; \quad \mu_4 = 3\mu_2^2; \\ \gamma_1 &= 0; \quad \gamma_2 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Тестовый пример 4. В случае простых пуассоновых шумов для широкополосных флуктуаций находим

$$\left. \begin{aligned}
 & \chi^{V_h}(\mu) = (e^{i\mu} - 1); \\
 & g_1(\lambda) = \\
 & = \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{h=1}^4 \int_0^\infty (e^{i\omega_h(\rho)\lambda} - 1) d\rho \right\}; \\
 & \mu_1 = \mu_3 = 0; \quad \mu_2 = \sum_{h=1}^2 \sigma_h^2; \quad \mu_4 = 2 \sum_{h=1}^4 \sigma_h^4; \\
 & \gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = \frac{\sum_{h=1}^4 \sigma_h^4}{2 \left(\sum_{h=1}^4 \sigma_h^2 \right)^2}.
 \end{aligned} \right\} (24)$$

Из (24) видно, что при одинаковых процессах $Z_h = Z$, когда $\sigma_h = \sigma$, имеет место $\gamma_2 = 1/8$.

4 Линейные спектрально-корреляционные методы построения информационных моделей неравномерности вращения Земли. Тестовые примеры

В этом случае уравнения (8) и (9) при $\Delta M_0^{SL} \equiv \equiv 0$, если вместо векторных переменных X и Y ввести объединенные векторы $\bar{X} = [X^T Y^T]^T$, $\bar{X}_0 = [X_0^T Y_0^T]^T$ и блочные матрицы $\bar{a}_0, \bar{a}, \bar{b}$,

$$\bar{a}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}; \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$

принимают вид

$$\dot{\bar{X}} = \bar{a}_0 + \bar{a}\bar{X} + \bar{b}V. \quad (25)$$

Тогда в соответствии с теорией линейных стохастических систем (СтС) [7, 8] будем иметь следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{m} = \bar{a}_0 + \bar{a}m; \quad m(t_0) = \bar{m}_0; \quad (26)$$

$$\dot{\bar{K}} = \bar{a}\bar{K} + k\bar{a}^T + \bar{b}G^V\bar{b}^T; \quad \bar{K}_0(t_0) = \bar{K}_0; \quad (27)$$

$$\frac{\partial \bar{K}(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \bar{K}(t_1, t_2)\bar{a}(t_2)^T;$$

$$\bar{K}(t_1, t_1) = \begin{cases} \bar{K}(t_1) & \text{при } t_1 < t_2; \\ \bar{K}(t_2, t_1)^T & \text{при } t_1 > t_2. \end{cases} \quad (28)$$

Здесь $\bar{m} = \bar{m}(t)$, $\bar{K} = \bar{K}(t) = [k_{ij}(t)]$ и $\bar{K}(t_1, t_2) = [K_{ij}(t_1, t_2)]$ — вектор математических ожиданий $\bar{X} = \bar{X}(t)$, ковариационная матрица и матрица ковариационных функций соответственно; G^V — матрица интенсивностей белого шума $V = [V_1 V_2 V_3 V_4]^T$.

Замечание 4. Линейная корреляционная дифференциальная модель (26)–(28) лежит в основе прямого компьютерного аналитического моделирования линейных флуктуаций неравномерности вращения Земли в составе информационных ресурсов по проблеме «Статистическая динамика вращения Земли».

Замечание 5. Далее в качестве основных исходных линейных стохастических уравнений будут использоваться уравнения (30). При этом черта над соответствующими величинами для краткости будет опускаться.

Тестовый пример 5. Уравнение (26) для математических ожиданий информационных X_1, X_2 и инструментальных $X_3 = Z_1, X_5 = Z_2, X_7 = Z_3, X_9 = Z_4$ переменных для моментов $t \gg t_0$ приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_1 &= m_2; \quad \dot{m}_2 = M_0^S(t) + M_0^L(t); \\
 m_h^z &= 0 \quad (h = \overline{1, 4}).
 \end{aligned}$$

Эта задача изучена в [1, 2]. Для рассматриваемых интервалов времени, как следует из (26)–(28), корреляционные характеристики не зависят от характеристик гармонических возмущений $M_0^S(t)$ и $M_0^L(t)$. Дифференциальные уравнения (27) для инструментальных переменных приводят к конечным уравнениям для дисперсий и ковариаций вследствие стационарности процессов $Z_h = Z_h(t)$ ($h = \overline{1, 4}$), а уравнения (28) — к обыкновенным дифференциальным уравнениям для ковариационных функций относительно разности времен $\tau = t_1 - t_2$. В последнем случае вместо постоянных интенсивностей G_h используют спектральные плотности $s_h^V(\omega) = G_h/(2\pi)$ и $s^x(\omega) = [s_{ij}^x(\omega)]$ шумов V_h и переменных X_i ($i = \overline{1, 10}$).

Тестовый пример 6. Построим приближенную аналитическую корреляционную модель гравитационно-приливных флуктуаций, вызванную воздействием стационарного «окрашенного» возмущения $Z_1 = X_3$. Из уравнений (27) для переменных X_3 и X_4 находятся следующие выражения для стационарных значений дисперсий и ковариации:

$$\left. \begin{aligned}
 & k_{34}^* = 0; \quad k_{33}^* = \frac{G_1}{4\varepsilon_1\omega_1^3}; \\
 & k_{44}^* = \frac{G_1}{4\varepsilon_1\omega_1} \quad (G_1^V = G_1).
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Уравнения для дисперсий и ковариаций переменных X_2 , X_3 и X_4 с учетом (29) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_{22} &= 2k_{23}^*; & k_{23}^* &= \frac{2\varepsilon_1 k_{33}^*}{\omega_1}; \\ k_{24}^* &= -k_{33}^* & &= -\frac{G_1}{4\varepsilon_1 \omega_1^3}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Уравнения (27) для переменных X_1, \dots, X_4 с учетом (29) и (30) приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_{11} &= 2k_{12}; & \dot{k}_{12} &= k_{22} + k_{13}; \\ \dot{k}_{13} &= k_{23}^* + k_{14}; \\ \dot{k}_{14} &= k_{24}^* - \omega_1^2 k_{13} - 2\varepsilon_1 \omega_1 k_{14}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Из (30) и (31) получаем искомые аналитические выражения для корреляционных характеристик флуктуационного дрейфа по информационным переменным X_1 и X_2 :

$$k_{22} = \Lambda_{22} t \quad \left(\Lambda_{22} = \frac{G_1}{2\omega_1^4} \right); \quad (32)$$

$$k_{11} = \frac{\Lambda_{22}}{3} t^3 + \Lambda_{13} t^2; \quad (33)$$

$$k_{12} = \frac{1}{2} \Lambda_{22} t^2 + \Lambda_{13} t \quad (\Lambda_{13} = k_{13}^*); \quad (34)$$

$$k_{13}^* = \frac{k_{24}^* + 2\varepsilon_1 \omega_1 k_{23}^*}{\omega_1^2}; \quad k_{14}^* = -k_{23}^*, \quad (35)$$

где k_{24}^* и k_{23}^* определяются формулами (30).

Из формул (32)–(34) следует, что при $t \gg t_0$ дисперсии $D_{\delta\varphi} = k_{11}$, $D_{\delta\dot{\varphi}} = k_{22}$ и ковариация $k_{\delta\varphi\delta\dot{\varphi}} = k_{12}$ информационных переменных $X_1 = \delta\varphi$ и $X_2 = \delta\dot{\varphi}$ растут во времени и могут быть ограничены только введением отрицательных обратных связей («возвращающих» сил) по переменным $\delta\varphi$ и $\delta\dot{\varphi}$. Таким образом, из-за отсутствия обратных связей «окрашенный» шум в виде флуктуаций Z_h ($h = \overline{1, 4}$) приводит к нестационарному эффекту — накапливающимся со временем флуктуационным дрейфам по $\delta\varphi$ и $\delta\dot{\varphi}$. Уравнения (29) и (30) можно использовать для установления эквивалентности воздействия гауссового (G_1^r) и негауссового (G_1^{nr}) белого шума для инструментальных переменных, а (32)–(35) — для инструментальных и информационных переменных.

5 Нелинейные методы вероятностного анализа распределений флуктуаций неравномерности вращения Земли. Тестовые примеры

Обобщением квазилинейных методов построения моделей [1–5] являются различные прибли-

женные методы, основанные на параметризации распределений [5, 7, 8]. Аппроксимируя одномерную характеристическую функцию $g_1(\lambda; t)$ и соответствующую плотность $f_1(x, t)$ известными функциями $g_1^*(\lambda; \theta)$ и $f_1^*(x; \theta)$, зависящими от конечномерного векторного параметра θ , сводим задачу приближенного определения одномерного распределения к выводу из уравнения для характеристических функций обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих θ как функцию времени.

Пусть $w(x)$ — некоторая плотность в r -мерном пространстве R^r , для которой существуют все моменты. Система пар полиномов $p_\nu(x)$ и $q_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) называется биортонормальной с весом $w(x)$, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) p_\nu(x) q_\mu(x) dx = \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \nu; \\ 1 & \text{при } \mu = \nu. \end{cases} \quad (36)$$

Система пар полиномов $p_\nu(x)$ и $q_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) называется биортогональной, если условие (36) выполняется только при $\mu \neq \nu$. Всякая биортогональная система пар полиномов $\{p_\nu(x), q_\nu(x)\}$ может быть сделана биортонормальной путем деления полиномов $p_\nu(x)$ и $q_\nu(x)$ соответственно на множители α_ν и β_ν , произведение которых равно интегралу (36) при соответствующем ν и $\mu = \nu$. Когда $q_\nu(x) \equiv p_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$), условие (36) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) p_\nu(x) p_\mu(x) dx = \delta_{\nu\mu}. \quad (37)$$

В этом случае система полиномов $\{p_\nu(x)\}$ ортонормальна, если она удовлетворяет условию (37) при всех ν и μ , и ортогональна, если она удовлетворяет условию (37) только при $\mu \neq \nu$. Всякая ортогональная система полиномов $\{p_\nu(x)\}$ может быть нормирована путем деления $p_\nu(x)$ на корень квадратный из интеграла (37) при соответствующем ν и $\mu = \nu$. Существование всех моментов плотности $w(x)$ необходимо и достаточно для существования всех интегралов (36) и (37).

Плотность $w(x)$ для построения ее ортогонального разложения удобно выбирать так, чтобы ее вероятностные моменты первого и второго порядков совпадали с соответствующими моментами плотности $f(x)$ случайного вектора X :

$$f(x) = w(x) \left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x) \right], \quad (38)$$

где

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)q_\nu(x) dx = Mq_\nu(X) = q_\nu(\alpha) = \left[q_\nu \left(\frac{\partial}{i\partial\lambda} \right) g(\lambda) \right]_{\lambda=0}. \quad (39)$$

Формула (38) описывает ортогональное разложение плотности $f(x)$. Конечным отрезком этого разложения можно практически пользоваться для приближенного представления $f(x)$ даже тогда, когда $f(x)$ не имеет моментов выше некоторого порядка. В этом случае достаточно заменить распределение $f(x)$ усеченным распределением

$$f_D(x) = \frac{f(x)\mathbf{1}_D(x)}{\int_D f(x) dx},$$

аппроксимирующим $f(x)$ с достаточной точностью, и затем аппроксимировать $f_D(x)$ отрезком ряда (38). Ограничиваясь в (38) полиномами не выше N -й степени, получим приближенную формулу для плотности $f(x)$:

$$f(x) \approx f^*(x) = w(x) \left[1 + \sum_{k=3}^N \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x) \right]. \quad (40)$$

Функция $f^*(x)$, аппроксимирующая плотность $f(x)$, полностью определяется вероятностными моментами случайной величины до N -го порядка включительно. При этом моменты функции $f^*(x)$ до N -го порядка включительно совпадают с соответствующими моментами величины X :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)q_\mu(x) dx = c_\mu = q_\mu(\alpha) \quad \text{при} \quad |\mu| \leq N.$$

Таким образом, математические ожидания всех полиномов $q_\nu(X)$ не выше N -й степени, вычисленные с помощью аппроксимирующей функции $f^*(x)$, совпадают с математическими ожиданиями соответствующих полиномов $q_\nu(X)$, вычисленными с помощью истинной плотности $f(x)$. А так как полиномы $q_\nu(x)$ любой данной степени ν линейно независимы и число их совпадает с числом моментов ν -го порядка, то из совпадения математических ожиданий полиномов $q_\nu(X)$ следует и совпадение моментов функции $f^*(x)$ и плотности $f(x)$ до N -го порядка включительно. Что касается моментов высших порядков аппроксимирующей функции $f^*(x)$, то они выражаются через моменты до N -го порядка включительно из уравнений

$$q_\mu(\alpha^*) = 0 \quad \text{при} \quad |\mu| > N.$$

Для дальнейшего изложения понадобятся следующие формулы, выражающие моменты случайной величины X до N -го порядка через коэффициенты приближенного выражения (40) ее плотности:

$$\alpha_{k_1, \dots, k_r} = \alpha_{k_1, \dots, k_r}^w + \sum_{k=1}^N \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_{\nu, k_1, \dots, k_r}(\alpha^w) \quad (k_1, \dots, k_r = 0, 1, \dots, N; k_1 + \dots + k_r = \overline{3, N}), \quad (41)$$

где верхним индексом w отмечены моменты плотности $w(x)$,

$$p_{\nu, k_1, \dots, k_r}(x) = x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} p_\nu(x), \quad (42)$$

а $p_{\nu, k_1, \dots, k_r}(\alpha^w)$ получается из $p_{\nu, k_1, \dots, k_r}(x)$ так же, как $q_\nu(\alpha)$ из $q_\nu(x)$ в (39), т.е. заменой всех одночленов $x_1^{h_1} \dots x_r^{h_r}$ соответствующими моментами $\alpha_{h_1, \dots, h_r}^w$ плотности $w(x)$. Формулы (41) с учетом (42) позволяют вычислять моменты величины X до N -го порядка включительно через моменты плотности $w(x)$ и коэффициенты приближенного представления $f^*(x)$ плотности $f(x)$ величины X .

Замечание 6. Функции $p_\nu(x)$ и $q_\nu(x)$ не обязательно должны быть полиномами. Они могут быть любыми функциями, удовлетворяющими условию биортонormalности и условию существования всех интегралов (39). Все сказанное о разложении (38) справедливо и в этом более общем случае. Однако если функции $q_\nu(x)$ не являются полиномами, то, несмотря на совпадение моментов первого и второго порядков распределений $w(x)$ и $f(x)$, коэффициенты c_ν не будут равны нулю при $|\nu| = 1$ и 2 , вследствие чего суммирование по k в (38) будет начинаться с $k = 1$.

Тестовый пример 7. Биортогональной системой полиномов, построенной с помощью нормального распределения с нулевым математическим ожиданием, является система полиномов Эрмита $\{H_\nu(x), G_\nu(x)\}$ [7, 8]:

$$p_\nu(x) = \frac{1}{\nu_1! \dots \nu_r!} H_\nu(x - m);$$

$$q_\nu(x) = G_\nu(x - m).$$

В этом случае формула (40) принимает следующий вид:

$$f(x) \approx f^*(x) = w^N(x) \left[1 + \sum_{k=3}^N \sum_{|\nu|=k} \frac{c_\nu H_\nu(x - m)}{\nu_1! \dots \nu_r!} \right],$$

где

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G_\nu(x-m)dx =$$

$$MG_\nu(X-m) = G_\nu(\mu);$$

$G_\nu(\mu)$ — линейная комбинация центральных моментов X , полученная в результате замены каждого одночлена вида $(X_1 - m_1)^{h_1} \dots (X_r - m_r)^{h_r}$ соответствующим моментом μ_{h_1, \dots, h_r} . При этом все моменты (как начальные, так и центральные) функции $f^*(x)$, аппроксимирующей плотность $f(x)$, до порядка N включительно совпадают с соответствующими моментами плотности $f(x)$, а моменты высших порядков функции $f^*(x)$ выражаются через моменты до порядка N из соотношений

$$G_\nu(\mu^*) = 0 \text{ при } |\nu| > N,$$

где звездочкой отмечены моменты функции $f^*(x)$.

Коэффициенты c_ν при $H_\nu(x-m)/(\nu_1! \dots \nu_r!)$ в разложении плотности $f(x)$ по полиномам Эрмита называются квазимоментами случайной величины X . Число $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_r$ называется порядком квазимомента c_ν . Квазимомент порядка ν представляет собой линейную комбинацию центральных моментов до порядка ν включительно.

Тестовый пример 8. В качестве других тестовых примеров могут быть выбраны распределения, параметризуемые посредством канонических разложений с независимыми компонентами [8].

6 Моментные методы построения нелинейных информационных моделей неравномерности вращения Земли. Тестовый пример

Нелинейная негауссова система (8) и (9) в переменных $\bar{X} = [X^T Y^T]^T$ и блочных матрицах

$$\bar{\varphi}(\bar{X}, t) = \begin{bmatrix} \bar{a}_0 + \bar{a}\bar{X} + \bar{\varphi}(\bar{X}, t) \\ \alpha Y \end{bmatrix};$$

$$\bar{\psi}(\bar{X}, t) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\psi}(\bar{X}, t) \\ 0 & \beta \end{bmatrix};$$

$$\bar{\varphi}(\bar{X}, t) = \Delta M_0^{SL}(\bar{X}, t);$$

$$\bar{\psi}(\bar{X}, t)V = \Delta M^{SL}(\bar{X}, t) - M_0^{SL}(\bar{X}, t),$$

может быть записана в виде

$$\dot{\bar{X}} = \bar{\varphi}(\bar{X}, t) + \bar{\psi}(\bar{X}, t)V. \quad (43)$$

В соответствии с замечанием 2 опустим далее черту в (44) и (45).

Предположим, что параметр θ , от которого зависят функции $g_1^*(\lambda; \theta)$ и $f_1^*(x; \theta)$, аппроксимирующие одномерную характеристическую функцию $g_1(\lambda; t)$ и соответствующую плотность $f_1(x; \theta)$, представляет собой совокупность моментов вектора X_t до определенного порядка N включительно. В качестве аппроксимирующей плотности $f_1(x; t)$ функции $f_1^*(x; \theta)$ удобно взять конечный отрезок ее ортогонального разложения вида (38):

$$f_1(x; t) \approx f_1^*(x; \theta) = w_1(x) \left[1 + \sum_{l=3}^N \sum_{|\nu|=l} c_\nu p_\nu(x) \right]. \quad (44)$$

Здесь коэффициенты c_ν — линейные комбинации моментов случайного вектора X_t до порядка N включительно:

$$c_\nu = q_\nu(\alpha) \quad (\nu_1, \dots, \nu_n = \overline{0, 1, N}; |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n = \overline{3, N}). \quad (45)$$

При этом $q_\nu(\alpha)$ представляет собой результат замены всех одночленов $x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}$ в выражении полинома $q_\nu(y)$ соответствующими моментами α_{r_1, \dots, r_n} . Коэффициенты полиномов $p_\nu(x)$ и $q_\nu(x)$ в общем случае зависят от моментов первого и второго порядка вектора X_t , поскольку плотность $w_1(x)$ в (44) имеет те же моменты первого и второго порядка, что и $f_1(x; t)$.

Для нелинейной негауссовской СтС (43) основные уравнения для начальных моментов α_r имеют вид [7, 8]

$$\dot{\alpha}_r = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial(i\lambda_n)^{r_n}} [i\lambda^T \varphi(x, t) + \chi(\psi(x, t)^T \lambda; t)] e^{i\lambda^T x} \right\}_{\lambda=0} f_1^*(x; \theta) dx. \quad (46)$$

Интегрируя систему уравнений (46) при начальных условиях

$$\alpha_r(t_0) = \alpha_r^0 \quad (r_1, \dots, r_n = \overline{0, 1, N}; |r| = \overline{1, N}),$$

найдем все координаты вектора θ как функции времени t (α_r^0 — моменты начального значения X_0 вектора X_t при $t = t_0$).

Замечание 7. Уравнения (46) линейны относительно моментов α_r выше второго порядка, $|r| = 3, \dots, N$, и нелинейны относительно моментов первого и

второго порядка, поскольку плотность $w_1(x)$ и коэффициенты полиномов $p_\nu(x)$ и $q_\nu(x)$ зависят от моментов первого и второго порядка.

Замечание 8. При составлении уравнений (46) в конкретных задачах полезно иметь в виду, что число Q_n^r моментов r -го порядка, а также полное число моментов порядка, не превосходящего N , для n -мерного случайного вектора определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} Q_{1n}^r &= C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}; \\ Q_{2n}^N &= \sum_{r=1}^N Q_{1n}^r = C_{N+n}^N - 1 = \frac{(N+n)!}{N!n!} - 1. \end{aligned} \right\} (47)$$

Для нелинейной негауссовой системы (46) дифференциальные уравнения метода центральных моментов для m_t , K_t и μ_r могут быть записаны в следующем виде [7, 8]:

$$\dot{m}_h = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x; t) f_1^*(x, \theta) dx \quad (h = \overline{1, p}),$$

$$\dot{\mu}_r = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{|r|-1}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial(i\lambda_n)^{r_n}} [i\lambda^T \varphi(x, t) + \chi(\psi(x, t)^T \lambda; t)] e^{i\lambda^T(x-m)} \right\}_{\lambda=0} f_1^*(x; \theta) dx - \sum_{h=1}^n r_h \mu_{r-e_h} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_h(x, t) f_1^*(x; \theta) dx$$

$$(r_1, \dots, r_n = \overline{0, 1, N}; |r| = \overline{2, N}),$$

где e_s — вектор, все компоненты которого равны 0, кроме s -й, равной 1. Начальными условиями для (46) являются

$$m(t_0) = m_0; \quad \mu_r(t_0) = \mu_r^0 \quad (r_1, \dots, r_n = \overline{0, 1, N}; |r| = \overline{2, N}).$$

Основной трудностью практического применения методов моментов является быстрый рост числа уравнений с увеличением размерности вектора

$\bar{X} = [X^T Y^T]^T$. В соответствии с формулами (47) в табл. 1 показана зависимость числа уравнений для параметров одномерного распределения от порядка момента Q и размерности \bar{n}_x .

Квазилинейным методам отвечает строчка, соответствующая $Q = 2$. В [7, 8] описаны известные методы сокращения числа уравнений. В нашем случае вследствие фильтрующих свойств ФФ (4) и (5) смешанные моменты нелинейных возмущений ΔM^{SL} приближенно вычисляются через дисперсии и ковариации нормальных векторных случайных процессов [7, 8].

Как показано в [7, 8], для определения двух и других многомерных распределений могут быть использованы моментные параметризационные методы. Для расчетов числа уравнений можно использовать формулы (47) с заменой n на $n\bar{n}_x$.

Тестовый пример 9. В качестве тестового примера может быть выбран пример 3 из [3, 2] в случае нелинейного рэлеевского механизма диссипации. В качестве других тестовых примеров выбраны примеры 7.1.1, 7.1.6, 7.1.7 и 7.2.2 из [7].

7 Заключение

1. В силу известного линейного соотношения между $\delta\dot{\varphi}(t)$ и длительностью суток (l.o.d.(t)) [9]

$$\text{l.o.d.}(t) = -\frac{86400}{r_*} \delta\dot{\varphi}(t)$$

полученные в разд. 1–6 результаты обобщаются и на l.o.d.(t).

2. Для эредитарных возмущений $M^S(t)$, $M^l(t)$, ядра которых допускают аппроксимацию линейными дифференциальными уравнениями, соответствующие результаты для $t \ll t_0$ получаются путем расширения вектора состояния и составления линейных уравнений для эредитарных ядер [6–8].
3. Нелинейные вероятностные методы позволяют строить как стационарные, так и нестационарные негауссовы информационные модели флуктуаций. В отличие от квазилинейных

Таблица 1 Зависимость числа уравнений для параметров одномерного распределения

Q	\bar{n}_x									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65
4	4	14	34	69	125	209	329	494	714	1000
6	6	27	83	209	461	423	1715	3002	5004	8007
8	8	44	164	494	1286	3002	6434			
10	10	65	1000	3002	8007					

методов [2], нелинейные методы позволяют повысить точность построения до 0,1%–0,01%. Эта задача очень важна для оценок больших уклонений.

Полученные в разд. 1 уравнения, а также выражения для одно- и многомерных распределений совместно с уравнениями для функций чувствительности определяющих параметров положены в основу компьютерной модели в среде MATLAB. Она включена в состав информационных ресурсов по фундаментальной проблеме «Статистическая динамика вращения Земли». Проведенные вычислительные эксперименты методом статистического моделирования подтверждают основные свойства полученных аналитических информационных моделей неравномерностей вращения Земли.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-07-00031) и программы ОНИТ РАН «Информационные технологии и методы анализа сложных систем» (проект 1.5).

Литература

1. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Корреляционная модель приливной неравномерности вращения Земли // ДАН, 2008. Т. 419. № 3. С. 338–341.
2. Сеницын И. Н. Квазилинейные методы построения информационных моделей флуктуаций неравномерности вращения Земли // Информатика и её применения, 2008. Т. 2. Вып. 1. С. 35–43.
3. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Влияние «окрашенных» флуктуаций на неравномерности вращения Земли // ДАН, 2009. Т. 327. № 3. С. 1–4.
4. Сеницын И. Н. Построение эрдитарных и информационных моделей флуктуаций вращения Земли // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 2–7.
5. Сеницын И. Н. Стохастические модели флуктуаций движения Земли в условиях пуассоновых возмущений // Системы и средства информатики: Спец. вып. «Геоинформационные технологии». — М.: ИПИ РАН, 2004. С. 37–55.
6. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Одно- и многомерные распределения флуктуаций неравномерностей вращения Земли // ДАН, 2009. Т. 428. Вып. 5. С. 616–619.
7. Пугачёв В. С., Сеницын И. Н. Теория стохастических систем. 2-е изд. — М.: Логос, 2004.
8. Сеницын И. Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009.
9. Одуан К., Гино Б. Измерение времени. Основы GPS. — М.: Техносфера, 2002.

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ НА КАЧЕСТВО БИОМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПО ОТПЕЧАТКАМ ПАЛЬЦЕВ*

О. С. Ушмаев¹, А. Р. Арутюнян²

Аннотация: В статье проведен статистический анализ влияния упругих деформаций на качество распознавания по отпечаткам пальцев. Для анализа влияния деформаций используется механическая модель деформаций изображений отпечатков пальцев. Приведен численный метод решения и качественный анализ вычисленных деформаций отпечатков пальцев. Статистический анализ проводился на общедоступных дактилоскопических массивах.

Ключевые слова: дактилоскопическая идентификация; нелинейные деформации отпечатков пальцев

Введение

На сегодняшний день основными факторами, негативно влияющими на качество автоматической дактилоскопической идентификации, являются шумы, малые области пересечения отпечатков пальцев и нелинейные деформации отпечатков [1–4]. Малые области пересечения отпечатков являются скорее субъективным фактором, который устраняется путем обучения пользователей или операторов (для крупномасштабных автоматизированных идентификационных систем).

Для работы с зашумленными отпечатками используются различные методы и алгоритмы обработки изображений, инвариантные к этому негативному фактору. При этом использование схожего подхода для работы с деформированными отпечатками затруднено. На сегодняшний день абсолютное большинство технологий распознавания отпечатков не являются инвариантными к деформациям.

Присутствие деформаций обусловлено спецификой процесса сканирования отпечатков. Изначально трехмерный объект в области контакта со сканером становится плоским, а его поверхность, которая определяет конкретное изображение отпечатка пальцев, оказывается заведомо деформированной (рис. 1). В каждом приложении деформации могут быть различными из-за разницы в трении, силе и направлении прижатия, различной начальной точки контакта.

Целью настоящей статьи является оценка влияния деформаций на качество распознавания отпечатков пальцев.

В литературе известны следующие основные подходы к анализу деформаций. В [5] представ-

лен метод измерения деформации, основанный на так называемых «резиновых масках». В [6] применяются методы thin-plate splines (TPS) [7] к моделированию деформаций отпечатков пальцев. Однако результаты были в целом неудовлетворительны, так как по своим механическим свойствам пальцы сильно отличаются от металлической пластины. В [8, 9] предложен более мягкий аналог TPS. В [10] предложен систематический метод моделирования деформаций, основывающийся на эмпирическом разложении изображения отпечатка на неподвижную и подвижную зоны.

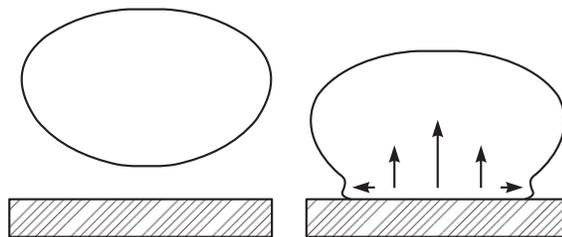


Рис. 1 Возникновение деформации отпечатков пальцев

Однако перечисленные подходы не позволяют установить влияние деформаций на качество распознавания, выраженное соотношением ошибок 1-го и 2-го рода. Это связано с тем, что данные работы направлены на априорное моделирование деформаций и в большинстве случаев не позволяют а posteriori установить, какая именно деформация привела к тому или иному искажению изображения (рис. 2).

Далее статья организована следующим образом. В разд. 1 приведена математическая модель деформаций отпечатков пальцев. Раздел 2 посвящен ка-

* Работа поддержана грантами РФФИ (проект 07-07-00031) и Программой ОНИТ РАН «Информационные технологии и методы анализа сложных систем». Работа выполнена в рамках НОЦ ИПИ РАН – ВМК МГУ «Биометрическая информатика».

¹ Институт проблем информатики Российской академии наук, oushmaev@ipiran.ru

² Институт безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, artem@ac.ibrae.ru

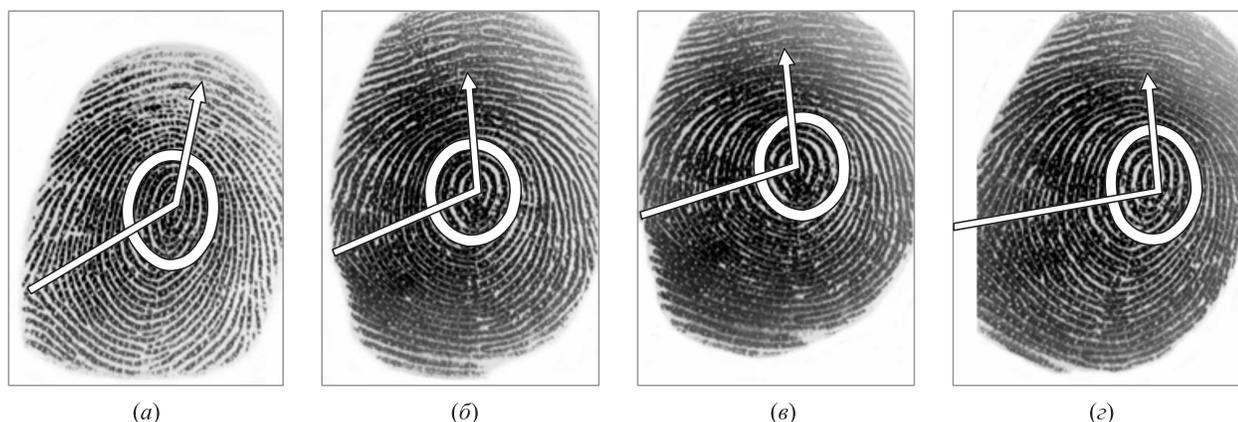


Рис. 2 Пример деформации изображения (стрелкой указано каноническое направление центра, линия соединяет центр и дельту)

чувственному анализу деформаций. В разд. 3 приведены результаты экспериментов. В разд. 4 исследовано влияние деформаций на прямое наложение изображений отпечатков пальцев.

1 Математическая модель упругих деформаций

Для оценки влияния деформаций используется механическая модель динамики деформации отпечатков пальцев, предложенная в [11].

Если рассматривать отпечаток пальца как упругий объект, то динамика его деформаций достаточно точно описывается следующим уравнением [12]:

$$L\mathbf{u}(x, y, z, t) = -\mathbf{f}(x, y, z), \quad (1)$$

где L — дифференциальный оператор

$$L = \mu \nabla^2 + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

\mathbf{u} — вектор смещений; \mathbf{f} — внешняя сила. Коэффициенты Ламе λ и μ могут быть выражены через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν по следующим формулам:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Вектор смещений задает отображение из одного состояния отпечатка в другое. Формально \mathbf{u} является отображением изображения на изображение.

Современные технологии сканирования отпечатка пальцев обычно фиксируют изображения в тот момент, когда палец неподвижен, т. е. действующие силы уже уравновесили напряжение, вызванное смещениями. Условиями окончания деформации является равенство нулю первых частных

производных смещений по времени. В таком случае уравнение (1) приводится к следующему виду:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) определяет деформацию отпечатка. Однако проблема решения уравнения (2) поставлена некорректно. Во-первых, не существует недеформированного состояния отпечатка, так как он изначально является следствием деформации трехмерного объекта в процессе сканирования (см. рис. 1). Во-вторых, действующие силы неизвестны. При этом не существует легко реализуемого способа их измерения.

В этой связи целесообразно рассматривать задачу апостериорного вычисления относительных деформаций отпечатков пальцев. А именно, если не существует недеформированного отпечатка и абсолютной деформации, предлагается решать задачу определения относительной деформации двух отпечатков $F I_1$ и $F I_2$. А именно задачу вычисления карты смещений $\mathbf{u}: F I_1 \rightarrow F I_2$.

Известно, что решение уравнения (2) минимизирует энергию, которая вычисляется как

$$E_0 = -A + E_d = - \int_S (u f_x + v f_y) dS + \frac{1}{2} \int_S (\varepsilon_1^1 \sigma_1^1 + \varepsilon_2^2 \sigma_2^2 + \varepsilon_3^3 \sigma_3^3) dS, \quad (3)$$

где f_x и f_y — соответствующие компоненты вектора действующих сил \mathbf{f} ; u и v — компоненты вектора смещений $\mathbf{u} = (u, v)$; ε_j^i и σ_j^i — компоненты тензоров натяжений и давлений, вычисляемых по следующим формулам:

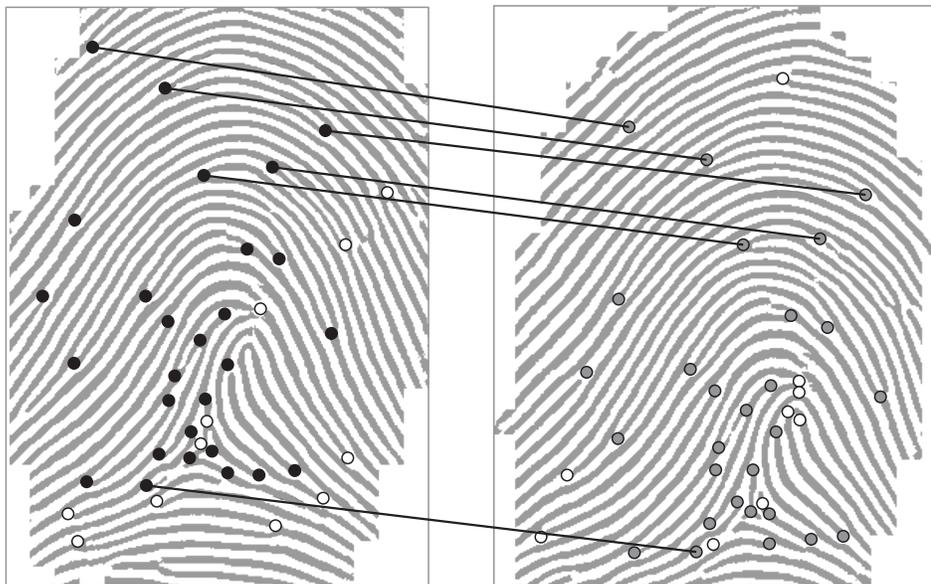


Рис. 3 Соответствие контрольных точек отпечатков пальцев

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix};$$

$\sigma =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_1^1 + \varepsilon_1^2) & \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_1^2 \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_2^1 & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^1) \end{pmatrix}$$

Часть энергии, связанная с действующими силами, не поддается непосредственной оценке. При этом для двух произвольных изображений одного отпечатка пальца можно найти соответствующие друг другу контрольные точки изображения (рис. 3), что потенциально дает информацию об общем направлении действующих сил.

Предположим, что соответствующие наборы контрольных точек заданы и обозначены через $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ соответственно. Тогда в качестве меры близости двух наборов контрольных точек можно рассматривать следующий квадратичный функционал невязки:

$$D(\mathbf{u}) = \sum (p_i + \mathbf{u}(p_i) - q_i)^2, \quad (4)$$

Качественно функционал (4) соотносится с работой действующих сил функционала энергии (3).

Действительно, если произошло смещение контрольной точки, то логично предположить, что в направлении смещения действуют внешние силы. Поэтому рассмотрим задачу минимизации следующего функционала, состоящего из собственной энергии деформации и регуляризирующей поправки (4) на невязку:

$$W(\mathbf{u}) = E_d(\mathbf{u}) + \alpha S(\mathbf{u}), \quad (5)$$

где α — весовой коэффициент.

Субъективно наилучшим решением является деформация, при которой контрольные точки совмещаются, т.е. функционал (4) обнуляется и, как следствие, находится в точке абсолютного минимума. Однако скорее всего такая точка не будет экстремумом (5) из-за возросшей энергии деформации. Таким образом, минимизация регуляризованного функционала дает не совсем оптимальное решение с субъективной точки зрения. Весовой коэффициент α регуляризирующей поправки определяет толерантность метода решения к предельной деформации.

Численное решение функционала (5) может быть найдено методом конечных элементов. Для объективной оценки качества деформаций может быть использовано прямое наложение изображений (с компенсацией деформаций и с компенсацией только движения). Примеры приведены на рис. 4. Контрастная часть результатов наложения указывает на резонанс папиллярных линий. Серая часть соответствует неточному наведению.

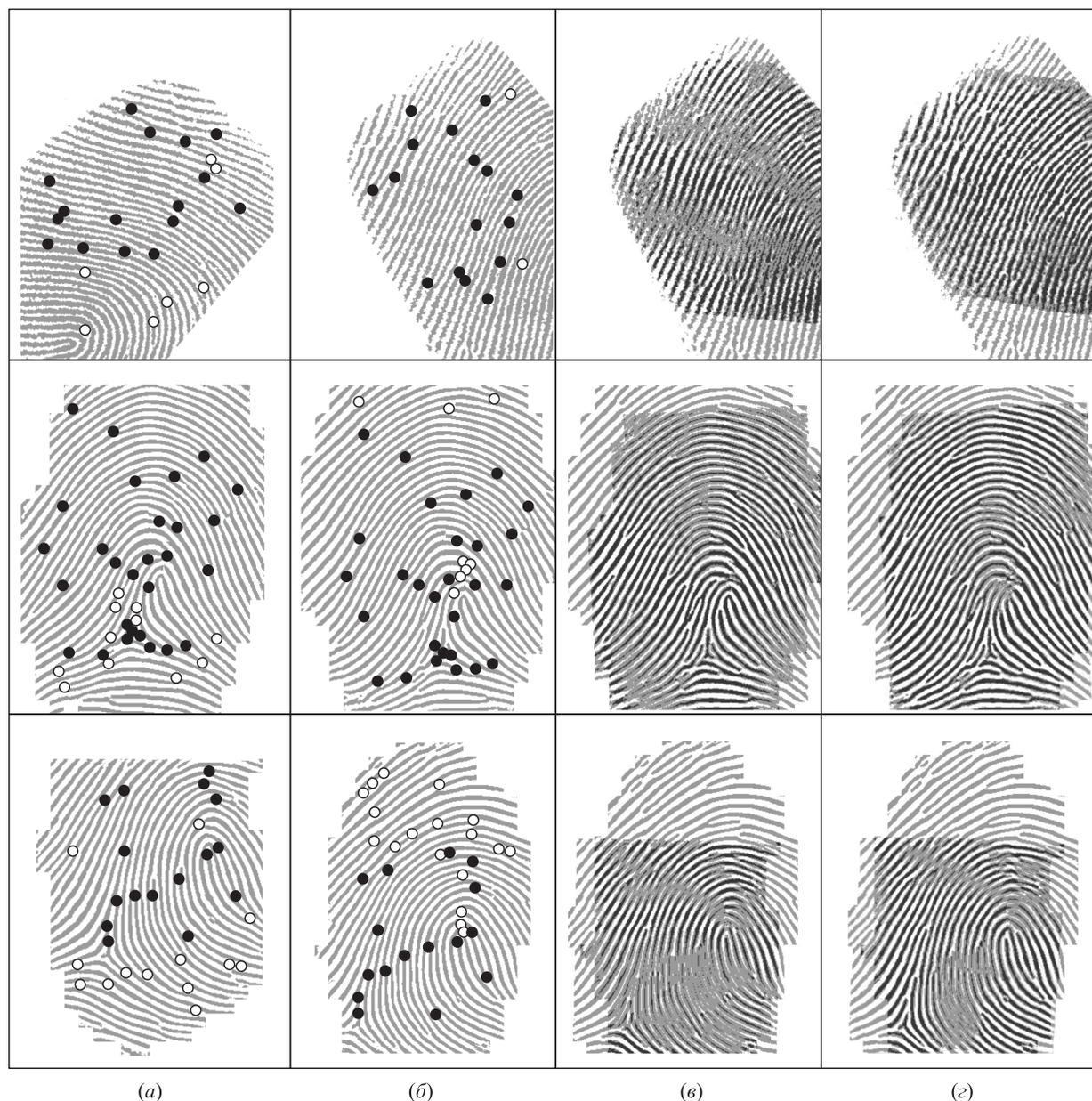


Рис. 4 Пример вычисления деформаций: (а) и (б) два изображения отпечатка; (в) прямое наложение при подгонке жестким движением; (г) прямое наложение после подгонки деформации

2 Структура деформаций

Для определения структуры деформаций проведем анализ численных решений уравнения (2). Для анализа использовались три базы данных FVC2002 [13], содержащие изображения с оптических и емкостных сканеров отпечатков пальцев. Каждая база содержит 8 образцов для 100 человек, т.е. для анализа деформаций всего доступно три набора по 2800 естественных деформаций отпечатков. Деформация является векторным полем на

плоскости, т.е. характеризуется двумя числами в узлах решетки дискретизации.

Основное уравнение (2) является линейным, поэтому над его решениями, т.е. деформациями, определены операции сложения и умножения на число. Также для деформаций можно определить операцию проекции друг на друга. В этой связи целесообразно изучать структуру деформаций путем проекции на основные деформации.

Основные деформации могут вычисляться как из качественных соображений [10] так и путем фор-

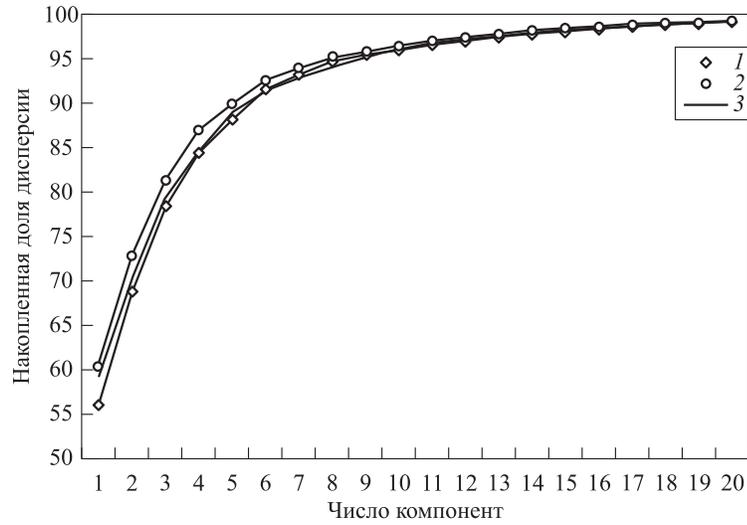


Рис. 5 Накопленная доля дисперсии главных компонент деформаций: 1 — DB1; 2 — DB2; 3 — DB4

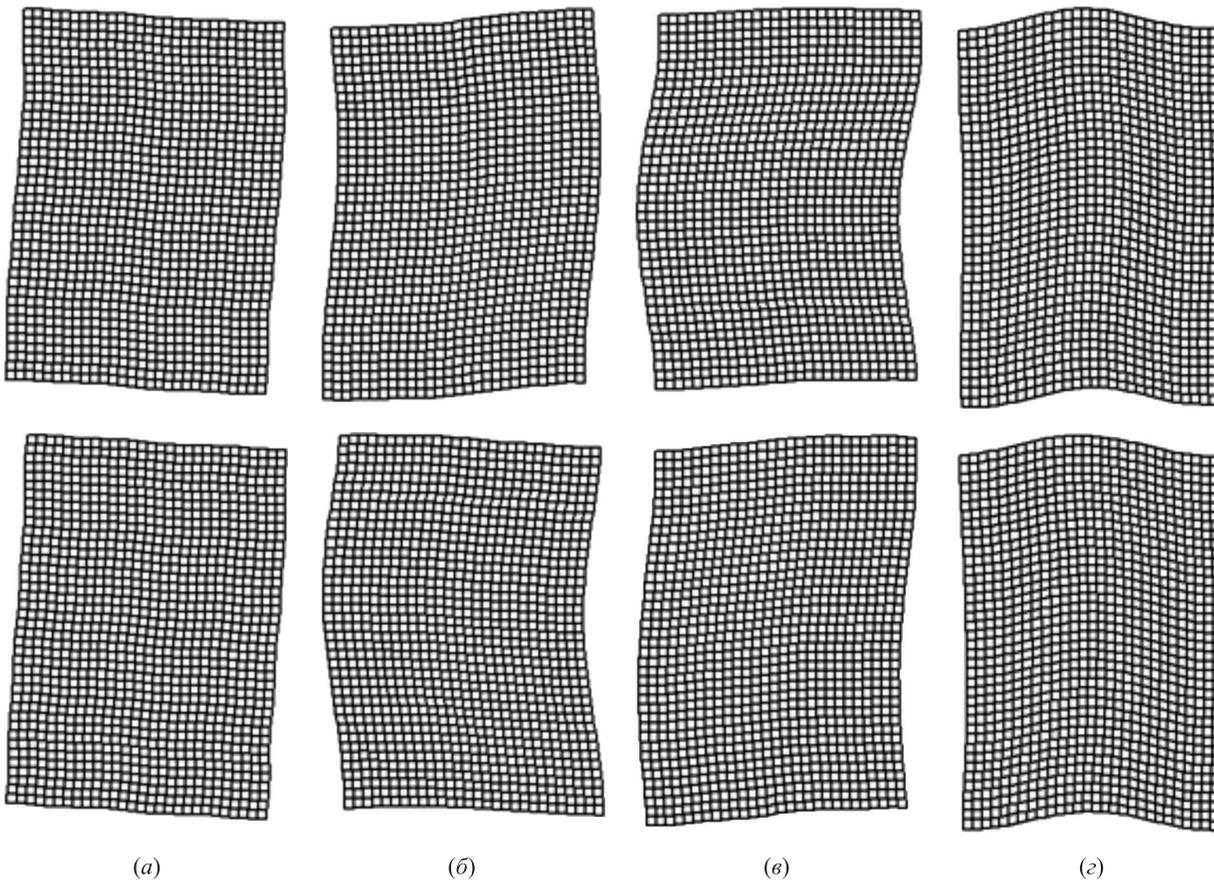


Рис. 6 Карта смещений главных компонент деформаций. Верхний ряд — база FVC2002 DB1, нижний ряд — FVC2002 DB2: (а) вращение; (б) кручение; (в) поперечное смещение; (г) продольное смещение

мального статистического анализа [14]. В настоящей статье будем исследовать характер деформаций методом разложения деформаций в пространстве главных компонент в частотной области.

На рис. 5 представлены данные по накопленной доле дисперсии главных компонент. Из рисунка видно, что первые десять главных деформаций практически без потерь приближа-

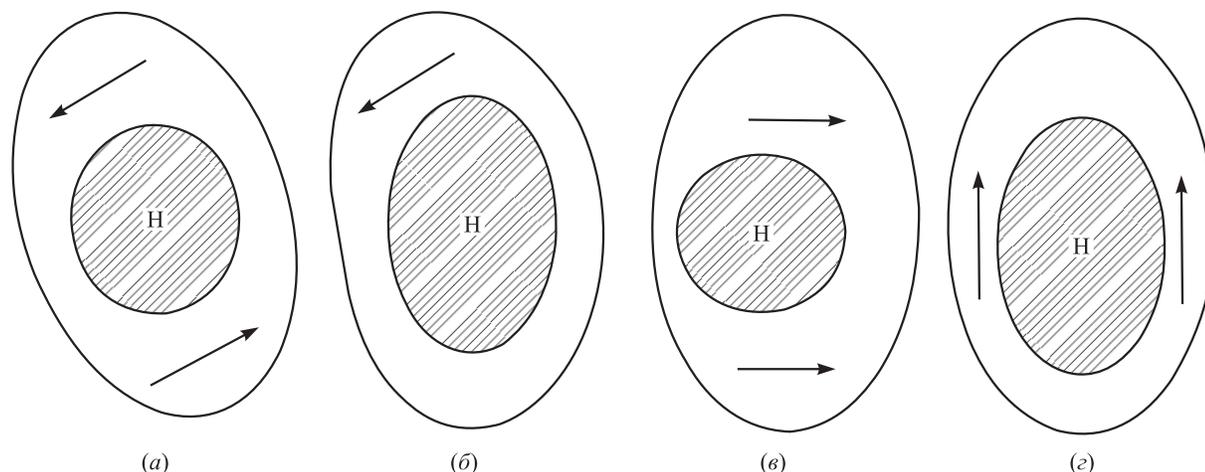


Рис. 7 Схематическое представления основных деформаций, «Н» — недеформированная область, стрелкой указаны основные смещения: (а) вращение; (б) кручение; (в) поперечное смещение; (г) продольное смещение

ют полученные численные решения для деформаций.

На рис. 6 представлены первые четыре главные деформации. Они допускают физическую интерпретацию. А именно, это вращение, кручение и два сдвига — продольный и поперечный. Соответствующие движения самого пальца схематично представлены на рис. 7. Такие деформации отвечают субъективному представлению об основных способах приложения пальца к сканеру.

3 Влияние на качество распознавания

Для анализа влияния на качество деформаций проведем следующие три эксперимента. В первом проведем эксперименты по оценке качества распознавания алгоритмов BioLink MST [15] для деформированных и недеформированных (после компенсации деформации методами разд. 1) отпечатков. Во втором и третьем рассмотрим изменение статистики двух основных объективных мер сходства отпечатков: среднего расстояния между контрольными точками и коэффициента прямого наложения.

Деформации можно корректно определить только для «своих»¹ сравнений, а именно можно сказать, что два изображения отпечатка одного и того же пальца могут быть трансформированы друг в друга картой смещений какой-то деформации. Но формально вычислительная схема разд. 1 применима в любых случаях, когда есть попарное соответ-

ствие контрольных точек, что вполне определено и для «чужих»² сравнений. Пример применения компенсации деформаций в «чужом» сравнении приведен на рис. 8.

Рассмотрим результаты экспериментов по сравнению качества распознавания BioLink MST на база FVC2002. На рис. 9 представлены гистограммы распределений меры сходства в «своих» и «чужих» сравнениях для экспериментов с компенсацией и без компенсации деформаций. Как видно из рисунков, наличие деформации приводит к сдвигу распределения в своих сравнениях в сторону меньших значений меры сходства, что подтверждает негативное влияние деформаций на качество распознавания.

Для численной оценки негативного эффекта применим метод нормальной аппроксимации искажающих факторов [16, 17], который предполагает разделение дисперсии меры сходства на дисперсию отдельных искажающих факторов. На рис. 10 показаны нормальные аппроксимации гистограмм рис. 9. Умеренные деформации (DB1) дают примерно 10-процентный вклад в дисперсию меры сходства в «своих» сравнениях и 5-процентный сдвиг среднего. При этом деформации ожидаемо не влияют на распределения в «чужих» сравнениях. При этом даже такие, на первый взгляд, незначительные изменения статистических параметров приводят к значительному изменению качества распознавания (рис. 11). На рис. 11 также приведены прогнозы ошибок при 50-процентном увеличении деформаций (эксперимент проводился путем применения к изображению отпечатка вычисленного поля направления деформации, умноженного на 1,5).

¹Когда два предъявленных для сравнения изображения являются изображениями отпечатков одного и того же пальца.

²Когда два предъявленных для сравнения изображения являются изображениями отпечатков разных пальцев.

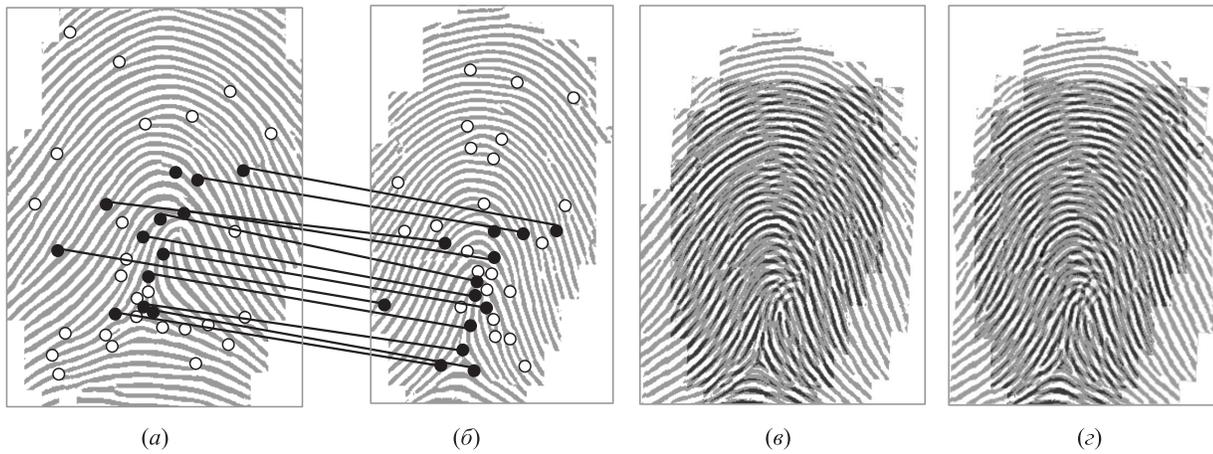


Рис. 8 Пример вычисления деформации в чужом сравнении: (а) и (б) изображения двух разных отпечатков (темными точками отмечены кластеры попарно соответствующих контрольных точек); (в) прямое наложение при подгонке жестким движением; (г) прямое наложение после подгонки деформации

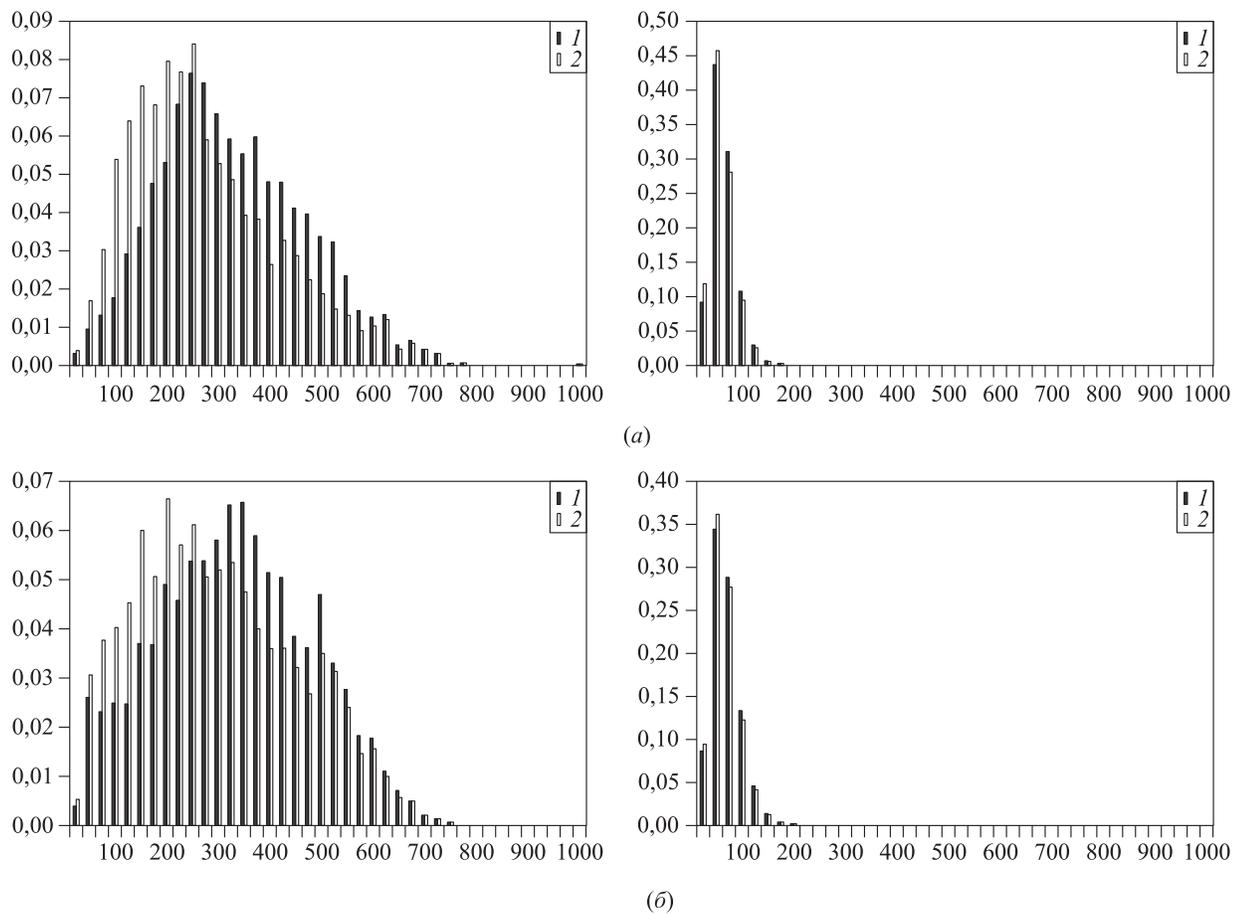


Рис. 9 Изменение гистограмм распределений меры сходства в «своих» (слева) и «чужих» (справа) сравнениях с компенсацией деформации (1) и без компенсации деформации (2): (а) FVC2002 DB1; (б) FVC2002 DB3

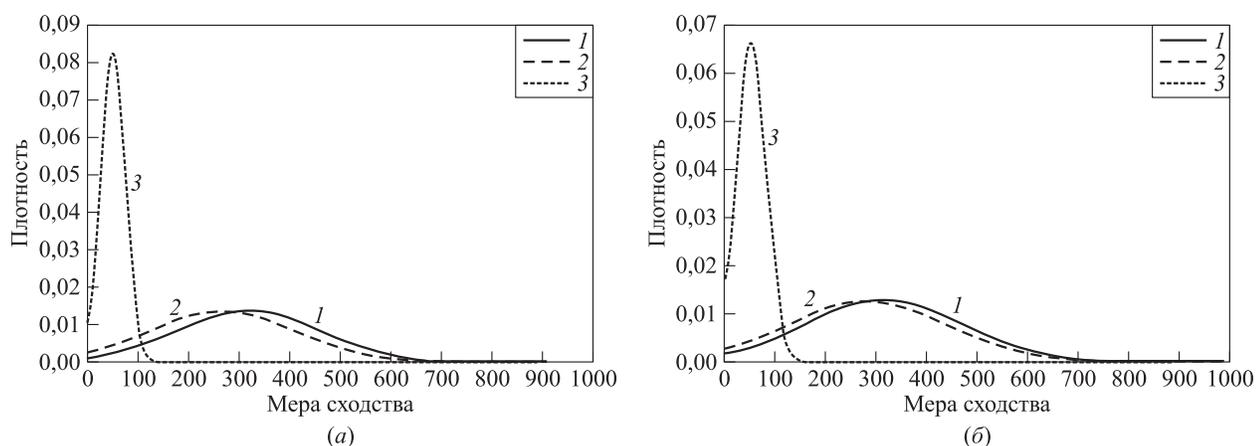


Рис. 10 Нормальная аппроксимация мер сходства (с компенсацией деформации (1); без компенсации деформации (2); чужие сравнения (3)): (а) FVC2002DB1; (б) FVC2002DB3

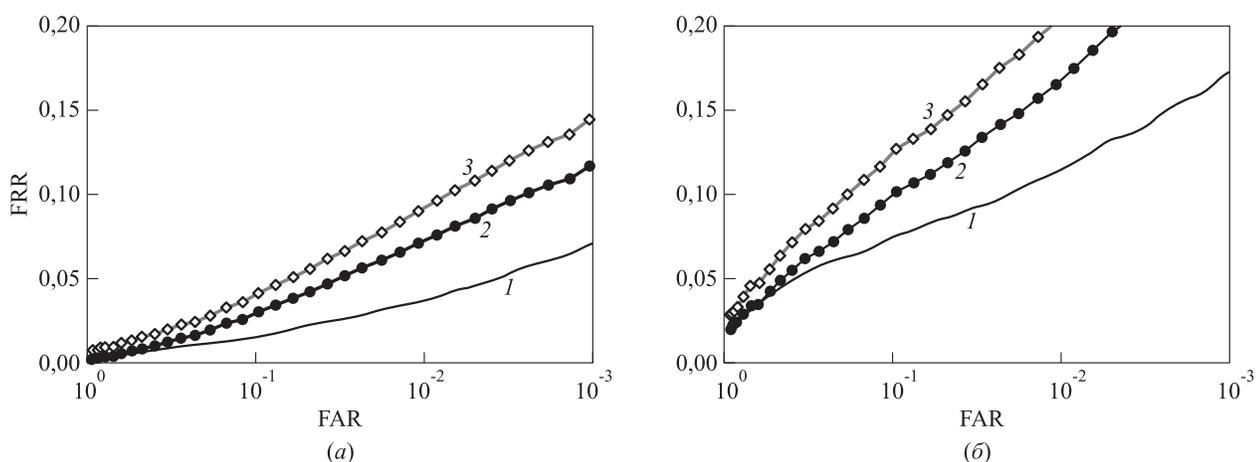


Рис. 11 Качество распознавания (без деформаций (1); с деформациями (2); с дополнительной деформацией (3)): (а) FVC2002 DB1; (б) FVC2002 DB3

4 Влияние на естественные меры сходства изображений

Как было отмечено в разд. 3, естественными мерами сходства двух изображений отпечатков пальцев является среднее расстояние между контрольными точками и изменение коэффициента прямого

наложения. В табл. 1 представлены результаты измерений на двух тестовых базах FVC2002.

Как видно из табл. 1, компенсация деформаций значительно влияет на абсолютные значения коэффициента прямого наложения. Расстояние между контрольными точками уменьшается и для своих, и для чужих сравнений в силу характера регуляри-

Таблица 1 Изменение мер сходства изображений после устранения деформаций

Тестовая база	Изменение среднего расстояния между контрольными точками (пикселей)		Коэффициент прямого наложения (относительное изменение, %)		Коэффициент прямого наложения (абсолютное изменение)	
	свои	чужие	свои	чужие	свои	чужие
FVC2002DB1	-2,4	-7,6	+36	+16	+5,8	+0,5
FVC2002DB3	-2,2	-3,4	+24	+14	+3,7	+0,6

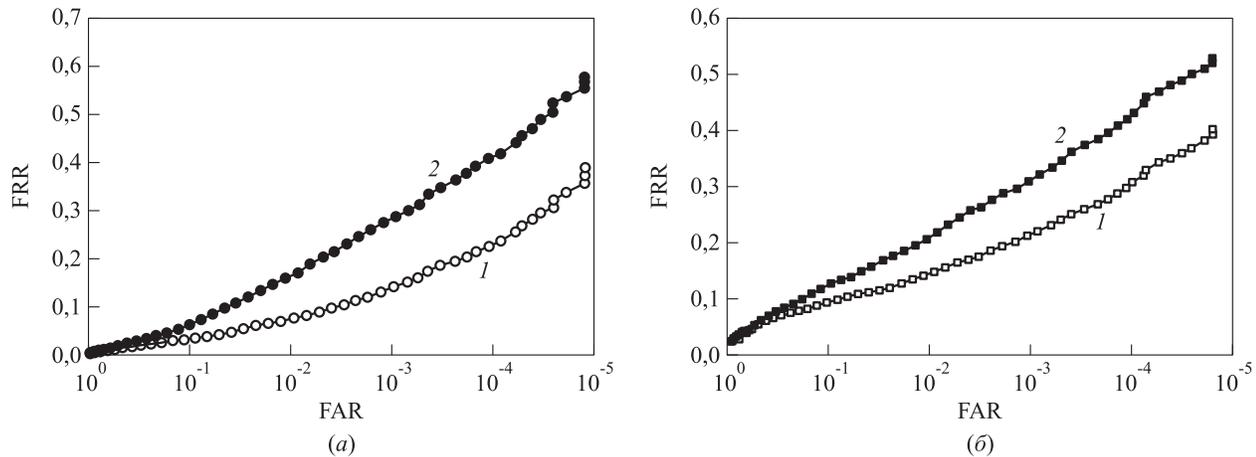


Рис. 12 Качество распознавания с учетом деформаций (1) и без учета деформаций (2): (а) FVC2002 DB1; (б) FVC2002 DB3

зирующей поправки (4), которая имеет тенденцию к уменьшению при вычислении деформаций. При этом эффект больше для чужих сравнений.

Для более детальной оценки влияния деформации на прямое наложение рассмотрим качество распознавания методом прямого наложения изображений. Результаты экспериментов приведены на рис. 12. Как видно из рисунков, даже при улучшении наложения чужих отпечатков (за счет лучшей подгонки малоинформативной дистальной зоны), деформации значительно увеличивают степень корреляции изображений.

Заключение

В статье представлены результаты статистического анализа влияния деформаций на качество распознавания по отпечаткам пальцев. Полученные результаты позволяют сделать заключение о степени влияния деформаций отпечатков на качество дактилоскопической идентификации. Направлением дальнейших исследований является более детальный разбор структуры деформаций и создание технологии синтеза искусственных деформаций отпечатков пальцев.

Литература

1. *Elekcion M.* Automatic fingerprint identification // IEEE Spectrum, 1973. Vol. 10. P. 36–45.
2. *Halici U., Jain L. C., Erol A.* Introduction to fingerprint recognition, intelligent biometric techniques in fingerprint and face recognition. — CRC Press, 1999.
3. *Maltoni D., Maio D., Jain A. K., Prabhakar S.* Handbook of fingerprint recognition. — New-York: Springer-Verlag, 2003.
4. *Wilson C. L., Watson C. I., Garris M. D., Hicklin A.* Studies of fingerprint matching using the NIST verification test bed (VTB). National Institute of Standards and Technology (NIST). Technical Report NISTIR 7020, 2004.
5. *Burr D. J.* A dynamic model for image registration // Computer Graphics Image Processing, 1981. Vol. 15. P. 102–112.
6. *Bazen A. M., Gerez S. H.* Thin-plate spline modelling of elastic deformation in fingerprints // 3rd IEEE Benelux Signal Processing Symposium Proceedings, 2002.
7. *Bookstein F. L.* Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations // IEEE Trans. PAMI, 1989. Vol. 11. No. 6. P. 567–585.
8. *Fornefett M., Rohr K., Stiehl H. S.* Elastic medical image registration using surface landmarks with automatic finding of correspondences // Proc. Workshop Bildverarbeitung für die Medizin, Informatik aktuell / Eds. A. Horsch and T. Lehmann. — Munchen, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000. P. 48–52.
9. *Fornefett M., Rohr K., Stiehl H. S.* Radial basis functions with compact support for elastic registration of medical images // Image Vision Computing, 2001. Vol. 19. No. 1–2. P. 87–96.
10. *Cappelli R., Maio D., Maltoni D.* Modelling plastic distortion in fingerprint images // ICAPR2001, 2001. P. 369–376.
11. *Ushmaev O., Novikov S.* Registration of elastic deformations of fingerprint images with automatic finding of correspondences // Workshop on Multi Modal User Authentication (MMUA03) Proceedings, 2003. P. 196–201.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том VII. Теория упругости. — М.: Физматлит, 2003. 264 с.
13. *Maio D., Maltoni D., Cappelli R., Wayman J. L., Jain A. K.* FVC2002: Second fingerprint verification competition //

- 16th Conference (International) on Pattern Recognition Proceedings, 2002. Vol. 3. P. 811–814.
14. Ушмаев О. С. Статистическая модель деформаций отпечатков пальцев // Докл. 13-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов. ММРО-13». Ленинградская обл., Зеленогорск, 30 сентября – 06 октября 2007. — М.: МАКС ПРЕСС, 2007. С. 406–408.
 15. Wilson C., Hicklin R. A., Korves H., Ulery B., Zoepfl M., Bone M., Grother P., Micheals R., Otto S., Watson C. Fingerprint vendor technology evaluation 2003: Summary of results and analysis report. National Institute of Standards and Technology (NIST). Technical Report, 2004.
 16. Ушмаев О., Арутюнян А. Метод оценки качества биометрической идентификации в операционных условиях на примере дактилоскопической идентификации // ГрафиКон'2009: 19-я Международная конференция по компьютерной графике и зрению. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 5–9 октября 2009: Труды конференции. — М.: МАКС ПРЕСС, 2009. С. 232–235.
 17. Ушмаев О. С. Адаптация биометрической системы к искажающим факторам на примере дактилоскопической идентификации // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 2. С. 25–33.

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗАГРУЖЕННОСТИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ С ПОВТОРНЫМИ ПЕРЕДАЧАМИ*

Я. М. Агаларов¹

Аннотация: Рассмотрены модели сети коммутации пакетов с повторными попытками передачи для двух схем распределения буферной памяти: полностью доступной и полного разделения. Предложен итерационный метод расчета интенсивностей потоков в сети и вероятностей блокировок узлов, где в качестве модели узла используется система массового обслуживания (СМО) типа $\frac{M}{\lambda} \left| \frac{M}{\lambda} \right| \bar{m} | N$. Получено необходимое условие существования решения системы уравнений сохранения баланса потоков в установившемся режиме работы сети и доказана монотонная сходимости последовательности значений интенсивностей потоков и вероятностей блокировок, получаемых предлагаемым методом, к решению указанной системы.

Ключевые слова: сеть коммутации пакетов; буферная память; повторные передачи; вероятность блокировки; итерационный метод

1 Введение

Одной из важных проблем, решаемых на этапе проектирования телекоммуникационных сетей, является задача предварительного анализа сети на предмет возникновения локальных и глобальных перегрузок.

Причинами перегрузок наряду с другими могут быть:

- ограничение объема буферной памяти коммутационного оборудования;
- блокировка конечных терминалов;
- недостаточная производительность вычислительных ресурсов и пропускная способность каналов связи.

Ограничение буферной памяти в реальных сетях вызвано не только желанием разработчиков снизить себестоимость коммутаторов, но и требованиями к параметрам качества обслуживания (среднее время задержки и его разброс, вероятность потери пакетов и др.). В то же время ограничение объема буферной памяти узлов является одной из причин роста числа повторных передач в сетях с коммутацией пакетов и, как следствие, резкого роста нагрузки на отдельных участках сети или сети в целом. Поэтому одной из задач предварительного анализа сетей является оценка загрузки узлов и кана-

лов связи с учетом ограниченного объема буферной памяти.

Используемые точные методы анализа сетей с коммутацией пакетов (см., например, [1, 2]) разработаны в рамках экспоненциальных сетей массового обслуживания (СМО) со стохастическими маршрутными матрицами и неограниченной буферной памятью. Однако предположение о неограниченной буферной памяти исключает возможность учета блокировок узлов из-за нехватки буферной памяти, которые и являются одной из основных причин возникновения повторных передач пакетов в сети.

Большое число работ в последнее время посвящается СМО с повторными заявками, одним каналом (обслуживающим устройством), ограниченным накопителем и более общими предположениями относительно входящих потоков заявок и длительностей обслуживания [2–7], чем при исследовании СМО. Однако использование этих моделей при расчете сетей вызывает очень большие вычислительные трудности.

Из множества приближенных методов расчета сетей с ограниченной буферной памятью в узлах следует выделить методы, используемые в теории второго порядка для СМО [2, 8], и методы, рассматривающие узлы как изолированные СМО с пуассоновскими входящими потоками [9, 10]. Первые из них предполагают:

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проекты 08-07-00152-а и 09-07-12032-офи-м.

¹ Институт проблем информатики Российской академии наук, agglar@yandex.ru

- внешний поток заявок — рекуррентный с известными первым и вторым моментами интервалов между поступлениями;
- узел — СМО с одним прибором и накопителем;
- время обслуживания в узле — независимое с произвольным распределением с известными первым и вторым моментами;
- движение заявок по сети происходит согласно неразложимой стохастической матрице с возможностью случайного ухода из сети в каждом узле. Сущность этих методов состоит в том, что они при расчетах используют первые и вторые моменты соответствующих распределений интервалов поступления и обслуживания заявок. Второй подход отличается тем, что потоки, образованные в узлах суперпозицией внешнего потока, повторениями по сети не доставленных пакетов и потоками от других узлов, — пуассоновские потоки, а времена обслуживания — экспоненциальные. Общее у этих методов то, что они являются итерационными, причем каждая итерация выполняется в два этапа: на первом этапе вычисляются характеристики потоков в узлах, на втором — уточняются другие характеристики сети (вероятности блокировок узлов, моменты времени задержки пакетов в узле и др.). В этих методах в качестве моделей линий связи использованы одноканальные СМО.

Ниже будут рассмотрены модели сетей коммутации пакетов с повторами из источника и из предыдущего узла. Предлагается итерационный метод расчета сетей, который реализует второй из упомянутых выше подходов и в качестве модели узла использует СМО типа $\frac{M}{\vec{\lambda}} \left| \frac{M}{\vec{\lambda}} \right| \vec{m} | N$. Получено необходимое условие существования решения системы уравнений сохранения баланса потоков в установившемся режиме работы сети и доказана монотонная сходимости последовательности значений интенсивностей потоков и вероятностей блокировок, получаемых предлагаемым методом, к решению системы.

2 Общее описание моделей сети

Рассматривается модель сети с коммутацией пакетов в виде графа, состоящего из U вершин и V дуг. Вершины графа отождествляются с узлами связи, дуги — с линиями связи. Имеется множество источников и получателей пакетов, каждый соединен с одним из узлов связи, который называется узлом-входом, если соединен с источником, и узлом-

выходом, если соединен с получателем. Передача пакета в сети происходит по заданному пути l , соединяющему узел-вход с узлом-выходом. Будем считать (без потери общности), что каждый узел сети входит хотя бы в один путь сети и множество путей не разбивается на непересекающиеся подмножества. Известна интенсивность потока (первичного потока) пакетов, поступающих извне на каждый путь l . Узлы сети имеют ограниченную буферную память с заданной схемой распределения, линии связи имеют заданное число однородных каналов. Поступивший в промежуточный узел пакет принимается в буферную память (занимает одно место буферной памяти), если согласно заданной схеме распределения ему можно выделить место в буферной памяти (узел не заблокирован для данного пакета) и он передан без ошибок, иначе он передается повторно согласно процедуре повторов (из источника или из предыдущего узла), пока не будет успешно передан адресату. Под блокировкой узла (линии) понимается такое состояние узла (линии), когда согласно принятой схеме распределения памяти поступивший пакет не может быть принят в буфер данного узла (линии). Под успешной передачей (попыткой передачи) пакета понимается передача (попытка), когда переданный пакет принимается последующим узлом в буферную память. При неуспешной попытке передачи по линии пакета занятый им буфер освобождается сразу в случае сети с повторными попытками из источника и сохраняется за ним в случае повторов из предыдущего узла. После успешной передачи пакета занятое им место в буферной памяти через заданное время освобождается. Предполагается, что пакеты в сети не теряются.

Введем обозначения:

v (или $v_i, i = 1, 2, \dots$) — линия связи;

v^+ — узел-сток линии v ;

u (или $u_i, i = 1, 2, \dots$) — узел связи;

Ω_u^+ — множество исходящих из узла u линий;

c_v — канальная емкость линии v ;

N_v — емкость буферной памяти, выделенной для линии v ;

N_u — емкость общей буферной памяти узла u ;

L — заданное множество нециклических путей;

L_v — множество путей, содержащих линию v , ($L_v \subseteq L$);

$l = \{v_1, \dots, v_{S_l}\}$ — путь, содержащий линии v_1, \dots, v_{S_l} , где S_l — число линий в пути l , индексы $1, \dots, S_l$ показывают порядок следования линий в пути, v_1 — линия, исходящая из узла-входа, v_{S_l} — линия, исходящая из узла-выхода;

u_{S_l+1} — абонентский узел, соединенный с узлом-выходом пути l ;

U_u^+ — множество различных узлов, следующих после узла u по направлению к адресату в путях, проходящих через узел u ;

V_v^+ — множество различных линий, следующих после линии v по направлению к адресату в путях, проходящих по линии v ;

$\lambda(l)$ — интенсивность потока (l -потока) пакетов, поступающих из источника на узел-вход и требующих передачи на узел-выход, $\lambda(l) > 0, l \in L$;

μ_v — интенсивность обслуживания пакета каналом линии v ;

δ_v — вероятность безошибочной передачи пакета по линии v ;

Λ_v — интенсивность потока пакетов, успешно передаваемых по линии v ;

Λ_v^* — интенсивность суммарного потока пакетов, требующих передачи по линии v ;

$\Lambda_v^*(l)$ — интенсивность l -потока, поступающего на линию v ;

π_u — вероятность блокировки узла u ;

π_v — вероятность блокировки узла для пакетов, требующих передачи по исходящей из узла линии v .

Во всех рассматриваемых ниже моделях узла коммутации предполагается, что потоки Λ_v^* — пуассоновские, а времена обслуживания пакетов каналами связи — экспоненциальные с параметрами $\mu_v, v \in V$. Предполагается также, что внешние нагрузки — реализуемые, т. е. в стационарном режиме работы сети интенсивности первичных входных потоков равны интенсивностям соответствующих выходных (покидающих сеть) потоков. Всюду ниже сеть рассматривается в стационарном режиме.

3 Сеть с повторами из источника

В качестве модели коммутационного узла используется СМО с ограниченным накопителем (буферной памятью) и несколькими линиями из однотипных каналов, в которой сделаны также следующие предположения:

– места в буферной памяти распределяются согласно одной из двух схем:

- (1) полнодоступная схема (CS) — каждое свободное место хранения доступно любой заявке (пакету);
- (2) схема полного разделения памяти (СР) — заявке, требующей передачи по линии v (v -заявке), доступны всего N_v мест, где $\sum_{v \in \Omega_u^+} N_v = N$;

– суммарные потоки первичных и повторных v -заявок являются независимыми в совокупности пуассоновскими потоками. Для обслуживания v -заявки требуется одновременно одно место хранения и один канал типа $v, v \in \Omega_u^+$;

– поступившей в СМО заявке предоставляется место в накопителе, если она передана без ошибок и в момент ее поступления в накопителе есть доступное свободное место, иначе заявка получает отказ;

– принятые в СМО v -заявки обслуживаются линией v в порядке поступления;

– время занятия канала v -заявкой — экспоненциально распределенная случайная величина с параметром $0 < \mu_v < \infty, v \in \Omega_u^+$, независимая от других случайных событий в системе;

– обслуженная заявка освобождает сразу место в накопителе СМО;

– заявка, получившая отказ, повторяется через заданное время из источника.

Пусть во всех узлах сети распределение буферной памяти происходит по схеме CS. При полнодоступной схеме и повторами из источника в установившемся режиме работы сети справедливы следующие соотношения для потоков в узлах:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_v(l) &= \Lambda_v^*(l) (1 - \pi_v); \quad \Lambda_{v_i}^*(l) = \Lambda_{v_{i-1}}(l); \\ \Lambda_{v_{S_l}} &= \lambda(l); \quad l \in L; \\ \Lambda_v &= \sum_{l \in L_v} \Lambda_v(l); \quad \Lambda_v^* = \sum_{l \in L_v} \Lambda_v^*(l), \quad v \in V. \end{aligned} \right\} (1)$$

Из (1) для вычисления параметра $\Lambda_{v_i}(l), i = 1, \dots, S_l, l \in L$, получаем формулу

$$\begin{aligned} \Lambda_{v_i}(l) &= \frac{\Lambda_{v_{i+1}}(l)}{(1 - \pi_{u_{i+1}})\delta_{v_{i+1}}} = \\ &= \frac{\lambda(l)}{(1 - \pi_{u_{S_l+1}}) \prod_{j=i+1}^{S_l} (1 - \pi_{u_j})\delta_{v_j}}, \\ & \quad i = 1, \dots, S_l - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее считается, что при заданных $\lambda(l), l \in L$, величины $\pi_{u_{S_l+1}}, l \in L$, заранее вычислены.

Пусть $\bar{k}_u = \{k_v, v \in \Omega_u^+\}$ — состояние буферной памяти узла $u \in U, k_v$ — число пакетов в буферной памяти узла, передаваемых по линии $v, A_m = \{\bar{k}_u : \sum_{v \in \Omega_u^+} k_v = m\}$ — множество различных состояний, при которых в памяти узла заняты ровно m буферов. Тогда с учетом введенных выше обозначений и предположений для стационарной

вероятности блокировки узла можем написать формулу [2, 11]:

$$\pi_u = \frac{1}{G_{N_u}} \sum_{\bar{k} \in A_{N_u}} p(\bar{k}_u, \bar{\rho}_u^*), \quad (3)$$

где

$$p(\bar{k}_u, \bar{\rho}_u^*) = \prod_{v \in \Omega_u^+} z_v(\rho_v^*, k_v); \quad z_v(\rho_v^*, k_v) = \begin{cases} \frac{\rho_v^{*k_v}}{k_v!} & \text{при } k_v < c_v' \\ \frac{\rho_v^{*k_v}}{c_v! c_v^{k_v - c_v}} & \text{при } k_v \geq c_v' \end{cases} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{N_u} &= \sum_{m=0}^{N_u} \sum_{\bar{k} \in A_m} p(\bar{k}_u, \bar{\rho}_u^*); \\ \bar{\rho}_u^* &= \{\rho_v^*, v \in \Omega_u^*\}; \\ \rho_v^* &= \frac{\Lambda_v^*}{\mu_v}, \quad v \in \Omega_u^+. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Таким образом, из соотношений (1)–(5) относительно неизвестных величин $\pi_u, u \in U$, получаем систему нелинейных уравнений вида

$$\pi_u = f_u(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{N}, \bar{\pi}), \quad u \in U,$$

где $\bar{\lambda} = \{\lambda(l), l \in L_u\}$; $\bar{\mu} = \{\mu_{u'}, u' \in u \cup U_u^+\}$; $\bar{N} = \{N_{u'}, u' \in u \cup U_u^+\}$; $\bar{\pi} = \{\pi_{u'}, u' \in u \cup U_u^+\}$.

Переобозначив $1 - \pi_u$ через y_u , выражение в правой части равенства для $p(\bar{k}_u, \bar{\rho}_u^*)$ из (4) — через $p_{\bar{k}}(\bar{\rho}_u, y_u)$, выражение в правой части равенства для π_u из (3) — через $1 - q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u)$, где $\bar{\rho}_u = (\rho_v, v \in \Omega_u^+)$, $\rho_v = \rho_v^* y_u = \Lambda_v / \mu_v, v \in \Omega_u^+$, получим систему нелинейных уравнений относительно неизвестных переменных y_u

$$y_u = q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u), \quad u \in U. \quad (6)$$

Отметим, что $\bar{\rho}_u = \{\rho_v, v \in \Omega_u^+\}$, где ρ_v — функция переменных $\bar{y}_u = \{y_{u'}, u' \in U_u^+\}$.

Обозначим набор $\{y_u, u \in U\}$ через \bar{y} . Будем говорить, что решение \bar{y} положительное, если $y_u \in (0, 1]$ для всех $u \in U$.

Утверждение 1. Если $\bar{y}' = \{y'_u \in (0, 1], u \in U\}$ — решение системы уравнений (6), то необходимо выполнение для всех $u \in U$ условия

$$\frac{\sum_{\bar{k} \in A_{N_u-1}} p_{\bar{k}}(\bar{y}'_u, 1)}{\sum_{\bar{k} \in A_{N_u}} p_{\bar{k}}(\bar{y}'_u, 1)} > 1, \quad (7)$$

где \bar{y}'_u — значение переменной $\bar{\rho}_u$ при $\bar{y} = \bar{y}'$.

Доказательство. Пусть $\bar{y}' = \{y'_u \in (0, 1], u \in U\}$ — решение системы (5). Фиксируем произвольный узел u и положим $y_{u'} = y'_u$ для всех $u' \neq u, u' \in U$. Отметим, что значение переменной $\bar{\rho}_u$ при заданных значениях $\lambda(l), l \in L$, однозначно определяется переменными $y_{u'}, u' \neq u, u' \in U$ (см. (2)). Рассмотрим уравнение

$$y_u = q_{N_u}(\bar{\rho}'_u, y_u). \quad (8)$$

Из работы [12] (см. утверждение 4) следует, что уравнение (8) имеет положительное решение тогда и только тогда, когда в узле u выполняется условие (7), при этом оно будет единственным положительным решением. Так как узел u — произвольный, то получаем, что неравенство (7) должно выполняться для всех $u \in U$.

Следствие. Выполнение неравенств $\mu_v c_v / \Lambda_v > 1, v \in V$, является необходимым условием существования положительного решения системы уравнений (6).

Доказательство непосредственно вытекает из следствия утверждения 4 в [12].

Пусть задана последовательность $\bar{y}[n] = \{y_u[n], u \in U\}, n \geq 0$, где $y_u[n+1] = q_{N_u}(\bar{\rho}_u[n], y_u[n]), y_u[0] = 1, u \in U$, а $\bar{\rho}_u[n]$ — это $\bar{\rho}_u$, вычисленное при $y_u = 1 - \pi_u = y_u[n]$. В дальнейшем будем писать $\bar{y}[n+1] < \bar{y}[n]$, если для заданного $n \geq 0$ выполняется $y_u[n+1] < y_u[n]$ для всех $u \in U$.

Утверждение 2. Для всех $n \geq 0$ верно $\bar{y}[n+1] < \bar{y}[n]$.

Доказательство. Докажем, что для любых $u, u' \in U$, принадлежащих одновременно хотя бы одному пути, справедливо неравенство

$$\frac{\partial q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u)}{\partial y_{u'}} > 0. \quad (9)$$

Взяв производную от $y_u = q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u)$ как от сложной функции, получаем

$$\frac{\partial q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u)}{\partial y_{u'}} = \sum_{v \in \Omega_u^+} \frac{\partial q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u)}{\partial \Lambda_v} \frac{\partial \Lambda_v}{\partial y_{u'}}. \quad (10)$$

Введем обозначения:

$$g_n(\bar{\rho}_u, y_u) = \sum_{m=0}^n \sum_{\bar{k} \in A_m} p_{\bar{k}}(\bar{\rho}_u, y_u);$$

$$d_n(\bar{\rho}_u, y_u) = \frac{1}{g_n(\bar{\rho}_u, y_u)} \sum_{m=1}^n m \sum_{\bar{k} \in A_m} p_{\bar{k}}(\bar{\rho}_u, y_u).$$

Из (3)–(5), взяв производную по Λ_v , имеем

$$\frac{\partial q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u)}{\partial \Lambda_v} = \frac{1}{\Lambda_v} q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u) [d_{N_u-1}(\bar{\rho}_u, y_u) - d_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u)]. \quad (11)$$

Из (1) и (2), взяв производную по $y_{u'}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_v}{\partial y_{u'}} &= \sum_{l:l \in L_v, u' \in l} \frac{\partial \Lambda_v(l)}{\partial y_{u'}} = \\ &= -\frac{1}{y_{u'}} \sum_{l:l \in L_v, u' \in l} \Lambda_v(l). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставив (11) и (12) в (10), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u)}{\partial y_{u'}} &= \frac{1}{y_{u'}} q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u) [d_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u) - \\ &- d_{N_u-1}(\bar{\rho}_u, y_u)] \sum_{v \in \Omega_u^+} \frac{1}{\Lambda_v} \sum_{l:l \in L_v, u' \in l} \Lambda_v(l). \end{aligned}$$

Так как справедливо неравенство $d_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u) - d_{N_u-1}(\bar{\rho}_u, y_u) > 0$ (см. утверждение 1 из [12]), то из последнего равенства следует доказательство неравенства (9). Из определения последовательности $\bar{y}[n]$, $n \geq 0$, и из (9) следует доказательство утверждения 2.

Утверждение 3. Последовательность $\bar{y}[n]$, $n \geq 0$, сходится к положительному решению системы (6) тогда и только тогда, когда существует положительное решение системы (6).

Доказательство. Пусть $\bar{y}^* = \{y_u^* \in (0, 1], u \in U\}$ — решение системы уравнений (6), $\bar{\rho}_u^*$ — значение переменной $\bar{\rho}_u$ при \bar{y}^* . Очевидно, что $y_u^* < 1$, $u \in U$, так как $q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u) < 1$ при любых $y_u \in (0, 1]$, $u \in U$. Пусть для некоторого $n \geq 0$ $\bar{y}[n] > \bar{y}^*$ (существование такого n вытекает из того, что $y_n[0] = 1$ и $y_u^* < 1$, $u \in U$). Тогда, как следует из (9), для каждого узла $u \in U$ $y_u[n+1] = q_{N_u}(\bar{\rho}_u[n], y_u[n]) > q_{N_u}(\bar{\rho}_u^*, y_u^*) = y_u^*$, т.е. последовательность $y_u[n]$, $n \geq 0$, ограничена снизу величиной \bar{y}_u^* . Значит, существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} y_u[n] = y_u^0 \geq y_u^* > 0$ для всех $u \in U$. Так как $q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u), \rho_v$, $v \in \Omega_u^+$, — непрерывные по $y_{u'}$, $u' \in u \cup U_u^+$ функции, то можно написать $\lim_{n \rightarrow \infty} q_{N_u}(\bar{\rho}_u[n], y_u[n]) = q_{N_u}(\bar{\rho}_u^0, y_u^0) = y_u^0$, где $\bar{\rho}_u^0$ — значение переменной $\bar{\rho}_u$ при $y_{u'}^0$, $u' \in U_u^+$, т.е. $\bar{y}^0 = \{y_u^0 \in (0, 1), u \in U\}$ — положительное решение уравнения (6).

Пусть теперь $\lim_{n \rightarrow \infty} y_u[n] = y_u^* > 0$ для всех $u \in U$. Тогда, как показано в первой части доказательства утверждения, $\bar{y}^0 = \{y_u^0 \in (0, 1), u \in U\}$ — положительное решение уравнения (6). Утверждение 3 доказано.

Следствие 2. Система (6) не имеет положительного решения тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} y_u[n] = y_u^* = 0$ для всех $u \in U$.

Пусть во всех узлах сети распределение буферной памяти происходит по схеме СР. Тогда формула вероятности блокировки узла $u \in U$ для v -заявки ($v \in \Omega_u^+$) записывается в том же виде, что и (3)–(5), с заменой всюду индекса u на v , за исключением обозначения Ω_u^+ . Нетрудно заметить, что в случае этой схемы система уравнений (6) примет вид

$$y_v = q_{N_v}(\rho_v, y_v), \quad v \in V, \quad (13)$$

где ρ_v является функцией $y_{v'}$, $v' \in V_v^+$, которая обладает всеми свойствами системы (6), использованными при доказательстве утверждений 1–3 и следствий. Неравенства вида (6) в данном случае преобразуются в $\mu_v c_v / \Lambda_v > 1$, $v \in V$.

Заметим также, что все рассуждения, приведенные выше для сети с одной только из указанных выше схем распределения буферной памяти, справедливы и в смешанном случае, когда в узлах используется любая из этих схем.

4 Сеть с повторами из предыдущего узла

Рассмотрим сеть с полнодоступной буферной памятью и повторами из предыдущего узла. В качестве модели узла используется СМО, отличающаяся от СМО, определенной в предыдущем разделе, только пунктами 6 и 7. Вместо действий, указанных в этих пунктах, реализуется следующее: выполненная v -заявка с заданной вероятностью B_{v+} (вероятность блокировки последующего узла или ошибки при передаче пакета по линии v) повторяется в данном узле через заданное время τ_v (тайм-аут) и с вероятностью $1 - B_{v+}$ покидает систему через время t_v навсегда, сразу освободив занятый канал и место в буферной памяти. Для такой модели существует более общая формула для вычисления вероятности блокировки системы для v -заявок [11, 12], которая задает зависимость вероятности блокировки узла в виде функции от вероятностей блокировок последующих узлов B_{v+} , $v \in \Omega_u^+$, при заданных значениях остальных параметров, в частности Λ_v , $v \in \Omega_u^+$.

В сети с повторами из предыдущего узла при установившемся режиме работы справедливы следующие уравнения баланса потоков:

$$\begin{aligned} \lambda(l) &= \Lambda_v^*(l)(1 - \pi_v)\delta_v, \quad l \in L_v; \\ \Lambda_v &= \sum_{l \in L_v} \lambda_v(l), \quad \Lambda_v^* = \sum_{l \in L_v} \Lambda_v^*(l), \quad v \in V. \end{aligned}$$

Тогда с учетом введенных выше обозначений и формул (1)–(7) и (18) из [12], заменив обозначение B_{v+} на y_{v+} , $v \in \Omega_u^+$, можем написать систему нелинейных уравнений

$y_u = q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u)$ при схеме распределения CS; (14)

$y_v = q_{N_u}(\rho_v, y_v)$ при схеме распределения CP; (15)

$$v \in \Omega_u^+, \quad u \in U,$$

где компоненты ρ_v набора $\bar{\rho}_u$ — функции переменных y_{v^+} , $v \in \Omega_u^+$.

Нетрудно видеть, что системы (14) и (15) обладают всеми свойствами системы (6), использованными при доказательстве утверждений 1–3 и следствий, т. е. для систем (13) и (14) также справедливы утверждения 1–3 и следствия.

5 Алгоритм расчета

Для вычисления характеристик потоков в узлах и вероятностей блокировок пакетов предлагается следующий алгоритм, описывающий изложенную выше итерационную процедуру. Для описания значений, вычисляемых на k -м шаге алгоритма, к обозначениям соответствующих параметров приписывается знак $[k]$. Введем новые обозначения:

y_u^v — вероятность отсутствия блокировки узла $u \in U$ для пакетов, направляемых на линию $v \in \Omega_u^+$;

$$y_u^v = \begin{cases} y_u & \text{для } v \in \Omega_u^+ \text{ при схеме CS,} \\ y_v & \text{при схеме CP;} \end{cases}$$

$$\bar{\rho}_u^v = \begin{cases} \bar{\rho}_u & \text{для } v \in \Omega_u^+ \text{ при схеме CS,} \\ \rho_v & \text{при схеме CP;} \end{cases}$$

$$q_{N_u}^v(\bar{\rho}_u^v, y_u^v) = \begin{cases} q_{N_u}(\bar{\rho}_u, y_u) & \text{для } v \in \Omega_u^+ \text{ при схеме CS,} \\ q_{N_v}(\rho_v, y_v) & \text{при схеме CP;} \end{cases}$$

Тогда система уравнений для смешанного варианта сети, аналогичная системам (6), (13)–(15), записывается в виде

$$y_u^v = q_{N_u}^v(\bar{\rho}_u^v, y_u^v), \quad u \in U, \quad v \in \Omega_u^+.$$

Шаг 1. Инициализация. Вычисление начальных значений параметров ρ_v^* , $v \in V$:

$$\Lambda_v[0] = \sum_{l \in L_v} \frac{\lambda(l)}{\left(1 - \pi_{u_{S_l+1}}(l)\right) \prod_{v' \in V_v^+(l)} \delta_{v'}};$$

$$\rho_v^*[0] = \frac{\Lambda_v[0]}{\mu_v}, \quad v \in V,$$

$$y_u^v[0] = 1, \quad u \in U, \quad v \in \Omega_u^+.$$

Шаг k ($k > 1$).

1. *Проверка необходимых условий существования решения.* Если для некоторой линии $v \in V$ вы-

полняется условие $c_v \mu_v / (\Lambda_v[k-1]) \leq 1$, то алгоритм заканчивает работу с результатом «система не имеет решения». Если в некотором узле u , в котором используется полноступенчатая схема, условие $c_v \mu_v / (\Lambda_v[k-1]) > 1$ выполняется для всех $v \in \Omega_u^+$, то проверяется условие (7) заданных $\Lambda_v[k-1]$, $v \in V$, и при невыполнении этого условия алгоритм заканчивает работу с результатом «система не имеет решения».

2. *Вычисление вероятностей блокировок.* Используя значения параметров $\bar{\rho}_u^v[k-1]$, $y_u^v[k-1]$, $u \in U$, $v \in \Omega_u^+$, с помощью соответствующих формул (3)–(5) или формул (1)–(7) и (18) из [12] (в зависимости от типа схемы распределения буферной памяти и процедуры повторов передач) вычисляется $y_u^v[k] = 1 - \pi_u[k]$, $u \in U$, $v \in \Omega_u^+$. При этом рекомендуется использовать метод свертки Базена [13], позволяющий производить рекуррентные вычисления (подробно этот метод описан также в [2, 9]).
3. *Вычисление значений параметров $\Lambda_v[k]$, $v \in V$:*

(i) в случае повторов от источника

$$\Lambda_{v_{S_l}}(l)[k] = \frac{\lambda(l)}{1 - \pi_{S_l+1}};$$

$$\Lambda_{v_i}^*(l)[k] = \frac{\Lambda_{v_i}(l)[k]}{y_{u_i}^{v_i}[k-1] \delta_{v_i}};$$

$$\Lambda_{v_{i-1}}(l)[k] = \Lambda_{v_i}^*(l)[k], \quad i = 1, \dots, S_l, \quad l \in L;$$

$$\Lambda_v^*[k] = \sum_{l \in L_v} \Lambda_v^*(l)[k], \quad v \in V;$$

(ii) в случае повторов из предыдущего узла

$$\Lambda_v^*[k] = \frac{\Lambda_v[0]}{y_u^v[k-1] \delta_v}, \quad v \in \Omega_u^+, \quad u \in U.$$

4. *Проверка условий останова алгоритма.* Если хотя бы для одной $v \in V$ для заданного значения точности $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\frac{|\Lambda_v^*[k] - \Lambda_v^*[k-1]|}{\Lambda_v^*[k]} > \varepsilon,$$

то вычисляются параметры $\bar{\rho}_u^v[k]$, $u \in U$, $v \in \Omega_u^+$, и осуществляется переход к шагу k , положив k равным $k+1$, иначе алгоритм завершает работу.

По завершении алгоритма либо выявляется, что система уравнений не имеет положительного решения, либо вычисляются интенсивности потоков, поступающих в узлы и на линии сети, и вероятности блокировок узлов для пакетов. Далее эти характеристики могут быть использованы для вычисления других характеристик сети (средних задержек, среднего числа повторов в узлах, узких участков сети и др.).

6 Примеры расчета

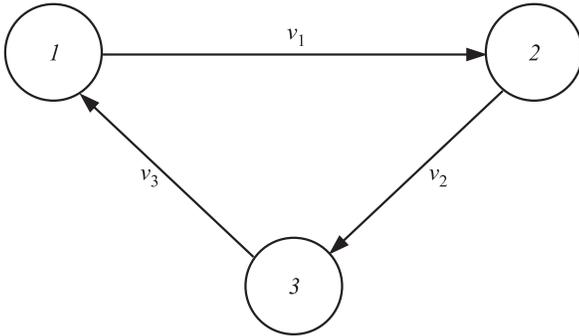


Рис. 1 Граф сети

В качестве примера рассматривается сеть с тремя узлами, топология которой задается графом, показанным на рис. 1. В рассматриваемой сети предполагается полностью доступная схема распределения буферной памяти и процедура повторных передач из источника. Для вычисления вероятностей блокировок узлов и интенсивностей потоков, поступающих на линии связи, был использован алгоритм, представленный в разд. 5, и имитационная модель

сети. В табл. 1 и на рис. 2 приведены результаты вычислений при следующих значениях входных параметров: емкости накопителей $N_u = 15$ для всех узлов, множество путей

$$L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\};$$

$$l_1 = \{v_1\}; \quad l_2 = \{v_2\}; \quad l_3 = \{v_3\};$$

$$l_4 = \{v_2, v_3\}; \quad l_5 = \{v_1, v_2\}; \quad l_6 = \{v_3, v_1\},$$

интенсивности первичных потоков $\lambda(l) = 2, 2,5, 2,7, 2,8, 2,9, 3, 3,1, 3,2, l \in L$. Строки 1, 3 в табл. 1 и графики 1, 3 на рис. 2 соответствуют вариантам расчетов с помощью предложенного алгоритма, а 2, 4, 5 — с помощью имитационной модели. В вариантах 1 и 2 — каналные емкости $c_v = 10$ для всех линий, параметр экспоненциального времени обслуживания для всех линий, интервал повтора для всех заявок равен 10; в вариантах 3 и 4 — емкости $c_v = 1$ для всех линий, параметр экспоненциального времени обслуживания $\mu_v = 10$ для всех линий, интервал повтора равен 10; в варианте 5 — емкости $c_v = 10$ для всех линий, время обслуживания пакета каналом связи равно 10, интервал повтора равен 10. Во всех вариантах первичные потоки — пуассоновские, $\pi_{u_{s_l+1}}(l) = 0, \delta_v = 1, v \in V, l \in L$.

Таблица 1 Зависимость вероятности отсутствия блокировки узла от интенсивности первичных потоков

l	λ							
	2	2,5	2,7	2,8	2,9	3	3,1	3,2
1	0,9967	0,9758	0,9504	0,9272	0,8825	0,0000	0,0000	0
2	0,9905	0,9882	0,9257	0,9211	0,6928	0,0000	0,0000	0
3	0,9998	0,9964	0,9904	0,9844	0,9746	0,9568	0,9018	0
4	1,0000	0,9954	0,9934	0,9873	0,9720	0,9490	0,8787	0
5	0,9986	0,9917	0,9718	0,9677	0,9569	0,8018	0,0000	0

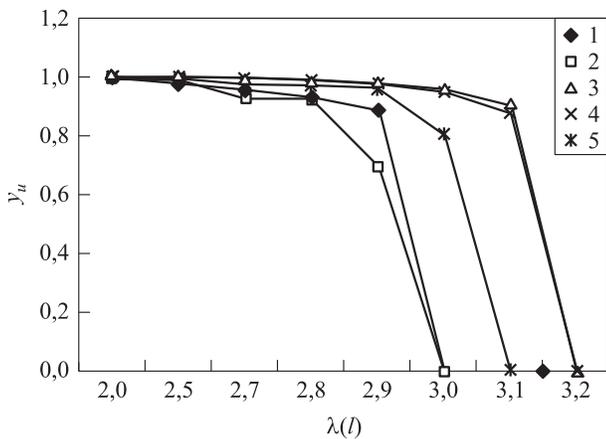


Рис. 2 Зависимость вероятности отсутствия блокировки узла от интенсивности первичных потоков

Как показывают результаты, отраженные в табл. 1 и на рис. 2, а также другие вычислительные эксперименты, оценки вероятностей блокировок узлов, полученные с помощью представленного алгоритма, дают вполне приемлемые по точности значения для предварительного анализа сети на реализуемость первичных потоков пакетов.

Кроме того, точность результатов, полученных с помощью предлагаемого итерационного метода, увеличивается с ростом разветвленности сети и увеличением интервала повторов передач пакета. Эксперименты также показывают, что, как правило, погрешность, вносимая заменой многоканальной линии одноканальной с равной пропускной способностью, больше, чем вносимая предположением о пуассоновских входных потоках и экспоненциальных временах обслуживания.

7 Заключение

Проведенные исследования показали, что алгоритм расчета сетей, предложенный в данной статье, обладает следующими достоинствами:

1. Использует в качестве модели сети СеМО, представляющие собой совокупность общепринятых СМО типа $\frac{M}{\lambda} \left| \frac{M}{\lambda} \right| \bar{m} | N$ со схемами распределения CS или CP, связанных уравнениями баланса потоков в узлах.
2. При реализуемых первичных потоках сходится к положительному решению системы уравнений баланса потоков в узлах.
3. При реализуемых первичных потоках вычисляет вероятности блокировок узлов и загруженности узлов и каналов связи с приемлемой для предварительного анализа сети точностью (относительная погрешность вероятности блокировки $\sim 0,1$).
4. Позволяет определить реализуемость первичных входных потоков.
5. При использовании алгоритма Базена требует для выполнения одного шага порядка $\sum_{u \in U} (N_u K_u + N_u^2 / 2)$ арифметических операций, где K_u — степень узла u .

Литература

1. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. — М.: Машиностроение, 1979.
2. *Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А.* Анализ очередей в вычислительных сетях. — М.: Наука, 1989.
3. *Бочаров П. П., Д'Апиче Ч., Мандзо Р., Фонг Н. Х.* Об обслуживании многомерного пуассоновского потока на одном приборе с конечным накопителем и повторными заявками // Проблемы передачи информации, 2001. Т. 37. Вып. 4. С. 130–140.
4. *Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A.* Construction of queueing networks with stationary product distributions // 5th Workshop (International) on Retrial Queues Proceedings. — Seoul: Korea University, 2004. P. 111–115.
5. *Wuechner P., Meer H., Bolc G., Roszik J., Sztrik J.* Modeling finite-source retrial queueing systems with unreliable heterogeneous servers and different service policies using MOSEL // 14th Conference (International) on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications Proceedings, 2007, Prague, Czech Republic. — Sbr.-Dudweiler: Digitaldruck Pirrot GmbH, 2007. P. 75–80.
6. *Мусеева С. П., Морозова А. С., Назаров А. А.* Исследования СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии, 2008. Т. 13. Спец. вып. 5. С. 88–92.
7. *Artalejo J., Gomez-Corral A.* Retrial queueing systems. A computational approach. — Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2008.
8. *Бочаров П. П.* Приближенный метод расчета разомкнутых неэкспоненциальных сетей массового обслуживания конечной емкости с потерями или блокировками // Автоматика и телемеханика, 1987. № 1. С. 55–65.
9. *Вишневецкий В. М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. — М.: Техносфера, 2003.
10. *Таранцев А. А.* Инженерные методы теории массового обслуживания. — М.: Наука, 2007.
11. *Katoun F., Kleinrock L.* Analysis of shared finite storage in a computer networks node environment under general traffic conditions // IEEE Trans. on Commun., 1980. Vol. 28. No. 7. P. 992–1003.
12. *Агаларов Я. М.* Приближенный метод вычисления характеристик узла телекоммуникационной сети с повторными передачами // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 2. С. 2–10.
13. *Buzen J. P.* Computational algorithm for closed queueing networks with exponential servers // Communications ACM, 1973. Vol. 16. No. 9. P. 527–531.

БАЙЕСОВСКИЕ МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И НАДЕЖНОСТИ: ОБЩИЙ ЭРЛАНГОВСКИЙ СЛУЧАЙ*

А. А. Кудрявцев¹, В. С. Шоргин², С. Я. Шоргин³

Аннотация: Данная работа является очередной в серии статей, посвященных изучению байесовских моделей массового обслуживания и надежности. Соответствующий метод предусматривает рандомизацию характеристик системы относительно некоторых априорных распределений ее параметров. В работе представлены новые результаты для случая, когда в качестве пары априорных распределений рассматриваются распределения Эрланга с различными наборами параметров, а также пара «распределение Эрланга — вырожденное распределение».

Ключевые слова: байесовский подход; системы массового обслуживания; надежность; смешанные распределения; моделирование; эрланговское распределение

1 Введение и основные предположения

Подробное изложение основ байесовского подхода к моделированию систем массового обслуживания (СМО) и ненадежных восстанавливаемых систем содержится в [1, 2]. Здесь коснемся этого вопроса лишь вкратце.

В реальной практике нередки ситуации, когда исследуемая система задана в определенном смысле «неточно». Скажем, если даже говорить о простейших системах типа $M|G|1$, исследователю может быть априори неизвестен параметр входящего потока λ и параметры обслуживания μ и σ^2 . В этом случае естественным оказывается рандомизационный подход, при котором элементами вероятностного пространства становятся (если рассматривать приведенный выше пример) значения λ , μ и σ^2 . При этом подлежащие вычислению характеристики такой «рандомизированной» СМО, естественно, являются рандомизацией аналогичных характеристик «обычной» СМО подобного типа — с учетом того априорного распределения входных параметров СМО, которое взято исследователем за основу.

Таким образом, в том же примере с системой типа $M|G|1$ возникают задачи рандомизации «обычных» характеристик таких систем с учетом априорных распределений входных параметров. Скажем, может приниматься предположение о показательном, равномерном или каком-то другом распределении одной или нескольких величин из λ , μ и σ^2 (которые при таком подходе становятся слу-

чайными величинами), об их независимости или зависимости и т. п. Полученные результаты могут применяться, например, для вычисления средних значений, построения доверительных интервалов для тех или иных характеристик рассматриваемого класса СМО «в целом». Такой подход к построению моделей массового обслуживания естественно назвать байесовским.

Другим направлением применения байесовского подхода является оценка надежности. Как известно (см. [3]), коэффициент готовности восстанавливаемого устройства в стационарном режиме может быть вычислен по формуле

$$k = \frac{\lambda^{-1}}{\lambda^{-1} + \mu^{-1}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

где λ^{-1} — среднее время безотказной работы, μ^{-1} — среднее время восстановления. Если принять сформулированное выше предположение, в соответствии с которым любое изучаемое устройство выбирается случайным образом из некоторого множества сходных устройств, различающихся средними величинами показателей надежности, то согласно приведенным выше рассуждениям значения λ и μ могут рассматриваться в качестве случайных. Следовательно, при таких предположениях коэффициент готовности k также является случайной величиной и его распределение зависит от распределений величин λ и μ .

Основным объектом рассмотрения на настоящем этапе является СМО $M|M|1$, в которой интенсивность входящего потока λ и интенсив-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 08-07-00152-а, 08-01-00567-а и 09-07-12032-офи-м.

¹ Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, pubjgena@hotmail.ru

² Институт проблем информатики Российской академии наук, vshorgin@ipiran.ru

³ Институт проблем информатики Российской академии наук, sshorgin@ipiran.ru

ность обслуживания μ независимы и имеют некоторые априори известные распределения. При этом загрузка рассматриваемой системы имеет вид $\rho = \lambda/\mu$. Как известно, от значения ρ зависит наличие стационарного режима у рассматриваемой системы; величина ρ входит во многие формулы, описывающие характеристики разнообразных СМО. В связи с этим рассмотрение величины ρ выбрано одной из первоочередных задач, которые следует рассмотреть в рамках байесовской теории СМО. Кроме того, рассматриваются распределения такой рандомизированной характеристики, как вероятность потерь $1 - \pi$ (здесь π — вероятность того, что входящий в СМО вызов не будет потерян).

Отметим, что значение коэффициента готовности k совпадает с величиной

$$\pi = \frac{1}{1 + \rho} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

для системы $M|M|1$, в которой λ — интенсивность входящего потока, а μ — интенсивность обслуживания. Поэтому вычисление вероятностных характеристик величины π означает одновременное вычисление вероятностных характеристик величины k при соответствующих распределениях среднего времени безотказной работы и среднего времени восстановления.

В настоящей работе всюду говорится о нахождении распределений величин, относящихся к байесовской модели СМО, включая π . При этом подразумевается, что распределение величины k в соответствующей «надежностной» постановке специально вычислять не нужно, поскольку оно совпадает с распределением величины π .

Данная работа является логическим продолжением статей [1, 2, 4], в которых авторы рассматривали вероятностные характеристики коэффициента загрузки ρ и вероятности потерь $1 - \pi$ в системе $M|M|1|0$ в предположении, что пару априорных распределений (т. е. пару «распределение параметра входящего потока — распределение параметра обслуживания») составляют: равномерное—равномерное, экспоненциальное—экспоненциальное, вырожденное — распределение Эрланга, экспоненциальное — распределение Эрланга и распределение Эрланга — экспоненциальное (естественно, одновременно вычислялись характеристики коэффициента готовности k в соответствующей «надежностной» постановке).

В настоящей статье рассматриваются пары «распределение Эрланга — распределение Эрланга» и «распределение Эрланга — вырожденное».

В дальнейшем авторы предполагают продолжить расширение множества пар априорных распределений, по которым производится ран-

Таблица 1 Этапы рассмотрения задачи

λ	μ				
	D	M	R	E	P
D	*	+	+	+	—
M	⊕	+	—	+	—
R	+	—	+	—	—
E	⊕	+	—	⊕	—
P	—	—	—	—	—

домизация параметров λ и μ . В табл. 1 отображены этапы рассмотрения предложенной задачи. Буквы D, M, R, E, P обозначают вырожденное, экспоненциальное, равномерное, Эрланга, Парето распределения соответственно; символ «*» относится к классической постановке задачи, символ «+» соответствует уже рассмотренным ранее распределениям, символ «⊕» — распределениям, о которых пойдет речь в данной работе, символом «—» обозначаются распределения, для которых авторы планируют получить аналогичные результаты в дальнейшем.

2 Основные результаты

Приведем несколько утверждений, описывающих основные вероятностные характеристики коэффициента загрузки $\rho = \lambda/\mu$ и вероятности «непотери» вызова $\pi = (1 + \rho)^{-1}$ в системе $M|M|1|0$.

В дальнейшем изложении будем использовать стандартное обозначение для β -функции:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

Для формулирования следующей теоремы понадобится несколько соотношений, являющихся непосредственными следствиями формулы 2.111 из [5]. Для $m \geq 2$

$$\int \frac{x^n dx}{(a + bx)^{n+m}} = -\frac{x^n}{(m-1)bC_{n+m-1}^n(a + bx)^{n+m-1}} \times \sum_{l=0}^n C_{n+m-1}^{n-l} \left(\frac{a}{bx}\right)^l + C; \quad (1)$$

$$\int \frac{x^n dx}{(a + bx)^{n+1}} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n-k}}{(n-k)b^{k+1}(a + bx)^{n-k}} + \frac{\ln(a + bx)}{b^{n+1}} + C; \quad (2)$$

$$\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^n} = \frac{x^n}{b(a+bx)^{n-1}} + \frac{an}{b} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^{n-k-1}}{(n-k-1)b^{k+1}(a+bx)^{n-k-1}} - \frac{an}{b^{n+1}} \ln(a+bx) + C, \quad (3)$$

где C — некоторая константа.

Введем обозначение

$$A(p, q) = \int_0^1 \frac{x^p dx}{(\theta + (\alpha - \theta)x)^q}. \quad (4)$$

Заметим, что из соотношений (1)–(3) следует, что при $m = n, \dots, n+k-2$

$$A(m, n+k) = -\frac{(k+n-m-1)^{-1}}{C_{n+k-1}^m \alpha^{n+k-1}} \sum_{j=0}^m \frac{C_{n+k-1}^{m-j} \theta^j}{(\alpha - \theta)^{j+1}} + \frac{(k+n-m-1)^{-1} \theta^{m-n-k+1}}{C_{n+k-1}^m (\alpha - \theta)^{m+1}}; \quad (5)$$

$$A(n+k-1, n+k) = -\sum_{i=0}^{n+k-2} \frac{(n+k-i-1)^{-1}}{\alpha^{n+k-i-1} (\alpha - \theta)^{i+1}} + \frac{\ln(\alpha/\theta)}{(\alpha - \theta)^{n+k}}; \quad (6)$$

$$A(n+k, n+k) = \frac{1}{\alpha^{n+k-1} (\alpha - \theta)} + \frac{(n+k)\theta}{\alpha - \theta} \sum_{j=0}^{n+k-2} \frac{(n+k-j-1)^{-1}}{\alpha^{n+k-j-1} (\alpha - \theta)^{j+1}} - \frac{(n+k)\theta \ln(\alpha/\theta)}{(\alpha - \theta)^{n+k+1}}. \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть интенсивность входящего потока λ и интенсивность обслуживания μ имеют распределение Эрланга с параметрами $k \geq 2, \theta > 0$ и $n \geq 2, \alpha > 0$ соответственно, причем λ и μ независимы. Тогда функции распределения случайных величин ρ и π имеют вид

$$F_\rho(x) = \left(\frac{\theta x}{\alpha + \theta x}\right)^{n+k-1} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\theta x}\right)^m, \quad x > 0;$$

$$F_\pi(x) = 1 - \left(\frac{\theta(1-x)}{\alpha x + \theta(1-x)}\right)^{n+k-1} \sum_{m=0}^{n-1} C_{n+k-1}^m \left(\frac{\alpha x}{\theta(1-x)}\right)^m, \quad x \in (0, 1);$$

плотности распределения случайных величин ρ и π имеют вид

$$f_\rho(x) = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!(n-1)!} \frac{\theta^k \alpha^n x^{k-1}}{(\theta x + \alpha)^{n+k}}, \quad x > 0;$$

$$f_\pi(x) = \frac{(n+k-1)! \theta^k \alpha^n}{(k-1)!(n-1)!} \frac{(1-x)^{k-1} x^{n-1}}{(\theta + (\alpha - \theta)x)^{n+k}}, \quad x \in (0, 1); \quad (8)$$

для первых двух моментов соответствующих распределений справедливы соотношения

$$\begin{aligned} E\rho &= \frac{k\alpha}{(n-1)\theta}; \\ E\rho^2 &= \frac{k(k+1)\alpha^2}{(n-1)(n-2)\theta^2} \quad (\text{для } n \geq 3); \\ E\pi &= nC_{n+k-1}^n B(n+1, k); \\ E\pi^2 &= nC_{n+k-1}^n B(n+2, k) \quad (\text{для } \alpha = \theta); \end{aligned} \quad (9)$$

$$E\pi = nC_{n+k-1}^n \theta^k \alpha^n \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k-1}^l A(n+l, n+k); \quad (10)$$

$$E\pi^2 = nC_{n+k-1}^n \theta^k \alpha^n \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k-1}^l A(n+l+1, n+k) \quad (\text{для } \alpha \neq \theta), \quad (11)$$

где интегралы $A(m, n+k)$ вычисляются по формулам (5)–(7).

Доказательство. Поскольку функции распределения случайных величин ρ и λ связаны соотношением

$$F_\rho(x) = \int_0^\infty F_\lambda(xy) \frac{y^{n-1} \alpha^n e^{-\alpha y}}{(n-1)!} dy,$$

для плотности ρ получаем

$$\begin{aligned} f_\rho(x) &= \int_0^\infty \frac{x^{k-1} y^k \theta^k e^{-\theta xy}}{(k-1)!} \frac{y^{n-1} \alpha^n e^{-\alpha y}}{(n-1)!} dy = \\ &= \frac{x^{k-1} \theta^k \alpha^n}{(k-1)!(n-1)!(\theta x + \alpha)^{n+k}} \int_0^\infty z^{n+k-1} e^{-z} dz = \\ &= \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!(n-1)!} \frac{\theta^k \alpha^n x^{k-1}}{(\theta x + \alpha)^{n+k}}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Для нахождения соответствующей функции распределения воспользуемся соотношением (1). Путем несложных арифметических преобразований получаем

$$\begin{aligned} F_\rho(x) &= \frac{(n+k-1)! \theta^k \alpha^n}{(k-1)!(n-1)!} \int_0^x \frac{t^{k-1} dt}{(\theta t + \alpha)^{k+n}} = \\ &= \left(\frac{\theta x}{\alpha + \theta x}\right)^{n+k-1} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\theta x}\right)^m, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся тем же соотношением для вычисления первых моментов ρ . Имеем

$$\begin{aligned} E\rho &= \frac{(n+k-1)!\theta^k\alpha^n}{(k-1)!(n-1)!} \int_0^\infty \frac{x^k dx}{(\alpha+\theta x)^{n+k}} = \\ &= -\frac{(n+k-1)!\theta^k\alpha^n}{(k-1)!(n-1)!} \times \\ &\times \left[\frac{x^k}{(n-1)\theta C_{k+n-1}^k (\alpha+\theta x)^{k+n-1}} \times \right. \\ &\left. \times \sum_{l=0}^k C_{k+n-1}^{k-l} \left(\frac{\alpha}{\theta x}\right)^l \right] \Bigg|_0^\infty = \frac{k\alpha}{(n-1)\theta}. \end{aligned}$$

Аналогично при $n \geq 3$ получаем

$$\begin{aligned} E\rho^2 &= \frac{(n+k-1)!\theta^k\alpha^n}{(k-1)!(n-1)!} \int_0^\infty \frac{x^{k+1} dx}{(\alpha+\theta x)^{n+k}} = \\ &= \frac{k(k+1)\alpha^2}{(n-1)(n-2)\theta^2}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим характеристики вероятности «непотери» вызова π . Для функции распределения имеем

$$\begin{aligned} F_\pi(x) &= 1 - P\left(\rho < \frac{1-x}{x}\right) = 1 - \\ &- \left(\frac{\theta(1-x)}{\alpha x + \theta(1-x)}\right)^{n+k-1} \sum_{m=0}^{n-1} C_{n+k-1}^m \left(\frac{\alpha x}{\theta(1-x)}\right)^m, \\ &x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Для вычисления плотности случайной величины π достаточно лишь воспользоваться очевидной формулой

$$f_\pi(x) = \frac{1}{x^2} f_\rho\left(\frac{1-x}{x}\right),$$

из которой и получаем соотношение (8).

Найдем первые моменты случайной величины π . В случае $\alpha = \theta$ непосредственно из определения β -функции и вида плотности (8) получаем формулу (9). Для вычисления моментов π при $\alpha \neq \theta$ достаточно воспользоваться соотношениями (5)–(7). Имеем

$$\begin{aligned} E\pi &= nC_{n+k-1}^n \theta^k \alpha^n \int_0^1 \frac{(1-x)^{k-1} x^n}{(\theta + (\alpha - \theta)x)^{n+k}} dx = \\ &= nC_{n+k-1}^n \theta^k \alpha^n \int_0^1 \frac{\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k-1}^l x^{n+l}}{(\theta + (\alpha - \theta)x)^{n+k}} dx = \\ &= nC_{n+k-1}^n \theta^k \alpha^n \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k-1}^l A(n+l, n+k), \end{aligned}$$

где интегралы $A(n+l, n+k)$ вычисляются по формулам (5) и (6) (нужно положить $m = n+l$). Аналогично

$$\begin{aligned} E\pi^2 &= nC_{n+k-1}^n \theta^k \alpha^n \int_0^1 \frac{(1-x)^{k-1} x^{n+1}}{(\theta + (\alpha - \theta)x)^{n+k}} dx = \\ &= nC_{n+k-1}^n \theta^k \alpha^n \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k-1}^l A(n+l+1, n+k), \end{aligned}$$

где интегралы $A(n+l+1, n+k)$ вычисляются по формулам (5)–(7) (нужно положить $m = n+l+1$).

Теорема полностью доказана.

Замечание. При $n = 2$ не существует второго момента коэффициента загрузки ρ . В случае $n = 1$ или $k = 1$ также не существует математического ожидания ρ [4].

Рассмотрим описанную выше постановку задачи, в которой интенсивность входящего потока λ имеет распределение Эрланга, а интенсивность обслуживания μ имеет вырожденное распределение.

Пусть $Ei(x)$ — интегральная показательная функция

$$Ei(x) = - \int_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Теорема 2. Пусть случайная величина λ имеет распределение Эрланга с параметрами $k \geq 1$ и $\theta > 0$, а случайная величина μ имеет вырожденное распределение, причем λ и μ независимы. Тогда коэффициент загрузки ρ имеет распределение Эрланга с параметрами k и $\mu\theta$, а характеристики вероятности «непотери» вызова π определяются соотношениями

$$\begin{aligned} f_\pi(x) &= \frac{\mu^k \theta^k (1-x)^{k-1} \exp\{-\mu\theta(1-x)/x\}}{(k-1)! x^{k+1}}, \\ &x \in (0, 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\pi &= \frac{(-1)^k \mu^k \theta^k}{(k-1)!} [e^{\mu\theta} Ei(-\mu\theta) + \\ &+ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{\mu^n \theta^n}]; \end{aligned}$$

$$E\pi^2 = \mu\theta - \mu\theta E\pi \quad (\text{для } k = 1); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E\pi^2 &= \frac{(-1)^k \mu^k \theta^k}{(k-2)!} [-e^{\mu\theta} Ei(-\mu\theta) + \\ &+ \sum_{n=1}^{k-2} \frac{(-1)^n (n-1)!}{\mu^n \theta^n}] - \mu\theta E\pi \quad (\text{для } k \geq 2). \quad (13) \end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что

$$F_{\rho}(x) = \int_0^{\mu x} \frac{t^{k-1} \theta^k e^{-\theta t}}{(k-1)!} dt = \int_0^x \frac{z^{k-1} \mu^k \theta^k e^{-\mu \theta z}}{(k-1)!} dz, \quad x > 0,$$

что соответствует распределению Эрланга с параметрами k и $\mu\theta$. Характеристики такого распределения хорошо известны.

Для плотности вероятности «непотери» вызова π имеем

$$f_{\pi}(x) = \frac{1}{x^2} f_{\rho}\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{\mu^k \theta^k (1-x)^{k-1} \exp\{-\mu\theta(1-x)/x\}}{(k-1)! x^{k+1}}, \quad x \in (0, 1).$$

Для вычисления моментов случайной величины π воспользуемся введенным выше обозначением $Ei(x)$. Тогда по формуле 3.353.5 из [5]

$$\begin{aligned} E\pi &= \int_0^1 \frac{\mu^k \theta^k (1-x)^{k-1} \exp\{-\mu\theta(1-x)/x\}}{(k-1)! x^k} dx = \\ &= \frac{\mu^k \theta^k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1} e^{-\mu\theta t}}{t+1} dt = \frac{(-1)^k \mu^k \theta^k}{(k-1)!} \times \\ &\quad \times \left[e^{\mu\theta} Ei(-\mu\theta) + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{\mu^n \theta^n} \right]; \\ E\pi^2 &= \int_0^1 \frac{\mu^k \theta^k (1-x)^{k-1} \exp\{-\mu\theta(1-x)/x\}}{(k-1)! x^{k-1}} dx = \\ &= \frac{\mu^k \theta^k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1} e^{-\mu\theta t}}{(1+t)^2} dt. \end{aligned}$$

Последнее равенство при $k = 1$ принимает вид

$$E\pi^2 = \mu\theta - \mu^2 \theta^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu\theta t}}{t+1} dt,$$

а при $k \geq 2$ —

$$\begin{aligned} E\pi^2 &= \frac{\mu^k \theta^k}{(k-2)!} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-2} e^{-\mu\theta t}}{t+1} dt - \\ &\quad - \frac{\mu^{k+1} \theta^{k+1}}{(k-1)!} \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1} e^{-\mu\theta t}}{t+1} dt, \end{aligned}$$

откуда и следуют соотношения (12) и (13). Теорема доказана.

Следствие. Отдельный интерес для исследователя может представлять частный случай распределения Эрланга для интенсивности входящего потока λ ,

а именно — экспоненциальное распределение с параметром $\theta > 0$. Очевидно, что при этом предположении получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f_{\rho}(x) &= \mu\theta e^{-\mu\theta x}, \quad x > 0; \\ F_{\pi}(x) &= \exp\left\{-\mu\theta \frac{1-x}{x}\right\}, \quad x \in (0, 1); \\ f_{\pi}(x) &= \frac{\mu\theta}{x^2} \exp\left\{-\mu\theta \frac{1-x}{x}\right\}, \quad x \in (0, 1); \\ E\pi &= -\mu\theta e^{\mu\theta} Ei(-\mu\theta); \\ E\pi^2 &= \mu\theta + \mu^2 \theta^2 e^{\mu\theta} Ei(-\mu\theta). \end{aligned}$$

3 Заключение

Полученные в работах [1, 2, 4] и в настоящей статье расчетные формулы для определения параметров рандомизированных характеристик обслуживания и надежности находят применение в исследовании реальных информационных и технических систем. В настоящее время разработан пакет программ, который осуществляет расчет указанных характеристик для базового набора априорных распределений. Ведется работа по расширению возможностей этого пакета.

Дальнейшее продвижение в рамках данной проблематики требует рассмотрения других априорных распределений величин λ , μ и других традиционных входных параметров для СМО и восстанавливаемых устройств, которые могут представлять интерес для практики, вычисления соответствующих распределений показателей функционирования и надежности различных типов систем (в том числе систем вида $M|G|1$, $M|M|n|0$ и др.) после их рандомизации с учетом наиболее важных для практики априорных распределений параметров.

Литература

1. D'Apice C., Manzo R., Shorgin S. Some Bayesian queueing and reliability models // Electronic J. "Reliability: Theory & Applications", 2006. Vol. 1. No. 4.
2. Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовский подход к анализу систем массового обслуживания и показателей надежности // Информатика и её применения, 2007. Т. 1. Вып. 2. С. 76–82.
3. Kozlov B. A., Ushakov I. A. Reliability Handbook. — New York: Holt, Rinehart & Winston, 1970.
4. Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: экспоненциально-эрланговский случай // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 44–48.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. 1108 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $E_r(t)|G|1^*$

О. В. Петрова¹, В. Г. Ушаков²

Аннотация: Рассмотрена одноканальная система массового обслуживания (СМО) с эрланговским входящим потоком, интенсивность которого зависит от времени. Длительности обслуживания заявок имеют произвольное распределение. Получено асимптотическое разложение производящей функции длины очереди при малом изменении интенсивности потока в случае, когда загрузка системы в течение рассматриваемого промежутка времени меньше 1.

Ключевые слова: системы массового обслуживания $E_r|G|1$; эрланговский входящий поток с интенсивностью, зависящей от времени; асимптотический анализ

1 Введение

В литературе по теории массового обслуживания в основном рассматриваются модели, в которых интенсивность входного потока и интенсивность обслуживания не зависят от времени. Однако во многих реальных системах такая зависимость есть, и пренебрежение ею может привести к значительному искажению результатов.

Анализ СМО с параметрами, зависящими от времени, намного сложнее анализа аналогичных систем с постоянными параметрами. В первую очередь это связано с невозможностью непосредственного применения интегральных преобразований (Лапласа и Лапласа–Стилтьеса) к искомым характеристикам при их нахождении. Поэтому большое значение при анализе таких моделей имеет получение различных приближенных и асимптотических результатов.

Одним из направлений асимптотического анализа является получение асимптотического разложения характеристик систем, в которых изменение параметров мало в течение рассматриваемого промежутка времени. Одними из первых в этом направлении являются работы [1–3], в которых проведен асимптотический анализ различных характеристик, связанных с длиной очереди в системе $M(t)|M|1$. В работе [4] эти исследования продолжены. В ней вводится параметр ε : отношение среднего времени между двумя последовательными поступлениями заявок в систему к длине достаточно большого промежутка времени. Если интенсивность потока изменяется слабо, то ε является малым па-

раметром. Пусть $\lambda(t)$ — мгновенная интенсивность потока в момент времени t , m — среднее время обслуживания, $\lambda(\tau) = \lambda(\varepsilon t)$, $\rho(\tau) = \lambda(\tau)m$ — загрузка системы. В зависимости от поведения интенсивности рассматривается пять периодов: начальный переходный период, период малой загрузки, переходный период насыщения, период перенасыщения, переходный период в конце фазы перенасыщения. Для каждого периода получается своя асимптотика. Так, показано, что в период малой загрузки, когда $\rho(\tau) < 1$, для длины очереди характерно $N(t) = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В переходный период насыщения при $\rho(\tau) \uparrow 1$ система становится более загружена, и показано, что $N(t) = O(\varepsilon^{-1/3})$ при $\rho(\tau) \approx 1$. При $\rho(\tau) > 1$, т.е. в период перенасыщения, очередь имеет еще большую длину: $N(t) = O(\varepsilon^{-1})$. И наконец, в переходный период в конце фазы перенасыщения при $\rho(\tau) \downarrow 1$ $N(t) = O(1)$ и $N(t) = O(\varepsilon^{-1/2})$ с разной вероятностью.

В работе [5] эти результаты обобщаются на систему $M|G|1$.

В данной статье рассматривается эрланговский входящий поток с параметрами λ , r . У системы с эрланговским входящим потоком интервал между двумя соседними моментами поступления заявок можно разбить на r последовательно проходящих фаз (этапов). Времена прохождения фаз независимы между собой и одинаково распределены по экспоненциальному закону с параметром λ . При такой вероятностной интерпретации эрланговского потока реальная заявка поступает в систему лишь

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 08-01-00567-а.

¹ Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, o.petrova@inbox.ru

² Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; Институт проблем информатики Российской академии наук, ushakov@akado.ru

после прохождения всех r фаз. Частным случаем эрланговского потока являются пуассоновский (при $r = 1$), а в качестве предельного при $r \rightarrow \infty$ — детерминированный поток. Отмеченное свойство потоков Эрланга является одной из причин, по которой они широко используются для аппроксимации реальных потоков. Изменяя r от 1 до ∞ , можно получить широкий спектр различных случаев, располагающихся по своим свойствам между этими двумя крайними полюсами.

В данной статье исследуется одноканальная СМО $E_r(t)|G|1$ с эрланговским входящим потоком, зависящим от времени, и произвольным распределением времени обслуживания заявок. Получено асимптотическое разложение длины очереди в случае, когда загрузка меньше 1 на всем рассматриваемом промежутке времени.

2 Описание системы

Рассмотрим СМО $E_k(t)|G|1|_{\infty}$, т. е. одноканальную систему с неограниченным числом мест для ожидания, в которую поступает эрланговский входящий поток с интенсивностью, зависящей от времени, и с произвольной абсолютно непрерывной функцией распределения времени обслуживания. Обозначим $B(y)$ и $b(y)$ функцию распределения и плотность распределения времени обслуживания соответственно, $m_k = \int_0^{\infty} y^k b(y) dy$ — k -й момент времени обслуживания. Входящий поток Эрланга задается параметрами $(\tilde{\lambda}(t), k)$. Здесь k — порядок потока, $\tilde{\lambda}(t)k$ — среднее время между поступлениями заявки.

Будем изучать марковский процесс $(N(t), Y(t), J(t))$, где $N(t)$ — число заявок, находящихся в системе в момент t , $Y(t)$ — время, прошедшее с начала обслуживания заявки, находящейся на приборе в момент t . (Для определенности $Y(t) = 0$, если в момент t система свободна.) Случайный процесс $J(t)$ со значением $1, \dots, k$ описываем следующим образом. Интервал времени между поступлением заявок в потоке Эрланга порядка k можно представить в виде суммы k независимых случайных величин, имеющих показательное распределение с параметром $\tilde{\lambda}(t)$. Таким образом, поступление заявки в систему можно рассматривать как прохождение ею k независимых фаз поступления, длительность каждой из которых имеет показательное распределение. Тогда $J(t)$ — номер фазы поступления, на которой находится поступающая заявка в момент t .

Положим

$$P_j(n, y, t) dy = P(N(t) = n, Y(t) \in (y, y + dy), J(t) = j), \quad n \geq 1, \quad k \geq j \geq 1;$$

$$P_{0j}(t) = P(N(t) = 0, J(t) = j);$$

$$\mu(y) = \frac{b(y)}{1 - B(y)} = \frac{b(y)}{\int_y^{\infty} b(z) dz};$$

$$b(y) = \mu(y) \exp\left(-\int_0^y \mu(z) dz\right).$$

Справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_j(n, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_j(n, y, t)}{\partial y} = & \\ = -[\tilde{\lambda}(t) + \mu(y)]P_j(n, y, t) + & \\ + (1 - \delta_{j,1})\tilde{\lambda}(t)P_{j-1}(n, y, t) + & \\ + \delta_{j,1}\tilde{\lambda}(t)P_k(n - 1, y, t)(1 - \delta_{n,1}) & \quad (1) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$P_j(n, 0, t) = \int_0^{\infty} P_j(n + 1, z, t)\mu(z) dz + \delta_{n,1}\delta_{j,1}\tilde{\lambda}(t)P_{0,k}(t), \quad n \geq 1, \quad (2)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{0,j}(t)}{\partial t} = -\tilde{\lambda}(t)P_{0,j}(t) + (1 - \delta_{j,1})\tilde{\lambda}(t)P_{0,j-1}(t) + & \\ + \int_0^{\infty} P_{1,j}(1, z, t)\mu(z) dz & \quad (3) \end{aligned}$$

и начальными условиями

$$\begin{aligned} P_{0,j}(0) = \begin{cases} 1, & j = 1; \\ 0, & 2 \leq j \leq k; \end{cases} \\ P_j(n, y, 0) = 0, \quad 1 \leq j \leq k, \quad n \geq 1, \quad y > 0; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^k P_{0,j}(t) + \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P_{0,j}(y, t) dt = 1. \quad (5)$$

3 Постановка задачи

Будем решать задачу асимптотически, полагая, что интенсивность входящего потока медленно меняется. Обозначим масштаб замедления $\tau = \varepsilon t$. Положим $\tilde{\lambda}(t) = \lambda(\varepsilon t) = \lambda(\tau)$ и $P_j(n, y, \varepsilon t) = P_{n,j}(y, \tau)$.

Точное определение ε не важно для анализа. Из (1)–(5) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_\tau P_{n,j}(y, \tau) &= \\ &= -\partial_y P_{n,j}(y, \tau) + \delta_{j,1} \lambda(\tau) P_{n-1,k}(y, \tau) - \\ &\quad - [\mu(y) + \lambda(\tau)] P_{n,j}(y, \tau) + \\ &\quad + (1 - \delta_{j,1}) \lambda(\tau) P_{n,j-1}(y, \tau), \quad n \geq 2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$P_{n,j}(0, \tau) = \int_0^\infty P_{n+1,j}(z, \tau) \mu(z) dz; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_\tau P_{1,j}(y, \tau) &= \\ &= -\partial_y P_{1,j}(y, \tau) - [\mu(y) + \lambda(\tau)] P_{1,j}(y, \tau) + \\ &\quad + (1 - \delta_{j,1}) \lambda(\tau) P_{1,j-1}(y, \tau); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_\tau P_{0,j}(\tau) &= -\lambda(\tau) P_{0,j}(\tau) + \int_0^\infty P_{1,j}(z, \tau) \mu(z) dz + \\ &\quad + (1 - \delta_{j,1}) \lambda(\tau) P_{0,j-1}(\tau); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} P_{1,j}(0, \tau) &= \delta_{j,1} \lambda(\tau) P_{0,k}(\tau) + \\ &\quad + \int_0^\infty P_{2,j}(z, \tau) \mu(z) dz; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^k P_{0,j}(\tau) + \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty P_{n,j}(y, \tau) dy = 1.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $\lambda(\tau)$ имеет необходимое число производных. Обозначим

$$P_{n,j}(\tau) = \int_0^\infty P_{n,j}(y, \tau) dy, \quad n \geq 1.$$

Целью работы является нахождение разложения $P_{n,j}(y, \tau)$ по степеням ε .

4 Основные результаты

Пусть $0 < \tau < \tau_0$ и в этом промежутке $\rho(\tau) < 1$. Положим

$$G_j(y, \tau, z) = \sum_{n=1}^\infty z^n P_{n,j}(y, \tau), \quad j = 1, \dots, k.$$

Тогда из (6)–(10) получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_\tau G_j &= -\partial_y G_j - \mu(y) G_j + \lambda(\tau) [\delta_{j,1} z G_k - G_j] + \\ &\quad + (1 - \delta_{j,1}) \lambda(\tau) G_{j-1}, \quad j = 1, \dots, k; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} G_j(0, \tau, z) &= \frac{1}{z} \int_0^\infty G_j(u, \tau, z) \mu(u) du + \\ &+ \lambda(\tau) [\delta_{j,1} z P_{0,k}(\tau) - P_{0,j}(\tau) + (1 - \delta_{j,1}) P_{0,j-1}(\tau)] - \\ &\quad - \varepsilon \partial_\tau P_{0,j}(\tau), \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (12)$$

Для малого ε справедливы разложения

$$\begin{aligned} G_j(y, \tau, z) &= G_{0,j}(y, \tau, z) + \varepsilon G_{1,j}(y, \tau, z) + O(\varepsilon^2); \\ P_{n,j}(y, \tau) &= A_{n,j}(y, \tau) + \varepsilon B_{n,j}(y, \tau) + O(\varepsilon^2), \quad n \geq 1; \\ P_{0,j}(\tau) &= A_{0,j}(\tau) + \varepsilon B_{0,j}(\tau) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Из (11) и (12) получаем

$$\begin{aligned} \partial_y G_{0,j} + \mu(y) G_{0,j} - \lambda(\tau) [\delta_{j,1} z G_{0,k} - G_{0,j}] - \\ - (1 - \delta_{j,1}) \lambda(\tau) G_{0,j-1} \equiv M_j G_0 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{0,j}(0, \tau, z) &= \frac{1}{z} \int_0^\infty G_{0,j}(u, \tau, z) \mu(u) du + \\ &+ \lambda(\tau) [\delta_{j,1} z A_{0,k}(\tau) - \\ &\quad - A_{0,j}(\tau) + (1 - \delta_{j,1}) A_{0,j-1}(\tau)], \end{aligned}$$

$$M_j G_{1,j} = -\partial_\tau G_{0,j}, \quad j = 1, \dots, k;$$

$$\begin{aligned} G_{1,j}(0, \tau, z) &= \frac{1}{z} \int_0^\infty G_{1,j}(u, \tau, z) \mu(u) du + \\ &+ \lambda(\tau) [\delta_{j,1} z B_{0,k}(\tau) - B_{0,j}(\tau) + \\ &\quad + (1 - \delta_{j,1}) B_{0,j-1}(\tau)] - \partial_\tau A_{0,j}(\tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Получим решение системы (1)–(5) при $\tilde{\lambda}(t) = a$ для любого t .

Введем функции

$$p_j(z, y, s) = \sum_{n=1}^\infty z^n \int_0^\infty e^{-st} P_j(n, y, t) dt;$$

$$p_{0,j}(s) = \sum_{n=1}^\infty z^n \int_0^\infty e^{-st} P_{0,j}(t) dt.$$

Тогда из (1)–(5) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_j(z, y, s)}{\partial y} &= -[s + a + \mu(y)] p_j(z, y, s) + \\ &+ (1 - \delta_{j,1}) a p_{j-1}(z, y, s) + \delta_{j,1} a z p_k(z, y, s); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} p_j(z, 0, s) &= \frac{1}{z} \int_0^\infty p_j(z, u, s) \mu(u) du + \\ &+ \delta_{j,1} - (s + a) p_{0,j}(s) + (1 - \delta_{j,1}) a p_{0,j-1}(s) + \\ &\quad + a z \delta_{j,1} p_{0,k}(s). \end{aligned} \quad (15)$$

Общее решение системы уравнений (14) записывается в виде

$$p_j(z, y, s) = (1 - B(y)) \times \sum_{m=1}^k (z_{k,m})^{k-j} \psi_m(z, s) e^{-(s+a-az_{k,m})y}, \quad (16)$$

где $z_{k,j}$ — корни k -й степени из z (если $z = \rho e^{i\varphi}$, то $z_{k,j} = \sqrt[k]{\rho} \exp(i(\varphi + 2\pi j)/k)$). Обозначим $\gamma_j(z) = -a + az_{k,j}$, тогда $\gamma_j(z)$, $j = 1, \dots, k$ — корни уравнения $(\gamma + a)/a = z$. Заметим, что при такой нумерации $\gamma_1(1) = 0$.

Подставляя (16) в (15), получим

$$\sum_{m=1}^k \left(\frac{a + \gamma_m(z)}{a} \right)^{k-j} \delta_m(z, s) = f_j(z, s), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_m(z, s) &= (1 - z^{-1} \beta(s - \gamma_m(z))) \psi_m(z, s); \\ f_j(z, s) &= \delta_{j,1} - (s + a)p_{0,j}(s) + \\ &+ (1 - \delta_{j,1})ap_{0,j-1}(s) + az\delta_{j,1}p_{0,k}(s); \\ \beta(s) &= \int_0^\infty e^{-sy} b(y) dy. \end{aligned}$$

Решив (17) как систему линейных уравнений относительно $\delta_m(z, s)$, получим

$$\begin{aligned} \delta_m(z, s) &= k^{-1} (\gamma_m(z) + a)^{-(k-1)} \times \\ &\times \sum_{j=1}^k f_j(z, s) a^{k-j} (\gamma_m(z) + a)^{j-1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} k(\gamma_m(z) + a)^{k-1} \delta_m(z, s) &= \\ &= \sum_{j=1}^k f_j(z, s) a^{k-j} (\gamma_m(z) + a)^{j-1}. \quad (18) \end{aligned}$$

Заметим, что $f_j(z, s)$ при $j = 2, \dots, k$ не зависит от z , а

$$\begin{aligned} f_1(z, s) &= 1 - (s + a)p_{0,1}(s) + azp_{0,k}(s) = \\ &= 1 - (s + a)p_{0,1}(s) + \left(\frac{\gamma_m(z) + a}{a} \right)^k ap_{0,k}(s) \end{aligned}$$

при любых m .

Лемма. Уравнение

$$z = \beta(s - \gamma_m(z))$$

имеет единственное решение $z = z^{(m)}(s)$, $\text{Re } s > 0$, $|z^{(m)}(s)| < 1$, причем $\lim_{s \rightarrow 0} z^{(1)}(s) = 1$.

Обозначим

$$\alpha_m(s) = \gamma_m(z^{(m)}(s)).$$

Используя лемму, из (18) получаем

$$\begin{aligned} k(\gamma_m(z) + a)^{k-1} \delta_m(z, s) &= \\ &= p_{0,k}(s) \prod_{i=1}^k (\gamma_m(z) - \alpha_i(s)). \quad (19) \end{aligned}$$

Приравняв (18) и (19), получаем систему линейных уравнений для определения $p_{0,j}(s)$ для любых j

$$\begin{aligned} \sum_{j=l+1}^k [ap_{0,j-1}(s) - (s + a)p_{0,j}(s)] a^{k-l-1} C_{j-1}^l + \\ + p_{0,k}(s) C_k^l a^{k-l} = \\ = (-1)^{k-l} p_{0k}(s) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-l} \leq k} \alpha_{i_1}(s) \dots \alpha_{i_{k-l}}(s), \quad 0 \leq l \leq k-1, \end{aligned}$$

где $ap_{0,0}(s) = 1$. Находим

$$p_{0,k}(s) = \frac{a^{k-1}}{\prod_{j=1}^k [s - \alpha_j(s)]}$$

$$\begin{aligned} p_{0,j}(s) &= \left[\frac{(s+a)^{k-j}}{a^{k-j}} + \sum_{m=j}^{k-1} \left(\frac{s+a}{a} \right)^{m-j} \times \right. \\ &\times \sum_{n=k-1}^{k-m} (-1)^{n-m} C_n^m ((-1)^{k-n} \times \\ &\times \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-n} \leq k} \alpha_{i_1}(s) \dots \alpha_{i_{k-n}}(s) - \\ &\left. - C_k^m a^{k-n} \right) \frac{1}{a^{k-n}} \Big] p_{0,k}(s), \quad 1 \leq j \leq k-1. \end{aligned}$$

Пусть $t \rightarrow +\infty$. Тогда при условии $am_1 < 1$ существуют пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P_j(n, y, t) &= P_j(n, y); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P_{0,j}(t) &= P_{0,j}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_j(n, y) &= \lim_{s \rightarrow 0} sp_j(z, y, s); \\ P_{0,j} &= \lim_{s \rightarrow 0} sp_{0,j}(s), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_j(n, y) &= \\ &= \frac{1}{k} \frac{k - am_1}{k} (1 - B(y)) \times \\ &\quad \prod_{j=2}^k [-\alpha_j(0)] \\ &\quad \times \sum_{m=1}^k \left((z_{k,m})^{k-j} e^{-(a-az_{k,m})y} \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=1}^k (\gamma_m(z) - \alpha_i(0)) / (k(\gamma_m(z) + a)^{k-1} (1 - \right. \\ &\quad \left. - z^{-1}\beta(-\gamma_m(z)))) \right) a^{k-1}. \quad (20) \end{aligned}$$

При $a = \lambda(\tau)$ из (20) имеем

$$\begin{aligned} G_{0,j}(y, \tau, z) &= \frac{1}{k} \frac{k - \lambda(\tau)m_1}{k} (1 - B(y)) \times \\ &\quad \prod_{j=2}^k [-\alpha_j(0)] \\ &\quad \times \sum_{m=1}^k \left((z_{k,m})^{k-j} e^{-(\lambda(\tau) - \lambda(\tau)z_{k,m})y} \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=1}^k (\gamma_m(z) - \alpha_i(0)) / (k(\gamma_m(z) + \lambda(\tau))^{k-1} (1 - \right. \\ &\quad \left. - z^{-1}\beta(-\gamma_m(z)))) \right) \lambda(\tau)^{k-1}, \end{aligned}$$

где $z_{k,m}$ — корень k -й степени из z , $\gamma_m(z) = -\lambda(\tau) + \lambda(\tau)z_{k,m}$, а α_m определяется из леммы с заменой a на $\lambda(\tau)$.

$$\begin{aligned} A_{0,j}(\tau) &= A_{0,k}(\tau) + \\ &\quad + \sum_{m=j}^{k-1} \sum_{n=k-1}^{k-m} (-1)^{n-m} A_{0,k}(\tau) C_n^m \times \\ &\quad \times \left((-1)^{k-n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-n} \leq k} \alpha_{i_1}(0) \dots \alpha_{i_{k-n}}(0) - \right. \\ &\quad \left. - C_k^n \lambda(\tau)^{k-n} \right) \frac{1}{\lambda(\tau)^{k-n}}, \quad 1 \leq j \leq k-1; \end{aligned}$$

$$A_{0,k}(\tau) = \frac{\lambda^{k-1}(\tau)}{k} \frac{k - \lambda(\tau)m_1}{k} \prod_{j=2}^k (-\alpha_j(0)).$$

Теперь рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}_j(z, y, s)}{\partial y} &= -[s + a + \mu(y)] \hat{p}_j(z, y, s) + \\ &\quad + (1 - \delta_{j,1}) a \hat{p}_{j-1}(z, y, s) + \delta_{j,1} a z \hat{p}_k(z, y, s); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_j(z, 0, s) &= \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \hat{p}_j(z, u, s) \mu(u) du + \delta_{j,1} - \\ &\quad - (s + a) \hat{p}_{0,j}(s) + (1 - \delta_{j,1}) a \hat{p}_{0,j-1}(s) + \\ &\quad + a z \delta_{j,1} \hat{p}_{0,k}(s) - \frac{1}{s} h_j(s). \end{aligned}$$

Ее решение можно найти аналогично решению системы (14) и (15):

$$\begin{aligned} \hat{p}_j(z, y, s) &= \\ &= (1 - B(y)) \sum_{m=1}^k (z_{k,m})^{k-j} e^{-(s+a-az_{k,m})y} \times \\ &\quad \times \frac{p_{0,k}(s) \prod_{j=1}^k (\gamma_m(z) - \alpha_i(s))}{k(\gamma_m(z) + a)^{k-1} (1 - z^{-1}\beta(s - \gamma_m(z)))}, \end{aligned}$$

где

$$p_{0,k}(s) = \frac{a^{k-1} [1 - \sum_{m=1}^k ((s+a)/a)^{m-1} h_m(s)]}{\prod_{j=1}^k [s - \alpha_j(s)]}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \hat{p}_j(z, y) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{p}_j(z, y, s) = \\ &= \frac{1}{k} \frac{k - am_1}{k} \left(1 - \sum_{m=1}^k h_m(0) \right) \times \\ &\quad \prod_{j=2}^k [-\alpha_j(0)] \\ &\quad \times (1 - B(y)) \sum_{m=1}^k \left((z_{k,m})^{k-j} e^{-(a-az_{k,m})y} \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=1}^k (\gamma_m(z) - \alpha_i(0)) / (k(\gamma_m(z) + a)^{k-1} (1 - \right. \\ &\quad \left. - z^{-1}\beta(-\gamma_m(z)))) \right) a^{k-1}. \quad (21) \end{aligned}$$

Для решения системы (13) рассмотрим сначала следующую систему:

$$\begin{aligned} M_j G_{1,j} &= 0; \\ G_{1,j}(0, \tau, z) &= \frac{1}{z} \int_0^{\infty} G_{1,j}(u, \tau, z) \mu(u) du + \\ &\quad + \lambda(\tau) [\delta_{j,1} z B_{0,k}(\tau) - B_{0,j}(\tau) + \\ &\quad + (1 - \delta_{j,1}) B_{0,j-1}(\tau)] - \partial_{\tau} A_{0,j}(\tau). \end{aligned}$$

Из (21) при $a = \lambda(\tau)$, $h_m = \partial_{\tau} A_{0,j}(\tau)$ находим

$$G_{1,j}(y, \tau, z) = \frac{1}{\prod_{j=2}^k [-\alpha_j(0)]} \frac{k - \lambda(\tau)m_1}{k} \times \\ \times \left(1 - \sum_{m=1}^k \partial_\tau A_{0,m}(\tau) \right) (1 - B(y)) \times \\ \times \sum_{m=1}^k \left((z_{k,m})^{k-j} e^{-(\lambda(\tau) - \lambda(\tau)z_{k,m})y} \times \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^k (\gamma_m(z) - \alpha_i(0)) / (k(\gamma_m(z) + \lambda(\tau))^{k-1} (1 - z^{-1}\beta(-\gamma_m(z)))) \right) \lambda(\tau)^{k-1}.$$

Теперь рассмотрим систему

$$M_j G_{1,j} = -\partial_\tau G_{0,j}, \quad j = 1, \dots, k; \\ G_{1,j}(0, \tau, z) = 0.$$

Легко видеть, что

$$\xi_j = \sum_{l=1}^k (1 - B(y)) \exp[\lambda(\tau)(z_{k,l} - 1)y] \times \\ \times \left[y(\psi_l(\tau, z))'_\tau + \frac{1}{2} (z_{k,l} - 1) y^2 \lambda'(\tau) \psi_l(\tau, z) \right] z_{k,l}^{k-j}, \\ j = 1, \dots, k,$$

где

$$\psi_l(\tau, z) = \frac{1}{\prod_{j=2}^k [-\alpha_j(0)]} \frac{k - \lambda(\tau)m_1}{k} \left(1 - \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^k \partial_\tau A_{0,j}(\tau) \right) \times \\ \times \frac{\prod_{j=1}^k (\gamma_l(z) - \alpha_i(0))}{k(\gamma_l(z) + \lambda(\tau))^{k-1} (1 - z^{-1}\beta(-\gamma_l(z)))} \lambda(\tau)^{k-1}$$

является частным решением данной системы. Следовательно, решение системы (13) запишется в следующем виде:

$$G_{1,j}(y, \tau, z) = \frac{1}{\prod_{j=2}^k [-\alpha_j(0)]} \frac{k - \lambda(\tau)m_1}{k} (1 - \\ - \sum_{m=1}^k \partial_\tau A_{0,m}(\tau)) (1 - B(y)) \times \\ \times \sum_{m=1}^k \left((z_{k,m})^{k-j} e^{-(\lambda(\tau) - \lambda(\tau)z_{k,m})y} \times \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^k (\gamma_m(z) - \alpha_i(0)) / (k(\gamma_m(z) + \lambda(\tau))^{k-1} (1 - z^{-1}\beta(-\gamma_m(z)))) \right) \lambda^{k-1}(\tau) + \xi_j.$$

Литература

1. *Newell G. F.* Queues with time-dependent arrival rates I — the transition through saturation // *J. Appl. Prob.*, 1968. Vol. 5. P. 436–451.
2. *Newell G. F.* Queues with time-dependent arrival rates II — the maximum queue and the return to equilibrium // *J. Appl. Prob.*, 1968. Vol. 5. P. 579–590.
3. *Newell G. F.* Queues with time-dependent arrival rates III — a mild rush hour // *J. Appl. Prob.*, 1968. Vol. 5. P. 591–606.
4. *Keller J. B.* Time-dependent queues // *SIAM Review*, 1982. Vol. 24. No. 4. P. 401–412.
5. *Yang Y., Knessl C.* Asymptotic analysis of the $M|G|1$ queue with a time-dependent arrival rate // *Queueing Systems*, 1997. Vol. 26. P. 23–68.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ АБСОЛЮТНОЙ ПОСТОЯННОЙ В НЕРАВЕНСТВЕ БЕРРИ–ЭССЕЕНА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ ТРЕТЬЕГО МОМЕНТА*

М. О. Гапонова¹, И. Г. Шевцова²

Аннотация: Уточнены асимптотические оценки Правитца абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для случая одинаково распределенных слагаемых с конечными третьими моментами. Впервые построены аналогичные оценки для случая, когда слагаемые не имеют моментов третьего порядка. Найдены верхние оценки асимптотически правильных постоянных в центральной предельной теореме.

Ключевые слова: центральная предельная теорема; нормальная аппроксимация; оценка скорости сходимости; сумма независимых случайных величин; неравенство Берри–Эссеена; дробь Ляпунова; асимптотически правильная постоянная

1 Введение

Одним из основных подходов при построении математических моделей вероятностно-статистических закономерностей поведения тех или иных характеристик стохастических ситуаций является тот, при котором в качестве аналитической модели распределения вероятностей берется его асимптотическая аппроксимация, возникающая в соответствующей предельной теореме. Примером применения такого подхода является повсеместное использование в прикладных задачах нормальной аппроксимации, основанное на центральной предельной теореме. Однако при этом столь же часто обходится стороной вопрос о точности такой аппроксимации, тогда как этот вопрос имеет краеугольное значение с точки зрения адекватности используемых нормальных моделей, например при оценивании тех или иных рисков. Наиболее общая оценка точности нормальной аппроксимации дается хорошо известным неравенством Берри–Эссеена и представляет собой произведение некоторой постоянной и дроби Ляпунова, которая в используемых моделях, как правило, мала. Данная работа посвящена верхним асимптотическим оценкам этой постоянной, справедливым для достаточно малых значений ляпуновской дроби — очень важному случаю, который имеет место при решении многих прикладных задач.

Пусть X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения $F(x) = P(X_1 < x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям

$$EX_1 = 0; \quad DX_1 = 1. \quad (1)$$

В этом случае выполняется центральная предельная теорема, согласно которой

$$\rho(F_n, \Phi) \equiv \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$F_n(x) = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} < x\right) = F^{*n}(x\sqrt{n});$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Для конструирования в центральной предельной теореме оценок скорости сходимости, стремящихся к нулю с ростом числа слагаемых n , условий (1) оказывается недостаточно: в 1983 г. Мацквичюс [1] показал, что как бы медленно ни сходилась к нулю последовательность неотрицательных чисел δ_n , найдется последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих условиям (1), такая что для функции

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 08-01-00563, 08-01-00567 и 08-07-00152, а также Совета по грантам президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук, проект МК-654.2008.1.

¹ Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, margarita.gaponova@gmail.com

² Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, ishevtsova@cs.msu.su

распределения F_n соответствующей нормированной суммы при достаточно больших n выполняется неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \geq \delta_n.$$

Поэтому в данной работе предполагается ограниченность момента порядка $2 + \delta$ с некоторым $0 < \delta \leq 1$:

$$\beta_{2+\delta} \equiv E|X_1|^{2+\delta} < \infty. \quad (2)$$

Обозначим через $\mathcal{F}_{2+\delta}$ класс всех функций распределения F случайной величины X_1 , удовлетворяющих условиям (1) и (2). Тогда для любого $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ справедливо неравенство (см., например, [2])

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C(\delta)L_n^{2+\delta}, \quad (3)$$

где $L_n^{2+\delta}$ — дробь Ляпунова порядка $2 + \delta$:

$$L_n^{2+\delta} = \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}},$$

а $C(\delta) > 0$ зависит только от δ .

Случай $\delta = 1$ представляет особый интерес, поскольку, как известно, выполнение условия (2) при $\delta > 1$ не приводит, вообще говоря, к повышению скорости сходимости в центральной предельной теореме.

Впервые неравенство (3) было доказано при $\delta = 1$ в 1941–1942 гг. Берри [3] и Эссееном [4]. История отыскания наименьшего возможного значения постоянной $C(1)$ богата результатами: этой задаче посвящены работы Берри [3], Эссеена [4, 5], Сюя [6], Бергстрёма [7], Такано [8], Колмогорова [9], Уоллеса [10], Рогозина [11], Золотарёва [12–14], ван Бика [15, 16], Правитца [17], Шиганова [18], Феллера [19], Бенткуса [20, 21], Чистякова [22–24], Нагаева и Чеботарёва [25], Шевцовой [26, 27] (более подробный обзор можно найти, например, в работе [27]). Наилучшая на сегодняшний день оценка абсолютной постоянной $C(1) \leq 0.7005$ получена в [27].

Случай $0 < \delta < 1$ изучен гораздо меньше. Верхние оценки величины $C(\delta)$ найдены в 1983 г. Тысяком [28] и уточнены в работе авторов [29] (табл. 1).

В то же время во многих прикладных задачах неравенство Берри–Эссеена используется при малых значениях ляпуновской дроби, поэтому возникает естественный интерес к конструированию асимптотических верхних оценок константы $C(\delta)$, обеспечивающих выполнение неравенства (3) при малых $L_n^{2+\delta}$. Один подход к решению этой задачи предложен еще в 1966 г. Золотарёвым [12] для $\delta = 1$ и заключается в уточнении структуры неравенства Берри–Эссеена за счет внесения дополнительных слагаемых, имеющих более высокий порядок ма-

Таблица 1 Верхние оценки величины $C(\delta)$ при некоторых δ из работы [29]

δ	C
0,1	$\leq 1,0739$
0,2	$\leq 1,0001$
0,3	$\leq 0,9407$
0,4	$\leq 0,8876$
0,5	$\leq 0,8454$
0,6	$\leq 0,8126$
0,7	$\leq 0,7876$
0,8	$\leq 0,7720$
0,9	$\leq 0,7671$

лости, чем L_n^3 , при $L_n^3 \rightarrow 0$. Развивая эту идею, автор получил асимптотическое разложение

$$\rho(F_n, \Phi) \leq 1,300356L_n^3 + 0,1387335(L_n^3)^{4/3} + o\left((L_n^3)^{4/3}\right), \quad L_n^3 \rightarrow 0,$$

справедливое и в общем случае разнораспределенных случайных слагаемых. Два года спустя он уточнил [13, 14] этот результат:

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \leq 0,81968L_n^3 + 0,05895(L_n^3)^{4/3} + C_3(L_n^3)^{5/3} \quad (4)$$

в общем случае и

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \leq 0,81968L_n^3 - 0,9995(L_n^3)^2 + \tilde{C}_3(L_n^3)^3 \quad (5)$$

в случае одинаково распределенных случайных слагаемых, где C_3 и \tilde{C}_3 — некоторые положительные постоянные.

В 1975 г. был опубликован замечательный результат Правитца [17]

$$\rho(F_n, \Phi) \leq 0,2731\varepsilon_n + 0,1997\varepsilon'_n + 0,0912\varepsilon''_n, \quad \varepsilon_n + \varepsilon'_n \leq 0,2;$$

$$\rho(F_n, \Phi) \leq 0,2763\varepsilon_n + 0,2000\varepsilon'_n + 0,0972\varepsilon''_n, \quad \varepsilon_n + \varepsilon'_n \leq \frac{2}{7};$$

где

$$\varepsilon_n = L_n^3 \left(\frac{n}{n-1}\right)^{3/2}; \quad \varepsilon'_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{3/2}; \quad \varepsilon''_n = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n-1}\right)^2,$$

а также серия следствий

$$C(1) \leq \begin{cases} 0.5151, & \varepsilon_n \leq 0,1; \\ 0.5270, & \varepsilon_n \leq \frac{1}{7}. \end{cases}$$

Результат Правитца можно переписать в традиционных обозначениях. Для этого достаточно заметить, что из условий вида $L_n^3 \leq \ell$, $0 < \ell < 1$, вытекает

$$n \geq \lceil \ell^{-2} \rceil, \quad \varepsilon_n \leq \frac{L_n^3}{(1 - \ell^2)^{3/2}} \leq \frac{\ell}{(1 - \ell^2)^{3/2}};$$

$$\varepsilon_n + \varepsilon'_n \leq \frac{2\ell}{(1 - \ell^2)^{3/2}},$$

в частности условие $L_n^3 \leq 0,0985$ влечет

$$n \geq 104, \quad \varepsilon_n + \varepsilon'_n < 2 \cdot 0,09996 < 0,2,$$

а из условия $L_n^3 \leq 0,1387$ вытекает, что

$$n \geq 52, \quad \varepsilon_n + \varepsilon'_n < 2 \cdot 0,1428 < \frac{2}{7}.$$

Таким образом, результатам Правитца можно придать следующий вид:

$$\rho(F_n, \Phi) \leq 0,2772L_n^3 + \frac{0,2027}{\sqrt{n}} + \frac{0,0930}{n},$$

$$L_n^3 \leq 0,0985; \quad (6)$$

$$\rho(F_n, \Phi) \leq 0,2845L_n^3 + \frac{0,2060}{\sqrt{n}} + \frac{0,1011}{n},$$

$$L_n^3 \leq 0,1387; \quad (7)$$

$$C(1) \leq \begin{cases} 0,5151, & L_n^3 \leq 0,0985; \\ 0,5270, & L_n^3 \leq 0,1387. \end{cases} \quad (8)$$

Данные оценки справедливы и в общем случае разнораспределенных случайных слагаемых.

В этой же работе Правитц анонсировал асимптотическое разложение, существенно уточняющее результаты Золотарёва:

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} L_{n-1}^3 + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(n-1)} + C_P (L_n^3)^2, \quad (9)$$

где C_P — некоторая положительная постоянная, а также высказал предположение, что коэффициент

$$\frac{2}{3\sqrt{2\pi}} = 0,2659 \dots$$

при L_{n-1}^3 не может быть уменьшен. По-видимому, этот мало цитируемый результат не был замечен

общественностью или, по крайней мере, вызвал некоторое недоумение со стороны исследователей, поскольку к тому времени был хорошо известен результат Эссеена [5]:

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_3} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(F_n, \Phi)}{L_n^3} = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = 0,4097 \dots,$$

на первый взгляд плохо согласующийся с анонсом Правитца. К тому же доказательство неравенства (9), по-видимому, автор предполагал опубликовать во второй части работы [17] (название указанной работы содержит в конце римскую цифру I, указывающую на наличие продолжения), которая по каким-то причинам опубликована не была. Тем не менее анонсированная оценка является верной: по крайней мере, из результатов опубликованной работы [17] вытекают асимптотические оценки (подробнее см. разд. 4)

$$\limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3: L_n^3 = \ell} \frac{\rho(F_n, \Phi)}{L_n^3} \leq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} < 0,2660;$$

$$\limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n, F \in \mathcal{F}_3: L_n^3 = \ell} \frac{\rho(F_n, \Phi)}{L_n^3} \leq \frac{7}{6\sqrt{2\pi}} < 0,4655.$$

Последняя оценка обычно ассоциируется с именем Бенткуса, воспринявшего идеи Правитца. Эти идеи были развиты Бенткусом в работах [20, 21] для неравномерных оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме, а для равномерной он доказал асимптотическое разложение

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} L_n^3 + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} + C_B (L_n^3)^{5/3}, \quad (10)$$

где C_B — некоторая положительная постоянная. Оно несколько лучше по сравнению с (9) в отношении вида основных членов оценки и хуже в отношении остаточного. Из этого разложения в силу неравенства $\beta_3 \geq 1$ вытекает оценка более простой структуры

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{7}{6\sqrt{2\pi}} L_n^3 + C_B (L_n^3)^{5/3}, \quad (11)$$

также являющаяся следствием разложения (9), шестнадцатью годами ранее анонсированного Правитцем.

В 2001 г. Г. П. Чистяков [22–24] доказал неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} L_n^3 + C_{\text{ч}} (L_n^3)^{40/39} |\log L_n^3|^{7/6}, \quad (12)$$

где $C_{\text{ч}}$ — некоторая положительная абсолютная постоянная, в котором коэффициент при L_n^3 совпадает с асимптотически наилучшей константой Эссеена.

К сожалению, из-за отсутствия конкретных числовых оценок величин C , C_3 , $C_{\text{В}}$ и $C_{\text{ч}}$ даже при малых значениях ляпуновской дроби L_n^3 асимптотическими неравенствами Золотарёва (4), (5), Бенткуса (10), (11) и Чистякова (12) нельзя пользоваться на практике. Наиболее выгодно с этой точки зрения выглядит результат Правитца (8).

Отметим еще один интересный результат. В 2006 г. Нагаев и Чеботарёв [25] получили оценку

$$\rho(F_n, \Phi) \leq 0,515489L_n^3 + 0,427675 \frac{1}{\sqrt{n}} + 0,153597 \frac{1}{n}, \quad n \geq 1, \quad (13)$$

выгодно отличающуюся от асимптотических разложений Золотарёва, Бенткуса и Чистякова наличием конкретных числовых значений всех входящих в нее констант и от результатов Правитца — отсутствием каких бы то ни было условий на L_n^3 . Из (13) вытекают некоторые «условные» верхние оценки постоянной $C(1)$ в неравенстве Берри–Эссеена (табл. 2).

Таблица 2 Некоторые «условные» верхние оценки постоянной $C(1)$ в неравенстве Берри–Эссеена

β_3	$n \geq 3$	$n \geq 10$
≥ 3	$C_0 \leq 0,687607$	$C_0 \leq 0,674238$
≥ 4	$C_0 \leq 0,644578$	$C_0 \leq 0,634551$
≥ 10	$C_0 \leq 0,567124$	$C_0 \leq 0,563114$

Сравнивая (13) с оценками Правитца (6) и (7), можно заметить, что значения всех входящих в нее констант почти в два раза больше соответствующих коэффициентов в (6). Более того, в качестве асимптотической верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена из (13) не может быть получено значение, меньшее 0,515489, из работы же Правитца можно получить значение, сколько угодно близкое к $7/(6\sqrt{2\pi}) = 0,4654\dots$, что примерно на пять сотых меньше. В этом смысле результат Правитца лучше.

Таблица 3 Верхние оценки величины $C(\delta)$ в (3) для $L_n^{2+\delta} \leq 0,4$ при некоторых δ

δ	C
0,1	0,6995
0,2	0,9230
0,3	0,8527
0,4	0,7722
0,5	0,7049
0,6	0,6674
0,7	0,6518
0,8	0,6508
0,9	0,6611
1,0	0,6861

Для случая $0 < \delta < 1$ аналогичные асимптотические результаты отсутствуют вовсе. Цель данной работы — восполнить этот пробел. В частности, будет показано, что наилучшие на сегодняшний день верхние абсолютные оценки величины $C(\delta)$, полученные в работе [29], могут быть существенно уточнены уже при $L_n^{2+\delta} \leq 0,4$ (табл. 3).

Кроме того, будет уточнен результат Правитца для одинаково распределенных слагаемых:

$$C(1) \leq \begin{cases} 0,4889, & L_n^3 \leq 0,0985; \\ 0,5010, & L_n^3 \leq 0,1387. \end{cases}$$

2 Вспомогательные результаты

В данном разделе приведено неравенство сглаживания Правитца, а также некоторые оценки для характеристических функций, являющиеся следствиями результатов работы одного из авторов [30].

Обозначим через \mathcal{G} класс комплекснозначных функций $K(t)$, $t \in [-1, 1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) $\text{Re } K(t)$ четна, $\text{Im } K(t)$ нечетна;
- (ii) $\text{Re } K(t)$ абсолютно интегрируема на $[-1, 1]$;
- (iii) для некоторого $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta = \text{const} \neq 0$, функция $\text{Im } K(t) - \zeta/t$ абсолютно интегрируема на $[-1, 1]$;
- (iv) для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 e^{itx} K(t) dt \geq \frac{1}{2} - E(x),$$

где $E(x)$ — функция вырожденного в нуле распределения

$$E(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Лемма 1 (см. [31]). Пусть $K(t) \in \mathcal{G}$ с $\zeta = 1/(2\pi)$, $F(x)$ и $G(x)$ — произвольные функции распределения с характеристическими функциями $f(t)$ и $g(t)$ соответственно. Если $G(x)$ непрерывна, то для любых $T \geq T_1 > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| &\leq \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} \left| K\left(\frac{t}{T}\right) \right| |f(t) - \\ &- g(t)| dt + \frac{1}{T} \int_{T_1 < |t| \leq T} \left| K\left(\frac{t}{T}\right) \right| |f(t)| dt + \\ &+ \int_{-T_1}^{T_1} \left| \frac{1}{T} K\left(\frac{t}{T}\right) - \frac{i}{2\pi t} \right| |g(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > T_1} |g(t)| \frac{dt}{|t|}. \end{aligned}$$

Лемма 2 (см. [31]). Функция

$$K(t) = \frac{1}{2} (1 - |t|) + \frac{i}{2} \left[(1 - |t|) \cot \pi t + \frac{\text{sign } t}{\pi} \right], \quad -1 \leq t \leq 1,$$

принадлежит классу \mathcal{G} с $\zeta = 1/(2\pi)$. При этом для всех $t \in \mathbb{R}$ справедливы следующие оценки:

$$|K(t)| \leq \frac{1,0253}{2\pi|t|},$$

$$\left| K(t) - \frac{i}{2\pi t} \right| \leq \frac{1}{2} \left(1 - |t| + \frac{\pi^2 t^2}{18} \right).$$

Следующий довольно очевидный факт впервые был замечен Тысяаком [28] при $n = 2$.

Лемма 3. Для любого $0 < \delta \leq 1$ и целого $n \geq 0$

$$\gamma(n, \delta) = \sup_{x > 0} \frac{1}{x^{n+\delta}} \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^n \frac{(ix)^k}{k!} \right| < \infty.$$

Доказательство. Функция

$$g(x) = \frac{1}{|x|^{n+\delta}} \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^n \frac{(ix)^k}{k!} \right|, \quad x \in \mathbb{R},$$

положительна для всех $x \neq 0$, причем

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^{1-\delta}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!} < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{n+\delta}} \left(1 + \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} \right) = 0,$$

следовательно, $g(x)$ непрерывна и ограничена на \mathbb{R} . Кроме того, $g(x)$ четна, поэтому

$$\gamma(n, \delta) = \sup_{x > 0} g(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) < \infty,$$

что и требовалось доказать. \square

Из доказанной леммы очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. (см. также [28]) Для любого $0 < \delta \leq 1$ справедлива оценка

$$\left| e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2} \right| \leq \gamma(2, \delta) |x|^{2+\delta}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Перейдем теперь к конструированию оценок разности между допредельной и предельной нормальной характеристическими функциями. Обозначим

$$f(t) = \mathbb{E} e^{itX_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x),$$

$$\begin{aligned} f_n(t) &\equiv \mathbb{E} \exp \left\{ it \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \right\} = \\ &= \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Лемма 4. В условиях (1) и (2) с некоторым $0 < \delta \leq 1$ справедлива оценка

$$\left| f(t) - e^{-t^2/2} \right| \leq \gamma(\delta) \beta_{2+\delta} |t|^{2+\delta} + \frac{t^4}{8}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(\delta) &\equiv \gamma(2, \delta) = \\ &= \sup_{x > 0} \sqrt{\left(\frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^{2+\delta}} \right)^2 + \left(\frac{\sin x - x}{x^{2+\delta}} \right)^2}, \\ &0 < \delta \leq 1. \end{aligned}$$

Значения величины $\gamma(\delta)$ для некоторых δ приведены в табл. 4.

Доказательство. В силу условий леммы имеем

$$\begin{aligned} f(t) - e^{-t^2/2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx + \frac{(tx)^2}{2} \right) dF(x) + \\ &+ 1 - \frac{t^2}{2} - e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Оценивая подынтегральное выражение при помощи следствия 1 и применяя элементарное неравенство

Таблица 4 Значения величин $\gamma(\delta)$, $\varkappa(\delta)$ и $\theta_0(\delta)$ для некоторых δ

δ	$\gamma(\delta)$	$\varkappa(\delta)$	$\theta_0(\delta)$
0+	0,5316	0,5000	6,2831
0,05	0,4886	0,4564	6,1331
0,10	0,4499	0,4171	5,9941
0,15	0,4150	0,3816	5,8631
0,20	0,3834	0,3495	5,7384
0,25	0,3549	0,3204	5,6183
0,30	0,3291	0,2941	5,5021
0,35	0,3059	0,2702	5,3887
0,40	0,2848	0,2485	5,2778
0,45	0,2658	0,2288	5,1686
0,50	0,2487	0,2109	5,0609
0,55	0,2332	0,1946	4,9542
0,60	0,2194	0,1797	4,8483
0,65	0,2071	0,1662	4,7427
0,70	0,1961	0,1538	4,6374
0,75	0,1866	0,1425	4,5320
0,80	0,1784	0,1322	4,4263
0,85	0,1716	0,1228	4,3200
0,90	0,1666	0,1143	4,2131
0,95	0,1638	0,1064	4,1051
1,00	0,1667	0,0992	3,9959

$$|e^{-x} - 1 + x| \leq \frac{x^2}{2}, \quad x \geq 0,$$

к оставшимся слагаемым, получаем

$$\begin{aligned} |f(t) - e^{-t^2/2}| &\leq \gamma(\delta) \int_{-\infty}^{\infty} |tx|^{2+\delta} dF(x) + \frac{t^4}{8} = \\ &= \gamma(\delta)\beta_{2+\delta}|t|^{2+\delta} + \frac{t^4}{8}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Лемма 5 (см. [30]). В условиях (1) и (2) с некоторым $0 < \delta \leq 1$ справедлива оценка

$$|f(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \varkappa(\delta) (\beta_{2+\delta} + \sigma^{2+\delta}) |t|^{2+\delta} \right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$\varkappa(\delta) = \sup_{x>0} \frac{|\cos x - 1 + x^2/2|}{x^{2+\delta}}, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

Значения величины $\varkappa(\delta)$ для некоторых δ приведены в табл. 4.

Лемма 6 (см. [30]). В условиях (1) и (2) с некоторым $0 < \delta \leq 1$ справедлива оценка

$$|f(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{1 - \cos \left((\beta_{2+\delta} + 1)^{1/\delta} t \right)}{(\beta_{2+\delta} + 1)^{2/\delta}} \right\},$$

$$\theta_0(\delta) \leq (\beta_{2+\delta} + 1)^{1/\delta} |t| \leq 2\pi,$$

где $\theta_0(\delta)$ — единственный корень уравнения

$$\frac{\delta \theta^2}{2} + \theta \sin \theta + (2 + \delta)(\cos \theta - 1) = 0,$$

лежащий в интервале $(\pi, 2\pi)$.

Замечание 1. В работе [30] также было показано, что минимум из трех оценок для $|f(t)|$, устанавливаемых леммами 5, 6 и неравенством $|f(t)| \leq 1$, имеет следующий вид:

$$|f(t)| \leq \exp\{-\psi_\delta(t)\},$$

где

$$\psi_\delta(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - \varkappa(\delta) (\beta_{2+\delta} + 1) |t|^{2+\delta}, & |t| \leq \frac{\theta_0(\delta)}{(\beta_{2+\delta} + 1)^{1/\delta}}, \\ \frac{1 - \cos \left((\beta_{2+\delta} + 1)^{1/\delta} t \right)}{(\beta_{2+\delta} + 1)^{2/\delta}}, & \theta_0(\delta) \leq (\beta_{2+\delta} + 1)^{1/\delta} |t| \leq 2\pi, \\ 0, & |t| \geq \frac{2\pi}{(\beta_{2+\delta} + 1)^{1/\delta}}. \end{cases}$$

Значения величины $\theta_0(\delta)$ при некоторых δ приведены в табл. 4.

Как несложно убедиться,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \theta_0(\delta) = 2\pi = 6,2831 \dots$$

Лемма 7. В условиях (1) и (2) с некоторым $0 < \delta \leq 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |f_n(t) - e^{-t^2/2}| &\leq \left(\gamma(\delta) \frac{\beta_{2+\delta} |t|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} + \frac{t^4}{8n} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} t \frac{n-1}{n} \left(1 - 2\varkappa(\delta) (\beta_{2+\delta} + 1) \frac{|t|^\delta}{n^{\delta/2}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где $\gamma(\delta)$ и $\varkappa(\delta)$ определены в леммах 4 и 5 соответственно.

Доказательство. Из леммы 5 вытекает, что

$$\begin{aligned} \max \left\{ f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right), e^{-t^2/(2n)} \right\} &\leq \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2n} + \varkappa(\delta) (\beta_{2+\delta} + 1) \frac{|t|^{2+\delta}}{n^{1+\delta/2}} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Применяя элементарное неравенство

$$|u^n - v^n| = |u - v| \left| \sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-k-1} \right| \leq |u - v| \left(\sum_{k=0}^{n-1} |u|^k |v|^{n-k-1} \right) \leq n|u - v|w^{n-1},$$

справедливое для любых комплексных чисел u, v и $w \geq \max\{|u|, |v|\}$ с

$$u = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2n} \right\}; \quad v = f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right),$$

$$w = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2n} + \varkappa(\delta)(\beta_{2+\delta} + 1) \frac{|t|^{2+\delta}}{n^{1+\delta/2}} \right\},$$

и оценивая разность $|u - v|$ при помощи леммы 4:

$$|u - v| = \left| f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-t^2/(2n)} \right| \leq \gamma(\delta)\beta_{2+\delta} \frac{|t|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} + \frac{t^4}{8n}, \quad t \in \mathbb{R},$$

получаем требуемое. \square

3 Основной результат

Всюду далее будем использовать следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} R_n &\equiv \rho(F_n, \Phi) = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|; \\ \varepsilon &= L_n^{2+\delta} = \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}; \quad \lambda = \sqrt{\frac{n-1}{n}}; \\ \gamma(\delta) &= \sup_{x>0} \sqrt{\left(\frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^{2+\delta}} \right)^2 + \left(\frac{\sin x - x}{x^{2+\delta}} \right)^2}; \\ \varkappa(\delta) &= \sup_{x>0} \frac{|\cos x - 1 + x^2/2|}{x^{2+\delta}}. \end{aligned} \right\} (14)$$

Теорема 1. Пусть $\theta_0(\delta)$ — единственный корень уравнения

$$\frac{\delta\theta^2}{2} + \theta \sin \theta - (2 + \delta)(1 - \cos \theta) = 0, \quad 0 < \theta \leq 2\pi,$$

лежащий в интервале $(\pi, 2\pi)$. Обозначим

$$T = \frac{2\pi}{(\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta}}, \quad t_1(\delta) = \frac{\theta_0(\delta)}{2\pi}.$$

Тогда для всех $n \geq 2$ и $0 < t_0 \leq t_1(\delta)$ справедлива оценка

$$R_n \leq I_1(\lambda T, t_0, \delta) \frac{\varepsilon}{\lambda^{2+\delta}} + \frac{(\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} + I_2(\lambda T, t_0, \delta) \frac{(\varepsilon')^{2/\delta}}{\lambda^4} + I_3(T, t_0, \delta)(\varepsilon + \varepsilon')^{2/\delta} + \frac{(\varepsilon + \varepsilon')^{3/\delta}}{144\sqrt{2\pi}},$$

где

$$I_1(v, t_0, \delta) = 2\gamma(\delta)v^{2+\delta} \int_0^{t_0} |K(t)| \times \exp \left\{ -\frac{v^2 t^2}{2} (1 - 2(2\pi)^\delta \varkappa(\delta)t^\delta) \right\} t^{2+\delta} dt,$$

$$I_2(v, t_0, \delta) = \frac{v^4}{4} \int_0^{t_0} |K(t)| \times \exp \left\{ -\frac{v^2 t^2}{2} (1 - 2(2\pi)^\delta \varkappa(\delta)t^\delta) \right\} t^4 dt, \quad v > 0;$$

$$I_3(T, t_0, \delta) = \frac{I_{31}(T, t_0) + I_{32}(T, \delta) + I_{33}(T, t_0, \delta) - 1}{4\pi^2};$$

$$I_{31}(T, t_0) = T^2 \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi t} - 1 + t - \frac{\pi^2 t^2}{18} \right) e^{-T^2 t^2/2} dt;$$

$$I_{32}(T, \delta) = 2T^2 \int_{t_1(\delta)}^1 |K(t)| \exp \left\{ -T^2 \frac{1 - \cos 2\pi t}{4\pi^2} \right\} dt;$$

$$I_{33}(T, t_0, \delta) = \frac{1,0253}{\pi} T^2 \times \int_{t_0}^{t_1(\delta)} \exp \left\{ -\frac{T^2 t^2}{2} (1 - 2(2\pi)^\delta \varkappa(\delta)t^\delta) \right\} \frac{dt}{t};$$

$$K(t) = \frac{1}{2} (1 - |t|) + \frac{i}{2} \left[(1 - |t|) \cot \pi t + \frac{\text{sign } t}{\pi} \right], \quad |t| \leq 1.$$

При этом

$$\sup_{v>0} I_k(v, t_0, \delta) < \infty, \quad k = 1, 2, 3,$$

для всех $0 < \delta \leq 1$ и $0 < t_0 \leq t_1(\delta)$.

Значения величин $\gamma(\delta)$ и $\varkappa(\delta)$ для некоторых δ приведены в леммах 4 и 5 соответственно, а значения $\theta_0(\delta)$ — в замечании 1.

Доказательство. Напомним, что $f(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины X_1 , а $f_n(t)$ — характеристическую функцию нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$. Из лемм 1 и 2 вытекает, что для величины R_n при всех $0 < t_0 \leq 1$ и $T > 0$ справедлива оценка (полагаем $T_1 = t_0 T$)

$$R_n \leq \int_{-t_0}^{t_0} |K(t)| \left| f_n(Tt) - e^{-T^2 t^2/2} \right| dt + \int_{t_0 < |t| \leq 1} |K(t)| |f_n(Tt)| dt + \int_{-t_0}^{t_0} \left| K(t) - \frac{i}{2\pi t} \right| e^{-T^2 t^2/2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > t_0} e^{-T^2 t^2/2} \frac{dt}{|t|} \equiv \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4.$$

Учитывая результат леммы 2

$$\left| K(t) - \frac{i}{2\pi t} \right| \leq \frac{1}{2} \left(1 - |t| + \frac{\pi^2 t^2}{18} \right), \quad |t| \leq 1,$$

для \tilde{I}_3 и \tilde{I}_4 получаем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4 &\equiv \int_{-t_0}^{t_0} \left| K(t) - \frac{i}{2\pi t} \right| e^{-T^2 t^2/2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > t_0} e^{-T^2 t^2/2} \frac{dt}{|t|} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-t_0}^{t_0} \left(1 - |t| + \frac{\pi^2 t^2}{18} \right) e^{-T^2 t^2/2} dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} e^{-T^2 t^2/2} \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^{\infty} \left(1 - t + \frac{\pi^2 t^2}{18} \right) e^{-T^2 t^2/2} dt + \\ &+ \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi t} - 1 + t - \frac{\pi^2 t^2}{18} \right) e^{-T^2 t^2/2} dt \equiv \\ &\equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{T} - \frac{1}{T^2} + \frac{\pi^{5/2}}{18\sqrt{2}} \frac{1}{T^3} + \frac{I_{31}(T, t_0)}{T^2}. \end{aligned}$$

Оценим \tilde{I}_2 . Пусть t_1 — произвольное число на отрезке $[t_0, 1]$. Разобьем область интегрирования в \tilde{I}_2 на две части

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &\equiv \int_{t_0 \leq |t| \leq 1} |K(t)| |f_n(Tt)| dt = \\ &= \int_{t_0 \leq |t| \leq t_1} |K(t)| |f_n(Tt)| dt + \int_{t_1 \leq |t| \leq 1} |K(t)| |f_n(Tt)| dt \equiv \tilde{I}_{21} + \tilde{I}_{22}. \end{aligned}$$

Для оценки первого интеграла применим результаты леммы 5

$$|f_n(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} (1 - 2\kappa(\delta)(\varepsilon + \varepsilon')|t|^\delta) \right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

и леммы 2

$$|K(t)| \leq \frac{1,0253}{2\pi|t|}, \quad |t| \leq 1,$$

а второй интеграл оценим при помощи более тонкого неравенства из леммы 6

$$|f_n(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{1 - \cos((\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta} t)}{(\varepsilon + \varepsilon')^{2/\delta}} \right\};$$

$$\theta_0(\delta) \leq (\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta} |t| \leq 2\pi.$$

Последнее неравенство можно использовать для оценки второго интеграла в \tilde{I}_2 , если величины t_1 и T удовлетворяют соотношениям

$$\theta_0(\delta) \leq t_1 T (\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta}, \quad T (\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta} \leq 2\pi.$$

С другой стороны, принимая во внимание слагаемое вида $1/T$ в оценке для $\tilde{I}_3 + \tilde{I}_4$, величину T нужно выбирать как можно большей, поэтому окончательно положим

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{(\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta}}; \\ t_1 &= t_1(\delta) = \frac{\theta_0(\delta)}{T(\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta}} = \frac{\theta_0(\delta)}{2\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Тогда для любого $t_0 \leq t_1(\delta)$ получим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{21} &\leq \frac{1,0253}{\pi} \times \\ &\times \int_{t_0}^{t_1(\delta)} \exp \left\{ -\frac{T^2 t^2}{2} (1 - 2(2\pi)^\delta \kappa(\delta) t^\delta) \right\} \frac{dt}{t} \equiv \\ &\equiv \frac{I_{33}(T, t_0, \delta)}{T^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{22} &\leq 2 \int_{t_1(\delta)}^1 |K(t)| \exp \left\{ -T^2 \frac{1 - \cos 2\pi t}{4\pi^2} \right\} dt \equiv \\ &\equiv \frac{I_{32}(T, \delta)}{T^2}. \end{aligned}$$

Величину \tilde{I}_1 оценим при помощи леммы 7, согласно которой в обозначениях (14) справедлива оценка

$$\begin{aligned} |f_n(t) - e^{-t^2/2}| &\leq \left(\gamma(\delta)\varepsilon|t|^{2+\delta} + \frac{t^4}{8n} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\lambda^2 t^2}{2} (1 - 2\kappa(\delta)(\varepsilon + \varepsilon')|t|^\delta) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

откуда с учетом (15) и соотношения $1/n = (\varepsilon')^{2/\delta}$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &\leq \int_0^{t_0} \left(2\gamma(\delta)\varepsilon(Tt)^{2+\delta} + \frac{1}{4} (\varepsilon')^{2/\delta} (Tt)^4 \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(\lambda Tt)^2}{2} (1 - 2(2\pi)^\delta \kappa(\delta)t^\delta) \right\} dt \equiv \\ &\equiv I_1(\lambda T, t_0, \delta) \frac{\varepsilon}{\lambda^{2+\delta}} + \\ &\quad + I_2(\lambda T, t_0, \delta) \frac{(\varepsilon')^{2/\delta}}{\lambda^4}. \end{aligned}$$

Можно убедиться, что введенные функции $I_k(v, t_0, \delta)$, $k = 1, 2, 3$, непрерывны и имеют конечные пределы при $v \rightarrow \infty$ и $v \rightarrow 0$ для всех рассматриваемых значений t_0 и δ , а потому являются ограниченными при всех $v > 0$. \square

4 Асимптотические оценки

Теорема 2. Для асимптотически правильных постоянных

$$\begin{aligned} C_*(\delta) &\equiv \limsup_{\ell \rightarrow 0+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: L_n^{2+\delta} = \ell} \frac{\rho(F_n, \Phi)}{L_n^{2+\delta}}, \\ &0 < \delta \leq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^*(\delta) &\equiv \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n, F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: L_n^{2+\delta} = \ell} \frac{\rho(F_n, \Phi)}{L_n^{2+\delta}}, \\ &0 < \delta \leq 1, \end{aligned}$$

справедливы оценки

$$\begin{aligned} C_*(\delta) &\leq C^*(\delta) \leq 2^{\delta/2} \gamma(\delta) \frac{\Gamma((2+\delta)/2)}{\pi} \equiv \\ &\equiv \overline{C}(\delta), \\ &0 < \delta < 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_*(1) &\leq \lim_{\delta \rightarrow 1-} \overline{C}(\delta) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} < 0,2660; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^*(1) &\leq \lim_{\delta \rightarrow 1-} \overline{C}(\delta) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{7}{6\sqrt{2\pi}} < 0,4655. \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию Эйлера.

Значения величины $\overline{C}(\delta)$ при некоторых δ приведены в табл. 5.

Таблица 5 Значения величины $\overline{C}(\delta)$ для некоторых δ

δ	$\overline{C}(\delta)$
0+	0,1692
0,05	0,1561
0,10	0,1444
0,15	0,1339
0,20	0,1245
0,25	0,1161
0,30	0,1085
0,35	0,1017
0,40	0,0956
0,45	0,0902
0,50	0,0854
0,55	0,0810
0,60	0,0772
0,65	0,0738
0,70	0,0709
0,75	0,0685
0,80	0,0665
0,85	0,0650
0,90	0,0642
0,95	0,0642
1-	0,0665

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что для величины

$$\begin{aligned} R_\delta(n, \ell) &= \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: L_n^{2+\delta} = \ell} \frac{\rho(F_n, \Phi)}{L_n^{2+\delta}}, \\ &0 < \delta \leq 1, \quad n \geq \ell^{-2/\delta}, \quad \ell > 0, \end{aligned}$$

справедливы оценки

$$\begin{aligned} R_\delta(n, \ell) &\leq I_1 \left(\frac{2\pi}{(\ell + n^{-\delta/2})^{1/\delta}}, t_0, \delta \right) \left(\frac{n}{n-1} \right)^{1+\delta/2} + \\ &+ C_1 \ell^{1/\delta-1}, \quad 0 < \delta < 1, \end{aligned}$$

$$R_1(n, \ell) \leq I_1 \left(\frac{2\pi}{\ell + n^{-1/2}}, t_0, 1 \right) \left(\frac{n}{n-1} \right)^{3/2} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{1}{\ell\sqrt{n}} \right) + C_2\ell,$$

где I_1 определено в формулировке указанной теоремы, t_0 — произвольное число на интервале $(0, \theta_0(\delta)/(2\pi))$, C_1 и C_2 не зависят от ℓ и n . Обозначим

$$v_\ell = \frac{2\pi}{(2\ell)^{1/\delta}}.$$

Тогда для всех $n \geq \ell^{-2/\delta}$ имеет место неравенство

$$I_1 \left(\frac{2\pi}{(\ell + n^{-\delta/2})^{1/\delta}}, t_0, \delta \right) \leq \sup_{v \geq v_\ell} I_1(v, t_0, \delta) \equiv J_\ell(t_0, \delta),$$

с учетом которого для достаточно малых ℓ получаем оценки

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} R_\delta(n, \ell) \leq J_\ell(t_0, \delta) + C_1\ell^{1/\delta-1}, \quad 0 < \delta < 1;$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} R_1(n, \ell) \leq J_\ell(t_0, 1) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} + C_2\ell,$$

а также

$$\sup_{n \geq \ell^{-2/\delta}} R_\delta(n, \ell) \leq J_\ell(t_0, \delta) \left(1 - \ell^{2/\delta} \right)^{-(1+\delta/2)} + C_1\ell^{1/\delta-1}, \quad 0 < \delta < 1,$$

$$\sup_{n \geq \ell^{-2}} R_1(n, \ell) \leq J_\ell(t_0, 1) \left(1 - \ell^2 \right)^{-3/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + C_2\ell.$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что для всех $t_0 > 0$

$$\limsup_{\ell \rightarrow 0} J_\ell(t_0, \delta) = \overline{C}(\delta).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \limsup_{\ell \rightarrow 0} J_\ell(t_0, \delta) &= \limsup_{v \rightarrow \infty} I_1(v, t_0, \delta) = \\ &= 2\gamma(\delta) \limsup_{v \rightarrow \infty} v^{2+\delta} \int_0^{t_0} |K(t)| \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{v^2 t^2}{2} \left(1 - 2(2\pi)^\delta \varkappa(\delta) t^\delta \right) \right\} t^{2+\delta} dt = \\ &= 2\gamma(\delta) \limsup_{v \rightarrow \infty} \int_0^{vt_0} \frac{t}{v} \left| K \left(\frac{t}{v} \right) \right| \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \left(1 - 2(2\pi)^\delta \varkappa(\delta) \left(\frac{t}{v} \right)^\delta \right) \right\} t^{1+\delta} dt, \end{aligned}$$

откуда в силу соотношения

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{t}{v} \left| K \left(\frac{t}{v} \right) \right| = \frac{1}{2\pi},$$

справедливого для всех $t > 0$, получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{\ell \rightarrow 0} J_\ell(t_0, \delta) &= \frac{\gamma(\delta)}{\pi} \int_0^\infty t^{1+\delta} e^{-t^2/2} dt = \\ &= \frac{\gamma(\delta)}{\pi} 2^{\delta/2} \Gamma \left(\frac{2+\delta}{2} \right) \equiv \overline{C}(\delta), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

5 Вычислительная часть

В данном разделе для введенных в теореме 1 функций построены некоторые мажоранты, позволяющие существенно упростить процесс вычисления коэффициентов, фигурирующих в оценке величины R_n .

Обозначим через \mathcal{D} класс вещественных непрерывных неотрицательных функций $J(z)$, определенных для $z \geq 0$, которые имеют единственный максимум и для $z > 0$ не имеют минимума.

Краткое доказательство следующего утверждения содержится в работе Правитца [17], ниже приводится его полная версия.

Лемма 8 (см. также [17]). Пусть $a < b$ и $k > 0$ — произвольные постоянные, $g(s)$ и $G(s)$ — положительные монотонно возрастающие дифференцируемые функции на $a \leq s \leq b$. Если

$$\frac{G(s) - G(a)}{(g(s))^k}, \quad a \leq s \leq b,$$

монотонно возрастает, то функция

$$J(z) = z^k \int_a^b e^{-zg(s)} dG(s), \quad z \geq 0,$$

принадлежит классу \mathcal{D} .

Доказательство. Вычислим производную $J(z)$:

$$\begin{aligned} J'(z) &= kz^{k-1} \int_a^b e^{-zg(s)} dG(s) - \\ &- z^k \int_a^b e^{-zg(s)} g(s) dG(s) = \end{aligned}$$

$$= z^{k-1} e^{-zg(b)} \left[k \int_a^b e^{z(g(b)-g(s))} dG(s) - z \int_a^b e^{z(g(b)-g(s))} g(s) dG(s) \right].$$

Домножая на $z^{1-k} e^{zg(b)}$, получаем

$$J'(z) z^{1-k} e^{zg(b)} = k \int_a^b e^{z(g(b)-g(s))} dG(s) - z \int_a^b e^{z(g(b)-g(s))} g(s) dG(s). \quad (16)$$

Рассмотрим функцию

$$I(z) = z \int_a^b e^{z(g(b)-g(s))} g(s)^{k+1} d \frac{G(s) - G(a)}{g(s)^k}, \quad z \geq 0.$$

Преобразовав дифференциал, интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} I(z) &= z \int_a^b e^{z(g(b)-g(s))} g(s) dG(s) - \\ &- kz \int_a^b e^{z(g(b)-g(s))} (G(s) - G(a)) dg(s) = \\ &= z \int_a^b e^{z(g(b)-g(s))} g(s) dG(s) + \\ &+ k \int_a^b (G(s) - G(a)) de^{z(g(b)-g(s))} = \\ &= z \int_a^b e^{z(g(b)-g(s))} g(s) dG(s) + \\ &+ k(G(b) - G(a)) - k \int_a^b e^{z(g(b)-g(s))} dG(s), \end{aligned}$$

откуда в силу (16) вытекает представление

$$J'(z) z^{1-k} e^{zg(b)} = k(G(b) - G(a)) - I(z),$$

или

$$J'(z) z^{1-k} e^{zg(b)} = k(G(b) - G(a)) - z \int_a^b e^{z(g(b)-g(s))} g(s)^{k+1} d \frac{G(s) - G(a)}{g(s)^k}. \quad (17)$$

По условию леммы

$$\begin{aligned} g(b) - g(s) &> 0; \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{G(s) - G(a)}{g(s)^k} \right) &> 0; \\ a < s < b, \end{aligned}$$

поэтому правая часть (17) положительна при малых z , монотонно убывает по z и не ограничена снизу при $z \rightarrow \infty$. Поскольку знаки $J'(z)$ и правой части (17) совпадают, из сказанного выше заключаем, что $J'(z)$ положительна при малых z и имеет единственный нуль на $(0, \infty)$, а это, в свою очередь, означает, что $J(z) \in \mathcal{D}$.

Следующее следствие леммы 8 сформулировано в работе Правитца [17], ниже приводится его полное доказательство.

Следствие 2. Утверждение леммы 8 остается справедливым, если условие возрастания функции

$$\varphi(s) = \frac{G(s) - G(a)}{g(s)^k}, \quad a \leq s \leq b,$$

заменить на условие возрастания функции

$$\psi(s) = \frac{G'(s)}{(g(s)^k)'}, \quad a \leq s \leq b,$$

а также потребовать, чтобы $G(a) = g(a) = 0$.

Доказательство. Покажем, что если $\psi(s)$ возрастает на $[a, b]$, то $\varphi(s)$ тоже возрастает на $[a, b]$. Вычислим производную $\varphi(s)$:

$$\varphi'(s) = \left(\frac{G(s)}{g(s)^k} \right)' = \frac{(g(s)^k)'}{g(s)^k} \left(\frac{G'(s)}{(g(s)^k)'} - \frac{G(s)}{g(s)^k} \right).$$

Применяя формулу Коши к функциям $G(s)$ и $g(s)^k$, заключаем, что для любого $s > a$ найдется такая точка $s_0 \in (a, s)$, что

$$\frac{G(s)}{g(s)^k} = \frac{G(s) - G(a)}{g(s)^k - g(a)^k} = \frac{G'(s_0)}{(g(s_0)^k)'} < \frac{G'(s)}{(g(s)^k)'},$$

поскольку $G'(s)/(g(s)^k)'$ по условию возрастает. Отсюда вытекает, что $\varphi'(s) > 0$ при $a < s < b$, а следовательно, $\varphi(s)$ возрастает на $[a, b]$.

Рассмотрим теперь функции I_k , $k = 1, 2, 3$, и построим для них мажоранты специального вида.

Обозначим $H = H(\delta) = 2(2\pi)^\delta \tilde{\gamma}(\delta)$, $0 < \delta \leq 2\pi$. Из леммы 2 для интегралов I_1 и I_2 вытекают оценки

$$I_2(v, t_0, \delta) \leq \frac{1,0253}{8\pi} v^4 \int_0^{t_0} \exp \left\{ -\frac{v^2 t^2}{2} (1 - H t^\delta) \right\} t^3 dt = \frac{1,0253}{8\pi} J(v, t_0, \delta, 2),$$

$$I_1(v, t_0, \delta) \leq \frac{1,0253}{\pi} \gamma(\delta) J \left(v, t_0, \delta, 1 + \frac{\delta}{2} \right),$$

где

$$J(v, t_0, \delta, k) = \frac{v^{2k}}{2k} \int_0^{t_0} \exp \left\{ -\frac{v^2 t^2}{2} (1 - H(\delta) t^\delta) \right\} dt^{2k}, \quad k > 0, \quad v > 0.$$

Согласно лемме 8 $J \in \mathcal{D}$, если $t^2(1 - H(\delta)t^\delta)$ является возрастающей функцией на $0 \leq t \leq t_0$. Последнее условие выполнено, когда для всех $0 \leq t \leq t_0$

$$(t^2(1 - H(\delta)t^\delta))'_t = 2t - (2 + \delta)H(\delta)t^{1+\delta} \geq 0,$$

т. е.

$$t_0 \leq \left(\frac{2}{(2 + \delta)H(\delta)} \right)^{1/\delta} = \frac{((2 + \delta)\tilde{\gamma}(\delta))^{-1/\delta}}{2\pi} \equiv t_{\max}(\delta).$$

Рассмотрим $I_{31}(T, t_0)$. Функция

$$g(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{\pi t} - 1 + t - \frac{\pi^2 t^2}{18} \right), \quad t > 0,$$

монотонно убывает при $t > 0$, так как

$$\sup_{t>0} g'(t) = \sup_{t>0} \left(-\frac{2}{\pi t^3} + \frac{1}{t^2} - \frac{\pi^2}{18} \right) = \left(-\frac{2}{\pi t^3} + \frac{1}{t^2} - \frac{\pi^2}{18} \right) \Big|_{t=3/\pi} - \frac{\pi^2}{54} < 0,$$

поэтому

$$I_{31}(T, t_0) \leq \frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{\pi t_0} - 1 + t_0 - \frac{\pi^2 t_0^2}{18} \right) T^2 \int_{t_0}^{\infty} t e^{-T^2 t^2 / 2} dt = \frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{\pi t_0} - 1 + t_0 - \frac{\pi^2 t_0^2}{18} \right) e^{-T^2 t_0^2 / 2} \equiv J_{31}(T, t_0).$$

Функция J_{31} , очевидно, принадлежит классу \mathcal{D} .

Рассмотрим $I_{32}(T, \delta)$. Сделаем замену переменных:

$$I_{32}(T, \delta) = 2T^2 \int_0^{1-t_1(\delta)} |K(1-t)| \exp \left(-T^2 \frac{1 - \cos 2\pi t}{4\pi^2} \right) dt.$$

Положим

$$g(t) = \frac{1 - \cos 2\pi t}{4\pi^2}; \quad dG(t) = |K(1-t)|, \quad 0 \leq t \leq 1 - t_1.$$

На отрезке $0 \leq t \leq 1 - t_1$ функции $g(t)$ и

$$\frac{G'(t)}{(g(t))'} = \frac{4\pi^2 |K(1-t)|}{(1 - \cos 2\pi t)'} = \frac{\pi t}{\sin 2\pi t} \sqrt{1 + \left(\cot \pi t - \frac{1}{\pi t} \right)^2}$$

являются возрастающими, $g(0) = 0$, поэтому согласно следствию 2 $I_{32} \in \mathcal{D}$.

Рассмотрим $I_{33}(T, t_0, \delta)$. Можно убедиться, что функция $t^2(1 - H(\delta)t^\delta)$ положительна при $t \in (0, t_1(\delta))$ и имеет единственный максимум в точке $t = t_{\max}(\delta) \in (0, t_1(\delta))$. Отсюда вытекает, что существует единственный корень

$$t_2 = t_2(\delta) \in (0, t_{\max}(\delta))$$

уравнения

$$t^2(1 - H(\delta)t^\delta) = t_1^2(1 - H(\delta)t_1^\delta), \quad 0 < t < t_1(\delta).$$

Таким образом, на интервале $[t_2, t_1]$ имеем

$$t^2(1 - H(\delta)t^\delta) \geq t_1^2(1 - H(\delta)t_1^\delta).$$

Будем считать, что $t_0 < t_2$, и разобьем область интегрирования в $I_{33}(T, t_0, \delta)$ на две части: (t_0, t_2) и (t_2, t_1) . Тогда получим

$$I_{33}(T, t_0, \delta) \leq J_{33}(T, t_0, \delta) + J_{34}(T, t_0),$$

где

$$J_{33}(T, t_0, \delta) = \frac{1,0253}{\pi} T^2 \int_{t_0}^{t_2(\delta)} \exp \left\{ -\frac{T^2 t^2}{2} (1 - H(\delta) t^\delta) \right\} \frac{dt}{t};$$

$$J_{34}(T, \delta) = \frac{1,0253}{\pi} T^2 \times \exp \left\{ -\frac{T^2 t_1^2(\delta)}{2} (1 - H(\delta) t_1^\delta(\delta)) \right\} \ln \frac{t_1(\delta)}{t_2(\delta)}.$$

Функция J_{34} , очевидно, принадлежит классу \mathcal{D} .

Рассмотрим $J_{33}(T) = J_{33}(T, t_0, \delta)$. На отрезке $[t_0, t_2]$ функция $t^2(1 - Ht^\delta)$ возрастает, поэтому согласно лемме 8 для того, чтобы $J_{33} \in \mathcal{D}$, достаточно потребовать, чтобы функция $(\ln t - \ln t_0)/(t^2(1 - Ht^\delta))$ возрастала на $[t_0, t_2]$, а это эквивалентно следующему неравенству:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\ln t - \ln t_0}{t^2(1 - Ht^\delta)} \right)' = \\ & = \frac{t(1 - Ht^\delta) - (\ln t - \ln t_0)(2t - (2 + \delta)Ht^{1+\delta})}{t^4(1 - Ht^\delta)^2} \geq \\ & \geq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_2. \end{aligned}$$

Последнее условие выполняется, если t_0 удовлетворяет соотношению

$$\ln t_0 \geq \max_{t \in [t_0, t_2]} M(t),$$

где

$$M(t) = \ln t - \frac{1 - Ht^\delta}{2 - (2 + \delta)Ht^\delta}.$$

Максимум функции $M(t)$ достигается в точке

$$t_M = \left(\frac{9 + 4\delta - \sqrt{17 + 8\delta}}{2(2 + \delta)^2} \right)^{1/\delta};$$

следовательно, для $t_0 \geq \exp\{M(t_M)\}$ имеем $J_{33} \in \mathcal{D}$.

Таким образом построена мажоранта для R_n , допускающая представление, в котором фигурируют функции из \mathcal{D} . Оформим это утверждение в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{(\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta}}; \\ t_1(\delta) &= \frac{\theta_0(\delta)}{2\pi}; \quad H(\delta) = 2(2\pi)^\delta \tilde{\gamma}(\delta), \end{aligned}$$

$t_2(\delta)$ — положительный, отличный от $t_1(\delta)$ корень уравнения

$$\begin{aligned} t^2 - H(\delta)t^{2+\delta} &= t_1^2 - H(\delta)t_1^{2+\delta}; \\ t_*(\delta) &= t_M \exp \left\{ -\frac{1 - Ht_M^\delta}{2 - (2 + \delta)Ht_M^\delta} \right\}; \\ t_M &= \left(\frac{9 + 4\delta - \sqrt{17 + 8\delta}}{2(2 + \delta)^2} \right)^{1/\delta}. \end{aligned}$$

Тогда для всех $n \geq 2$ и $t_*(\delta) \leq t_0 \leq t_2(\delta)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} R_n &\leq \frac{1,0253\gamma(\delta)}{\pi} J_1(\lambda T, t_0, \delta) \frac{\varepsilon}{\lambda^{2+\delta}} + \frac{(\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} + \\ &+ \frac{1,0253}{8\pi} J_2(\lambda T, t_0, \delta) \frac{(\varepsilon')^{2/\delta}}{\lambda^4} + J_3(T, t_0, \delta) (\varepsilon + \varepsilon')^{2/\delta} + \\ &+ \frac{(\varepsilon + \varepsilon')^{3/\delta}}{144\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_1(v, t_0, \delta) &= J \left(v, t_0, \delta, 1 + \frac{\delta}{2} \right), \\ J_2(v, t_0, \delta) &= J(v, t_0, \delta, 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(v, t_0, \delta, k) &= \\ &= v^{2k} \int_0^{t_0} t^{2k-1} \exp \left\{ -\frac{v^2 t^2}{2} (1 - H(\delta)t^\delta) \right\} dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3(T, t_0, \delta) &= (J_{31}(T, t_0, \delta) + J_{32}(T, \delta) + \\ &+ J_{33}(T, t_0) + J_{34}(T, t_0) - 1) / (4\pi^2); \\ J_{31}(T, t_0) &= \frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{\pi t_0} - 1 + t_0 - \frac{\pi^2 t_0^2}{18} \right) e^{-T^2 t_0^2 / 2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{32}(T, \delta) &= I_{32}(T, \delta) = \\ &= T^2 \int_0^{1-t_1(\delta)} \sqrt{1 + \left(\cot \pi t - \frac{1}{\pi t} \right)^2} \times \\ &\times \exp \left(-T^2 \frac{1 - \cos 2\pi t}{4\pi^2} \right) t dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{33}(T, t_0, \delta) &= \\ &= \frac{1,0253}{\pi} T^2 \int_{t_0}^{t_2(\delta)} \exp \left\{ -\frac{T^2 t^2}{2} (1 - H(\delta)t^\delta) \right\} \frac{dt}{t}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{34}(T, \delta) &= \frac{1,0253}{\pi} T^2 \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{T^2 t_1^2(\delta)}{2} (1 - H(\delta)t_1^\delta(\delta)) \right\} \ln \frac{t_1(\delta)}{t_2(\delta)}, \end{aligned}$$

причем функции $J_1(v, t_0, \delta)$, $J_2(v, t_0, \delta)$, $J_{31}(v, t_0)$, $J_{32}(v, \delta)$, $J_{33}(v, t_0, \delta)$ и $J_{34}(v, \delta)$, рассматриваемые как функции аргумента v , принадлежат классу \mathcal{D} для указанных t_0 и всех $0 < \delta \leq 1$.

Значения функций $t_1(\delta)$, $t_2(\delta)$ и $t_*(\delta)$ для некоторых δ приведены в табл. 6.

Из теоремы 3 с использованием полезных свойств фигурирующих в ней функций можно получить асимптотические оценки коэффициентов при ε и ε' . Будем рассматривать условия вида

$$\varepsilon + \varepsilon' \leq 2\ell, \quad (18)$$

Таблица 6 Значения функций $t_1(d)$, $t_2(\delta)$ и $t_*(\delta)$ для некоторых δ

δ	t_*	t_2	t_1
0+	0,00	0,00	1,00
0,01	0,01	0,03	1,00
0,05	0,01	0,07	0,98
0,10	0,01	0,11	0,96
0,15	0,02	0,14	0,94
0,20	0,04	0,16	0,92
0,25	0,06	0,18	0,90
0,30	0,07	0,20	0,88
0,35	0,09	0,22	0,86
0,40	0,10	0,24	0,84
0,45	0,11	0,26	0,83
0,50	0,12	0,28	0,81
0,55	0,13	0,29	0,79
0,60	0,14	0,31	0,78
0,65	0,14	0,33	0,76
0,70	0,15	0,34	0,74
0,75	0,15	0,36	0,73
0,80	0,16	0,37	0,71
0,85	0,16	0,38	0,69
0,90	0,16	0,40	0,68
0,95	0,16	0,41	0,66
1,00	0,16	0,42	0,64

где ℓ — некоторое число из интервала $(0, 1)$. В силу соотношения $\varepsilon' \leq \varepsilon$ из (18) вытекает, что $\varepsilon' \leq \ell$. При ограничении (18) имеем

$$T \geq \frac{2\pi}{(2\ell)^{1/\delta}}; \quad n = (\varepsilon')^{-2/\delta} \geq \ell^{-2/\delta};$$

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \geq \sqrt{1 - \ell^{2/\delta}}.$$

Теорема 4. Пусть ℓ — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Обозначим

$$T_\ell = \frac{2\pi}{(2\ell)^{1/\delta}}; \quad v_\ell = T_\ell \sqrt{1 - \ell^{2/\delta}};$$

$$A_1(\ell, \delta, t_0) = \frac{1,0253}{\pi} \gamma(\delta) \left(1 - \ell^{2/\delta}\right)^{-(1+\delta/2)} \sup_{v \geq v_\ell} J_1(v, t_0, \delta);$$

$$A_2(\ell, \delta, t_0) = \frac{1,0253}{8\pi} \left(1 - \ell^{2/\delta}\right)^{-2} \sup_{v \geq v_\ell} J_2(v, t_0, \delta);$$

$$A_3(\ell, t_0, \delta) = \sup_{v \geq T_\ell} J_3(v, t_0, \delta).$$

Тогда для всех $t_*(\delta) \leq t_0 \leq t_2(\delta)$, $n \geq 2u\beta_{2+\delta}$, удовлетворяющих условию $\varepsilon + \varepsilon' \leq 2\ell$, справедлива оценка

$$R_n \leq A_1(\ell, \delta, t_0)\varepsilon + 0,19948(\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta} +$$

$$+ A_2(\ell, \delta, t_0)(\varepsilon')^{2/\delta} + A_3(\ell, t_0, \delta)(\varepsilon + \varepsilon')^{2/\delta} +$$

$$+ 0,00278(\varepsilon + \varepsilon')^{3/\delta}.$$

Вычисление супремумов J_k , $k = 1, 2, 3$, не представляет больших затруднений, поскольку указанные функции имеют не более одного максимума. Из теоремы 4 можно легко получить линейную по ε и ε' оценку, используя вытекающие из условия (18) неравенства

$$\varepsilon' \leq \ell, \quad (\varepsilon + \varepsilon')^{1/\delta} \leq (2\ell)^{1/\delta-1}(\varepsilon + \varepsilon')$$

и подобные им.

Теорема 5. Пусть ℓ — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Обозначим

$$C_1(\ell, \delta, t_0) = A_1(\ell, \delta, t_0) + \frac{(2\ell)^{1/\delta-1}}{2\sqrt{2\pi}} +$$

$$+ (2\ell)^{2/\delta-1}A_3(\ell, \delta, t_0) + \frac{(2\ell)^{3/\delta-1}}{144\sqrt{2\pi}};$$

Таблица 7 Значения величин $C_1(\ell, \delta, t_0)$ и $C_2(\ell, \delta, t_0)$ для t_0 , доставляющих минимум C_1 , и некоторых ℓ и δ , округленные в большую сторону с точностью до четвертого знака

δ	ℓ							
	0,4		0,3		0,2		0,1	
	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
0,1	0,6213	0,0886	0,1500	0,0021	0,1481	0,0001	0,1480	0,0001
0,2	0,6425	0,2805	0,2915	0,0327	0,1327	0,0052	0,1279	0,0004
0,3	0,5577	0,2950	0,2776	0,0714	0,1916	0,0236	0,1159	0,0047
0,4	0,4862	0,2861	0,2765	0,1044	0,1954	0,0508	0,1159	0,0179
0,5	0,4333	0,2717	0,2800	0,1382	0,2068	0,0812	0,1274	0,0400
0,6	0,3987	0,2705	0,2852	0,1655	0,2209	0,1124	0,1608	0,0688
0,7	0,3766	0,2772	0,2912	0,1921	0,2361	0,1436	0,1848	0,1016
0,8	0,3642	0,2869	0,2987	0,2166	0,2536	0,1735	0,2128	0,1368
0,9	0,3601	0,3010	0,3085	0,2399	0,2725	0,2013	0,2435	0,1731
1,0	0,3688	0,3174	0,3254	0,2624	0,2963	0,2291	0,2794	0,2100

$$C_2(\ell, \delta, t_0) = \frac{(2\ell)^{1/\delta-1}}{2\sqrt{2\pi}} + \ell^{2/\delta-1}A_2(\ell, \delta, t_0) + (2\ell)^{2/\delta-1}A_3(\ell, \delta, t_0) + \frac{(2\ell)^{3/\delta-1}}{144\sqrt{2\pi}}.$$

Тогда для всех $t_*(\delta) \leq t_0 \leq t_2(\delta)$, $n \geq 2$ и $\beta_{2+\delta}$, удовлетворяющих условию $\varepsilon + \varepsilon' \leq 2\ell$, справедлива оценка

$$R_n \leq C_1(\ell, \delta, t_0)\varepsilon + C_2(\ell, \delta, t_0)\varepsilon'.$$

Значения величин $C_1(\ell, \delta, t_0)$ и $C_2(\ell, \delta, t_0)$ для t_0 , доставляющих минимум C_1 , и некоторых ℓ и δ приведены в табл. 7.

Ввиду особой важности случая $\delta = 1$ мы приводим более подробную таблицу $C_1(\ell, 1, t_0)$ и $C_2(\ell, 1, t_0)$ для t_0 , доставляющих минимум C_1 , и некоторых ℓ (табл. 8).

И, наконец, учитывая соотношение $\varepsilon' \leq \varepsilon$, можно получить оценку в классическом неравенстве Берри–Эссеена.

Таблица 8 Значения величин $C_1(\ell, 1, t_0)$ и $C_2(\ell, 1, t_0)$ для t_0 , доставляющих минимум C_1 , и некоторых ℓ , округленные в большую сторону с точностью до четвертого знака

ℓ	C_1	C_2
0,31	0,3292	0,2674
0,32	0,3331	0,2718
0,33	0,3373	0,2772
0,34	0,3415	0,2821
0,35	0,3459	0,2878
0,36	0,3502	0,2931
0,37	0,3548	0,2992
0,38	0,3594	0,3049
0,39	0,3640	0,3112

Таблица 9 Значения величины $C(\ell, \delta)$ для некоторых ℓ и δ , округленные в большую сторону с точностью до четвертого знака

δ	ℓ					
	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
0,05	0,7268	0,1601	0,1601	0,1601	0,1601	0,1601
0,10	0,6996	0,1520	0,1481	0,1480	0,1480	0,1480
0,20	0,9230	0,3241	0,1378	0,1283	0,1277	0,1276
0,30	0,8527	0,3453	0,2151	0,1206	0,1131	0,1113
0,40	0,7722	0,3795	0,2462	0,1338	0,1107	0,0992
0,50	0,7050	0,4157	0,2880	0,1674	0,1274	0,0955
0,60	0,6675	0,4498	0,3332	0,2295	0,1652	0,1085
0,70	0,6519	0,4823	0,3797	0,2864	0,2218	0,1474
0,80	0,6508	0,5144	0,4265	0,3495	0,2985	0,2183
0,90	0,6611	0,5477	0,4737	0,4166	0,3818	0,3244
1,00	0,6861	0,5875	0,5249	0,4894	0,4767	0,4680

Теорема 6. Пусть ℓ — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Обозначим

$$C(\ell, \delta) = \inf_{t_*(\delta) \leq t_0 \leq t_2(\delta)} \{C_1(\ell, \delta, t_0) + C_2(\ell, \delta, t_0)\}.$$

Тогда для всех $n \geq 2$ и $\beta_{2+\delta}$, удовлетворяющих условию $\varepsilon \leq \ell$, справедлива оценка

$$R_n \leq C(\ell, \delta)\varepsilon.$$

Значения величины $C(\ell, \delta)$ для некоторых ℓ и δ приведены в табл. 11.

Также для $\delta = 1$ при $\ell = 0,0985$ и $\ell = 0,1387$ можно вычислить, что

$$C(\ell, 1) = \begin{cases} 0,4889, & \ell = 0,0985; \\ 0,5010, & \ell = 0,1387, \end{cases}$$

тем самым уточнив результат Правитца примерно на две сотых. Чтобы понять, за счет чего достигнуто это уточнение, необходимо заметить, что условия $\varepsilon < 0,0985$ и $\varepsilon < 0,1387$, как можно убедиться, являются более сильными при конечных n , чем соответствующие условия Правитца: $\varepsilon_n \leq 0,1$ и $\varepsilon_n \leq 1/7$ (напомним, что $\varepsilon_n = (1 + 1/n)^{3/2}\varepsilon$, $\varepsilon'_n = (1 + 1/n)^{3/2}\varepsilon'$ при $\delta = 1$).

Пользуясь случаем, авторы выражают искреннюю признательность В. Ю. Королёву за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Мацквичюс В. К. О нижней оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен., 1983. Т. 28. Вып. 3. С. 565–569.
2. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. — М.: Наука, 1972.

3. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1941. Vol. 49. P. 122–139.
4. *Esseen C.-G.* On the Liapunoff limit of error in the theory of probability // *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1942. Vol. A28. No. 9. P. 1–19.
5. *Esseen C.-G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem // *Skand. Aktuarietidskr.*, 1956. Vol. 39. P. 160–170.
6. *Hsu P. L.* The approximate distributions of the mean and variance of a sample of independent variables // *Ann. Math. Statist.*, 1945. Vol. 16. No. 1. P. 1–29.
7. *Bergstrom H.* On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables // *Skand. Aktuarietidskr.*, 1949. Vol. 33. P. 37–62.
8. *Takano K.* A remark to a result of A. C. Berry // *Res. Mem. Inst. Math.*, 1951. Vol. 9. No. 6. P. 4.08–4.15.
9. *Колмогоров А. Н.* Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей // *Вестник Моск. ун-та*, 1953. № 10. С. 29–38.
10. *Wallace D. L.* Asymptotic approximations to distributions // *Ann. Math. Statist.*, 1958. Vol. 29. P. 635–654.
11. *Рогозин Б. А.* Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме» // *Теория вероятн. и ее примен.*, 1960. Т. 5. Вып. 1. С. 125–128.
12. *Золотарёв В. М.* Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме // *Теория вероятн. и ее примен.*, 1966. Т. 11. Вып. 1. С. 108–119.
13. *Золотарёв В. М.* Некоторые неравенства теории вероятностей и их применение к уточнению теоремы А. М. Ляпунова // *ДАН*, 1967. Т. 177. № 3. С. 501–504.
14. *Zolotarev V. M.* A sharpening of the inequality of Berry–Esseen // *Wahrsch. verw. Geb.*, 1967. Bd. 8. P. 332–342.
15. *Van Beek P.* Fourier-analytische Methoden zur Verscharfung der Berry–Esseen Schranke. Doctoral dissertation. Friedrich Wilhelms Universitat, Bonn, 1971.
16. *Van Beek P.* An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry–Esseen inequality // *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, 1972. Bd. 23. P. 187–196.
17. *Prawitz H.* On the remainder in the central limit theorem. Part I. One-dimensional independent variables with finite absolute moments of third order // *Scand. Actuarial J.*, 1975. No. 3. P. 145–156.
18. *Шиганов И. С.* Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы // *Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды ВНИИСИ*, 1982. С. 109–115.
19. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. — М.: Мир, 1984.
20. *Bentkus V.* On the asymptotical behaviour of the constant in the Berry–Esseen inequality. Preprint 91–078, Universitat Bielefeld, 1991.
21. *Bentkus V.* On the asymptotical behaviour of the constant in the Berry–Esseen inequality // *J. Theoret. Probab.*, 1994. Vol. 7. No. 2. P. 211–224.
22. *Чистяков Г. П.* Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I // *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001. Т. 46. Вып. 2. С. 326–344.
23. *Чистяков Г. П.* Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. II // *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001. Т. 46. Вып. 3. С. 573–579.
24. *Чистяков Г. П.* Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. III // *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002. Т. 47. Вып. 3. С. 475–497.
25. *Нагаев С. В., Чеботарёв В. И.* Новый подход к оценке абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена // *Тез. докл. XXXI Дальневосточной школы-семинара им. акад. Е. В. Золотова*. — Владивосток, 2006. С. 19.
26. *Шевцова И. Г.* Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена // *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006. Т. 51. Вып. 3. С. 622–626.
27. *Шевцова И. Г.* Уточнение абсолютной константы в классическом неравенстве Берри–Эссеена // *Статистические методы оценивания и проверки гипотез*. — Пермь: Изд-во Пермского гос. ун-та, 2008. Т. 21. С. 159–168.
28. *Tysiak W.* Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry–Esseen–Abschätzungen. Dissertation. Wuppertal, 1983.
29. *Гапонова М. О., Корчагин А. Ю., Шевцова И. Г.* Об абсолютных константах в равномерной оценке точности нормальной аппроксимации для распределений, не имеющих третьего момента // *Сб. статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, М.: Макс Пресс*, 2009. Вып. 6. С. 81–89.
30. *Шевцова И. Г.* Некоторые оценки для характеристических функций с применением к уточнению неравенства Мизеса // *Информатика и её применения*, 2009. Т. 3. Вып. 3. С. 69–78.
31. *Prawitz H.* Limits for a distribution, if the characteristic function is given in a finite domain // *Skand. Aktuarietidskr.*, 1972. P. 138–154.

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНКИ РИСКА ПРИ ПОРОГОВОЙ ОБРАБОТКЕ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФФИЦИЕНТОВ

А. В. Маркин¹

Аннотация: Исследованы асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке коэффициентов разложения функции сигнала по вейвлет-базису. Приведены условия, при которых будет иметь место сходимость по распределению к нетривиальному пределу разности теоретического риска и его оценки. Работа является продолжением статьи [1].

Ключевые слова: вейвлеты; пороговая обработка; оценка риска; предельное распределение

1 Введение

Рассмотрена следующая задача: имеются наблюдения X , состоящие из полезного сигнала f и аддитивного белого гауссовского шума ϵ с нулевым средним и дисперсией σ^2 :

$$X = f + \epsilon.$$

Необходимо оценить f по X . Параметр σ практически всегда неизвестен, для него существует лишь некоторый разумный диапазон. Сигнал дискретный, размер равен $N = 2^J$. К наблюдениям применяется вейвлет-преобразование вида

$$y = \langle y, \phi_{0,0} \rangle \phi_{0,0} + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle y, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}, \quad (1)$$

где $\phi(t)$ — отцовский вейвлет; $\psi(t)$ — материнский вейвлет; $\phi_{j,n}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - n)$; $\psi_{j,n}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - n)$. Преобразование (1) справедливо для любой функции $y(t) \in L^2(\mathbb{R})$ [2, 3].

После применения вейвлет-преобразования получим

$$X_W = f_W + \epsilon_W,$$

где ϵ_W также будет белым гауссовским шумом с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Предположим, что сигнал гладкий по Липшицу с параметром $\alpha > 1/2$ (см. ниже). Будем считать, что существует константа C такая, что $|f_W| < C$ для любого N . Можно показать, что число коэффициентов, для которых последнее неравенство не выполнено, мало, и эти коэффициенты не повлияют на приведенные ниже результаты.

Для удаления шума используется пороговая обработка коэффициентов. Коэффициенты, не превышающие некоторого порога, считаются коэффициентами шума. Величина порога определяется

параметрами шума и свойствами полезного сигнала. Простейшая пороговая обработка — *жесткая пороговая обработка*:

$$\rho_H(x, T) = \begin{cases} x & \text{при } |x| > T; \\ 0 & \text{при } |x| \leq T. \end{cases}$$

Однако функция ρ_H разрывна и дает смещенные оценки [1]. Поэтому на практике обычно используют *мягкую пороговую обработку*:

$$\rho_S(x, T) = \begin{cases} x - T & \text{при } x > T; \\ x + T & \text{при } x < -T; \\ 0 & \text{при } |x| \leq T. \end{cases}$$

Риск пороговой обработки $r(f, T)$ определяется следующим образом:

$$r(f, T) = \sum_{i=1}^N E \{ f_W[i] - \rho(X_W[i]) \}^2.$$

Однако вычислить явно $r(f, T)$ нельзя, так как в выражении присутствуют неизвестные величины $f_W[i]$, поэтому вместо теоретического риска используют его оценку. Например, можно использовать такую оценку:

$$\tilde{r}(f, T) = \sum_{i=1}^N \Phi((X_W[i])^2), \quad (2)$$

где $\Phi(x)$ для мягкой пороговой обработки равна

$$\Phi_S(x) = \begin{cases} x - \sigma^2 & \text{при } x \leq T^2; \\ \sigma^2 + T^2 & \text{при } x > T^2, \end{cases}$$

а для жесткого порога

$$\Phi_H(x) = \begin{cases} x - \sigma^2 & \text{при } x \leq T^2; \\ \sigma^2 & \text{при } x > T^2. \end{cases}$$

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, кафедра математической статистики факультета ВМиК, artem.v.markin@mail.ru

Можно представить пороговую функцию в виде $\rho(x) = x - g(x)$. Имеем для жесткого и мягкого порога соответственно

$$g_H(x) = x \mathbb{1}_{|x| \leq T};$$

$$g_S(x) = T \operatorname{sgn} x + (x - T \operatorname{sgn} x) \mathbb{1}_{|x| \leq T}.$$

При этом функция $g_S(x)$ почти дифференцируема (в смысле Стейна [4]), а потому оценка $\tilde{r}_S(f, T)$ будет несмещенной оценкой риска $r_S(f, T)$ (SURE-оценка — Stein Unbiased Risk Estimator — несмещенная оценка Стейна для риска) [2, 5]:

$$E\{\tilde{r}_S(f, T)\} = r_S(f, T).$$

Оценка риска жесткой пороговой обработки будет смещенной [2]:

$$E\{\tilde{r}_H(f, T)\} = r_H(f, T) - 2T\sigma^2 \sum_{i=1}^N (\varphi_\sigma(T - f_W[i]) + \varphi_\sigma(T + f_W[i])),$$

где $\varphi_\sigma(u) = \varphi(u/\sigma)$. В качестве порога будем использовать универсальный порог $T = \sqrt{2 \ln N}$, обладающий хорошими асимптотическими свойствами [6].

В работе [1] показано, что для $\delta > 0$ и любого $\alpha > 0$ при использовании универсального порога для мягкой и жесткой пороговой обработки выполнено

$$P\left(\frac{|\tilde{r}(f, T) - r(f, T)|}{N^{\alpha+1/2}} > \delta\right) \rightarrow 0.$$

Естественно поставить вопрос о том, что будет в случае $\alpha = 0$, т.е. когда знаменатель имеет порядок \sqrt{N} .

На практике дисперсия шума заранее не известна, и ее необходимо оценить. В этом случае в выражении (2) для оценки риска будут использоваться функции

$$\hat{\Phi}_S(x) = \begin{cases} x - \hat{\sigma}^2 & \text{при } x \leq \hat{T}^2; \\ \hat{\sigma}^2 + \hat{T}^2 & \text{при } x > \hat{T}^2 \end{cases}$$

и

$$\hat{\Phi}_H(x) = \begin{cases} x - \hat{\sigma}^2 & \text{при } x \leq \hat{T}^2; \\ \hat{\sigma}^2 & \text{при } x > \hat{T}^2. \end{cases}$$

Соответствующие оценки риска обозначим через $\hat{r}_S(f, \hat{T})$ и $\hat{r}_H(f, \hat{T})$. Известно [1], что если $\hat{\sigma}^2$ — оценка дисперсии, $E\hat{\sigma}^2\sigma^2 + \nu_N$, $\nu_N = o(1)$, $D\hat{\sigma}^2 = \theta_N = O(N^{-\beta})$, $\beta > 0$, то для любого $\delta > 0$ при использовании порога $\hat{T} = \hat{\sigma}\sqrt{2 \ln N}$ выполнено

$$P\left(\frac{|\hat{r}(f, \hat{T}) - r(f, T)|}{N} > \delta\right) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Вопрос о сходимости при более низком порядке знаменателя в (3) также рассмотрен в настоящей статье.

2 Предельное распределение оценки риска при известной дисперсии шума

Теорема 1. При мягкой или жесткой пороговой обработке с порогом $T = \sigma\sqrt{2 \ln N}$ имеет место сходимость по распределению

$$\frac{\tilde{r}(f, T) - r(f, T)}{D_N} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

$$\text{где } D_N^2 = 2\sigma^2 \left(N\sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^N (f_W[i])^2 \right).$$

Доказательство. Введем обозначения: $X_W[i] \equiv Y_i$, $f_W[i] \equiv \mu_i$. Тогда $EY_i^2 = \mu_i^2 + \sigma^2$ и $DY_i^2 = 2\sigma^2(\sigma^2 + 2\mu_i^2)$. Для мягкой пороговой обработки имеем

$$\begin{aligned} \tilde{r}_S(f, T) - r_S(f, T) &= \sum_{i=1}^N (Y_i^2 - \sigma^2) \mathbb{1}_{|Y_i| \leq T} + \\ &+ \sum_{i=1}^N (\sigma^2 + T^2) \mathbb{1}_{|Y_i| > T} - \sum_{i=1}^N E(Y_i^2 - \sigma^2) \mathbb{1}_{|Y_i| \leq T} - \\ &- (\sigma^2 + T^2) \sum_{i=1}^N P(|Y_i| > T) = \\ &= \sum_{i=1}^N (Y_i^2 - EY_i^2) - \sum_{i=1}^N (Y_i^2 - \sigma^2) \mathbb{1}_{|Y_i| > T} + \\ &+ \sum_{i=1}^N E(Y_i^2 - \sigma^2) \mathbb{1}_{|Y_i| > T} + \sum_{i=1}^N (\sigma^2 + T^2) \mathbb{1}_{|Y_i| > T} - \\ &- (\sigma^2 + T^2) \sum_{i=1}^N P(|Y_i| > T). \quad (4) \end{aligned}$$

Достаточно показать, что при делении на D_N первая сумма в (4) сходится по распределению к стандартному нормальному закону, а все оставшиеся суммы сходятся к нулю по вероятности.

Понятно, что случайные величины Y_i^2 независимы и

$$D_N^2 = \sum_{i=1}^N DY_i^2 = D \sum_{i=1}^N Y_i^2.$$

Для обеспечения указанной сходимости по распределению достаточно выполнения условия Линдберга [7]. Проверим, что для любого $\delta > 0$

$$\frac{1}{D_N^2} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \left\{ (Y_i^2 - \mu_i^2 - \sigma^2)^2 \mathbb{1}_{|Y_i^2 - \mu_i^2 - \sigma^2| \geq \delta D_N} \right\} \rightarrow 0. \quad (5)$$

Имеем

$$D_N^2 = 2\sigma^2 \left(N\sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^N \mu_i^2 \right) \geq 2\sigma^4 N = O(N),$$

поэтому $D_N \rightarrow \infty$, и в силу ограниченности дисперсии Y_i^2 получаем для любого i

$$\mathbb{E} \left\{ (Y_i^2 - \mu_i^2 - \sigma^2)^2 \mathbb{1}_{|Y_i^2 - \mu_i^2 - \sigma^2| \geq \delta D_N} \right\} = o(1).$$

Значит, условие (5) выполнено и

$$\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i^2 - \mathbb{E}Y_i^2)}{D_N} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

В работе [1] показано, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \mathbb{1}_{|Y_i| > T} &= \mathbb{E} (\mathbb{1}_{|Y_i| > T})^2 = \mathbb{P}(|Y_i| > T) = \\ &= O\left(\frac{1}{N\sqrt{\ln N}}\right). \end{aligned}$$

Тогда по неравенствам Чебышёва и Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i^2 - \sigma^2) \mathbb{1}_{|Y_i| > T}}{D_N}\right| > \delta\right) &\leq \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^N (Y_i^2 - \sigma^2) \mathbb{1}_{|Y_i| > T}\right|}{\delta D_N} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{E}|(Y_i^2 - \sigma^2) \mathbb{1}_{|Y_i| > T}|}{\delta \sigma^2 \sqrt{2N}} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{\mathbb{E}(Y_i^2 - \sigma^2)^2 \mathbb{P}(|Y_i| > T)}}{\delta \sigma^2 \sqrt{2N}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для трех оставшихся сумм в (4) рассуждения проводятся аналогично. Таким образом, для мягкой пороговой обработки теорема доказана.

Учитывая суть отличий $\Phi_H(x)$ от $\Phi_S(x)$, доказательство для жесткого порога практически повторяет рассуждения для случая мягкого порога. Остается только добавить, что порядок смещения оценки риска при жестком пороге равен $O(\sqrt{\ln N})$ [1], стало быть, при делении на D_N смещение будет стремиться к нулю.

3 Риск в случае использования оценки дисперсии

В работе [1] (теоремы 3 и 6) показано, что выполнено (3), при этом ограничения на $\hat{\sigma}^2$ носят довольно общий характер. Например, от ν_N требуется лишь бесконечная малость, т. е. стремление к нулю может быть как угодно медленным. Возникает вопрос: можно ли понизить степень N в знаменателе, наложив некоторые более сильные ограничения на свойства моментов $\hat{\sigma}^2$?

В доказательстве теоремы 3 из статьи [1] есть такая оценка:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \\ &= \mathbb{E} (Y_i^2 - \hat{\sigma}^2 - \mathbb{E}Y_i^2 + \sigma^2) (Y_j^2 - \hat{\sigma}^2 - \mathbb{E}Y_j^2 + \sigma^2) = \\ &= -\text{cov}(\hat{\sigma}^2, Y_i^2 + Y_j^2) + \nu_N^2 + \theta_N = o(1). \end{aligned}$$

Число элементов E_{ij} равно $N^2 - N$, поэтому сумма всех этих элементов имеет порядок $o(N^2)$. Понятно, что эту оценку можно улучшить, если потребовать, скажем, $\nu_N = O(N^{-\nu})$.

Помимо этого, из доказательства той же теоремы можно получить следующую оценку $\mathbb{E} \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}}$:

$$\mathbb{E} \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}} = \max \left\{ O\left(\frac{1}{N^{(1-\gamma)^2} \sqrt{\ln N}}\right), O(N^{-\beta}) \right\},$$

где γ — фиксированное сколь угодно малое положительное число. Принимая, что $\nu_N = O(N^{-\nu})$, $\nu > 0$, эту оценку также можно улучшить.

Представим разность оценки риска и самого риска при мягком пороге в таком виде:

$$\begin{aligned} \hat{r}_S - r_S &= \sum_{i=1}^N (Y_i^2 - \sigma^2) - N(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) - \\ &- \sum_{i=1}^N (Y_i^2 - \hat{\sigma}^2) \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}} + \sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}^2 + \hat{T}^2) \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}} - \\ &- \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(Y_i^2 - \sigma^2) + \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(Y_i^2 - \sigma^2) \mathbb{1}_{|Y_i| > T} - \\ &- \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\sigma^2 + T^2) \mathbb{1}_{|Y_i| > T}. \quad (6) \end{aligned}$$

Вопрос о невырожденном предельном распределении

$$\sum_{i=1}^N (Y_i^2 - \sigma^2) - \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(Y_i^2 - \sigma^2)$$

решен в предыдущем разделе, а в статье [1] показано, что при делении на $N^{\alpha+1/2}$ будет иметь место сходимость к нулю по вероятности при любом $\alpha > 0$.

Асимптотика $N(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)$ зависит в том числе и от скорости убывания ν_N и θ_N . Если $\nu_N = O(N^{-1/2})$ и $\theta_N = O(N^{-1})$, то при $\alpha > 0$

$$\frac{N(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)}{N^{\alpha+1/2}} \xrightarrow{P} 0. \quad (7)$$

Это можно показать с помощью неравенства Чебышёва. Более того, если $\nu_N = O(N^{-\nu})$, $\theta_N = O(N^{-\beta})$, то (7) справедливо для

$$\alpha > \frac{1}{2} - \min \left\{ \nu, \frac{\beta}{2} \right\}.$$

Покажем теперь, что если справедливы последние предположения о ν_N и θ_N , то все суммы с индикаторами в (6) при делении на \sqrt{N} сходятся по вероятности к нулю. По формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}} > \delta \right) = \\ & = \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}} > \delta, \hat{T} > (1 - \gamma_N)\sigma\sqrt{2\ln N} \right) + \\ & + \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}} > \delta | \hat{T} \leq (1 - \gamma_N)\sigma\sqrt{2\ln N} \right) \times \\ & \quad \times \mathbf{P} \left(\hat{T} \leq (1 - \gamma_N)\sigma\sqrt{2\ln N} \right), \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$\gamma_N = \frac{1}{\ln N} \gg |\nu_N|; \quad \gamma_N^2 \gg \theta_N.$$

При этом

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(|Y_i| > (1 - \gamma_N)\sigma\sqrt{2\ln N} \right) = \\ & = O \left(\frac{1}{N^{(1-\gamma_N)^2 \sqrt{\ln N}}} \right) = O \left(\frac{1}{N\sqrt{\ln N}} \right), \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} N^{2\gamma_N - \gamma_N^2} & = \exp(\ln N (2\gamma_N - \gamma_N^2)) = \\ & = \exp \left(2 - \frac{1}{\ln N} \right) = O(1). \end{aligned}$$

Далее, пользуясь неравенством Чебышёва, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}} > \delta, \hat{T} > (1 - \gamma_N)\sigma\sqrt{2\ln N} \right) \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{|Y_i| > (1-\gamma_N)\sigma\sqrt{2\ln N}} > \delta \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{P} \left(|Y_i| > (1 - \gamma_N)\sigma\sqrt{2\ln N} \right)}{\delta} = \\ & = O \left(\frac{1}{\sqrt{\ln N}} \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся свойствами моментов $\hat{\sigma}^2$ для оценки второго слагаемого в (8):

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\hat{T} \leq (1 - \gamma_N)\sigma\sqrt{2\ln N} \right) = \\ & = \mathbf{P} \left(\hat{\sigma}^2 \leq (1 - \gamma_N)^2\sigma^2 \right) = \\ & = \mathbf{P} \left(\hat{\sigma}^2 + \nu_N \leq \nu_N + \sigma^2 - 2\sigma^2\gamma_N + \gamma_N^2\sigma^2 \right) \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left(|\hat{\sigma}^2 - \nu_N - \sigma^2| \geq \nu_N + 2\sigma^2\gamma_N - \gamma_N^2\sigma^2 \right). \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо, так как для достаточно большого N

$$\nu_N + 2\sigma^2\gamma_N - \gamma_N^2\sigma^2 > 0$$

в силу выбора γ_N . Далее по неравенству Чебышёва

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(|\hat{\sigma}^2 - \nu_N - \sigma^2| \geq \nu_N + 2\sigma^2\gamma_N - \gamma_N^2\sigma^2 \right) \leq \\ & \leq \frac{D\hat{\sigma}^2}{(\nu_N + 2\sigma^2\gamma_N - \gamma_N^2\sigma^2)^2} \sim \\ & \sim \frac{D\hat{\sigma}^2}{\gamma_N^2} = O \left(\frac{\ln^2 N}{N^\beta} \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}} > \delta \right) \rightarrow 0.$$

Опять же пользуясь неравенством Чебышёва, имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{|Y_i| > T} > \delta \right) \leq \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{P} \left(|Y_i| > T \right)}{\delta} = \\ & = O \left(\frac{1}{\sqrt{\ln N}} \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теперь перейдем непосредственно к суммам в (6):

$$\frac{\sum_{i=1}^N Y_i^2 \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}}}{\sqrt{N}} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N Y_i^4}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}}} \xrightarrow{P} 0,$$

так как

$$\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i^4 - \mathbf{E}Y_i^4)}{N} \xrightarrow{P} 0; \quad 0 \leq \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{E}Y_i^4}{N} \leq C$$

для некоторой константы C . Далее

$$(2 \ln N + 1) \frac{\sum_{i=1}^N \hat{\sigma}^2 \mathbb{1}_{|Y_i| > \hat{T}}}{\sqrt{N}} \xrightarrow{P} 0,$$

так как

$$\frac{(2 \ln N + 1) \hat{\sigma}^2}{\sqrt{N}} \xrightarrow{P} 0.$$

Суммы с $\mathbb{1}_{|Y_i| > T}$ оцениваются аналогично. При жестком пороге приведенные оценки тоже верны, смещение оценки риска при делении на \sqrt{N} стремится к нулю. Обобщая полученные результаты, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\hat{\sigma}^2$ — оценка дисперсии, $E\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 + O(N^{-\nu})$ и $D\hat{\sigma}^2 = O(N^{-\beta})$, $\nu > 0$, $\beta > 0$, а константа $c = \min\{1/2, \nu, \beta/2\}$. Пусть выбран порог $\hat{T} = \hat{\sigma}\sqrt{2 \ln N}$. Тогда для любого $\delta > 0$ и любого $\alpha > 1/2 - c$ при мягком и жестком пороге выполнено

$$P\left(\left|\frac{\hat{r}(f, \hat{T}) - r(f, T)}{N^{\alpha+1/2}}\right| > \delta\right) \rightarrow 0.$$

Как видно из приведенных выше рассуждений, предельное распределение $(\hat{r} - r)/\sqrt{N}$ определяется предельным распределением

$$\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i^2 - EY_i^2)}{\sqrt{N}} - \sqrt{N}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2).$$

Теорема 3. Пусть $\hat{\sigma}^2$ — оценка дисперсии, $E\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 + O(N^{-\nu})$ и $D\hat{\sigma}^2 = O(N^{-\beta})$, $\nu > 0$, $\beta > 0$. Пусть $\hat{\sigma}^2$ не зависит от $X_W[i]$ и выполнено $\sqrt{N}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma^2)$. Пусть выбран порог $\hat{T} = \hat{\sigma}\sqrt{2 \ln N}$. Тогда при мягком и жестком пороге выполнено

$$\frac{\hat{r}(f, \hat{T}) - r(f, T)}{D_N} \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, 1 + \frac{\Sigma^2}{2\sigma^2(\sigma^2 + 2R)}\right),$$

где

$$D_N^2 = 2\sigma^2 \left(N\sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^N (f_W[i])^2 \right);$$

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{(f_W[i])^2}{N}.$$

Теорема элементарно доказывается с помощью метода характеристических функций и свойства воспроизводимости нормального закона. Понятно, что если распределение оценки дисперсии слабо сходится к некоторому пределу, но при нормировочном множителе порядка $0 < \alpha < 1/2$, то распределение оценки риска при делении на $N^{1-\alpha}$ будет слабо сходиться к тому же пределу. Причем в этом случае даже не требуется независимости $X_W[i]$ и $\hat{\sigma}^2$.

4 Оценки дисперсии шума

В работе [1] рассмотрены два примера оценок: $\hat{\sigma}_1^2 = S^2$ как оценка дисперсии и интерквартильный размах $\hat{\sigma}_2$ как оценка стандартного отклонения. Пусть Z_1, Z_2, \dots, Z_M — наблюдения, по которым вычисляется оценка, \bar{Z} — выборочное среднее, $Z_{M,p}$ — выборочная квантиль порядка p , $0 \leq p \leq 1$:

$$Z_{M,p} = \begin{cases} Z_{([Mp]+1)} & \text{при } Mp \text{ дробном;} \\ Z_{(Mp)} & \text{при } Mp \text{ целом.} \end{cases}$$

Тогда

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (Z_i - \bar{Z})^2; \quad \hat{\sigma}_2 = \frac{Z_{M,3/4} - Z_{M,1/4}}{2\zeta_{3/4}}$$

будут соответственно состоятельными оценками дисперсии и стандартного отклонения, если Z — выборка из нормального распределения с нулевым средним и дисперсией σ^2 , а $\zeta_{3/4} = F^{-1}(3/4)$ — квантиль порядка 3/4 стандартного нормального распределения [1]. Известно, что в этом случае $\hat{\sigma}_1^2$ асимптотически нормальна [8]:

$$\sqrt{M}(\hat{\sigma}_1^2 - \sigma^2) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 2\sigma^4).$$

Оценка $\hat{\sigma}_2$ тоже является асимптотически нормальной [9]:

$$\sqrt{M}(\hat{\sigma}_2 - \sigma) \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\{4\zeta_{3/4}\phi_\sigma(\zeta_{\sigma,3/4})\}^2}\right), \quad (9)$$

где $\zeta_{\sigma,3/4} = F_\sigma^{-1}(3/4)$, а F_σ и ϕ_σ — функция распределения и плотность распределения $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ соответственно. Обозначив предельную дисперсию в (9) через d^2 , получим, что

$$\begin{aligned} \sqrt{M}(\hat{\sigma}_2^2 - \sigma^2) &= \\ &= \sqrt{M}(\hat{\sigma}_2 - \sigma)(\hat{\sigma}_2 + \sigma) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 4\sigma^2 d^2) \end{aligned} \quad (10)$$

в силу сходимости $\hat{\sigma}_2$ к σ по вероятности. Значит, если M имеет порядок роста N , то для оценок $\hat{\sigma}_1^2$ и $\hat{\sigma}_2^2$ справедлива теорема 3. Заметим, что (10) можно показать, используя одну из теорем непрерывности [8]: $y(\hat{\sigma}_2) = \hat{\sigma}_2^2$, $y'(\sigma) = 2\sigma$, $\sqrt{M}(y(\hat{\sigma}_2) - y(\sigma)) \Rightarrow \mathcal{N}(0, (y'(\sigma))^2 d^2)$. В англоязычной литературе эти теоремы носят название Delta method (см., например, [10]).

Рассмотрим теперь случай, когда дисперсия оценивается по выборке X , а точнее по ее части.

Можно считать, что вейвлет-коэффициенты на самом мелком масштабе являются коэффициентами шума [6]. Ниже это предположение будет обобщено. Пусть $Y_{N/2+1}, \dots, Y_N$ имеют распределение $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Оценка $\hat{\sigma}_1^2$ принимает вид

$$\hat{\sigma}_1^2 = S^2 = \frac{1}{N/2} \sum_{i=N/2+1}^N Y_i^2 - \left(\frac{2}{N} \sum_{i=N/2+1}^N Y_i \right)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (Y_i^2 - \hat{\sigma}_1^2) &= \sum_{i=1}^{N/2} Y_i^2 - \\ &- \sum_{i=N/2+1}^N Y_i^2 + N \left(\frac{2}{N} \sum_{i=N/2+1}^N Y_i \right)^2. \end{aligned}$$

При делении на \sqrt{N} получаем

$$\sqrt{N} \left(\frac{2}{N} \sum_{i=N/2+1}^N Y_i \right)^2 \rightarrow 0$$

по вероятности, так как последовательность $\lambda_N \equiv \sqrt{N} \left(\frac{2}{N} \sum_{i=N/2+1}^N Y_i \right)$ сходится по распределению к нормальному закону [8], а следовательно, в силу теоремы непрерывности последовательность λ_N^2 / \sqrt{N} сходится по вероятности к нулю.

Обобщая вышесказанное, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\hat{r}(f, \hat{T}) - r(f, T)}{D_N} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{N} \left(0, 1 + \frac{2\sigma^4}{2\sigma^2(\sigma^2 + 2R)} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$D_N^2 = 2\sigma^2 \left(\frac{N}{2}\sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^{N/2} (f_W[i])^2 \right). \quad (12)$$

Используя результаты работы [11], для совместного распределения второго выборочного момента $\overline{Z^2}$ и интерквартильного размаха $\text{IQR} = Z_{M,3/4} - Z_{M,1/4}$ имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{M} \left(\begin{pmatrix} \overline{Z^2} \\ \text{IQR} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 2\sigma\zeta_{3/4} \end{pmatrix} \right) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{N} \left(0, \begin{pmatrix} 2\sigma^4 & 2\sigma^3\zeta_{3/4} \\ 2\sigma^3\zeta_{3/4} & \frac{\sigma^2}{4\phi^2(\zeta_{3/4})} \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь учтено, что $EZ_i = 0$ и $\phi_\sigma(\zeta_{\sigma,3/4}) = \phi(\zeta_{3/4})/\sigma$, $\phi(\cdot)$ — плотность распределения $\mathcal{N}(0, 1)$. Применим к $(\overline{Z^2}, \text{IQR})$ преобразование z с матрицей частных производных W , вычисленных в точке $(\sigma, 2\sigma\zeta_{3/4})^T$:

$$z(x, y) = \left(x, \frac{y^2}{4\zeta_{3/4}} \right)^T, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{\zeta_{3/4}} \end{pmatrix}.$$

Если обозначить матрицу ковариаций в (13) через Ω^2 , то по векторному варианту теоремы непрерывности

$$\sqrt{M} \left(z \left(\overline{Z^2}, \text{IQR} \right) - \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, W\Omega^2W^T),$$

где

$$W\Omega^2W^T = \begin{pmatrix} 2\sigma^4 & 2\sigma^4 \\ 2\sigma^4 & \frac{\sigma^4}{4\zeta_{3/4}^2\phi^2(\zeta_{3/4})} \end{pmatrix}.$$

Дисперсия разности $\overline{Z^2}$ и нормированного интерквартильного размаха равна

$$D \left(\overline{Z^2} - \frac{\text{IQR}^2}{4\zeta_{3/4}^2} \right) = \frac{\sigma^4}{4\zeta_{3/4}^2\phi^2(\zeta_{3/4})} - 2\sigma^4 \equiv \Sigma^2.$$

Теперь, полагая $M = N/2$, $Z_i = Y_{N/2+i}$, получаем для $\hat{\sigma}_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{r}(f, \hat{T}) - r(f, T)}{D_N} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{N} \left(0, 1 + \frac{\Sigma^2}{2\sigma^2(\sigma^2 + 2R)} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где D_N определена в (12).

Предполагалось, что $Y_{N/2+1}, \dots, Y_N$ имеют распределение $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, т. е. коэффициенты разложения на самом мелком масштабе содержат только информацию о шуме. Однако такой подход несколько нестрогий, поэтому рассмотрим такое обобщение. Пусть $Y_{N/2+i}$ имеет распределение $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$, $i = \overline{N/2+1, N}$, при этом $\mu_i = o(1)$. Какой конкретно порядок малости достаточно потребовать, чтобы результаты для $\mu_i = 0$ остались справедливыми, будет выяснено ниже. Такое обобщение вполне обосновано, так как, если функция f достаточно гладкая, вейвлет-коэффициенты убывают к нулю достаточно быстро [2].

Функция f называется гладкой по Липшицу с параметром α на отрезке $[a, b]$, если существуют константа K и полином p_x степени $m = \lfloor \alpha \rfloor$ такие, что для любого $x \in [a, b]$ и любого $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t) - p_x(t)| \leq K|t - x|^\alpha,$$

где

$$p_x(t) = \sum_{k=0}^m c_k(t-x)^k.$$

Понятно, что если f является m раз дифференцируемой, то $c_k = f^{(k)}(x)/k!$, $k = \overline{0, m-1}$. При $0 \leq \alpha < 1$ имеем $p_x(t) = f(x)$. Известно [2], что если f гладкая по Липшицу с параметром α на отрезке $[a, b]$, то существует константа Υ такая, что

$$|\mu_i| \leq \frac{\Upsilon}{N^\alpha}, \quad i = \overline{\frac{N}{2} + 1, N}, \quad (15)$$

причем Υ не зависит от N .

Обозначим $V_i = Y_{N/2+i} - \mu_{N/2+i}$, $i = \overline{1, N/2}$, $\bar{V} = 2/N \sum_{i=1}^{N/2} V_i$, $\mu = 2/N \sum_{i=N/2+1}^N \mu_i$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{i=N/2+1}^N Y_i^2 &= \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{i=1}^{N/2} V_i^2 + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{i=1}^{N/2} V_i \mu_{N/2+i} + \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{i=N/2+1}^N \mu_i^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Допустим, что выполнено условие (15), тогда $\mu = O(N^{-\alpha})$. В этом случае последняя сумма в (16) стремится к нулю при $\alpha > 1/4$. Далее,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{i=1}^{N/2} V_i \mu_{N/2+i} \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{i=1}^{N/2} |V_i \mu_{N/2+i}| \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N/2} V_i^2}{N/2} \sum_{i=N/2+1}^N \mu_i^2} \end{aligned}$$

сходится к нулю по вероятности при $\sum_{i=N/2+1}^N \mu_i^2 \rightarrow 0$,

т. е. при $\alpha > 1/2$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \sqrt{N/2} \left(\frac{1}{N/2} \sum_{i=N/2+1}^N Y_i \right)^2 &= \sqrt{\frac{N}{2}} (\bar{V})^2 + \\ &+ 2\mu \sqrt{\frac{N}{2}} \bar{V} + \sqrt{\frac{N}{2}} \mu^2 \end{aligned}$$

сходится к нулю по вероятности при $\mu \rightarrow 0$ ($\alpha > 0$). Итак, получаем достаточное требование на α : при $\alpha > 1/2$ остается справедливым (11). При переходе от Y_i к V_i и при введенных ограничениях предельные распределения совпадают.

Теперь рассмотрим случай использования интерквартильного размаха. Пусть $Z_{N/2,p}$ — выборочная квантиль порядка p , построенная по $Y_{N/2+1}, \dots, Y_N$, а $Z'_{N/2,p}$ — выборочная квантиль порядка p , построенная по $V_1, \dots, V_{N/2}$. Заметим, что почти всюду

$$\left| Z_{N/2,p} - Z'_{N/2,p} \right| \leq 5 \max_{N/2+1 \leq i \leq N} |\mu_i| \leq \frac{5\Upsilon}{N^\alpha}. \quad (17)$$

Нужно, чтобы правая часть в (17) стремилась к нулю при умножении на $\sqrt{N/2}$. Тогда $Z'_{N/2,p}$ можно использовать вместо $Z_{N/2,p}$, и с учетом (16) все сводится к случаю $\mu_i = 0$, для которого уже все доказано (см. формулу (14)). Таким образом, достаточно потребовать $\alpha > 1/2$.

Итак, если функция гладкая по Липшицу с положительным параметром $\alpha > 1/2$, то при использовании оценок дисперсии на основе S^2 и интерквартильного размаха предельные распределения оказываются такими же, как и в случае $\mu_i = 0$, $i = \overline{N/2 + 1, N}$.

Литература

1. Маркин А. В., Шестаков О. В. О состоятельности оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Вестник Моск. ун-та. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика (в печати).
2. Mallat S. A wavelet tour of signal processing. — Academic Press, 1999.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
4. Stein C. M. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // Annals Statistics, 1981. Vol. 9. No. 6. P. 1135–1151.
5. Donoho D. L., Johnstone I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // J. Amer. Statistical Association, 1995. Vol. 90. P. 1200–1224.
6. Donoho D. L., Johnstone I. M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage // Biometrika, 1994. Vol. 81. No. 3. P. 425–455.
7. Ширяев А. Н. Вероятность-1. — М.: МЦНМО, 2004.
8. Боровков А. А. Математическая статистика. — М.: Наука, 1984.
9. Serfling R. Approximation theorems of mathematical statistics. — John Wiley & Sons, 1980.
10. Van der Vaart A. W. Asymptotic statistics. — Cambridge University Press, 2000.
11. DasGupta A. Asymptotic values and expansions for the correlation between different measures of spread // J. Statistical Planning Inference, 2006. Vol. 136. No. 7. P. 2197–2212.

ТЕХНОЛОГИЯ ХРАНЕНИЯ СЛАБОФОРМАЛИЗУЕМЫХ ДОКУМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ЛЕКСИКОЛОГИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

Б. В. Черников¹

Аннотация: Рассмотрена технология хранения слабоформализуемых документов, создаваемых с помощью лексикологического синтеза. Технология предусматривает формирование сохраняемых индексных последовательностей, содержащих индексы форм документов и их содержательных компонентов. Благодаря одновременной подготовке документов и созданию сохраняемых индексных последовательностей дополнительно обеспечивается экономия времени. Эксперименты показали эффективность подхода для документов, создаваемых в интересах управления различными видами деятельности.

Ключевые слова: слабоформализуемый документ; лексикологический синтез; индекс; индексная последовательность; сжатие

1 Введение

На протяжении жизненного цикла информационных систем, использующих персональные компьютеры как средства создания документов, возникают проблемы, связанные с хранением информации, поскольку при постоянно возрастающем числе документов требуются большие объемы памяти. Объем корпоративной информации увеличивается ежегодно, причем рост объемов сохраняемой информации достаточно значителен. Согласно исследованиям компании IDC, рост объемов хранимых и обрабатываемых данных может достигать более 70% в год [1]. Росту объемов сохраняемых данных способствуют как требования различных нормативных актов, так и внутрикорпоративные стандарты, устанавливающие необходимость длительного хранения некоторых видов информации.

Очень часто обработка, хранение и архивирование данных рассматриваются с сугубо технической или экономической точки зрения, причем правовые риски этих процессов явно недооцениваются. Важность сохранения документов в первую очередь определяется значимостью самих документов.

Государство, правительственные органы и деловые круги рассматривают возможность сохранения различного рода документов, корреспонденции, записей осуществления транзакций, счетов, контрактов и другой важной информации в качестве реализации прав на доказательство [2].

2 Технологии преобразования документов при хранении

В целях сокращения объемов сохраняемой информации при организации хранения данные могут подвергаться сжатию, для чего используются аппаратные и программные методы. Базовым принципом, лежащим в основе методов сжатия данных, является устранение избыточности, содержащейся в сохраняемой информации.

Производители аппаратных средств сжатия данных используют, как правило, стандартизованные алгоритмы (например, Лемпела–Зива LZ1), позволяющие ускорить процесс сжатия [3, 4]. Функция сжатия информации широко используется в средствах резервного копирования данных. Преобразование в этих случаях обычно осуществляется непосредственно в устройствах хранения (например, в ленточных библиотеках), что снижает нагрузку на серверное оборудование. Кроме того, в [5] приводятся сведения о результатах двойного сжатия, применяемого на основе различающихся алгоритмов в системах компаний Avamar (*Axion*) и Rocksoft (*Blocklets*). В таких системах устранение избыточности осуществляется на байтовом уровне: сначала последовательно удаляются повторяющиеся цепочки, а затем агрегируются полученные данные.

Программные методы сжатия достаточно популярны и чаще всего используются в виде программ-архиваторов [6–9], позволяющих снизить размер сохраняемых файлов благодаря специальным методам обработки. Среди программных методов

¹ООО «АНТ-Информ», Москва, bor-cher@yandex.ru

сжатия различаются методы сжатия без потерь (применяются для сокращения объемов хранения текстовых документов) и методы сжатия с потерями, позволяющие снизить размеры графических, аудио- и видеофайлов за счет исключения при обработке несущественной информации. Сжатие данных при архивировании позволяет сократить размер файла в несколько раз, однако степень сжатия для файлов разных типов различна. Так, файлы формата PDF содержат сжатую информацию уже в первичном виде и потому практически не сжимаются архиваторами дополнительно.

Вопросы разработки алгоритмов сжатия, которые лежат в основе программных методов, исследуются специалистами в поисках путей совершенствования способов сокращения объемов хранимой информации [10–17].

Работа [17] посвящена изложению особенностей технологии *Venom*, позволяющей сжать строки данных для снижения потребности в дисковом пространстве и тем самым повысить эффективность ввода/вывода в базе данных DB2. Технология построена на сканировании таблиц баз данных, поиске повторяющейся информации и построении словарей, которые присваивают повторяющимся объектам короткие числовые ключи.

В работе Богатова [16] рассмотрена возможность увеличения степени сжатия на основе методов стохастического контекстного моделирования с применением модели разреженных контекстов.

Кадач в [11] предложил способ сжатия на основе кодирования слов, содержащихся в тексте или гипертексте, значениями их позиций в сохраняемом словаре. К недостатку этого метода следует отнести необходимость обязательного хранения всех модификаций слов, вызванных их видоизменением при связывании (склонением или спряжением), а также чрезмерную избыточность словарей.

В работе [11] предложен также способ повышения степени сжатия на 5%–10% благодаря адаптивному изменению алфавитного порядка в алгоритме обобщенных интервальных преобразований. Другая модификация интервального кодирования, когда каждая буква исходного слова заменяется числом букв с большими номерами, разделяющих текущее и предыдущее включение буквы, была предложена Арнавутом и Магливерасом [12].

Работа [14] посвящена рассмотрению способов повышения стандартных средств сжатия данных на основе преобразования индексов слов, образующих информационную посылку. В обзоре алгоритмических методов моделирования в целях сокращения объемов текстов [10] авторами рассмотрен достаточно широкий спектр подходов к сжатию информации, среди которых наиболее близко к техно-

логии, рассматриваемой в основной части данной статьи, находятся словарные кодировщики. Махони в работе [13] рассматривает способ повышения скорости сжатия информации на основе применения нейросетей.

Наиболее привычным способом перевода электронных документов в хранимую версию является их сохранение на выбранных носителях информации непосредственно из программных сред, в которых осуществлялось создание данных документов. К недостаткам такого способа следует отнести необходимость полнотекстового сохранения документа со всеми его неотъемлемыми компонентами и атрибутами, включая служебную информацию, присущую программным средам. Например, для документов, создаваемых в Microsoft Word, такая информация имеет достаточно большой объем («пустой» документ, содержащий лишь служебную информацию текстового процессора, при сохранении на диске занимает более 35 кБ). Большинство деловых документов создаются с использованием бланков, содержащих графические компоненты как неотъемлемую часть документа. Наличие в документе графических компонентов (например, изображение на бланке цветного логотипа организации) может приводить к увеличению общего объема документа более чем на сотни килобайт.

Архивирование файлов, позволяющее сократить их объем, широко применяется на практике, однако для создания файла-архива требуется проведение дополнительной операции сжатия (после сохранения на носителе информации) только по завершении процесса создания документа. Итак, все рассмотренные выше алгоритмические методы сжатия информации в обязательном порядке требуют наличия *уже готового документа*, который *после его создания* должен подвергаться дополнительной обработке в целях сокращения объема, подлежащего сохранению.

3 Цель исследования

Целью настоящего исследования являлась разработка новой технологии преобразования не только информации, содержащейся в документах, но и документов в целом, обеспечивающей сокращение объемов хранимых данных.

Для сокращения времени обработки документа и исключения дополнительных операций целесообразно совместить процессы автоматизированного формирования слабоформализуемых документов на основе лексикологического синтеза и их

преобразования для последующего хранения в сокращенном объеме и автоматизированного восстановления.

Разработанная автором технология апробирована на подсистеме организационно-распорядительных документов, отчетных документов кафедрального уровня высшего учебного заведения, а также ряда учетных и отчетных документов медицинской направленности.

4 Преобразование слабоформализуемых документов при хранении

Сокращение объема информации, содержащейся в создаваемых документах и сохраняемой на носителях, возможно благодаря использованию особенностей способа лексикологического синтеза, применение которого весьма эффективно при создании слабоформализуемых документов.

Слабоформализуемые документы — полнотекстовые, табличные или смешанные документы, содержание которых существенным образом связано с произвольной, меняющейся в каждой конкретной ситуации структурой. Это документы, обладающие достаточно высокой степенью вариативности. В связи с этим содержательная структуризация слабоформализуемых документов может требовать детализации как взаимосвязи, так и взаимной зависимости композиции текста вплоть до атомарных значений — фрагментов фраз, слов и даже частей отдельных слов.

Использование лексикологического синтеза для создания слабоформализуемых документов сопряжено с глубоким предварительным анализом документов определенного вида. На первый взгляд подобную задачу решают лингвистические процессоры, однако при разборе документов в направлении текстового анализа данных (text mining) рассматривается, как правило, отдельный (уже существующий) экземпляр документа, анализ которого позволяет определить ключевые слова для генерации определенных выводов. В технологии лексикологического синтеза одним из этапов предусматривается проведение углубленного анализа комплекса документов определенного вида. На его основе осуществляется классификация информационных потоков, образующих документы анализируемого вида, и синтезируется совокупность опорных слов, объединяемых в лексикологическое дерево. Преимуществом использования лексикологического синтеза является значительное (до 5–7 раз) сокращение трудозатрат пользователей

при автоматизированном формировании документов, исключение погрешностей при их создании, а также освобождение пользователей от необходимости изучения правил оформления документов.

Блок-схема последовательности операций, иллюстрирующая сущность способа преобразования слабоформализуемых документов для сокращения объема при хранении, изображена на рис. 1.

Документ создается на базе формы, выбираемой по виду формируемого документа из возможного комплекса (совокупности документов определенного вида) и определяемой соответствующим индексом.

При создании документа его текстовая часть формируется автоматизированным лексикологическим способом путем обхода лексикологического дерева [18–20]. Каждой формулировке документа ставится в соответствие основное слово, выбор которого однозначно определяет наличие конкретной формулировки в документе. Такие слова являются опорными, на их основе составляется лексикологическая схема формируемого документа. Взаимная зависимость опорных слов в совокупности определяет последовательность обхода маршрута формирования документа. На базе предварительного анализа структуры документа выявляются основные разделы, которые должны или могут в нем присутствовать. Условные наименования таких разделов составляют основу синтезируемой совокупности опорных слов.

В рамках каждого зафиксированного раздела документа на этапе предварительного анализа комплекса документов заблаговременно выявляются составные элементы, которые должны или могут входить в состав раздела (слово, фраза, текстовый фрагмент). Для каждого подобного составного элемента определяется опорное слово (или их совокупность), выбор которого в дальнейшем будет однозначно определять внедрение в документ соответствующего компонента.

Если фрагмент текста документа содержит значительное число строк и всегда присутствует в документе в строго определенной последовательности построения предложений, то данный фрагмент текста определяется одним опорным словом. Например, выбор опорного слова «норма» в медицинском протоколе может означать необходимость внедрения в документ целой фразы, характеризующей соответствие описываемого параметра принятым нормам. Однако в большинстве случаев опорные слова соответствуют более коротким формулировкам, присутствие которых в документе необходимо в соответствии с описываемой ситуацией. Поэтому

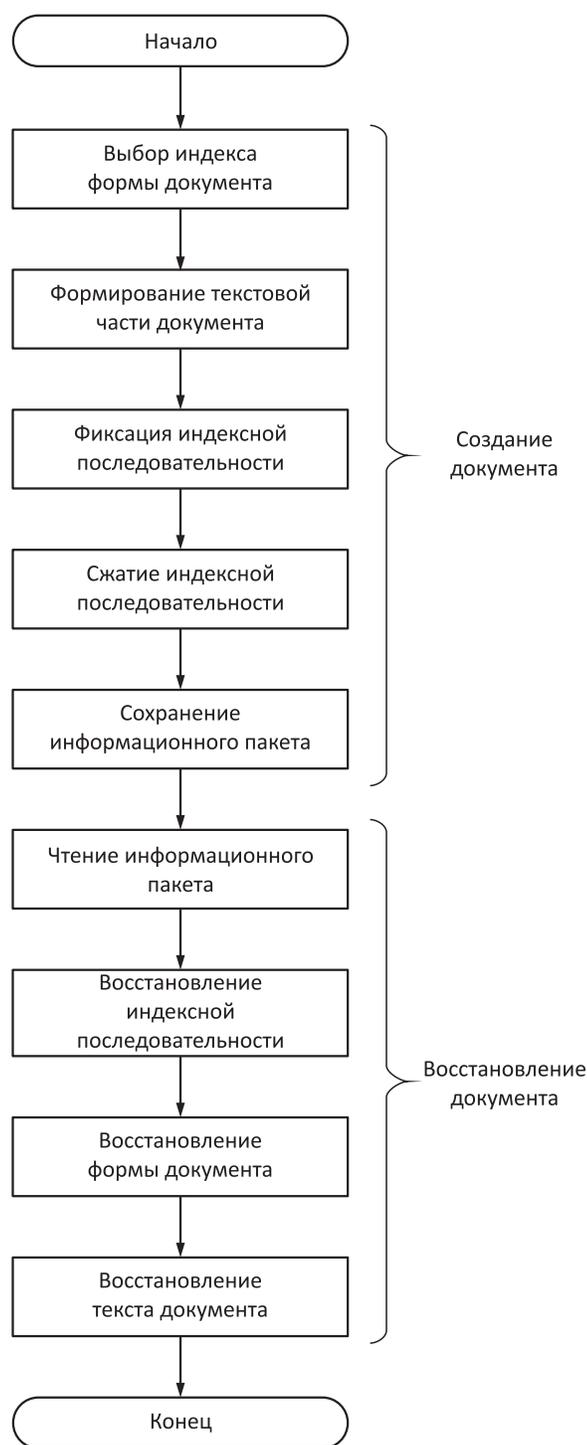


Рис. 1 Блок-схема последовательности операций при хранении слабоформализуемых документов

число опорных слов в значительной степени зависит от вариативности документа и требуемой степени гибкости лексикологического дерева, которая определяется детальностью анализа при проведе-

нии синтеза совокупности опорных слов. В связи с этим в случаях, когда текст документа формируется из предложений, не фиксированных в строго определенной последовательности, и в каждом заново создаваемом документе наблюдаются вариации построения текста, опорных слов будет столько, сколько необходимо для однозначного определения каждого конкретного предложения или словосочетания.

Поскольку каждой формулировке соответствует опорное слово, выбор такого слова будет определять и возможность индексирования выбора. Поэтому в процессе обхода лексикологического дерева при формировании документа осуществляется фиксация документарной индексной последовательности, создаваемой нарастающим итогом путем пошаговой конкатенации индексов опорных слов, в единую кодовую последовательность, соответствующую формируемому документу.

Сформированная документарная индексная последовательность затем подвергается процедуре сжатия информации, для чего может использоваться один из известных методов (например, алгоритм Хаффмана), после чего сохраняется на носителе информации.

При необходимости восстановления документа информационный пакет считывается и подвергается процедуре, обратной сжатию, что позволяет восстановить исходную индексную последовательность. Далее восстанавливается форма документа на основе записанного индекса формы, после чего происходит восстановление содержательной части документа по зафиксированной индексной последовательности и лексикологическому дереву.

Этап создания документа

На рис. 2 приведена блок-схема последовательности операций, иллюстрирующая собственно процесс автоматизированной фиксации индексной последовательности при формировании документа.

Фиксация индексной последовательности, соответствующей выбираемым опорным словам, осуществляется пошагово в рамках организуемого цикла выбора опорных слов. В случае отсутствия в лексикологическом дереве унифицированного варианта формулировки, определяемого опорным словом, в индексную последовательность внедряется вводимый неунифицированный фрагмент.

По завершении процесса формирования документа в разделе подписей фиксируется индекс подписи должностного лица (исполнителя документа), который также конкатенируется в индексный информационный пакет.

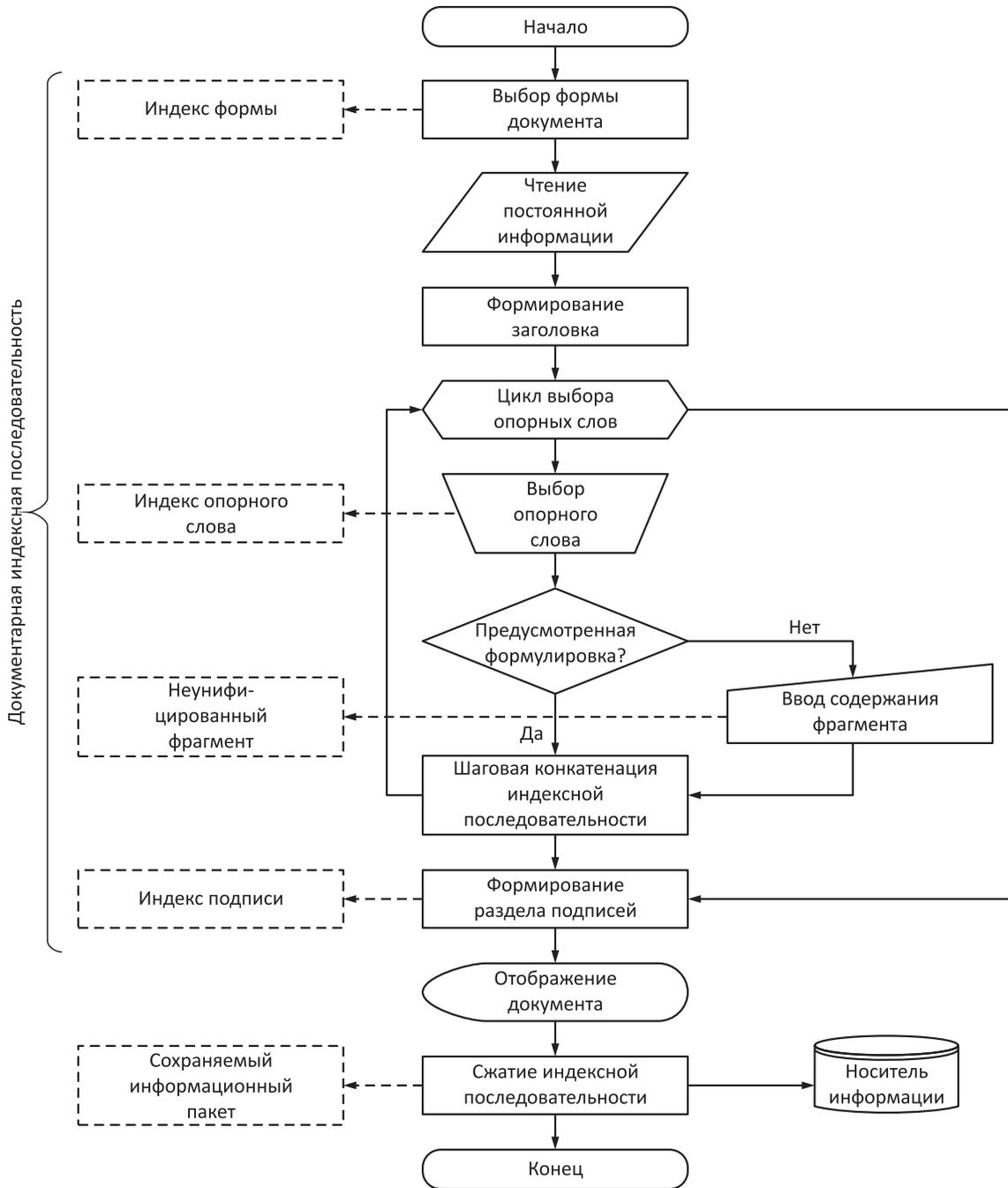


Рис. 2 Блок-схема операций при фиксации документарной индексной последовательности

Пример фиксации фрагмента индексной последовательности при автоматизированном формировании протокола осмотра пациента в ходе проведения гастроскопии¹, приведен на рис. 3. Первый уровень — тип гастроскопии, второй — уточнение типа (причины urgentной гастроскопии, манипуляции при лечебной гастроскопии), третий — конкрет-

тизация манипуляций при лечебной гастроскопии, четвертый — характеристика состояния пациента, пятый — характеристика оперативных действий.

На лексикологической схеме, например, показано, что при выборе типа гастроскопии можно выбрать лечебную. В этом случае для уровня типа гастроскопии 1 фиксируется индекс 3.

¹Пример приведен для случая применения рассматриваемого способа в сфере медицины ввиду чрезвычайно высокой вариативности документов, формируемых в этом направлении деятельности, и, следовательно, наибольшей демонстрации эффективности.

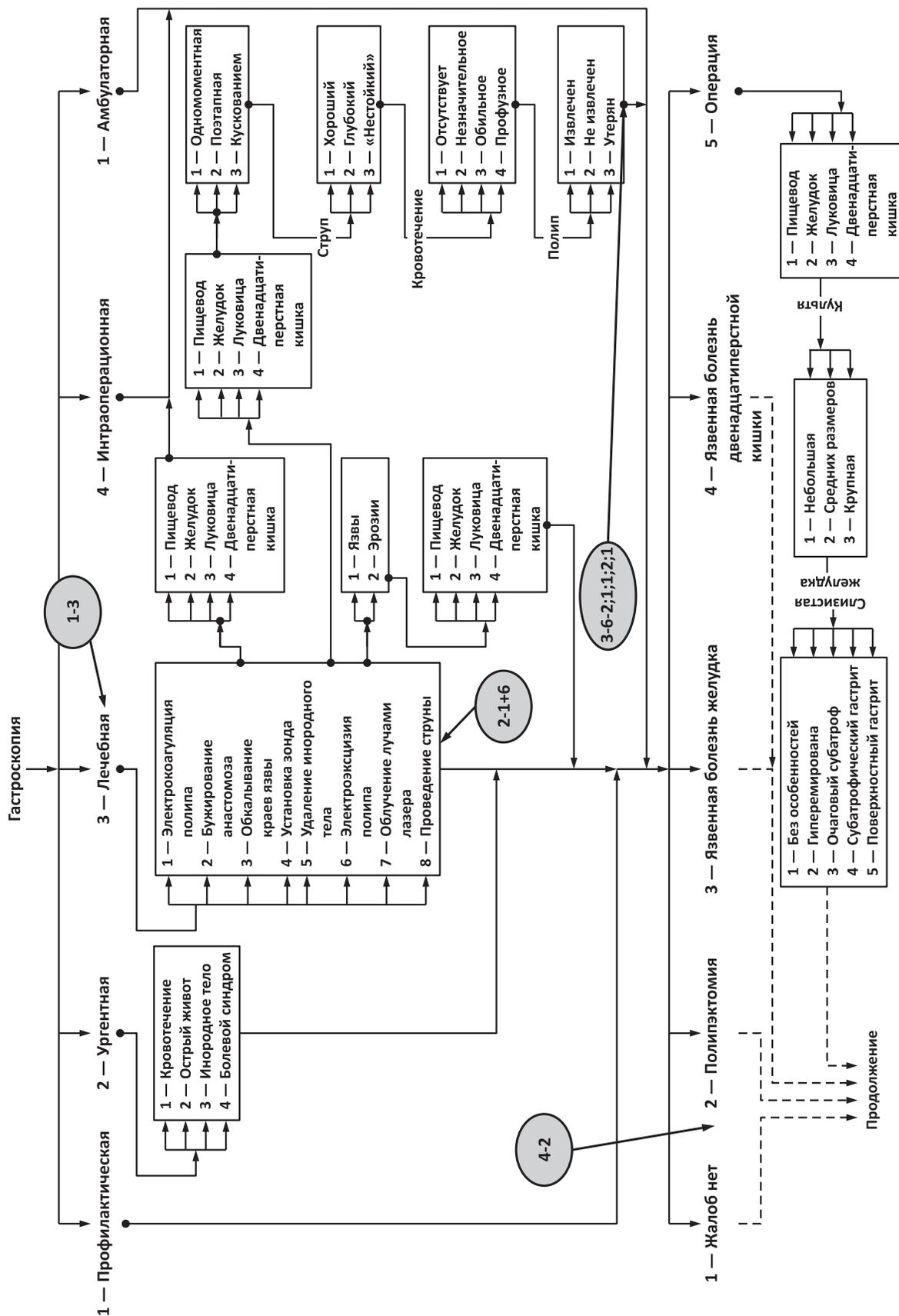


Рис. 3 Пример фиксации фрагмента документарной индексной последовательности

Отделение эндоскопии и гастроэнтерологических исследований

протокол № G/3-2/1 от 15 января 2009 г.

ПЕРВИЧНАЯ АМБУЛАТОРНАЯ ЛЕЧЕБНАЯ
ЭЗОФАГОГАСТРОДУОДЕНОФИБРОСКОПИЯ

ФАМИЛИЯ Имя Отчество Пациента
Год рождения - 1950 Пол - мужской История болезни № 12345
4 отделение

Исследование проводилось аппаратом G-3. Проведена анестезия 50г.Lidocaini 10% - Spray. жалобы: Аппарат введен в пищевод, желудок, луковицу 12-перстной кишки.

Слизистая дистальной трети пищевода гиперемирована. Кардия смыкается не полностью. Отмечается пролабирование слизистой желудка в пищевод. В желудке повышенное количество содержимого. Содержимое желудка окрашено желчью. Слизистая желудка ярко гиперемирована, с картиной субатрофического гастрита. Угол желудка без особенностей. Антральный отдел формируется правильно. Пилорус проходим, спазмирован, гиперемирован.

Рис. 4 Пример фрагмента содержательной части документа

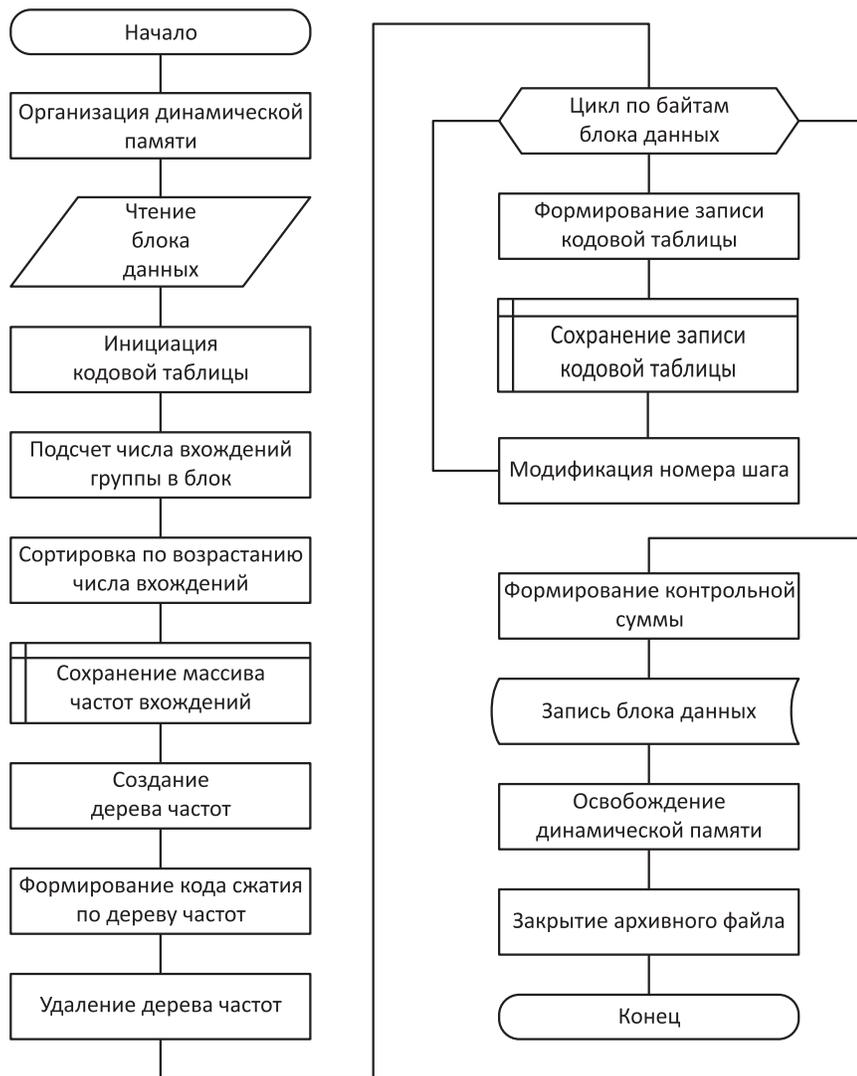


Рис. 5 Структура процедуры сжатия документарной кодовой последовательности

При остановке на лечебной гастроскопии необходимо далее выбрать нужные манипуляции. Пусть пользователем выбраны манипуляции «Электрокоагуляция полипа» и «Электроэксцизия полипа». В этом случае для уровня 2 фиксируется индексная последовательность 1+6, которая означает совместный выбор позиций 1 и 6.

На третьем уровне для позиции 6 второго уровня необходимо дать конкретизирующие позиции. Пусть выбрана одномоментная электроэксцизия полипа для отдела «Желудок» с хорошим струпом, незначительным кровотечением и извлечением полипа. В этом случае фиксируется индексная последовательность 3-6-2;1;1;2;1.

На четвертом уровне пусть выбрана характеристика «Полипэктомия». В этом случае фиксируется индекс 4-2.

В целом для документального описания зафиксированная индексная последовательность, включаемая в документарный индексный пакет, может выглядеть следующим образом:

1-1+2+4; 2-3; 3-0; 4-1+2+3; 6-1; 7-1;
8-1+3+4; 9-2+4; 10-1+5+7.

С учетом содержательной части формируемого документа, а также текстовых элементов, присущих данному виду документа, приведенный пример может быть аналогом фрагмента (в документе не использованы графические компоненты), представленного на рис. 4.

Как видно из приведенного примера, даже в таком виде сформированный документарный индексный пакет по объему значительно уступает исходному тексту (53 Б у документарного индексного пакета против 32 кБ у обычного документа). Для дополнительного сокращения объемов информации, содержащейся в информационном пакете, осуществляется встроенная в компьютерную систему обработка полученной индексной последовательности. Она направлена на сжатие последовательности байтов путем построения бинарного дерева, основанного на подсчете частоты вхождения в информационный пакет каждого из содержащихся в нем символов. Для обеспечения непрерывности процесса создания документа сжатие индексной последовательности должно проводиться в рамках встроенной процедуры (структура процедуры сжатия приведена на рис. 5), интегрированной в среду формирования документа.

Преобразование исходной кодовой последовательности осуществляется в динамической памяти, чем обеспечивается повышение быстродействия процедуры. Сжатие проводится побайтно в рамках считанного блока данных.

Сформированный информационный пакет сохраняется на носителе информации.

Этап восстановления документа

При восстановлении документа для чтения или редактирования необходимо провести лексикологический синтез, т.е. формирование исходных текстовых фрагментов с помощью сохраненного информационного пакета, содержащего документарную индексную последовательность.

Последовательность операций, выполняемых при восстановлении документа по сохраненной индексной последовательности опорных слов, представлена на рис. 6.

Прежде всего проводится чтение информационного пакета и восстановление исходной документарной индексной последовательности путем операции, обратной сжатию. Затем осуществляется непосредственное формирование документа (с учетом индекса его формы) путем синтеза фраз на основе использования набора опорных (ключевых) слов, комплектуемого в соответствии с содержанием сохраненной индексной последовательности, с автоматическим связыванием фрагментов и отдельных слов текста в соответствии с правилами орфографии и лексикологии. Необходимую связь между словами в используемых фразах (путем корректировки отдельных слов в формулировках в целях их согласованного применения с точки зрения правил синтаксиса) обеспечивают программные средства.

Организуется цикл восстановления опорных слов для имитации прохождения по лексикологическому дереву формируемого документа. В рамках этого цикла на основе восстановленных индексов опорных слов из базы знаний считываются требуемые опорные слова. Затем проводится проверка, предусмотрена ли в числе сохраненных формулировок, относящаяся к выбранному опорному слову. Если формулировка не предусмотрена, в документ внедряется содержание свободной формулировки.

Далее происходит переход к следующему шагу цикла, который повторяется до исчерпания индексов опорных слов лексикологического дерева документа в сохраненной индексной последовательности. Затем формируется раздел подписей документа, для которого используется восстановленный индекс подписей и считанная в соответствии с ним из базы знаний информация.

Для проверки выполненной работы предусмотрено отображение сформированного документа на экране монитора.

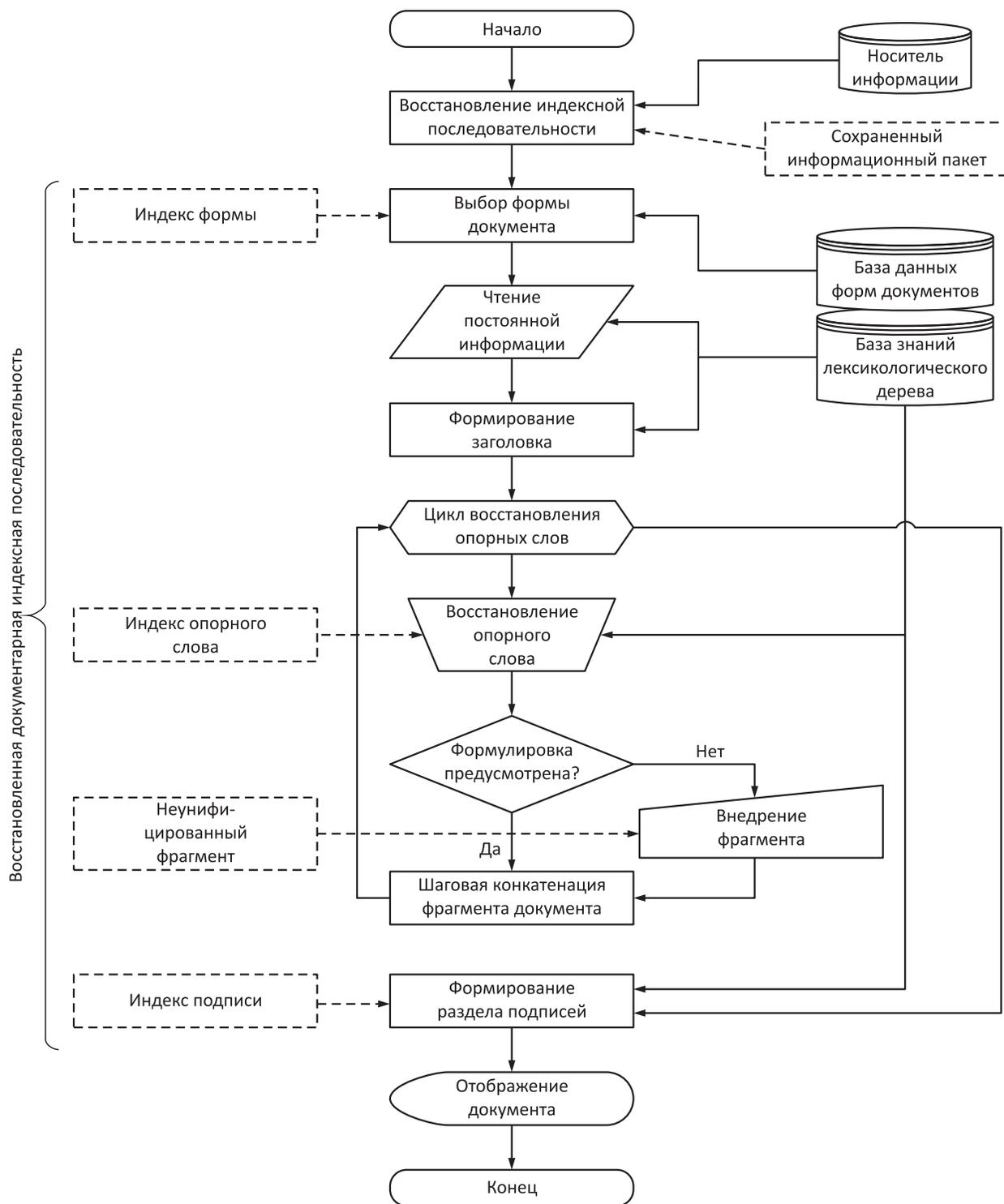


Рис. 6 Структура процесса восстановления документа

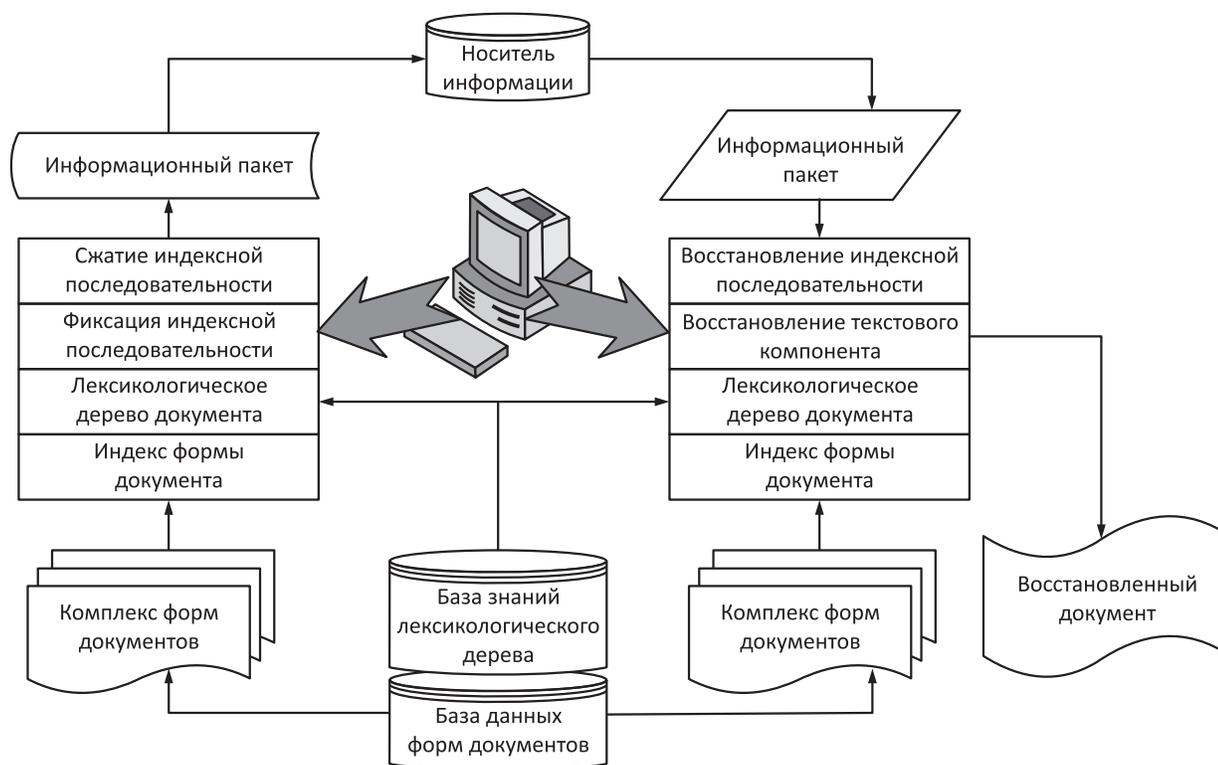


Рис. 7 Структура системы создания и восстановления слабоформализуемых документов

5 Системная реализация комплекса создания и хранения слабоформализуемых документов

Структура системы хранения слабоформализуемых документов приведена на рис. 7.

Автоматизированное формирование документа осуществляется с использованием специализированной программы и стандартного компьютера. Формирование документа ведется в диалоговом режиме с автоматическим пошаговым «наращиванием» объема текста за счет внедрения конкретных формулировок, связанных с зафиксированными индексами опорными словами. Унифицированная постоянная информация внедряется в документ автоматически.

При создании документа с помощью его лексикологического дерева, связанного с базой знаний и комплексом форм документов, фиксируется индексная последовательность формируемой информации, которая после дополнительной обработки, направленной на сжатие длины документарной индексной последовательности, сохраняется на носителе информации (например, на жестком диске).

При открытии документа на чтение или редактирование после обработки индексной последовательности, обратной сжатию, осуществляется восстановление индексной последовательности при использовании согласованного лексикологического дерева документа, связанного с комплексом форм документов и базой знаний, содержащей заготовки фрагментов документа.

Восстановление формы документа проводится из базы данных форм документов на основе сохраненного индекса формы, входящего в состав документарной индексной последовательности, после чего постоянная информация считывается из базы знаний и формируется заголовок.

6 Экспериментальная проверка предлагаемого метода

Проведена экспериментальная проверка предлагаемого способа организации хранения слабоформализуемых документов, формируемых в интерактивном режиме с использованием технологии лексикологического синтеза. Проверка осуществлялась на примере организационно-распорядительных документов, учетных и отчетных

Таблица 1 Результаты проверки технологии по видам документов

Вид документа	Общие ресурсы			Традиционный способ		Предлагаемый способ, кБ
	Шаблон	Форма	Логотип	Первичный объем, кБ	Сжатие архиватором RAR, кБ	
Организационно-распорядительные документы						
Приказ о наложении взыскания	+	+	+	110	39	1,4
Приказ о переводе работника	+	+	+	104	36	2,2
Приказ о поощрении	+	+	+	95	32	0,9
Приказ о предоставлении отпуска	+	+	+	98	31	0,7
Приказ об увольнении	+	+	+	84	29	0,6
Приказ о приеме на работу	+	+	+	102	36	1,2
Трудовой договор (контракт)	+	+	–	210	84	2,1
Документация лечебного учреждения						
Выписной эпикриз	+	+	+	190	73	8,2
Документация консилиумных совещаний	–	–	+	117	39	12,6
Представление пациента на врачебную комиссию	+	+	–	60	24	6,9
Протокол первичного осмотра пациента в лечебном отделении	+	–	–	126	48	16,8
Протоколы эндоскопического и ультразвукового обследования пациента	–	–	+	114	39	1,7
Свидетельство о болезни	+	+	+	340	118	23,4
Документация высшего учебного заведения						
Акт готовности кафедры к новому учебному году	–	+	–	105	49	1,3
Отчет о практиках	–	+	–	159	63	2,4
Отчет о работе ГЭК	–	+	–	117	41	3,6
Отчет о работе кафедры в учебном году	+	+	–	294	92	12,7
Протокол заседания ГЭК	+	+	–	92	27	3,8

документов медицинской направленности, а также документации кафедрального уровня высшего учебного заведения.

В соответствии с регламентами, действующими в исследуемых областях деятельности, оригиналы документов исследуемых групп должны храниться в твердых (бумажных) копиях. Их электронные версии, как правило, сохраняются на носителях информации в интересах оперативного обращения к ретроспективной информации. Традиционным способом создания этих документов на основе установленных форм является использование текстового процессора Microsoft Word. При этом в ряде документов используются заранее подготовленные шаблоны и применяются логотипы организации.

Усредненные результаты экспериментальной проверки предлагаемого способа по видам документов приведены в табл. 1.

7 Заключение

Разработана технология хранения слабоформализуемых документов, создаваемых с помощью лексикологического синтеза. Подход апробирован на примерах подготовки к хранению организационно-распорядительных документов, документации лечебного учреждения, а также кафедральных документов высшего учебного заведения. Реализована возможность сокращения объемов сохраняемой информации благодаря формированию сохраняемых индексных последовательностей, содержащих индексы форм документов и их содержательных компонентов. Доказаны преимущества предлагаемого способа преобразования слабоформализуемых документов для минимизации их объема при хранении.

К примеру, деловые документы, содержащие как логотип организации, так и текстовую информа-

цию, занимают при хранении объем до 120–140 кБ. Те же документы, но подвергнутые предлагаемому преобразованию при их формировании с использованием лексикологического синтеза, требуют для хранения единицы килобайт. Следовательно, использование предложенного способа преобразования информации при формировании слабоформализуемых документов на основе лексикологического синтеза обеспечивает возможность сокращения объемов хранимой информации в десятки раз.

Дополнительным достоинством является возможность восстановления не только содержания, но и формы передаваемого документа, включая графические компоненты, которые при использовании лексикографического синтеза и повторяемости видов документов не требуют дополнительных ресурсов на многократное хранение.

Литература

1. Назарбаев А. От данных — к информации // *Intelligent Enterprise*, 2006. № 18 (150).
2. Монашова О. В. Электронный документооборот: проблемы долговременного хранения электронных документов с ЭЦП // VII Международная конференция «Право и Интернет». www.ifap.ru/pi/07.
3. Коупланд Л. Сжатие данных и изображений // *Computerworld*, 2000. № 33.
4. Лобанов А. К. Методы построения систем хранения данных // *Jet Info Online*, 2003. № 7.
5. Тойго Д. В. Сжатие сохраняемой информации набирает обороты // *Сети и системы связи*, 2006. № 6.
6. Беляев А. В. Методы и средства защиты информации. — СПбГТУ, 2000.
7. Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. — М.: Диалог-МИФИ, 2003.
8. Каньковски П. Делаем из слона муху // *Компьютерра*, 2003. № 18.
9. Смирнов М. А. Использование методов сжатия данных без потерь информации в условиях жестких ограничений на ресурсы устройства-декодера // *Информационно-управляющие системы*, 2004. № 4.
10. Bell T., Witten I. H., Cleary J. G. Modeling for text compression // *ACM Computing Surveys*, 1989. Vol. 21. No. 4.
11. Кадач А. В. Сжатие текстов и гипертекстов // *Программирование*, 1997. № 4.
12. Arnavut Z., Magliveras S. S. Block sorting and compression // *IEEE Data Compression Conference Proceedings*. Snowbird, Utah, 1997.
13. Mahoney M. Fast text compression with neural networks // 13th Florida Artificial Intelligence Research Society Conference (International) Proceedings, 2000.
14. Awan F., Mukherjee A. LIPT: A lossless text transform to improve compression // *Conference (International) on Information and Theory: Coding and Computing Proceedings*, IEEE Computer Society. Las Vegas Nevada, April 2001.
15. Кравицунов Е. М., Браиловский И. В. Адаптивное изменение алфавитного порядка в алгоритмах обобщенных интервальных преобразований для увеличения степени сжатия данных // *Сб. науч. тр. ИВМС РАН «Высокопроизводительные вычислительные системы и микропроцессоры»*, 2004. Вып. 6.
16. Богатов Р. Н. Использование фиксировано-удаленных контекстов для повышения степени сжатия данных // *Омский научный вестник*, 2006. № 6 (41). — Омск: Изд-во ОмГТУ.
17. Ахуджа Р. Сжатие данных в DB2 9. www.ibm.com/developerworks/ru/library/dm-0605ahuja.
18. Черников Б. В. Принцип лексикологического синтеза в технологии создания текстовых документов // *Секретарское дело*, 2000. № 1.
19. Черников Б. В. Способ автоматизированного лексикологического синтеза документов. Патент РФ № 2253893, 2005.
20. Черников Б. В. Системные аспекты создания слабоформализуемых документов на основе способа лексикологического синтеза // *Материалы Всеросс. межвуз. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы информатизации. Развитие информационной инфраструктуры, технологий и систем»*. — М.: МИЭТ, 2007.

МОДЕЛИРОВАНИЕ САМООРГАНИЗАЦИИ ГРУПП ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ АГЕНТОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СТЕПЕНИ СОГЛАСОВАННОСТИ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

И. А. Кириков¹, А. В. Колесников², С. В. Листопад³

Аннотация: Рассмотрен один из подходов к созданию интеллектуальной компьютерной системы поддержки принятия решений (КСППР) с самоорганизацией на основе анализа целей экспертов. Приведен алгоритм определения типа архитектуры многоагентной системы по степени согласованности взаимодействия агентов, что актуально для определения эффективности работы групп экспертов и улучшения качества принятия решений.

Ключевые слова: компьютерная система поддержки принятия решений; многоагентная система с самоорганизацией; мера сходства нечетких целей агентов; алгоритм определения типа архитектуры многоагентной системы по степени согласованности взаимодействия агентов

1 Введение

При подготовке коллективных решений в системах поддержки принятия решений (СППР), особенно в сложных, уникальных ситуациях, для поиска вариантов решения задачи или ее частей привлекаются эксперты-консультанты. Эффективным средством повышения уровня информационного обеспечения руководителей и экспертов при подготовке и принятии коллективных решений служат КСППР [1].

Единого определения КСППР не существует. Обобщая [1–4], КСППР можно рассматривать как человеко-машинный объект для рациональной организации и реализации процесса коллективного обсуждения, использования данных, знаний, объективных и субъективных моделей анализа и решения слабоструктурированных и неструктурированных проблем.

Однако даже в условиях компьютеризации подбор участников, выявление и согласование их целей остаются за лицом, принимающим решения (ЛПР). Поэтому и результаты работы СППР во многом зависят от опыта, знаний и личностных особенностей ЛПР.

В этой связи актуальны интеллектуальные КСППР, способные на основе анализа ситуации взаимодействия участников в группе консультировать ЛПР о необходимости изменения состава участников, переопределения и согласования их целей с предпочтениями ЛПР. Для подобных

КСППР важно исследование группового взаимодействия как единомышленников, согласных друг с другом, так и конкурентов, спорящих о правильности решения. Подобные КСППР могли бы имитировать работу ЛПР по анализу текущей ситуации, вычислять сходство позиций участников группы и выбирать стратегию дальнейшего поведения КСППР при решении сложной задачи.

2 Организация и самоорганизация в системах поддержки принятия решений

Принятие решений в СППР, например на военных советах, коллегиях министерств, совещаниях, в информационных центрах, отличается от принятия индивидуальных решений. В [5] отмечается, что каждый участник группы преследует собственные цели, которые могут совпадать или вступать в противоречие с целями других участников. Концептуальная модель СППР [6] представлена на рис. 1. Стрелки, связывающие экспертов, показывают их многогранное взаимодействие.

Какая-то часть экспертов подчиняется одному или нескольким другим экспертам по службе, т. е. могут существовать отношения подчиненности, образующие организационную структуру СППР. Взаимодействуя в ходе обсуждения, эксперты обмениваются данными, знаниями, объяснениями и частичными решениями общей задачи.

¹Калининградский филиал Института проблем информатики РАН, kfpiran@yandex.ru

²Калининградский филиал Института проблем информатики РАН, avkolesnikov@yandex.ru

³Калининградский филиал Института проблем информатики РАН, ser-list-post@yandex.ru



Рис. 1 Модель принятия решений в СППР

Могут существовать группы экспертов, не связанных подчиненностью. Среди них могут быть явные или неявные лидеры, что в еще большей степени «обостряет» неоднородность коллективного принятия решений. При этом возникают процессы самоорганизации, направляемые отношениями кооперации, компромисса, содействия, конкуренции, конформизма (подобия), приспособления, солидарности, уклонения и др. Самоорганизация — основа интенсивного развития компании, ее способность чутко реагировать на изменения во внешней среде, обоснованно и своевременно корректируя не только свое внешнее поведение, но и основополагающие принципы собственного устройства и функционирования.

Каждый член группы (эксперт или ЛПР) выслушивает других участников и высказывает свое мнение. Процесс принятия решения в СППР — поиск компромисса, управляемый ЛПР. Цель такого поиска — найти «резонансное состояние» хода обсуждения в СППР, следствием которого стало бы возникновение синергетического эффекта, когда коллективное, интегрированное решение оказывается качественно лучше и лишено недостатков частных мнений экспертов.

Каковы условия возникновения этого эффекта? Как он зависит от сходства или различия целей участников СППР? Для ответа на эти вопросы выделим возможные типы отношений между участниками: *конкуренцию*, при которой достижение цели одним участником исключает возможность достижения цели другим; *сотрудничество*, когда цели участников совпадают; *нейтралитет*, если цели не совпадают, но и не противоречат. В зависимости от типа отношений между участниками их коллектив можно определить как (1) *группу сотрудников*, состоящую только из сотрудничающих

и нейтральных участников; здесь полностью отсутствует конкуренция; (2) *группу нейтралов*, в которой присутствуют только нейтральные отношения; (3) *группу конкурентов*, в которой есть хотя бы одна пара участников-конкурентов; здесь могут присутствовать нейтральные и сотрудничающие участники; при наличии сотрудничающих участников их можно рассматривать как коалицию, подгруппу, представляемую единым мнимым участником (ниже такого мнимого участника будем называть «суперагентом»).

Успех работы СППР зависит от знаний и опыта ЛПР по организации процесса поиска решения, т. е. взаимодействия экспертов. Возможно, на определенном этапе обсуждения ЛПР нужно, чтобы эксперты, конкурируя между собой, как можно шире исследовали область допустимых решений, а на другом — чтобы они совместно обосновали выбор одного из них. Таким образом, ЛПР должно владеть способами определения (классификации, распознавания) вида взаимодействия в СППР и возможностями его изменения. Отсюда важно, чтобы КСППР вела мониторинг взаимодействия экспертов и консультировала ЛПР о необходимости своевременной замены одного типа отношений участников на другой.

3 Концептуальный базис моделирования коллективных решений

Описание отношений участников группы и их взаимодействия выполним на базе концептуальной модели [6].

Определение 1. *Концептуальная модель — модель предметной области, состоящая из перечня понятий,*

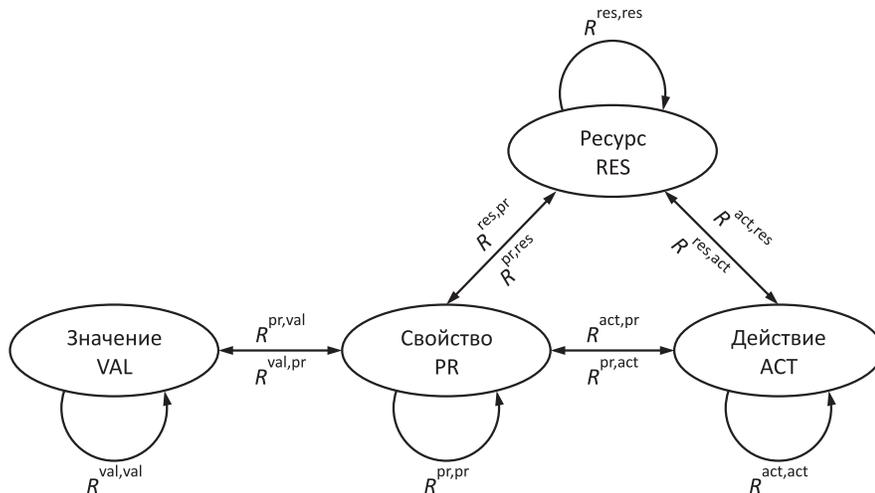


Рис. 2 Фрагмент схемы концептуальных моделей предметной области

используемых для ее описания, вместе со свойствами и характеристиками, классификацией этих понятий и законов протекания процессов в ней [7].

Определение 2. Схема концептуальных моделей — совокупность классов понятий и отношений между ними, определяющая состав и структуру концептуальных моделей предметной области.

Назначение схемы концептуальных моделей — структурирование и извлечение знаний о предметной области. Это некий шаблон для разработчика, позволяющий получать от экспертов или извлекать из профессиональных текстов информацию о предметной области, записывая ее и храня в удобном для компьютерной обработки виде. При построении концептуальной модели классы понятий и отношений схемы концептуальных моделей наполняются понятиями и отношениями предметной области.

Построение концептуальных моделей выполним на основе схемы концептуальных моделей [6], содержащей 11 категорий концептов. В настоящей статье используются категории:

- (1) ресурсов — понятий, отображающих вещи, имеющиеся у субъекта для решения задач (множество ресурсов обозначим $RES = \{res_1, \dots, res_{N_{res}}\}$);
- (2) свойств — всего того, что не является границами ресурса, характеризую ресурс, не образует новых ресурсов ($PR = \{pr_1, \dots, pr_{N_{pr}}\}$);
- (3) действий — понятий, обозначающих отношения на ресурсах как следствие деятельности ($ACT = \{act_1, \dots, act_{N_{act}}\}$);
- (4) значений — понятий или чисел, показывающих количество единиц измерения свойства ($VAL = \{val_1, \dots, val_{N_{val}}\}$).

Так, рассматривая систему «СППР — объект управления», множество субъектов управления (su), т.е. участников СППР, обозначим $RES^{su} = \{res_1^{su}, \dots, res_{N_{res}^{su}}^{su}\}$, а множество объектов управления (ou, ou), воспринимающих воздействия СППР, — $RES^{ou} = \{res_1^{ou}, \dots, res_{N_{res}^{ou}}^{ou}\}$, причем $RES^{su}, RES^{ou} \subseteq RES$; множество целей субъектов управления — $PR^{gsu} = \{pr_1^{gsu}, \dots, pr_{N_{pr}^{gsu}}^{gsu}\}$, $PR^{gsu} \subseteq PR$; множество их субъективных ценностей — $PR^{csu} = \{pr_1^{csu}, \dots, pr_{N_{pr}^{csu}}^{csu}\}$, $PR^{csu} \subseteq PR$; множество состояний ОУ — $PR^{pou} = \{pr_1^{pou}, \dots, pr_{N_{pr}^{pou}}^{pou}\}$, $PR^{pou} \subseteq PR$; множество свойств ОУ — $PR^{ou} = \{pr_1^{ou}, \dots, pr_{N_{pr}^{ou}}^{ou}\}$, $PR^{ou} \subseteq PR$, множество интервалов времени действия — $PR^t = \{pr_1^t, \dots, pr_{N_{pr}^t}^t\}$, $PR^t \subseteq PR$; множество действий субъектов управления — $ACT^{su} = \{act_1^{su}, \dots, act_{N_{act}^{su}}^{su}\}$, $ACT^{su} \subseteq ACT$; множество последовательностей их действий — $ACT^{dsu} = \{act_1^{dsu}, \dots, act_{N_{act}^{dsu}}^{dsu}\}$, $ACT^{dsu} \subseteq ACT$; множество значений свойств ОУ — $VAL^{ou} = \{val_1^{ou}, \dots, val_{N_{val}^{ou}}^{ou}\}$, $VAL^{ou} \subseteq VAL$.

Фрагмент схемы концептуальных моделей предметной области, включающий перечисленные категории концептов и отношений, представлен на рис. 2.

Здесь выделены следующие классы отношений: «ресурс–ресурс» $R^{res,res}$; «свойство–свойство» $R^{pr,pr}$; «действие–действие» $R^{act,act}$ и другие. Для моделирования целеполагания в СППР особое значение имеют классы отношений: «ресурс–свойство» $R^{res,pr}$; «свойство–свойство» $R^{pr,pr}$; «свойство–действие» $R^{pr,act}$; «действие–свойство» $R^{act,pr}$; «действие–действие» $R^{act,act}$; «свойство–значение» $R^{pr,val}$.

Разработка концептуальной модели по схеме концептуальных моделей — первый этап системного анализа сложной задачи, необходимый для извлечения знаний. Он предшествует исследованию ее составных частей (подзадач) ограниченным набором методов: аналитических, статистических, логических, лингвистических, нечетких — каждый из которых «работает» со своим типом переменных: детерминированными, стохастическими, логическими, лингвистическими четкими, нечеткими лингвистическими соответственно. Ниже концепты «свойство» (свойства ОУ и экспертов, принимающих участие в работе СППР) будут представлены переменными, а отношения между участниками СППР — функциями.

В терминах рассмотренного концептуального базиса выполним моделирование взаимодействий между экспертами в СППР. Разработка метода определения степени сплоченности группы, а в дальнейшем тестирование эффективности работы различных коллективов будут идти на примере интеллектуальной многоагентной системы (МАС) — компьютерной модели коллектива экспертов. Это позволит исключить посторонние факторы, например неискренность участников, неотъемлемо присутствующие в человеческих коллективах и влияющие на результаты исследований.

4 Знания и цели коллектива интеллектуальных агентов

Основа многоагентного подхода — распределенный, социальный интеллект взаимодействующих интеллектуальных систем (подсистем, агентов) как противопоставление классическому подходу в искусственном интеллекте, согласно которому единственная интеллектуальная система должна обладать глобальным видением сложной проблемы, иметь все необходимые способности, знания и ресурсы для ее решения. В работе [8] МАС — это совокупность четырех объектов:

$$MAS = (A, E, CL, ORG), \quad (1)$$

где A — множество агентов, отображающих участников СППР (экспертов и ЛПР) на рис. 1; $E = \{e\}$ — среда, в которой находится МАС, т.е. отображение внешней среды СППР; CL — меж-агентные отношения, изображенные стрелками на рис. 1; ORG — множество базовых архитектур МАС.

В МАС агент имеет частичное представление о задаче и ограниченные ресурсы для ее решения, поэтому в сложных ситуациях требуется взаимодействие агентов, неотделимое от организации

МАС. Способ организации взаимодействия агентов в МАС определяется ее базовой архитектурой.

В зависимости от степени согласованности взаимодействия агентов базовую архитектуру МАС будем относить к одному из трех типов:

- (1) *МАС с сотрудничающими агентами*, которая состоит только из сотрудничающих и нейтральных агентов и где полностью отсутствуют отношения конкуренции (множество таких базовых архитектур МАС обозначим $ORG_{coop} \subseteq ORG$);
- (2) *МАС с нейтральными агентами*, где присутствуют только нейтральные отношения; такая ситуация возможна, например, если цели агентов определены в различных независимых измерениях многомерного пространства свойств ОУ (множество таких базовых архитектур МАС обозначим $ORG_{neut} \subseteq ORG$);
- (3) *МАС с конкурирующими агентами*, в которой есть хотя бы одна пара агентов с отношением конкуренции; в таких МАС могут быть также нейтральные и сотрудничающие агенты; при наличии сотрудничающих агентов они могут рассматриваться как единый «суперагент», и тогда все агенты станут только конкурирующими или нейтральными (множество таких базовых архитектур МАС обозначим $ORG_{comp} \subseteq ORG$).

Определение 3. *Агент — аппаратно или (что встречается чаще) программно реализованная вычислительная система, обладающая свойствами автономности, коммуникабельности, активности, реактивности, а также «ментальными свойствами» [9].*

Под автономностью понимается способность агента функционировать без вмешательства человека, осуществлять самоконтроль над своими действиями и внутренним состоянием. Коммуникабельность агента — умение общаться с другими агентами, а возможно и с человеком, посредством некоторого языка. Реактивность — свойство агента воспринимать окружающую среду и реагировать на ее изменения. Под активностью агента понимается его способность не только реагировать на внешние события, но и предпринимать самостоятельные действия по достижению своих целей. «Ментальными свойствами» (интенциональными понятиями) называются компоненты (знания, цели, желания, намерения, убеждения, обязательства и т.п.) агента, которые отвечают за формирование предпочтений агента при выборе стратегий своего поведения. Ключевые ментальные свойства, на основе которых формируются все остальные, — это знания и цели.

Знания — часть информации агента о себе, среде и других агентах, не меняющаяся в процессе его функционирования [10].

Цель — положение вещей, которое стремится достичь ЛПР и имеющее для него определенную субъективную ценность [5]. В [11] цель — идеальное предвосхищение результата деятельности, выступающее ее регулятором, а в [12] — ситуация или область ситуаций, которая должна быть достигнута при функционировании системы за определенное время. Обобщая эти определения, выделим основные характеристики цели: она представляет состояние ОУ, является регулятором деятельности, имеет темпоральный характер (функция времени), субъективно полезна для ЛПР.

Определение 4. Цель pr^{gsu} агента как субъекта управления res^{su} — состояние pr^{pou} объекта управления res^{ou} , имеющее для агента ценность (полезность) pr^{csu} , определяющее его деятельность (последовательность действий) act^{dsu} и которое должно быть достигнуто за определенный промежуток времени pr^t .

Схема концептуальных моделей цели может быть записана в виде

$$pr^{gsu} = R^{res,pr}(res^{ou}, pr^{pou}) \wedge R^{pr,pr}(pr^{pou}, pr^{csu}) \wedge R^{res,pr}(res^{su}, pr^{csu}) \wedge R^{pr,act}(pr^{pou}, act^{dsu}),$$

где $R^{pr,pr}$ — отношения «свойство—свойство», которые определяют субъективную полезность состояния ОУ, а $R^{pr,act}$ — отношения «свойство—действие», ставящие в соответствие целевому состоянию последовательность действий

$$act^{dsu} = R^{act,act}(ACT^{su}, ACT^{su}) \wedge R^{act,pr}(ACT^{su}, PR^t),$$

где ACT^{su} — множество возможных действий агента; $R^{act,act}$ — отношения «действие—действие», устанавливающие порядок действий $act^{su} \in ACT^{su}$ в последовательности act^{dsu} , $R^{act,pr}$ — отношения «действие—свойство», определяющие время выполнения действий из ACT^{su} .

Состояние pr^{pou} объекта res^{ou} определяется значениями его свойств

$$pr^{pou} = R^{res,pr}(res^{ou}, PR^{ou}) \wedge R^{pr,val}(PR^{ou}, VAL^{ou}),$$

где $R^{res,pr}$ — отношения «ресурс—свойство», задающие множество свойств ОУ, а $R^{pr,val}$ — отношения «свойство—значение», каждому из свойств ОУ ставящие в соответствие множество значений. Одним из

свойств во множестве PR^{ou} может быть время, связанное с функционированием ОУ. Тогда цель агента по определению 4 также становится динамической (изменяется во времени).

Поскольку, как отмечалось выше, свойства ОУ представляются переменными при записи причинно-следственных связей в том или ином методе моделирования, то в целеполагании может использоваться несколько инструментариев. Это обуславливает сложности моделирования принятия решения, если требуется сопоставлять подцели, описанные разными методами. Такая ситуация возникает, например, если существуют решения, оптимальные по Парето, и требуется выбрать только одно из них. Допустим, есть ОУ с двумя свойствами pr_1^{ou} и pr_2^{ou} , а также два состояния объекта управления pr_1^{pou} и pr_2^{pou} , причем pr_1^{pou} ближе к целевому состоянию pr^{pou} , чем pr_2^{pou} , по первому критерию pr_1^{ou} , а pr_2^{pou} — по второму критерию pr_2^{ou} . Если свойства представлены разными переменными (например, стохастической и нечеткой лингвистической), обрабатываемыми разными методами, выбрать одно из решений будет не просто, так как оперировать переменными различных типов можно только в интегрированных средах. Однако если свойства характеризуются переменными одного типа, можно задать метрику в двумерном пространстве векторов, представляющих допустимые состояния ОУ, и определить расстояние между pr_1^{pou} и pr^{pou} , а также между pr_2^{pou} и pr^{pou} , после чего сравнить их между собой. Чтобы избежать подобных ситуаций, выберем один метод представления всех свойств, определяющих состояние ОУ, а значит, и используемых при описании целей ЛПР и агентов.

Анализ показал, что наиболее удобен для этого аппарат теории нечетких множеств. Он адекватно учитывает все виды неопределенности в СППР и сводит воедино всю имеющуюся неоднородную информацию [13].

Определение 5. Нечеткая цель агента pr^{gsu} — нечеткое множество, заданное на множестве состояний объекта управления $PR^{pou} \subseteq PR$, с функцией принадлежности $\mu^{pr^{gsu}}(pr^{pou})$, или для краткости $\mu^{gsu}(pr^{pou})$.

Функция принадлежности $\mu^{gsu}(pr^{pou})$ принимает значения на множестве $[0; 1]$. При этом чем выше ее значение, тем ближе состояние объекта управления pr^{pou} к цели агента pr^{gsu} . В общем случае состояние pr^{pou} описывается набором его свойств $PR^{ou} = \{pr_1^{ou}, \dots, pr_{N_{pr}^{ou}}^{ou}\}$, представленных переменными одного из перечисленных в разд. 3 типов, т. е.

$$\mu^{gsu}(pr^{pou}) = \mu^{gsu}(pr_1^{ou}, \dots, pr_{N_{pr}^{ou}}^{ou}). \quad (2)$$

Значение функции принадлежности определяется подстановкой в (2) значений из множества VAL^{ou} свойств ОУ для данного состояния, т. е. описывается выражением $\mu^{gsu}(\text{val}_1^{ou}, \dots, \text{val}_{N_{val}}^{ou})$.

Нечеткая цель агента может быть представлена одним из рассмотренных в [14] методов построения функций принадлежности нечетких множеств. Выбор метода остается за разработчиком КСППР. В [14] они разделены на два класса: прямые, когда функция принадлежности μ^{gsu} задается разработчиком КСППР непосредственно с помощью таблиц, формул или примеров, и косвенные, когда функция принадлежности μ^{gsu} определяется после обработки экспертных оценок по определенному алгоритму. Прямые методы рекомендуется применять, если свойства ОУ измеримы, в противном случае более подходят косвенные методы. Ниже для записи причинно-следственных связей между целями и отношениями взаимодействия агентов используются прямые методы построения нечеткой цели. Рассмотрев понятие нечеткой цели, вернемся к вопросу сопоставления целей агентов и введем меру близости нечетких целей.

5 Мера сходства нечетких целей агентов

Один из вариантов определения степени близости целей агентов — рассчитать расстояние Евклида или Хэмминга между нечеткими множествами. Пусть нечеткие множества A и B представляют цели агентов A и B соответственно. Евклидово расстояние между дискретными конечными нечеткими множествами A и B в одномерном пространстве (когда состояние pr^{ou} объекта управления описывается единственным свойством pr^{ou} , принимающим значения $\text{val}_i^{ou} \in VAL^{ou}$, определяется формулой [15, 16]

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^n |\mu_A^{gsu}(\text{val}_i^{ou}) - \mu_B^{gsu}(\text{val}_i^{ou})| \quad \text{val}_i^{ou} \in VAL^{ou}, \quad (3)$$

а между непрерывными бесконечными множествами A и B — выражением

$$d(A, B) = \int_{\text{val}_{min}^{ou}}^{\text{val}_{max}^{ou}} |\mu_A^{gsu}(pr^{ou}) - \mu_B^{gsu}(pr^{ou})| d(pr^{ou}), \quad pr^{ou} \in PR^{ou}, \quad \text{val}_{min}^{ou}, \text{val}_{max}^{ou} \in VAL^{ou}, \quad (4)$$

где val_{min}^{ou} и val_{max}^{ou} — минимальное и максимальное значение свойства pr^{ou} соответственно. Расстояние

Хэмминга между дискретными конечными нечеткими множествами A и B определяется в виде

$$e(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A^{gsu}(\text{val}_i^{ou}) - \mu_B^{gsu}(\text{val}_i^{ou}))^2}, \quad \text{val}_i^{ou} \in VAL^{ou}, \quad (5)$$

а между непрерывными бесконечными множествами A и B как

$$e(A, B) = \sqrt{\int_{\text{val}_{min}^{ou}}^{\text{val}_{max}^{ou}} (\mu_A^{gsu}(pr^{ou}) - \mu_B^{gsu}(pr^{ou}))^2 d(pr^{ou})}, \quad pr^{ou} \in PR^{ou}, \quad \text{val}_{min}^{ou}, \text{val}_{max}^{ou} \in VAL^{ou}. \quad (6)$$

Обратим внимание на то, что в (3) и (5) фигурируют значения $\text{val}_i^{ou} \in VAL^{ou}$, а в (4) и (6) — свойство pr^{ou} . Дело в том, что при вычислении суммы в (3) и (5) используются значения функции принадлежности для каждого значения $\text{val}_i^{ou} \in VAL^{ou}$ свойства pr^{ou} . При вычислении же интегралов в (4) и (6) нужно сначала аналитически определить первообразную и лишь потом, подставив в формулу Ньютона–Лейбница значения val_{min}^{ou} и val_{max}^{ou} , вычислить значение определенного интеграла.

Однако применение в (3)–(6) к определению степени сходства целей агентов проблематично. Они могут быть вычислены, если ряд в (3) и (5) или интеграл в (4) и (6) сходится. Иначе при $\text{val}_{min}^{ou} = -\infty$ или $\text{val}_{max}^{ou} = \infty$ расстояние будет равно бесконечности, даже если одно множество включает другое.

В этой связи предлагается следующая мера сходства нечетких целей агентов:

$$s(A, B) = 0,5 \left(\frac{\int_{\text{val}_{min}^{ou}}^{\text{val}_{max}^{ou}} \mu_{A \cap B}^{gsu}(pr^{ou}) d(pr^{ou})}{\int_{\text{val}_{min}^{ou}}^{\text{val}_{max}^{ou}} \mu_A^{gsu}(pr^{ou}) d(pr^{ou})} + \frac{\int_{\text{val}_{min}^{ou}}^{\text{val}_{max}^{ou}} \mu_{A \cap B}^{gsu}(pr^{ou}) d(pr^{ou})}{\int_{\text{val}_{min}^{ou}}^{\text{val}_{max}^{ou}} \mu_B^{gsu}(pr^{ou}) d(pr^{ou})} \right). \quad (7)$$

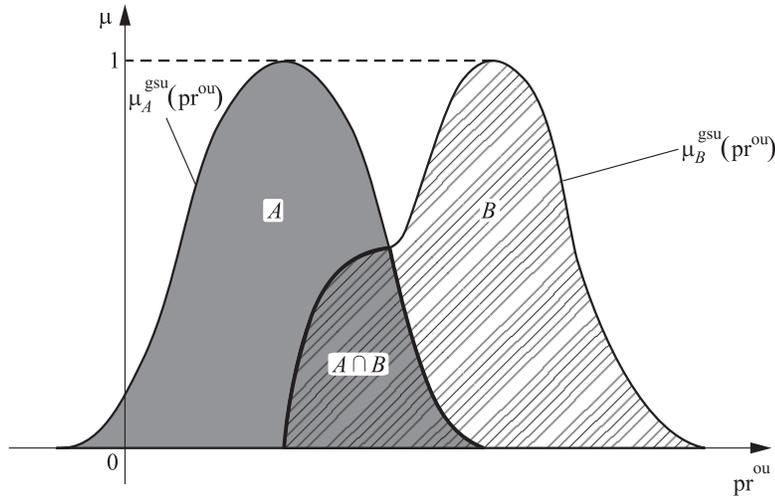


Рис. 3 Мера сходства нечетких целей агентов

Формула (7) — полусумма отношений площади серой заштрихованной области к площади серой области и площади серой заштрихованной области к площади заштрихованной области на рис. 3. Значения меры сходства — действительные числа в интервале [0; 1].

Анализ показывает, что, в отличие от выражений (3)–(6) соотношение (7) следует считать мерой сходства нечетких множеств, а не расстоянием между ними, так как оно не удовлетворяет некоторым из условий, предъявляемых к функции расстояния в математике:

$$\begin{aligned} d(X, Y) &\geq 0; \\ d(X, Y) &= d(Y, X); \\ d(X, Z) &\leq d(X, Y) + d(Y, Z); \end{aligned} \quad (8)$$

$$d(X, X) = 0, \quad (9)$$

а именно условиям (8) и (9).

Рассмотрим вычисление меры сходства нечетких целей на примере. Пусть имеется объект управления res^{ou} , состояние pr^{pou} которого определяется единственным свойством pr^{ou} , значение val^{ou} которого — действительное число в интервале [0; 100], $val^{ou} \in \mathbb{R}$, $val^{ou} \in [0; 100]$, и есть два агента res_1^{su} и res_2^{su} с функциями принадлежности нечетких целей соответственно:

$$\begin{aligned} \mu_1^{gsu}(pr^{pou}) &= \mu_1^{gsu}(pr^{ou}) = \frac{pr^{ou}}{100}; \\ \mu_2^{gsu}(pr^{pou}) &= \mu_2^{gsu}(pr^{ou}) = \frac{100 - pr^{ou}}{100}, \end{aligned}$$

Требуется найти меру сходства $s(1, 2)$ этих нечетких целей. Определим ее по выражению

$$\begin{aligned} s(1, 2) &= \\ &= 0,5 \left(\frac{\int_0^{100} \min(\mu_1^{gsu}(pr^{ou}); \mu_2^{gsu}(pr^{ou})) d(pr^{ou})}{\int_0^{100} \mu_1^{gsu}(pr^{ou}) d(pr^{ou})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\int_0^{100} \min(\mu_1^{gsu}(pr^{ou}); \mu_2^{gsu}(pr^{ou})) d(pr^{ou})}{\int_0^{100} \mu_2^{gsu}(pr^{ou}) d(pr^{ou})} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для вычисления интеграла в числителях дробей требуется найти точки пересечения функций принадлежности $\mu_1^{gsu}(pr^{ou})$ и $\mu_2^{gsu}(pr^{ou})$:

$$\frac{pr^{ou}}{100} = \frac{100 - pr^{ou}}{100}; \quad pr^{ou} = 50,$$

и определить, при каких значениях $val_i^{ou} \mu_1^{gsu}(pr^{ou})$ меньше $\mu_2^{gsu}(pr^{ou})$:

$$\begin{aligned} \mu_1^{gsu}(50 + \Delta pr^{ou}) - \mu_2^{gsu}(50) &= \frac{50 + \Delta pr^{ou}}{100} - \\ &- \frac{100 - 50}{100} = \frac{\Delta pr^{ou}}{100} \begin{cases} \geq 0 & \text{при } \Delta pr^{ou} \geq 0; \\ < 0 & \text{при } \Delta pr^{ou} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, $\mu_1^{gsu}(pr^{ou}) < \mu_2^{gsu}(pr^{ou})$ при $pr^{ou} < 50$ и $\mu_1^{gsu}(pr^{ou}) \geq \mu_2^{gsu}(pr^{ou})$ при $pr^{ou} \geq 50$. Тогда (10) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
 s(1, 2) &= 0,5 \left(\frac{\int_0^{50} (\text{pr}^{\text{ou}}/100) d(\text{pr}^{\text{ou}}) + \int_{50}^{100} ((100 - \text{pr}^{\text{ou}})/100) d(\text{pr}^{\text{ou}})}{\int_0^{100} (\text{pr}^{\text{ou}}/100) d(\text{pr}^{\text{ou}})} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\int_0^{50} (\text{pr}^{\text{ou}}/100) d(\text{pr}^{\text{ou}}) + \int_{50}^{100} ((100 - \text{pr}^{\text{ou}})/100) d(\text{pr}^{\text{ou}})}{\int_0^{100} ((100 - \text{pr}^{\text{ou}})/100) d(\text{pr}^{\text{ou}})} \right) = \\
 &= 0,5 \left(\frac{0,5 (\text{pr}^{\text{ou}})^2 \Big|_0^{50} + (100\text{pr}^{\text{ou}} - 0,5 (\text{pr}^{\text{ou}})^2) \Big|_{50}^{100}}{0,5 (\text{pr}^{\text{ou}})^2 \Big|_0^{100}} + \frac{0,5 (\text{pr}^{\text{ou}})^2 \Big|_0^{50} + (100\text{pr}^{\text{ou}} - 0,5 (\text{pr}^{\text{ou}})^2) \Big|_{50}^{100}}{(100\text{pr}^{\text{ou}} - 0,5 (\text{pr}^{\text{ou}})^2) \Big|_0^{100}} \right) = 0,5.
 \end{aligned}$$

Найденное значение меры сходства $s(1, 2) = 0,5$ нечетких целей двух агентов означает, что нечеткие цели агентов совпадают недостаточно, чтобы назвать их сотрудниками, но и конкурентами в чистом виде они не являются, их следует, скорее, отнести к нейтральным агентам.

В следующем разделе будет дан формальный метод определения типа отношений между агентами на основе значения меры сходства их нечетких целей. Рассмотренный способ определения меры сходства нечетких целей в одномерном пространстве, несложно обобщить и на многомерный случай.

6 Определение типа отношений между агентами по степени согласованности их взаимодействия

В разд. 2 выделено три типа отношений между участниками СППР: конкуренция, нейтралитет и сотрудничество. Представим их нечеткими множествами на универсуме значений меры сходства (на множестве действительных чисел в интервале $[0; 1]$). Очевидно, что чем выше значение меры сходства целей агентов (10), тем теснее взаимодействие между ними. Таким образом, функция принадлежности $\mu_{\text{сотр}}(s)$ нечеткого множества «сотрудничество» должна принимать свое максимальное значение при $s = 1$, а функция принадлежности $\mu_{\text{конк}}(s)$ нечеткого множества «конкуренция» — при $s = 0$. Максимум же

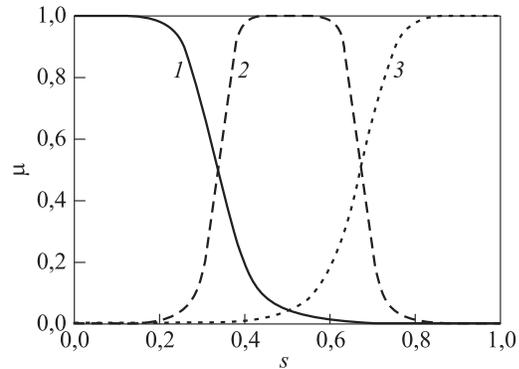


Рис. 4 Функции принадлежности нечетких множеств типов отношений между агентами по степени согласованности их взаимодействия: 1 — конкуренция; 2 — нейтралитет; 3 — сотрудничество

функции принадлежности $\mu_{\text{нейтр}}(s)$ нечеткого множества «нейтралитет» должен быть равноудален от максимумов этих функции, т. е. находиться в точке $s = 0,5$. Учитывая вышесказанное, зададим нечеткие множества отношений конкуренции, нейтралитета и сотрудничества функциями принадлежности, которые изображены на рис. 4:

$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{конк}}(s) &= \frac{1}{1 + (3s)^8}; \\
 \mu_{\text{нейтр}}(s) &= \frac{1}{1 + (6(s - 0,5))^8}; \\
 \mu_{\text{сотр}}(s) &= \frac{1}{1 + (3(s - 1))^8}.
 \end{aligned}$$

Тип отношений между агентами по степени согласованности их взаимодействия представим следующей лингвистической переменной:

$$cl = \langle \beta, T, U, G, M \rangle, \quad (11)$$

где $\beta = \text{тип отношений}$ — наименование лингвистической переменной; $T = \{\text{конкуренция; нейтралитет; сотрудничество}\}$ — множество ее значений (терм-множество), каждое из которых представляет собой наименование нечеткой переменной; $U = [0; 1]$ — область определения (универсум) нечетких переменных, входящих в определение лингвистической переменной; $G = \emptyset$ — синтаксическая процедура, описывающая процесс образования из элементов множества T новых термов; $M = \{\mu_{\text{конк}}(s), \mu_{\text{нейтр}}(s), \mu_{\text{сотр}}(s)\}$ — семантическая процедура, ставящая в соответствие каждому терму множества T , а также каждому новому терму, образуемому процедурой G , осмысленное содержание посредством формирования соответствующего нечеткого множества.

Значение лингвистической переменной cl (*тип отношений*) — терм с наибольшим значением функции принадлежности. Следовательно, для ее вычисления нужно определить значение функции принадлежности к каждому нечеткому множеству, представляющему тип отношений, и сравнить их между собой. Нечеткое множество с максимальным значением функции принадлежности соответствует типу отношений, установленному между парой агентов. Лингвистическая переменная cl моделирует представление ЛПР об отношениях между парой экспертов в СППР.

Совокупность значений лингвистической переменной cl для всех пар агентов МАС формирует матрицу **CL**. По этой матрице можно определить степень сплоченности СППР и принять решение о внесении изменений в структуру СППР. Отметим, что «тип отношений» здесь — название лингвистической переменной, он не связан с понятием «нечеткого отношения» в нечеткой логике.

В случае если между парой конкурирующих или нейтральных агентов и некоторым третьим агентом установлены отношения сотрудничества, они должны рассматриваться как нейтральные, так как цель третьего агента безразлична к состоянию ОУ. Если в МАС существует группа взаимодействующих агентов, которые состоят в одних и тех же отношениях со всеми остальными агентами МАС, она может быть представлена единым «суперагентом» (применительно к СППР — мнимый участник).

После того как для каждой пары агентов определено значение лингвистической переменной cl (*тип отношений*), набор ее значений должен быть проанализирован, с тем чтобы определить тип ар-

хитектуры МАС по степени согласованности взаимодействия агентов.

7 Алгоритм определения архитектуры МАС по степени согласованности взаимодействия агентов

Пусть имеется интеллектуальная КСППР. Тогда в ее состав может быть включен элемент «агент, принимающий решения», имитирующий работу ЛПР по декомпозиции задачи, распределению подзадач между агентами, интеграции решений, полученных от каждого из агентов, анализу взаимодействия между участниками КСППР, организации их взаимодействия и пр. Функция *анализ взаимодействия* f_{ia} используется как для мониторинга взаимодействия агентов-экспертов, так и для идентификации архитектуры МАС на основе анализа целей этих агентов. По его результатам «агент, принимающий решения» может установить необходимость замены одного типа отношений агентов на другой и корректировки их целей. Фактически это означает, что с некоторого момента КСППР изменяет алгоритм своего функционирования, проявляя свойство самоорганизации, и переходит на базовую архитектуру МАС другого типа.

Обобщая вышесказанное, можно предложить алгоритм выполнения «агентом, принимающим решения» функции *анализ взаимодействия* в интеллектуальной МАС. Исходная информация — цели агентов. Результат — тип базовой архитектуры МАС по степени согласованности взаимодействия агентов в виде строки текста, т. е. отнесение текущей архитектуры МАС org_i , $i = 1, \dots, N$, к одному из множеств ORG_{coop} , ORG_{neut} или ORG_{comp} , где $ORG_{\text{coop}}, ORG_{\text{neut}}, ORG_{\text{comp}} \subseteq ORG$, а N — число базовых архитектур МАС (число элементов множества ORG в (1)). Алгоритм определяется следующей последовательностью шагов:

- (1) представить цели агентов в виде нечетких целей; для этого целевые значения каждого свойства, описывающего состояние ОУ, представить нечетким множеством;
- (2) исключить из рассмотрения агентов, безразличных к состоянию ОУ, чья нечеткая цель — константа;
- (3) для каждой пары агентов вычислить меру сходства целей в соответствии с выражением (7);
- (4) для каждой пары агентов на основании значения меры сходства целей определить значение лингвистической переменной *тип от-*

ношений, заданной выражением (11), получив таким образом матрицу \mathbf{CL} ее значений;

- (5) для каждой пары конкурирующих (нейтральных) агентов найти агента, сотрудничающего с обоими агентами и заменить в матрице, полученной на четвертом шаге, тип отношений между этим агентом и каждым из конкурирующих (нейтральных) агентов на нейтральный; если ни для одной пары конкурирующих (нейтральных) агентов не существует ни одного агента, сотрудничающего с обоими агентами, перейти к шагу 6;
- (6) на основе модифицированной матрицы \mathbf{CL} значений лингвистической переменной cl (*тип отношений*) идентифицировать тип архитектуры МАС в целом; если в \mathbf{CL} присутствуют только нейтральные отношения, архитектура МАС относится к типу МАС с нейтральными агентами, если же в ней присутствуют отношения сотрудничества или конкуренции, архитектура МАС относится к типу МАС с сотрудничающими агентами или МАС с конкурирующими агентами соответственно.

В результате выполнения функции *анализ взаимодействий* в КСППР идентифицируется базовая архитектура МАС, что позволит «агенту, принимающему решения» определить необходимость (или отсутствие таковой) ее модификации с целью повышения качества решений. Таким образом происходит смена организационных структур (архитектур) МАС из множества ORG в выражении (1) и самоорганизация КСППР.

Рассмотренный алгоритм позволяет уточнить понятие «самоорганизация многоагентной системы».

Определение 6. Самоорганизация в МАС — процесс изменения архитектуры МАС агентом, имитирующим ЛПР и входящим в ее состав, на основе анализа взаимодействия других агентов с целью повышения качества принимаемых решений.

В итоге МАС (1) с самоорганизацией может быть представлена следующим образом:

$$MAS_S = (A^*, E, \mathbf{CL}, ORG, ACT, \tau),$$

где кроме введенных в определении (1) объектов будем выделять A^* — множество агентов МАС, включающее в себя «агента, принимающего решения» a^{dm} , т. е. $A^* = \{a_1, \dots, a_n, a^{dm}\}$, где n — число агентов-экспертов в МАС, ACT — множество действий агентов системы, τ — отображение множества агентов A^* на множество действий агентов МАС ACT : $ACT \rightarrow A^*$, $ACT_a = \tau(a)$, причем множество действий «агента, принимающего решения» a^{dm}

включает в себя *анализ взаимодействий* f_{ia} , алгоритм которого был рассмотрен выше, т. е. $f_{ia} \in ACT_{a^{dm}}$.

Очевидно, что для принятия решения о замене одной архитектуры МАС на другую одних лишь сведений о текущем взаимодействии агентов МАС недостаточно. Для подобного решения «агенту, принимающему решения» необходимы знания о том, какой из типов архитектур МАС эффективнее в тех или иных условиях. Для получения таких знаний требуется провести серию вычислительных экспериментов с МАС различных типов архитектуры. При определении типа архитектуры МАС в этой серии экспериментов также должен быть использован предложенный алгоритм. В результате для каждого типа архитектур МАС требуется найти долю экспериментов от их общего числа, в которых решение, принятое МАС, оказалось лучше, чем любое из решений, найденных каждым агентом индивидуально. Таким образом, нужно вычислить, в каких МАС выше вероятность возникновения синергетического эффекта, при котором принятое КСППР решение будет лучше, чем любое из предложенных каждым отдельным агентом. Это — предмет дальнейших исследований.

8 Заключение

Рассмотрен подход к созданию интеллектуальной КСППР с самоорганизацией, один из элементов которой имитирует работу ЛПР по организации работы коллектива экспертов над сложной задачей. Такая КСППР на основе сведений о целях участников сможет давать рекомендации ЛПР о необходимости изменения состава и взаимодействия участников либо корректировки поставленных перед ними целей.

На примере МАС предложена оригинальная мера сходства нечетких целей интеллектуальных агентов, показаны ее преимущества при сравнении нечетких целей перед другими мерами близости нечетких множеств. В соответствии с этой мерой выделены три типа отношений между агентами по степени согласованности их взаимодействия: конкуренция, нейтралитет или сотрудничество. Предложен алгоритм определения архитектуры МАС по степени согласованности взаимодействия агентов, а также многоагентная система с самоорганизацией.

Алгоритм определения архитектуры МАС по степени согласованности взаимодействия агентов позволяет рассчитать данные для последующего сравнения архитектур МАС различных типов. Результаты сопоставления архитектур МАС позволяют определить, в каких организациях выше вероятность возникновения синергетического эффекта,

когда принятое коллективом решение будет лучше, чем любое из решений, предлагаемых отдельными интеллектуальными агентами. На основе этой информации интеллектуальная КСППР после распознавания класса коллектива агентов сможет предложить необходимые действия по совершенствованию его архитектуры, что повысит качество принимаемых с использованием КСППР решений.

Литература

1. Петровский А. Б. Компьютерная поддержка принятия решений: современное состояние и перспективы развития // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник / Под ред. Д. М. Гвишиани, В. Н. Садовского. — М.: Эдиториал УРСС, 1996. № 24. С. 146–178.
2. Wierzbicki A. Types of decision support systems and polish contributions to their development // User-oriented methodology and techniques of decision analysis and support / Eds. J. Wessels, A. P. Wierzbicki. — Berlin: Springer-Verlag, 1993. P. 158–175.
3. Трахтенгерц Э. А. Методы генерации, оценки и согласования решений в распределенных системах поддержки принятия решений // Автоматика и телемеханика, 1995. № 4. С. 3–52.
4. Ларичев О. И., Мошкович Е. М. Качественные методы принятия решений. — М.: Наука, 1996.
5. Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. — М.: Прогресс, 1979. 503 с.
6. Колесников А. В. Гибридные интеллектуальные системы. Теория и технология разработки / Под ред. А. М. Яшина. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001.
7. Толковый словарь по искусственному интеллекту / Авторы-составители А. Н. Аверкин, М. Г. Гаазе-Рапопорт, Д. А. Поспелов. — М.: Радио и связь, 1992. 256 с.
8. Тарасов В. Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям: философия, психология, информатика. — М.: Эдиториал УРСС, 2002. 352 с.
9. Wooldridge M., Jennings N. R. Intelligent agents: Theory and practice // Knowledge Eng. Rev., 1995. Vol. 10. No. 2. P. 115–152.
10. Городецкий В. И., Грушинский М. С., Хабалов А. В. Многоагентные системы (обзор) // Новости искусственного интеллекта, 1998. № 2. С. 64–116.
11. Сурмин Ю. П. Теория систем и системный анализ: Учебное пособие. — Киев: МАУП, 2003. 368 с.
12. Анфилатов В. С., Емельянов А. А., Кукушкин А. А. Системный анализ в управлении: Учебное пособие. — М.: Финансы и статистика, 2002. 368 с.
13. Алтунин А. Е., Семухин М. В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. — Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2000. 352 с.
14. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. — М.: Наука, 1986.
15. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / Пер. с франц. — М.: Радио и связь, 1982.
16. Рыжов А. П. Элементы теории нечетких множеств и ее приложений. — М.: Диалог-МГУ, 1998. 81 с.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ СЕМИОТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМПЬЮТЕРНОГО КОДИРОВАНИЯ КОНЦЕПТОВ, ИНФОРМАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ И ДЕНОТАТОВ*

И. М. Зацман¹

Аннотация: Рассмотрена нестационарная семиотическая модель, которая была разработана в процессе исследования проблем целенаправленной генерации и эволюции целевых систем знаний, а также отображения в электронных библиотеках и других видах информационных систем процессов их эволюции во времени и множестве знаковых систем. Эти проблемы относятся к новому направлению исследований, получившему название «когнитивная информатика». Предлагаемая нестационарная семиотическая модель позиционируется как теоретическая основа компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов с учетом их эволюции во времени.

Ключевые слова: семиотическая модель; целевые системы знаний; денотаты; концепты; информационные объекты; компьютерные коды; трехкомпонентная кодировка; описание траектории эволюции концептов

1 Введение

В работах [1, 2] описана новая область исследований, которые ставят своей целью разработку теоретических основ создания информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), обеспечивающих процессы *целенаправленного формирования* новых систем знаний. Такие системы знаний предлагается называть *целевыми*. Проблематика целевых систем знаний позиционируется как междисциплинарная область исследований, но постановка ряда актуальных проблем позволяет отнести их в первую очередь к информатике как информационно-компьютерной науке [1–3]. В рамках информатики эта новая область исследований относится к когнитивной информатике², которая находится в начальной стадии описания ее предметной области и составляющих ее проблем [4–6].

Целью разработки теоретических основ создания ИКТ, которые должны обеспечивать процессы формирования целевых систем знаний (далее по тексту — ЦСЗ), является решение как минимум трех актуальных проблем: (1) идентификации концептов ЦСЗ; (2) оценивания релевантности ЦСЗ технологическим или другим общественно значимым потребностям, ради удовлетворения которых формируется ЦСЗ; (3) направляемого развития ЦСЗ.

В интересах постановки, исследования и решения этих проблем, включая исследование процессов генерации и эволюции ЦСЗ, в работе [2] была предпринята попытка описать концепты, соответствующие им информационные объекты и денотаты с помощью цифровых (компьютерных) кодов в рамках институциональной информационной системы (ИИС). Характерные черты ИИС описаны в работе [7].

Отметим следующие существенные для данной статьи связи (отношения) ИИС с ментальной сферой, материальной сферой физических объектов и явлений, отражаемых в ИИС, социально-коммуникационной и цифровой средами (см. рис. 1, на котором условно показаны перечисленные сферы и среды) [2, 7]:

- представление в цифровой среде ИИС личностных, коллективных и конвенциональных концептов, принадлежащих к *ментальной сфере* пользователей ИИС, а также отражение эволюции этих концептов с помощью *семантических идентификаторов* дескрипторов тезауруса ИИС;
- описание в цифровой среде ИИС информационных объектов *социально-коммуникацион-*

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-07-00156.

¹ Институт проблем информатики Российской академии наук, iz_ipi@al170.ipi.ac.ru

² Когнитивная информатика — направление в информатике как информационно-компьютерной науке, которое при исследовании вычислительных процессов и разработке информационно-компьютерных систем использует методы когнитивной науки, изучающей ментальные процессы (познавательные и креативные) и ментальные объекты (концепты), а при исследовании форм представления концептов, их эволюции, познавательных и креативных процессов использует методы информационной и компьютерной наук [2–6].

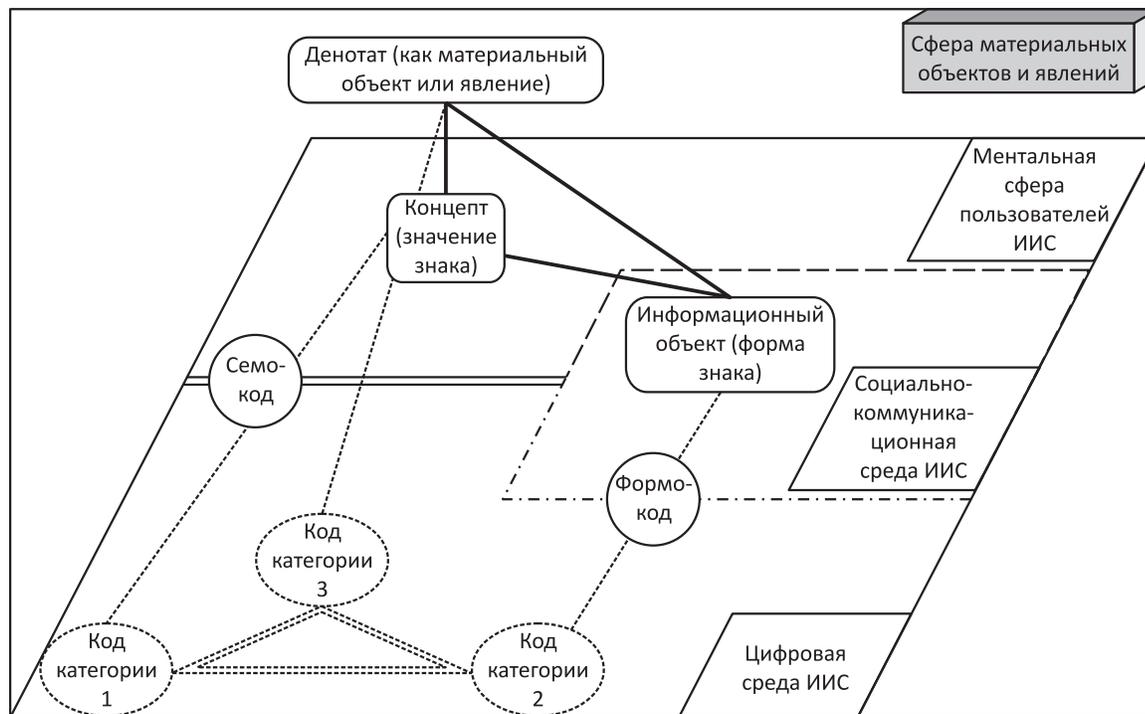


Рис. 1 Стационарная семиотическая модель компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов [2]

ной среды ИИС с помощью *информационных идентификаторов* дескрипторов тезауруса;

- описание в цифровой среде ИИС денотатов *материальной сферы* физических объектов (явлений) или денотатов цифровой среды ИИС с помощью *объектных идентификаторов* дескрипторов тезауруса;
- категоризация кодов *цифровой среды* ИИС, позволяющая различать цифровые денотаты и их компьютерные коды в цифровой среде ИИС, а также различать три категории кодов для концептов, информационных объектов и денотатов (на рис. 1 они обозначены соответственно как «Код категории 1», «Код категории 2» и «Код категории 3»), представляющие собой соответственно семантические, информационные и объектные идентификаторы дескрипторов тезауруса ИИС.

В работе [2] была предложена *семиотическая модель*, которая предназначена для компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов при условии, что *они не изменяются во времени*. Поэтому предложенную ранее семиотическую модель будем называть стационарной. В данной статье будет рассмотрена *нестационарная семиотическая модель*, предназначенная для ком-

пьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов при условии, что *они изменяются во времени*. Слово «нестационарная» в названии этой модели относится к их изменяемости во времени.

Построение нестационарной семиотической модели основано на предложенной ранее стационарной модели, которая по определению из работы [2] включает пять составляющих:

- *ментальную сферу* пользователей ИИС, *материальную сферу* физических объектов и явлений, отражаемых в ИИС, *социально-коммуникационную и цифровую среды* ИИС;
- денотаты, соответствующие им концепты как значения знаков и информационные объекты как формы знаков, которые образуют *семиотические треугольники Фреге* с вершинами «денотат – значение знака – форма знака» [8, 9], а также компьютерные коды следующих трех категорий:

- (1) коды *концептов* как значений знаков – первая категория компьютерных кодов, которые будем называть *семантическими* (на рис. 1 показан один концепт, который относится к ментальной сфере пользователей ИИС);

- (2) коды *информационных объектов* как форм знаков — вторая категория компьютерных кодов, которые будем называть *информационными* (на рис. 1 показан один информационный объект, который относится к социально-коммуникационной среде ИИС);
- (3) коды *денотатов* материальной или цифровой природы — третья категория компьютерных кодов, которые будем называть *объектными* (на рис. 1 показан один денотат, который относится к сфере материальных объектов и явлений);
- авторские, коллективные или конвенциональные знаки, состоящие из концептов как значений знаков и информационных объектов как форм знаков (на рис. 1 знаки, являющиеся элементами знаковой системы ИИС, не показаны);
 - формокоды, состоящие из информационных объектов и компьютерных кодов второй категории, являющиеся элементами формокодовой кодировки, используемой для генерирования информационных компьютерных кодов в ИИС (на рис. 1 показан один формокод, который расположен на границе между социально-коммуникационной и цифровой средами ИИС);
 - семокоды, состоящие из концептов и компьютерных кодов первой категории, являющиеся элементами семокодовой кодировки, используемой для генерирования семантических компьютерных кодов в ИИС (на рис. 1 показан один семокод, который расположен на границе между ментальной сферой пользователей ИИС и ее цифровой средой).

На рис. 1 граница между ментальной сферой и цифровой средой условно обозначена двойной сплошной линией, между социально-коммуникационной и цифровой средами ИИС — штрихпунктирной линией, а между ментальной сферой и социально-коммуникационной средой — штриховой линией.

Как следует из приведенного определения, стационарная семиотическая модель основана на семиотическом треугольнике Фреге¹, стороны которого, обозначенные на рис. 1 полужирными отрезками, соединяют три вершины треугольника: концепт как значение знака, соответствующий ему денотат и информационный объект как форму этого знака. Для каждой из трех вершин треугольника

Фреге в работе [2] было предложено использовать свою систему кодировки: семокодовую для концептов, объектную для денотатов и формокодовую для информационных объектов.

Важно отметить, что для описания стационарной семиотической модели использовалась система из 12 взаимосвязанных терминов, определенная в работах [2, 7, 10, 11]. Эта система терминов включает понятия «знания», «концепт», «информация», «информационный объект», «данные», «цифровые данные» и «коды». При этом каждый из 12 терминов системы принадлежит только к одной сфере (среде) в зависимости от природы соответствующего понятия: ментальной, материальной, социально-коммуникационной или цифровой (см. рис. 1). Идея подобного разделения сфер (сред) используется в достаточно широком спектре проблем информатики, описание которых можно найти в работах [12–15].

Новые ключевые понятия в этой модели выражены терминами «формокод» и «семокод», каждый из которых по своей природе является двуединой сущностью. По определению из работы [10] формокод состоит из информационного объекта как формы знака и компьютерного кода второй категории, т. е. имеет социально-цифровую природу, а семокод состоит из концепта как значения знака и компьютерного кода первой категории, т. е. имеет ментально-цифровую природу.

Сочетание трех компьютерных кодов трех разных категорий — семантического, информационного и объектного — для трех вершин любого треугольника Фреге предлагается называть «цифровым семиотическим треугольником» (на рис. 1 три его стороны изображены двойными точечными отрезками, которые соединяют три компьютерных кода цифровой среды ИИС). Таким образом, стационарная семиотическая модель отображает треугольник Фреге, вершины которого принадлежат разным сферам и средам, в цифровой семиотический треугольник, принадлежащий полностью цифровой среде ИИС. Включение в модель формокода, семокода и компьютерных кодов трех перечисленных категорий позволило предложить в работе [2] принципиально новые методы трехкомпонентной кодировки концептов, соответствующих им информационных объектов и денотатов² (см. рис. 1). Эти методы в дополнение к литерной (посимвольной) кодировке текстов обеспечивают формирование (генерирование) в ИИС следующих

¹В данной статье три вершины семиотического треугольника Г. Фреге — это значение знака (его концепта), форма знака (как частный случай информационного объекта) и денотат знака (материальной, цифровой или иной природы) [8, 9].

²Под трехкомпонентной кодировкой, которая была рассмотрена в работе [2], понимается присвоение компьютерных кодов трем вершинам семиотического треугольника Фреге, т. е. концепту как значению знака, информационному объекту как форме знака и денотату.

компьютерных кодов трех категорий для концептов, информационных объектов и денотатов:

- (1) семантические компьютерные коды для концептов как значений знаков, представляющих собой *семантические идентификаторы* дескрипторов тезауруса¹;
- (2) информационные компьютерные коды для информационных объектов как форм знаков, представляющих собой *информационные идентификаторы* дескрипторов тезауруса²;
- (3) объектные компьютерные коды для денотатов, представляющих собой *объектные идентификаторы* дескрипторов тезауруса (объектная кодировка денотатов, принадлежащих материальной сфере, цифровой или иной среде).

В работе [2] были рассмотрены примеры построения семокодовой и формокодовой кодировок, а также формирование с их помощью семантических и информационных компьютерных кодов, используемых для решения задач концептуального индексирования и семантического поиска в электронной библиотеке геоизображений. Эти примеры содержат алгоритмы формирования следующих кодов:

- для концептов как значений вербальных или образных знаков, соответствующих геообъектам как денотатам, которые представляют собой устьевые области рек;
- для информационных объектов как форм вербальных или образных знаков, соответствующих концептам как значениям этих же вербальных или образных знаков.

Рассмотренные в работе [2] примеры иллюстрируют сферы применения стационарной семиотической модели, а именно: стабильные концепты, устойчивые формы их представления и неизменные денотаты. Для постановки, исследования и решения проблем идентификации концептов ЦСЗ и оценивания их релевантности технологическим или другим общественно значимым потребностям, а также проблемы направляемого развития ЦСЗ в данной статье предлагается построить *нестационарную семиотическую модель* компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов с учетом необходимости фиксации их эволюции во времени в виде последовательности

дискретных стадий. Построение этой модели является основной целью настоящей статьи.

2 Пространство Фреге

Для достижения этой цели сначала определим множество точек, которое будем называть «пространством Фреге». Это пространство будем строить для отображения во времени стадий эволюции концептов ЦСЗ, а также соответствующих им информационных объектов и денотатов. Основная задача этого раздела заключается в том, чтобы эволюцию концептов ЦСЗ представить в виде последовательностей семантических кодов, а эволюцию соответствующих им информационных объектов и денотатов — в виде информационных и объектных компьютерных кодов соответственно.

Эволюцию концептов ЦСЗ будем фиксировать в последовательные моменты времени, которые обозначим как $\{t_i, i = 1, 2, \dots\}$, где t_i — i -й момент времени описания в тезаурусе ИИС вершин семиотических треугольников Фреге, т.е. эволюционирующих концептов ЦСЗ, соответствующих им информационных объектов и денотатов. При этом за t_1 принимается тот момент времени, когда пользователи ИИС начали фиксировать эволюцию концептов ЦСЗ, информационных объектов и денотатов в виде дескрипторов тезауруса. Сам процесс формирования ЦСЗ мог начаться и до момента времени t_1 , но самый первый момент времени построения дескрипторов для концептов этой ЦСЗ обозначим именно как t_1 . Вопросам описания концептов в виде дескрипторов тезауруса посвящена работа [7].

Как отмечалось ранее в сноске 1 на с. 89, три вершины семиотического треугольника Фреге, построенного пользователями ИИС в процессе описания эволюции любого концепта ЦСЗ, представляют собой:

- концепт ЦСЗ как значение знака, принадлежащий ментальной сфере пользователей ИИС;
- информационный объект как форму знака, принадлежащий социально-коммуникационной среде ИИС;
- денотат как объект означивания, в результате анализа и интерпретации которого генерируются новые и/или изменяются существующие концепты, формируются новые и/или изменяются существующие информационные объекты.

¹Каждый из таких концептов, принадлежащих к ментальной сфере пользователей ИИС, в паре со своим кодом образует один элемент семокодовой кодировки.

²Каждый из таких информационных объектов, принадлежащих социально-коммуникационной среде ИИС, в паре со своим кодом образует один элемент формокодовой кодировки.

Предполагается, что в моменты времени $\{t_i, i = 1, 2, \dots\}$ в процессе описания пользователями эволюционирующих концептов ЦСЗ, соответствующих им информационных объектов и денотатов ИИС генерирует соответствующие им цифровые семиотические треугольники. При этом в каждый момент времени t_i может быть сгенерировано одновременно несколько цифровых семиотических треугольников с использованием уникальных идентификаторов дескрипторов тезауруса, если пользователи ИИС фиксируют в тезаурусе в этот момент времени несколько эволюционирующих концептов. Факторы, влияющие на направление эволюции концептов ЦСЗ во времени, будут рассмотрены далее в статье.

Пространство Фреге предлагается строить, исходя из следующего требования: любому цифровому семиотическому треугольнику (см. рис. 1) должна соответствовать одна точка (t, n, m, k) , состоящая из следующих элементов:

- t — момент времени описания в тезаурусе ИИС некоторого треугольника Фреге и генерации соответствующего ему цифрового семиотического треугольника;
- n — семантический компьютерный код для концепта как значения знака, сгенерированный с помощью семокодовой кодировки ИИС в процессе описания в тезаурусе ИИС треугольника Фреге;
- m — информационный компьютерный код для информационного объекта как формы знака, сгенерированный с помощью формокодовой кодировки ИИС в процессе описания в тезаурусе ИИС семиотического треугольника Фреге;
- k — объектный компьютерный код для денотата, сгенерированный в соответствии с регламентом идентификации денотатов в процессе описания в тезаурусе ИИС треугольника Фреге.

Следовательно, пространство Фреге должно включать ось времени, а также оси семантических, информационных и объектных компьютерных кодов. Если в тезаурусе ИИС используется N видов семантических кодов, M видов информационных кодов и K видов объектных кодов, то размерность пространства Фреге будет равна $N + M + K + 1$ (пример множественности видов информационных кодов приведен в работе [2]). В этой статье рассматривается случай, когда $N = M = K = 1$.

Время в этом пространстве может изменяться от нуля до бесконечности. Что касается осей семантических, информационных и объектных кодов, то в соответствии с определением термина «код» в

работах [2, 7, 10, 11] любому коду, представляющему собой идентификатор некоторого дескриптора, можно поставить в соответствие целочисленное двоичное число. Так как со временем число дескрипторов и число их идентификаторов увеличивается, то предлагается не устанавливать верхнюю границу для числовых значений кодов по каждой из осей в пространстве Фреге, т. е. числовые представления семантических, информационных и объектных компьютерных кодов также могут изменяться от нуля до бесконечности.

Любая точка (t, n, m, k) в пространстве Фреге определяется на основе семантического, информационного и объектного идентификаторов того дескриптора тезауруса, который соответствует некоторому треугольнику Фреге. Поэтому и предлагается построенное пространство называть «пространством Фреге».

Важно отметить, что построение этого пространства, размерность которого в общем случае равна $N + M + K + 1$, предполагает наличие правил установления однозначного отображения сгенерированных цифровых семиотических треугольников на пространство Фреге. Эти правила представляют собой формализованный аппарат, позволяющий вычислять точки (t, n, m, k) пространства Фреге на основе кодов вершин генерируемых цифровых семиотических треугольников. Пространство Фреге не содержит описания взаимосвязей компьютерных кодов с концептами, информационными объектами и денотатами. Однако в любой дискретный момент времени t_i для любого семиотического треугольника Фреге описание взаимосвязей компьютерных кодов с его концептом как значением знака, информационным объектом как формой знака и денотатом фиксируется с помощью стационарной семиотической модели, определение которой приведено в предыдущем разделе (см. рис. 1).

Сформулируем четыре *правила установления однозначного отображения* сгенерированных цифровых семиотических треугольников на пространство Фреге, которые должны позволять однозначно определять только одну точку (t, n, m, k) в этом пространстве для любого цифрового семиотического треугольника:

- t определим как дискретный момент времени описания в тезаурусе ИИС семиотического треугольника Фреге и одновременной генерации рассматриваемого цифрового семиотического треугольника;
- точку n на семантической оси определим как числовое значение семантического компьютерного кода рассматриваемого цифрового треугольника;

- точку m на информационной оси определим как числовое значение информационного компьютерного кода рассматриваемого цифрового треугольника;
- точку k на объектной оси определим как числовое значение объектного компьютерного кода рассматриваемого цифрового треугольника.

Предположим, что в один и тот же момент времени два разных цифровых семиотических треугольника были отображены в одну и ту же точку (t, n, m, k) пространства Фреге. Отличие двух цифровых семиотических треугольников означает, что соответствующие два семиотических треугольника Фреге различаются хотя бы одной вершиной. Тогда случай отображения двух разных цифровых семиотических треугольников в одну и ту же точку (t, n, m, k) означает, что двум разным концептам и/или двум разным информационным объектам и/или двум разным денотатам в тезаурусе ИИС в момент времени t был приписан один и тот же код, что противоречит положению об уникальности идентификаторов дескрипторов тезауруса ИИС. Таким образом, любому цифровому семиотическому треугольнику соответствует только одна точка (t, n, m, k) в пространстве Фреге и наоборот.

Используя пространство Фреге и предлагаемое однозначное соответствие, определим *нестационарную семиотическую модель* компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов с учетом их эволюции во времени как сочетание следующих трех составляющих:

- (1) любое семейство семиотических треугольников Фреге, построенных пользователями ИИС в процессе эволюции ЦСЗ и описанных ими в виде дескрипторов тезауруса ИИС в дискретные моменты времени $\{t_i, i = 1, 2, \dots\}$;
- (2) соответствующие цифровые семиотические треугольники (см. рис. 1);
- (3) множество точек $\{(t_i, n_{i,j}, m_{i,j}, k_{i,j})\}$, где $j = 1, \dots, L_i$, L_i — число цифровых семиотических треугольников, сгенерированных в момент времени t_i , $i = 1, 2, \dots$, полученных в результате однозначного отображения цифровых семиотических треугольников на пространство Фреге с использованием четырех сформулированных правил установления однозначного отображения.

Завершая построение нестационарной семиотической модели отметим, что любое мно-

жество точек $\{(t_i, n_{i,j}, m_{i,j}, k_{i,j})\}$ пространства Фреге является зависимым от тезауруса ИИС, так как информационный, семантический и объектный компьютерные коды вершин любого цифрового семиотического треугольника представляют собой соответственно информационный, семантический и объектный идентификаторы дескриптора тезауруса, соответствующего этому треугольнику. Эти коды генерируются автоматически в процессе описания пользователями ИИС «траекторий» эволюции концептов ЦСЗ, их информационных объектов и денотатов в виде дескрипторов тезауруса в дискретные моменты времени $\{t_i, i = 1, 2, \dots\}$. При этом в тезаурусе фиксируются только дискретные моменты времени эволюции, но сам процесс эволюции может быть и непрерывным.

3 Пример нестационарной семиотической модели

Прежде чем рассмотреть факторы, влияющие на формирование ЦСЗ, приведем иллюстративный пример описания эволюционирующих концептов ЦСЗ в виде дескрипторов тезауруса. Как уже отмечалось, концепты по определению относятся к ментальной сфере пользователей ИИС как генераторов ЦСЗ. В общем случае ЦСЗ может включать личностные концепты одного или нескольких пользователей ИИС, коллективные и конвенциональные концепты [7, 11]. В процессе построения дескрипторов тезауруса, относящихся к *цифровой среде ИИС*, пользователи ИИС формируют их, используя в качестве своеобразных посредников между концептами и кодами информационные объекты социально-коммуникационной среды ИИС¹.

В этом примере рассмотрим случай одного пользователя, целью которого является формирование ЦСЗ о группе индикаторов распределения по возрастным группам публикационной активности научного коллектива (далее — ЦСЗ публикационной активности). Эта группа новых индикаторов была описана в [7]. В этой работе были рассмотрены традиционные индикаторы возрастного распределения научных сотрудников и по аналогии с ними формировалась группа новых индикаторов распределения публикационной активности. Построим нестационарную семиотическую модель, отражающую два момента времени t_1 и t_2 процесса построения ЦСЗ публикационной активности.

¹В работе [2] приведено описание микрокомпьютера MITS Altair 8800, при работе с которым пользователь мог формировать коды без применения информационных объектов, используя только двоичные переключатели и лампочки на передней панели как формы представления компьютерных кодов вне цифровой среды.

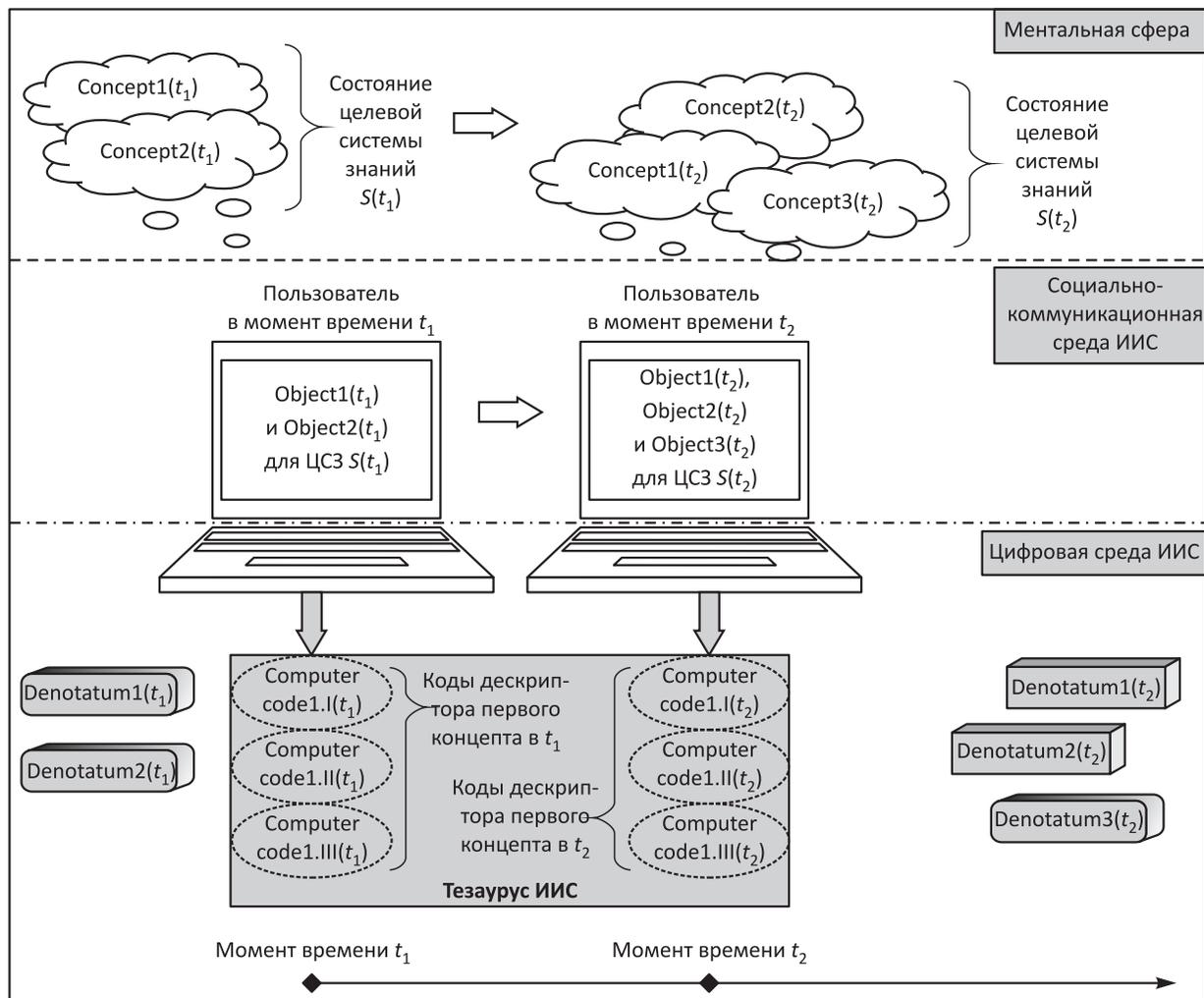


Рис. 2 Два состояния ЦСЗ публикационной активности в моменты времени t_1 и t_2

Предположим, что в момент времени t_1 пользователь описал ЦСЗ публикационной активности, включающую два его личностных концепта, в виде набора из двух дескрипторов тезауруса ИИС (обозначим состояние ЦСЗ в момент времени t_1 как $S(t_1)$). Эти два личностных концепта обозначены на рис. 2 как $Concept1(t_1)$ и $Concept2(t_1)$.

Концепт $Concept1(t_1)$ был сформирован пользователем при следующих исходных данных. Учитывались публикации в любых научных журналах, сборниках и т. д., зарегистрированные в течение заданного периода времени в базе данных ИИС. Если у публикации было несколько авторов, то соответствующим возрастным группам добавлялось по одному баллу. На основе этих исходных данных была разработана программа вычисления значений первого варианта нового индикатора публикационной активности.

Концепт $Concept2(t_1)$ был сформирован почти при тех же исходных данных, но которые отличались порядком учета публикаций с несколькими авторами: если у публикации было X авторов, то соответствующим возрастным группам добавлялось по $1/X$ балла [7]. На основе этих исходных данных была разработана программа вычисления значений второго варианта нового индикатора публикационной активности.

Структурированное описание пользователем в момент времени t_1 исходных данных и алгоритмов программ, соответствующих концептам $Concept1(t_1)$ и $Concept2(t_1)$, представляет собой дефиницию для каждого из двух новых дескрипторов тезауруса. Отображения этих дефиниций на экране монитора обозначены на рис. 2 как два информационных объекта $Object1(t_1)$ и $Object2(t_1)$.

Затем в момент времени t_2 этот же пользователь продолжил описание ЦСЗ публикационной активности и сформировал новое состояние ЦСЗ, которое обозначим как $S(t_2)$, включающее три его личностных концепта. Эти концепты на рис. 2 обозначены как $\text{Concept1}(t_2)$, $\text{Concept2}(t_2)$ и $\text{Concept3}(t_2)$.

Концепт $\text{Concept1}(t_2)$ был сформирован при следующих исходных данных. Учитывались публикации только в журналах из списка ВАК, зарегистрированные в течение заданного периода времени в базе данных ИИС. Если у публикации было несколько авторов, то соответствующим возрастным группам добавлялось по одному баллу. Концепт $\text{Concept2}(t_2)$ был сформирован почти при тех же исходных данных, но которые отличались порядком учета публикаций с несколькими авторами (при X авторах добавлялось по $1/X$ балла). При этом использовались те же программы, что и для концептов $\text{Concept1}(t_1)$ и $\text{Concept2}(t_1)$, но этими программами обрабатывались только публикации в журналах из списка ВАК. Концепт $\text{Concept3}(t_2)$ был сформирован при существенно иных исходных данных. Проводилась нормализация публикационной активности с учетом численности каждой возрастной группы, проставлялись разные коэффициенты постоянным научным сотрудникам и совместителям, учитывались публикации как в журналах из списка ВАК, так и в любых иностранных журналах.

Первые два концепта в момент времени t_2 пользователь описал в виде дескрипторов тезауруса как варианты концептов $\text{Concept1}(t_1)$ и $\text{Concept2}(t_1)$, а третий свой личностный концепт $\text{Concept3}(t_2)$ он отметил в тезаурусе как новый. Структурированное описание пользователем в момент времени t_2 исходных данных и алгоритмов программ, соответствующих концептам $\text{Concept1}(t_2)$, $\text{Concept2}(t_2)$ и $\text{Concept3}(t_2)$, представляет собой три дефиниции для трех новых дескрипторов тезауруса. Отображения этих дефиниций на экране монитора обозначены на рис. 2 как три информационных объекта $\text{Object1}(t_2)$, $\text{Object2}(t_2)$ и $\text{Object3}(t_2)$. Все рассматриваемые информационные объекты относятся к социально-коммуникационной среде ИИС.

Важно отметить, что описание дескрипторов тезауруса ИИС в моменты времени t_1 и t_2 пользователь строил на основе своих личностных концептов, сформированных в процессе анализа и интерпретации цифровых (а не материальных!) денотатов. Каждый денотат в этом примере представляет собой сочетание программы вычисления значений одного из индикаторов публикационной активности и используемых этой программой цифровых ресурсов базы данных ИИС, содержащей сведения о публикациях научных сотрудников.

Таким образом, в отличие от рис. 1, где денотат является материальным объектом, все рассматриваемые на рис. 2 денотаты относятся к цифровой среде ИИС, а не к материальной. На рис. 2 концепты $\text{Concept1}(t_1)$ и $\text{Concept2}(t_1)$ сформированы в процессе анализа и интерпретации цифровых денотатов $\text{Denotatum1}(t_1)$ и $\text{Denotatum2}(t_1)$, а концепты $\text{Concept1}(t_2)$, $\text{Concept2}(t_2)$ и $\text{Concept3}(t_2)$ — в процессе анализа и интерпретации денотатов $\text{Denotatum1}(t_2)$, $\text{Denotatum2}(t_2)$ и $\text{Denotatum3}(t_2)$.

Каждый из пяти концептов $\text{Concept1}(t_1)$, $\text{Concept2}(t_1)$, $\text{Concept1}(t_2)$, $\text{Concept2}(t_2)$ и $\text{Concept3}(t_2)$ с соответствующим ему денотатом, в процессе анализа и интерпретации которого этот концепт и был сформирован, а также информационным объектом как результатом представления дефиниции этого концепта в виде формы знака или устойчивого знакового выражения, образует один семиотический треугольник Фреге [2]. Каждому семиотическому треугольнику Фреге соответствует один дескриптор тезауруса ИИС с тремя идентификаторами: семантическим, информационным и объектным.

В процессе описания каждого дескриптора тезауруса ИИС автоматически генерирует коды трех разных категорий. Например, на рис. 2 показано, что ИИС генерирует в момент времени t_1 коды для первого концепта $\text{Concept1}(t_1)$, его информационного объекта $\text{Object1}(t_1)$ и денотата $\text{Denotatum1}(t_1)$, которые обозначены как $\text{Computer code1.I}(t_1)$, $\text{Computer code1.II}(t_1)$ и $\text{Computer code1.III}(t_1)$ соответственно, а в момент времени t_2 — коды для нового варианта этого же концепта $\text{Concept1}(t_2)$, его информационного объекта $\text{Object1}(t_2)$ и денотата $\text{Denotatum1}(t_2)$, которые обозначены как $\text{Computer code1.I}(t_2)$, $\text{Computer code1.II}(t_2)$ и $\text{Computer code1.III}(t_2)$. Сочетание трех кодов $\text{Computer code1.I}(t_1)$, $\text{Computer code1.II}(t_1)$ и $\text{Computer code1.III}(t_1)$ на рис. 2 помечено как «Коды дескриптора первого концепта в t_1 », а трех кодов $\text{Computer code1.I}(t_2)$, $\text{Computer code1.II}(t_2)$ и $\text{Computer code1.III}(t_2)$ — как «Коды дескриптора первого концепта в t_2 ». Римскими цифрами в этих кодах обозначены категории кодов (I обозначает семантические коды, II — информационные, а III — объектные).

Отметим, что на рис. 2 в явном виде показаны только шесть кодов из 15 (для 5 концептов, 5 информационных объектов и 5 денотатов) и не показаны связи концептов, информационных объектов и денотатов. Причина в том, что для этого понадобилось бы существенно усложнить рис. 2. Таким образом, эти связи и 9 кодов из 15 на этом рисунке не показаны. Для того чтобы показать

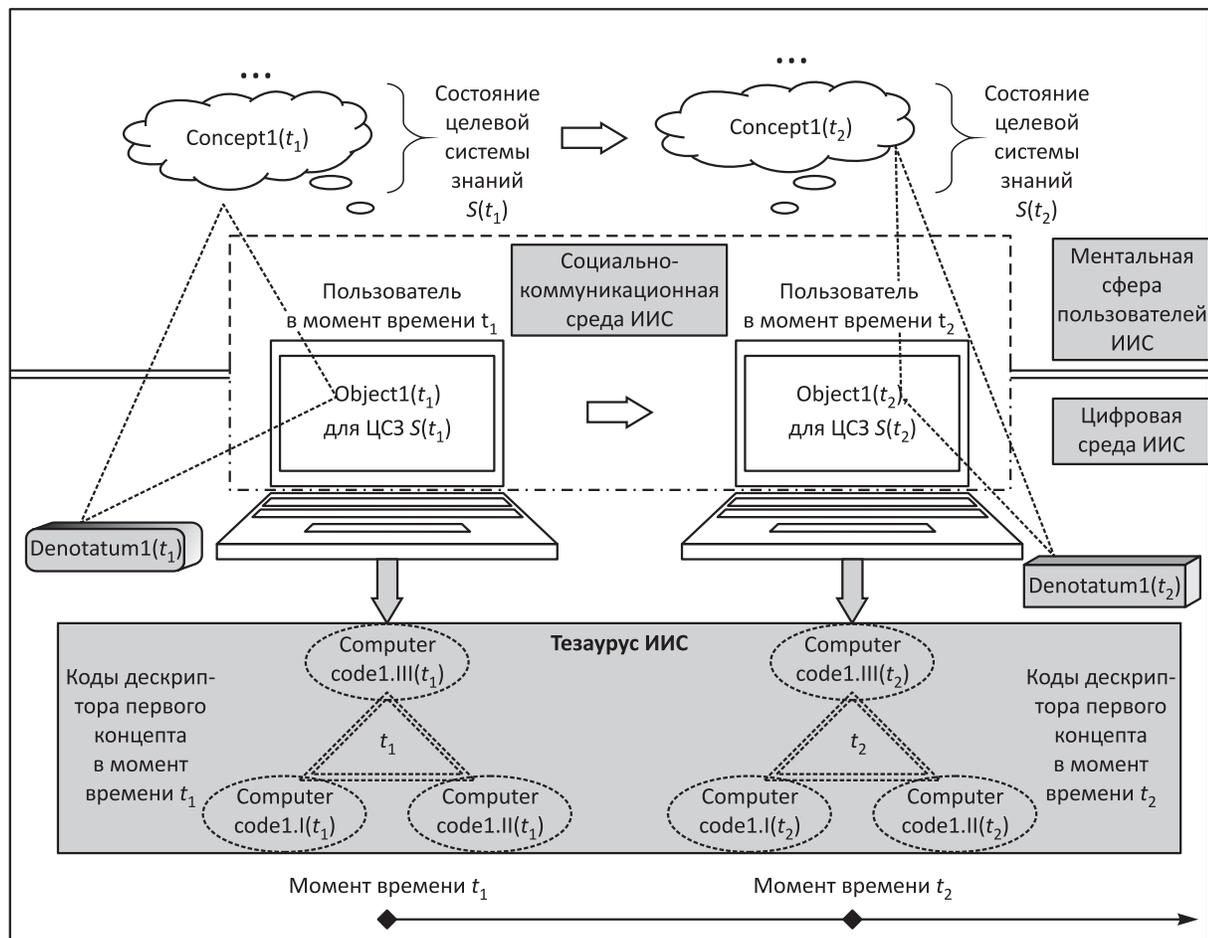


Рис. 3 Два цифровых семиотических треугольника описания двух концептов $Concept1(t_1)$ и $Concept1(t_2)$ ЦСЗ публикационной активности

в явном виде связи концептов, информационных объектов и денотатов, предназначен рис. 3.

На этом рисунке показаны шесть кодов для двух концептов $Concept1(t_1)$ и $Concept1(t_2)$, двух информационных объектов $Object1(t_1)$ и $Object1(t_2)$, а также двух денотатов $Denotatum1(t_1)$ и $Denotatum1(t_2)$. Остальные три концепта, три информационных объекта, три денотата и их коды на рис. 3 не показаны, т. е. на этом рисунке в явном виде показаны только два концепта, два информационных объекта, два денотата, а также шесть их кодов, которые образуют два цифровых семиотических треугольника в моменты времени t_1 и t_2 . Однако в пространстве Фреге на рис. 4 показаны все пять точек с числовыми значениями всех 15 компьютерных кодов (5 чисел $n_{1,1}, n_{1,2}, n_{2,1}, n_{2,2}, n_{2,3}$ для семантических кодов концептов, 5 чисел $m_{1,1}, m_{1,2}, m_{2,1}, m_{2,2}, m_{2,3}$ для информационных кодов и 5 чисел $k_{1,1}, k_{1,2}, k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3}$ для объектных кодов денотатов).

На рис. 3 концепт $Concept1(t_1)$ является вершиной левого треугольника Фреге, а концепт $Concept1(t_2)$ — вершиной правого треугольника. Оба семиотических треугольника Фреге обозначены на этом рисунке одинарными точечными линиями. Каждому из этих двух треугольников Фреге соответствует свой цифровой семиотический треугольник, обозначенный двойными точечными линиями: один в момент времени t_1 и один — в t_2 .

Левый цифровой семиотический треугольник, сгенерированный ИИС в момент времени t_1 , включает коды трех категорий:

- (1) семантический код $Computer\ code1.I(t_1)$ для концепта $Concept1(t_1)$ как значения соответствующего авторского знака пользователя;
- (2) информационный код $Computer\ code1.II(t_1)$ для информационного объекта $Object1(t_1)$ как формы этого же авторского знака;

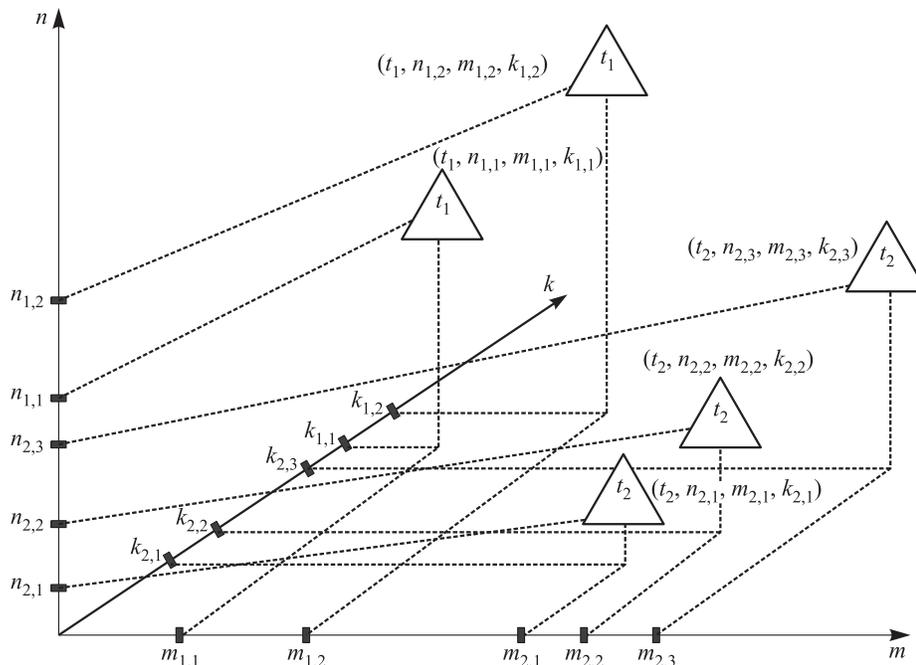


Рис. 4 Отображение пяти цифровых семиотических треугольников на пространство Фреге

(3) объектный код Computer code1.III(t_1) того денотата Denotatum1(t_1), в результате анализа и интерпретации которого был сформирован концепт Concept1(t_1).

Правый цифровой семиотический треугольник, сгенерированный ИИС в момент времени t_2 , также включает коды трех категорий:

- (1) семантический код Computer code1.I(t_2) для концепта Concept1(t_2) как значения соответствующего авторского знака пользователя;
- (2) информационный код Computer code1.II(t_2) для информационного объекта Object1(t_2) как формы этого же авторского знака;
- (3) объектный код Computer code1.III(t_2) того денотата Denotatum1(t_2), в результате анализа и интерпретации которого был сформирован концепт Concept1(t_2).

Авторские знаки, определение и описание которых можно найти в работах [7, 11], на рис. 2 и 3 не показаны. Рисунок 3 иллюстрирует на примере двух вариантов первого концепта Concept1(t_1) и Concept1(t_2) построение следующих двух составляющих нестационарной семиотической модели компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов:

- семейство из двух семиотических треугольников Фреге для Concept1(t_1) и Concept1(t_2), описанных пользователем в моменты времени t_1

и t_2 в виде дескрипторов тезауруса ИИС в процессе построения ЦСЗ публикационной активности;

- соответствующие этим двум треугольникам Фреге два цифровых семиотических треугольника, автоматически сгенерированные ИИС для Concept1(t_1) и Concept1(t_2) в моменты времени t_1 и t_2 .

Для завершения построения примера нестационарной семиотической модели определим в пространстве Фреге множество из пяти точек $\{(t_i, n_{i,j}, m_{i,j}, k_{i,j})\}$, где $j = 1, \dots, L_i$, $L_1 = 2$, $L_2 = 3$, $i = 1, 2$. В этом примере число цифровых семиотических треугольников L_1 , сгенерированных ИИС в момент времени t_1 , равно 2, а число цифровых семиотических треугольников L_2 , сгенерированных ИИС в момент времени t_2 , равно 3. Эти пять точек получены в результате следующего однозначного отображения пяти цифровых семиотических треугольников для концептов Concept1(t_1), Concept2(t_1), Concept1(t_2), Concept2(t_2) и Concept3(t_2) на пространство Фреге с использованием четырех сформулированных ранее правил установления отображения (см. рис. 4):

- t_1 и t_2 — моменты времени описания пользователем в тезаурусе ИИС пяти семиотических треугольников Фреге (двух в момент времени t_1 и трех в момент времени t_2);

- $n_{1,1}, n_{1,2}, n_{2,1}, n_{2,2}, n_{2,3}$ — числовые значения семантических компьютерных кодов Computer code1.I(t_1), Computer code2.I(t_1), Computer code1.I(t_2), Computer code2.I(t_2) и Computer code3.I(t_2) концептуальных вершин пяти цифровых семиотических треугольников;
- $m_{1,1}, m_{1,2}, m_{2,1}, m_{2,2}, m_{2,3}$ — числовые значения информационных компьютерных кодов Computer code1.II(t_1), Computer code2.II(t_1), Computer code1.II(t_2), Computer code2.II(t_2) и Computer code3.II(t_2) информационных вершин этих треугольников;
- $k_{1,1}, k_{1,2}, k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3}$ — числовые значения объектных компьютерных кодов Computer code1.III(t_1), Computer code2.III(t_1), Computer code1.III(t_2), Computer code2.III(t_2) и Computer code3.III(t_2) объектных вершин этих треугольников.

Рисунок 4 иллюстрирует построение однозначного отображения пяти цифровых семиотических треугольников на пространство Фреге, размерность которого равна 4. Так как отображаемое семейство включает цифровые семиотические треугольники, которые сгенерированы ИИС только в два момента времени t_1 и t_2 , то ось времени на рис. 4 в явном виде не показана. В этом примере для множества из пяти точек в пространстве Фреге показаны только три оси: семантическая ось n , информационная ось m и объектная ось k .

Пять точек $\{(t_i, n_{i,j}, m_{i,j}, k_{i,j}), \text{ где } j = 1, \dots, L_i, L_1 = 2, L_2 = 3, i = 1, 2\}$, полученных в результате отображения пяти цифровых семиотических треугольников на пространство Фреге, образуют третью составляющую нестационарной семиотической модели компьютерного кодирования 5 концептов, 5 информационных объектов и 5 денотатов для рассматриваемого примера построения ЦСЗ публикационной активности. Были рассмотрены два момента времени t_1 и t_2 , когда пользователем были описаны два состояния его первого личностного концепта и два состояния второго концепта, а также одно состояние третьего концепта в момент времени t_2 .

4 Факторы эволюции целевых систем знаний

В рассмотренном примере описаны пять дескрипторов тезауруса в моменты времени t_1 и t_2 на основе личностных концептов, сформированных в процессе анализа и интерпретации цифровых денотатов Denotatum1(t_1), Denotatum2(t_1),

Denotatum1(t_2), Denotatum2(t_2) и Denotatum3(t_2). Каждый денотат в этом примере представляет собой сочетание программы вычисления индикатора оценивания публикационной активности и используемых этой программой цифровых ресурсов ИИС. Денотат Denotatum1(t_2) является с точки зрения пользователя модификацией денотата Denotatum1(t_1), Denotatum2(t_2) — модификацией Denotatum2(t_1), а денотат Denotatum3(t_2) определен пользователем как новый. Одной из причин эволюции ЦСЗ $S(t)$ и составляющих ее концептов является модификация программ вычисления индикаторов и используемых этими программами цифровых ресурсов ИИС, а также разработка новых программ и формирование новых цифровых ресурсов.

Разработку новых программ и модификацию существующих будем называть алгоритмическим фактором эволюции ЦСЗ и составляющих ее концептов, а формирование новых цифровых ресурсов и модификацию существующих будем называть информационным фактором эволюции. В любой момент описания дескрипторов тезауруса пользователь ИИС формирует их на основе своих личностных концептов, которые представляют результаты выполненного им анализа и интерпретации соответствующих денотатов. Важно отметить, что, изменяя денотаты, т. е. программы и используемые этими программами цифровые ресурсы, пользователь итерационно может влиять и на процесс *формирования своих личностных концептов*.

Итерационное изменение пользователями ИИС денотатов с последующим их анализом и интерпретацией предлагается называть *концептуализацией денотатов*. Если изменения денотатов пользователями являются целенаправленными, т. е. определяются явно сформулированными целями, то такой итерационный процесс предлагается называть *целенаправленной концептуализацией денотатов*, который и лежит в основе формирования ЦСЗ и ее направляемой эволюции.

Сопоставим два введенных понятия «концептуализация денотатов» и «целенаправленная концептуализация денотатов» с термином «концептуализация» из «Краткого словаря когнитивных терминов» [16]. В этом словаре концептуализация трактуется как один из важнейших процессов познавательной деятельности человека, заключающийся в осмыслении поступающей к нему информации и приводящей к образованию концептов, концептуальных структур и всей концептуальной системы в мозгу (психике) человека. Согласно этой же трактовке концептуализация может также рассматриваться как процесс порождения новых смыслов, и тогда предметом рассмотрения становятся

вопросы о том, как образуются новые концепты, как создание нового концепта ограничивается уже имеющимися концептами в системе знаний, как можно объяснить способность человека пополнять эту систему [16, с. 90–93].

В контексте этого словарного определения предлагаемый в статье термин «концептуализация денотатов» можно трактовать как процесс формирования концептов на основе совокупностей изменяемых компьютерных программ и используемых ими цифровых ресурсов. С прикладной точки зрения концептуализация денотатов является ключевым процессом в задачах построения новых индикаторов и формирования их смыслового содержания при проектировании и использовании систем информационного мониторинга и оценивания научной деятельности [7, 11, 17–19].

В задачах построения новых индикаторов процесс формирования концептов является, как правило, целенаправленным и итерационным. В этом процессе участвуют эксперты-пользователи систем мониторинга и оценивания, целью которых является генерация ЦСЗ в процессе их совместной деятельности. Каждая итерация процесса *целенаправленной концептуализации денотатов* включает три этапа.

На первом этапе эксперты фиксируют некоторую совокупность компьютерных программ, их параметров и цифровых ресурсов, используемых в процессе построения ими новых индикаторов и вычисления значений этих индикаторов, смысловое содержание которых и должны попытаться согласовать между собой эксперты.

На втором этапе поставленная задача вычисления значений индикаторов решается экспертами, т. е. с помощью программ вычисляются значения каждого нового индикатора, а затем, используя исходные данные и результаты вычислений, эксперты пытаются согласованно интерпретировать новый индикатор. Для каждого нового индикатора итогом второго этапа может быть один из трех следующих результатов:

- (1) согласованная между экспертами смысловая интерпретация нового индикатора при заданной совокупности компьютерных программ, их параметров и цифровых ресурсов;
- (2) несколько разных смысловых интерпретаций нового индикатора, полученных на основе исходных данных и результатов вычислений;
- (3) отсутствие смысловых интерпретаций, т. е. фиксация экспертами невозможности интерпретировать новый индикатор при заданных исходных данных и полученных результатах вычислений.

В последних двух случаях происходит возврат на первый этап. Третий этап выполняется только в том случае, если экспертами получена согласованная смысловая интерпретация индикатора. Тогда они позиционируют согласованные итоги концептуализации денотата индикатора в рамках формируемой ЦСЗ, создавая и/или уточняя дескрипторы тезауруса, фиксируют новую стадию ее развития. Затем эксперты сопоставляют новый вариант ЦСЗ с теми технологическими или другими общественно значимыми потребностями, ради которых этот вариант ЦСЗ был ими сформирован (как правило, с участием лиц, принимающих решения). Если эксперты находят полученный вариант неполным или нерелевантным, то происходит возврат на первый этап, на котором изменяются компьютерные программы, их параметры и используемые программами цифровые ресурсы. Получив желаемый результат, эксперты завершают процесс построения новых индикаторов и формирования ЦСЗ.

Приведенное описание примера построения новых индикаторов и формирования ЦСЗ, включающего процесс концептуализации денотатов индикаторов, говорит о том, что заранее не гарантируется формирование именно того варианта ЦСЗ, который отвечает технологическим или другим общественно значимым потребностям. Начав процесс концептуализации, эксперты могут и не получить желаемого варианта ЦСЗ.

Отметим, что по определению процесс концептуализации денотатов включает в себя итерационно повторяемый этап их анализа и интерпретации. Возможность целенаправленного и итеративного изменения совокупностей компьютерных программ, их параметров и используемых этими программами цифровых ресурсов является существенной степенью свободы экспертов в процессе направляемого ими формирования отдельных концептов и ЦСЗ в целом.

Однако существуют факторы, которые могут существенно ограничивать степень свободы экспертов, в первую очередь это методический и нормативный факторы, которые рассмотрим в контексте Постановления Правительства РФ от 22 мая 2004 года № 249 «О мерах по повышению результативности бюджетных расходов» (далее — Постановление № 249) [20]. Это постановление предусматривает введение в стране среднесрочного бюджетирования, ориентированного на результаты (СБОР). Основные положения СБОР сформулированы в «Концепции реформирования бюджетного процесса в Российской Федерации в 2004–2006 годах» (далее — Концепция), одобренной Постановлением № 249. Концепция направлена на повышение результативности управления бюджетными

ресурсами в соответствии с явно определенными приоритетами государственной политики.

Согласно методическим рекомендациям по реализации Концепции, формируемые экспертами системы индикаторов и других категорий показателей результативности должны соответствовать следующим требованиям [21]:

- *точность*: погрешности измерения не должны приводить к искаженному представлению о результатах деятельности;
- *объективность*: не допускается использование показателей, улучшение значений которых возможно при ухудшении реального положения дел; используемые показатели должны в наименьшей степени создавать стимулы к искажению результатов деятельности;
- *достоверность*: способ сбора и обработки исходных данных должен допускать возможность проверки точности данных в процессе независимого мониторинга и оценивания;
- *однозначность*: определение показателя должно обеспечивать его одинаковое понимание пользователями;
- *экономичность*: получение исходных данных должно производиться с минимально возможными затратами, применяемые показатели должны в максимальной степени основываться на уже существующих программах сбора исходных данных;
- *своевременность и регулярность*: отчетные данные должны поступать с определенной периодичностью и с незначительным временным лагом между моментом сбора исходных данных и сроком их использования;
- *уникальность (атомарность)*: показатели достижения цели не должны представлять собой объединение нескольких показателей, характеризующих решение отдельных относящихся к этой цели задач.

Перечисленные требования, в том числе достаточно сложное в реализации требование однозначности, представляют собой в совокупности пример методического фактора, который согласно этим рекомендациям необходимо принимать во внимание пользователям-экспертам в процессе построения ими новых индикаторов и формирования их смыслового содержания.

Кроме учета методического фактора эксперты, естественно, обязаны следовать положениям соответствующих нормативно-правовых документов (нормативный фактор), например части 4 ГК РФ при классификации результатов интеллектуальной

деятельности, для оценивания которых они проектируют новые индикаторы и формируют ЦСЗ.

5 Заключение

Необходимость построения нестационарной семиотической модели компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов с учетом необходимости фиксации стадий их эволюции во времени обосновывалась актуальностью постановки и решения проблем: идентификации концептов ЦСЗ; оценивания релевантности ЦСЗ технологическим или другим общественно значимым потребностям, ради удовлетворения которых формируется ЦСЗ; направляемого развития ЦСЗ. Построение этой модели в виде трех составляющих (два семейства семиотических треугольников — Фреге и цифровых, а также множество точек, полученных в результате отображения семейства цифровых семиотических треугольников на пространство Фреге) представляют собой теоретическую основу для решения трех перечисленных проблем.

Проблема идентификации концептов ЦСЗ, эволюционирующих в процессе анализа и интерпретации денотатов, может быть решена полностью в рамках предложенной нестационарной семиотической модели, если трактовать словосочетание «идентификация концепта» как построение дискретной «траектории» этого концепта в виде серии концептуальных вершин цифровых семиотических треугольников в моменты времени $\{t_i\}$. Иными словами, идентификация эволюционирующего концепта, а также его денотата и информационного объекта в момент времени t_i в предлагаемой трактовке эквивалентна построению цифрового семиотического треугольника со следующими вершинами:

- концептуальная вершина треугольника представляет собой семантический компьютерный код эволюционирующего концепта в момент времени t_i в виде семантического идентификатора соответствующего дескриптора тезауруса ИИС;
- информационная вершина треугольника представляет собой информационный компьютерный код информационного объекта как знаковой формы представления этого концепта в момент времени t_i в виде информационного идентификатора дескриптора;
- объектная вершина треугольника представляет собой объектный компьютерный код денотата этого концепта в момент времени t_i в виде объектного идентификатора дескриптора.

В такой трактовке словосочетания «идентификация концепта» предложенная нестационарная семиотическая модель выступает как достаточная теоретическая основа для решения проблемы идентификации концептов ЦСЗ, эволюционирующих в процессе анализа и интерпретации денотатов. Нестационарная семиотическая модель является достаточной теоретической основой, так как множество точек $\{(t_i, n_{i,j}, m_{i,j}, k_{i,j})\}$, где $j = 1, \dots, L_i$, L_i — число цифровых семиотических треугольников, сгенерированных в моменты времени t_i , $i = 1, 2, \dots\}$ представляет собой полное описание в цифровой среде ИИС дискретной «траектории» эволюции любого концепта ЦСЗ и его денотата, а также «траектории» эволюции формы представления этого концепта в социально-коммуникационной среде ИИС.

Однако для описания отношений между концептами, а также для решения проблем оценивания релевантности и направляемого развития ЦСЗ предложенная нестационарная семиотическая модель представляет собой только необходимую теоретическую основу, так как в пространстве Фреге не определена семантическая метрика. Поэтому для этих двух проблем необходимо дополнительно определить семантические метрики и ряд функций, например функцию конвенциональности концептов ЦСЗ, функцию релевантности всей ЦСЗ технологическим или другим общественно значимым потребностям, используя пространство Фреге как область определения этих функций.

Главный результат этой статьи заключается в описании теоретической основы компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов с учетом их эволюции во времени в виде нестационарной семиотической модели. При этом очевидна необходимость дальнейшего развития стационарной и нестационарной семиотических моделей. В частности, необходимо построить пространство Фреге, обладающее семантической метрикой, которое предлагается назвать *семантико-метрическим пространством Фреге*, чтобы использовать его для постановки, исследования и решения проблем оценивания релевантности и направляемого развития ЦСЗ.

Другим направлением развития этих моделей является описание связей ЦСЗ с другими системами знаний. В рассмотренном примере группа новых индикаторов распределения по возрастным группам публикационной активности научных сотрудников формировалась по аналогии с традиционными индикаторами возрастного распределения научных сотрудников, т. е. использовалась уже сформировавшаяся система знаний об этой группе индикаторов. Эту систему знаний можно рассмат-

ривать как некоторое начальное (нулевое) состояние формируемой ЦСЗ, которое в явном виде отсутствует в рассмотренной модели. Явное отражение начального состояния формируемой ЦСЗ, а также ее связей с другими системами знаний является еще одним актуальным направлением развития стационарной и нестационарной семиотических моделей компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов.

Литература

1. FP7 Exploratory Workshop 4 “Knowledge Anywhere Anytime”. http://cordis.europa.eu/ist/directorate_f/f_ws4.htm.
2. Зацман И. М. Семиотическая модель взаимосвязей концептов, информационных объектов и компьютерных кодов // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 2. С. 65–81.
3. Gorn S. Informatics (computer and information science): Its ideology, methodology, and sociology // The studies of information: Interdisciplinary messages / Eds. F. Machlup, U. Mansfield. — New York: John Wiley and Sons, Inc., 1983. P. 121–140.
4. Wang Y. Cognitive informatics: A new transdisciplinary research field // Brain Mind, 2003. Vol. 4. No. 2. P. 115–127.
5. Wang Y. On cognitive informatics // Brain Mind, 2003. Vol. 4. No. 2. P. 151–167.
6. Bryant A. Cognitive informatics, distributed representation and embodiment // Brain Mind, 2003. Vol. 4. No. 2. P. 215–228.
7. Зацман И. М., Косарик В. В., Курчавова О. А. Задачи представления личностных и коллективных концептов в цифровой среде // Информатика и её применения, 2008. Т. 2. Вып. 3. С. 54–69.
8. Успенский В. А. К публикации статьи Г. Фреге «Смысл и денотат» // Семиотика и информатика. — М.: Языки русской культуры, 1997. Вып. 35. С. 351–352.
9. Фреге Г. Понятие и вещь // Семиотика и информатика. — М.: Языки русской культуры, 1997. Вып. 35. С. 380–396.
10. Зацман И. М. Концептуальный поиск и качество информации. — М.: Наука, 2003.
11. Зацман И. М. Концептуализация данных наукометрических исследований в научных электронных библиотеках // Труды X Всеросс. конф. «Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции». — Дубна: ОИЯИ, 2008. С. 45–54.
12. Колин К. К. О структуре научных исследований по комплексной проблеме «Информатика» // Социальная информатика. — М.: ВКШ при ЦК ВЛКСМ, 1990. С. 19–33.
13. Колин К. К. Эволюция информатики и проблемы формирования нового комплекса наук об информации //

- Научно-техническая информация, 1995. Сер. 1. № 5. С. 1–7.
14. *Зацман И. М.* Концептуальный поиск информационных объектов в электронных библиотеках научных документов // Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии: Труды международной конференции «Диалог-2003». — М.: Наука, 2003. С. 710–716.
 15. *Gladney H. M., Bennet J. L.* What do we mean by authentic? What's the real McCoy? // D-Lib Magazine, 2003. Vol. 9. No. 7/8.
 16. *Кубрякова Е. С., Демьянков В. З., Панкрац Ю. Г., Лузина Л. Г.* Краткий словарь когнитивных терминов / Под общ. ред. Е. С. Кубряковой. — М.: Филфак МГУ, 1996.
 17. *Клейнер Г. Б., Голиченко О. Г., Зацман И. М.* Основные принципы разработки системы мониторинга функционирования исследовательских организаций. — М.: ЦЭМИ РАН, 2007. 61 с.
 18. *Зацман И. М., Верёвкин Г. Ф., Шубников С. К.* Моделирование систем мониторинга. — М.: ИПИ РАН, 2008. 115 с.
 19. *Zatsman I., Kozhunova O.* Evaluating for institutional academic activities: classification scheme for R&D indicators // 10th Conference (International) on Science and Technology Indicators (STI'2008) Proceedings. September 17–20, 2008. — Vienna: ARC GmbH, 2008. P. 428–431.
 20. *Зацман И. М.* Терминологический анализ нормативно-правового обеспечения создания систем мониторинга в сфере науки // Экономическая наука современной России, 2005. № 4. С. 114–129.
 21. Методические рекомендации по подготовке докладов о результатах и основных направлениях деятельности субъектов бюджетного планирования на 2006–2008 годы. http://www1.minfin.ru/budref/metod_270705.zip.

МОНОГРАФИЯ И. Н. СИНИЦЫНА «КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПОДДЕРЖКИ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ» (М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009. 840 с.)

Д.ф.-м.н., профессор С. Я. Шоргин

Канонические представления (канонические разложения и интегральные канонические представления) — это выражение случайных функций через дискретный и непрерывный белый шум. Канонические представления удобны для выполнения различных операций анализа над случайными функциями, особенно линейных операций. Объясняется это тем, что в каноническом представлении случайной функции ее зависимость от аргумента (скалярного или векторного) выражается при помощи вполне определенных неслучайных координатных функций, что дает возможность свести выполнение различных линейных операций к соответствующим операциям над неслучайными координатными функциями. Важное значение канонические представления имеют для задач статистической обработки информации (сигналов, изображений, сцен и других образов), стохастического системного анализа, идентификации и синтеза, аналитического и статистического моделирования, комплексного решения задач, связанных с построением компьютерных моделей. Здесь методы канонических представлений случайных функций оказываются достаточно универсальным инструментом. Создание теории канонических представлений случайных функций связано с именами Лозва, Колмогорова, Карунена и Пугачёва и относится к 1940–1950 гг. Современные проблемы автоматизации научных исследований, тесно связанные с информационными технологиями компьютерной поддержки научных исследований, ставят новые задачи разработки прикладной теории, а также методического, алгоритмического и программного обеспечения в области стохастического системного анализа, идентификации и стохастических информационных технологий научных исследований на базе канонических представлений случайных функций.

Монография состоит из 12 глав и 20 приложений. Первые пять глав посвящены прикладной теории канонических представлений случайных функций и случайных элементов, а гл. 6–12 — ее применению для типовых задач компьютерной поддержки научных исследований. Каждый раздел содержит дополнения и задачи. Приводятся новые результаты фундаментальных работ, выполненных в Институте проблем информатики в рамках научного направления «Стохастические системы и стохастические информационные технологии» (1998–2008 гг.), а также фундаментальных работ, поддержанных грантами РФФИ и Программой работ ОНИТ РАН «Фундаментальные основы информационных технологий и систем» (2003–2008 гг.). Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, издательский проект 09-07-07005.

Глава 1 содержит элементарное введение в корреляционную теорию канонических разложений и интегральных канонических представлений случайных функций. В разд. 1.1 рассматриваются два вида канонических представлений случайных функций. Раздел 1.2 посвящен

дискретным каноническим разложениям скалярных случайных функций. В разд. 1.3–1.6 описываются точные и приближенные методы построения канонических разложений случайных функций. Раздел 1.7 посвящен методам построения интегральных канонических представлений скалярных случайных функций.

В гл. 2 дается обобщение теории канонических разложений и интегральных канонических представлений гл. 1 на случай векторных случайных функций (разд. 2.1 и 2.2). Раздел 2.3 посвящен каноническим представлениям линейных и квазилинейных преобразований случайных функций. Теория эквивалентной регрессионной линеаризации существенно нелинейных преобразований посредством канонических разложений дается в разд. 2.4.

Глава 3 посвящена обобщению результатов гл. 1–2 на случай линейных функциональных пространств. В разд. 3.1 изложена линейная корреляционная теория канонических разложений (теоремы Пугачёва, способы построения канонических разложений, теорема Лозва–Карунена, теоремы о совместных канонических разложениях двух случайных элементов). Раздел 3.2 содержит теорию интегральных канонических представлений. Связь между спектральными и интегральными каноническими представлениями устанавливается в разд. 3.3. Раздел 3.4 посвящен корреляционной теории канонических представлений линейных преобразований. В разд. 3.5 рассматриваются вопросы решения линейных операторных уравнений методами канонических представлений.

Глава 4 содержит элементы стохастического анализа на основе канонических представлений случайных процессов. В разд. 4.1 приведены краткие сведения о распределениях случайных процессов и их высших моментах, рассматриваются вопросы вычисления распределений посредством канонических разложений с независимыми компонентами. Раздел 4.2 посвящен параметризации одно- и многомерных распределений. Особое внимание уделено вопросам параметризации ортогональных разложений плотностей посредством канонических разложений с независимыми компонентами. Вопросы задания вероятностных мер каноническими разложениями и вычисления с их помощью производных Радона–Никодима изучаются в разд. 4.3 и 4.4. В разд. 4.5 рассмотрены операции анализа над случайными процессами, стохастические интегралы от неслучайных функций скалярного и векторного аргумента, а также два типа интегральных канонических представлений. Раздел 4.6 посвящен стохастическим интегралам и дифференциалам от случайных функций. В разд. 4.7 рассматриваются некоторые вопросы теории канонических представлений в линейных функциональных пространствах.

Глава 5 посвящена методам статистического оценивания и моделирования канонических представлений случайных функций. В разд. 5.1 приведены необходимые сведения из общей теории статистического оценивания,

а в разд. 5.2 и 5.3 — сведения из прикладной теории статистического оценивания и моделирования случайных величин и случайных функций. Применение канонических разложений в задачах факторного анализа рассматривается в разд. 5.4.

Глава 6 посвящена методическим вопросам компьютерной поддержки статистических научных исследований. В разд. 6.1 рассмотрены задачи, общесистемные принципы и подходы к компьютерной поддержке научных исследований. В разд. 6.2 обсуждаются особенности компьютерной поддержки статистических научных исследований. Раздел 6.3 содержит изложение постановок задач оптимального синтеза систем для анализа и обработки информации по различным вероятностным критериям. Особое внимание уделено постановкам задач синтеза субоптимальных и условно оптимальных фильтров для систем реального времени.

Глава 7 посвящена рассмотрению математических моделей стохастических сигналов и систем. В разд. 7.1 обсуждаются общие вопросы структуры и представления стохастических сигналов и систем, в том числе и на основе канонических представлений случайных функций. Раздел 7.2 посвящен непрерывным системам. В разд. 7.3 изучаются модели линейных дифференциальных систем. Нелинейные непрерывные системы, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями, рассматриваются в разд. 7.4. Вопросы приведения уравнений непрерывной системы к стохастическим дифференциальным уравнениям изучаются в разд. 7.5. Модели дискретных систем обсуждаются в разд. 7.6 и 7.7.

Глава 8 посвящена моделям соединений и сложных стохастических систем. В разд. 8.1 рассматриваются правила преобразований структурных схем и графов линейных систем. В разд. 8.2 изучаются весовые функции соединений линейных систем. Раздел 8.3 посвящен стационарным линейным системам. Модели сложных стохастических систем обсуждаются в разд. 8.4.

Глава 9 посвящена методам вероятностного анализа линейных стохастических систем на основе канонических представлений случайных функций. В разд. 9.1 излагаются общие методы корреляционного анализа точности непрерывных систем. Спектрально-корреляционные методы анализа точности изучаются в разд. 9.2. Раздел 9.3 посвящен спектрально-корреляционным методам анализа точности дискретных систем. Анализ распределений и их параметров дается в разд. 9.4.

В гл. 10 рассматриваются методы вероятностного анализа процессов в нелинейных и сложных стохастических системах с помощью канонических представлений случайных функций. Раздел 10.1 посвящен методам анализа точности, основанным на непосредственной линеаризации нелинейностей с помощью канонических представлений, а также анализу нелинейных систем, приводимых к линейным. Спектрально-корреляционные методы анализа существенно нелинейных систем, основанные на эквивалентной линеаризации посредством канонических разложений, обсуждаются в разд. 10.2. В разд. 10.3 рассматриваются вопросы анализа распределений марковских процессов в нелинейных стохастических системах посредством неканонических и канонических разложений. Особое внимание уделяется параметризации распределений на основе канонических разложений с независимыми компонентами. Раздел 10.4 посвящен основанным на нормализации комбинированным методам аналитического и статистического моделирования

сложных стохастических систем с помощью канонических разложений.

Глава 11 посвящена вопросам оптимального (в смысле минимума средней квадратической ошибки (с.к.о.)) синтеза фильтров для обработки информации на основе методов канонических разложений и интегральных канонических представлений. В разд. 11.1 даются необходимые сведения из теории с.к. оптимизации. Выводится общее условие минимума с.к.о., выписаны уравнения, определяющие с.к. оптимальный фильтр. Подробно анализируется случай линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи. Особое внимание уделяется фильтрационным уравнениям, определяющим с.к. оптимальное неоднородное преобразование. Получены уравнения, определяющие весовые функции с.к. оптимальных одно- и конечномерных непрерывных и дискретных линейных фильтров. Методы определения с.к. оптимальных одно- и конечномерных фильтров на основе интегральных канонических представлений рассматриваются в разд. 11.2. Методы определения с.к. оптимальных одно- и конечномерных фильтров на основе канонических разложений изучаются в разд. 11.3. Дается общее решение, рассматриваются особые случаи, единственность решения линейных фильтрационных уравнений и точность фильтрации. В разд. 11.4 рассматриваются вопросы синтеза нелинейных фильтров, приводимых к линейным. Раздел 11.5 содержит общее решение задачи синтеза с.к. оптимального фильтра в классе всех возможных фильтров. Подробно рассматривается случай нормального распределения сигнала и наблюдения. В разд. 11.6 рассматривается синтез дискретных и непрерывных линейных фильтров Калмана.

Глава 12 является продолжением гл. 11 и посвящена вопросам оптимального (в смысле произвольного байесовского критерия) синтеза фильтров. В разд. 12.1 обобщаются результаты разд. 11.1–11.5 на случай сложно-статистического критерия. Подробно рассмотрены как линейные системы, так и нелинейные системы, приводимые к линейным. Разделы 12.2 и 12.3 посвящены синтезу методом канонических разложений оптимального фильтра по байесовому критерию. Рассмотрены задачи фильтрации, экстраполяции, воспроизведения и обнаружения сигналов известной структуры со случайными параметрами по различным байесовым критериям. Раздел 12.4 посвящен вопросам алгоритмического синтеза оптимального фильтра по байесовому критерию при нелинейной и стохастической зависимости наблюдений от параметров сигнала. Дан общий метод синтеза на основе канонических разложений. Изучены случаи, когда функция потерь — линейный функционал, а также случаи, когда функция потерь является функционалом, а сигнал и помеха имеют нормальное распределение. Разделы 12.5 и 12.6 посвящены суб- и условно оптимальным фильтрам.

Книга предназначена для научных работников и специалистов в области автоматизации научных исследований и компьютерной поддержки научных исследований, прикладной математики и информатики, механики и теории управления, физики и астрономии. Может использоваться в учебном процессе при подготовке специалистов, аспирантов и магистров. Единая методика, тщательный подбор примеров и задач (их свыше 500), а также богатый методический, программно-алгоритмический и справочный материал позволяют использовать книгу широкому кругу магистров, аспирантов и преподавателей.

INFORMATION MODEL BUILDING PROBABILISTIC METHODS FOR THE EARTH ROTATION IRREGULARITY

I. N. Sinitsyn

IPI RAN, sinitsin@dol.ru

New linear and nonlinear probabilistic model building methods for fluctuation of the Earth irregularity are considered. Methods are the basis of *a priori* data processing for the problem “Statistical Dynamics of the Earth Rotation.” Test examples are provided.

Keywords: information model; information resources; linear and nonlinear probabilistic methods; hereditary; fluctuations; one- and multidimensional distributions; asymmetry; excess; Gaussian and Poisson white noises; distribution parameterization; moments methods

ELASTIC DEFORMATIONS IMPACT ON FINGERPRINT RECOGNITION PERFORMANCE

O. S. Ushmaev¹ and A. R. Arutyunyan²

¹IPI RAN, oushmaev@ipiran.ru

²Nuclear Safety Institute RAN, artem@ac.ibrae.ru

Elastic deformations are the strong negative factor in fingerprint recognition. The mechanical approach to fingerprint deformation modeling was employed to determine elastic deformation impact on fingerprint recognition. The statistic analysis of structure of elastic deformations was carried out. It revealed that an arbitrary deformation is the combination of elementary principal deformations: rotation, torsion, and traction. Finally, numerical measure for the impact of deformations on fingerprint recognition was found.

Keywords: fingerprint recognition; nonlinear distortions of fingerprints

CALCULATION ALGORITHM OF WORKLOAD OF TELECOMMUNICATION NETWORK WITH REPETITIVE TRANSMISSIONS

Ya. M. Agalarov

IPI RAN, agglar@yandex.ru

The models of packet switching network with repetitive transmissions for two schemes of buffer memory distributions — complete sharing and complete partitioning — are considered. The iterative method of calculation of stream intensity in network and probabilities of node blocking where node model is the queueing system of type $\frac{M}{\lambda} \left| \frac{M}{\lambda} \right| m \bar{m} | N$ is proposed. The necessary condition for existence of solution of stream balance conservation equations in steady-state regime was established. The monotone convergence of stream intensities sequence and probabilities of blocking derived in the proposed method to the solution of these combined equations was proved.

Keywords: network of packets switching; buffer memory; repetitive transmissions; probabilities of blocking; iteration method

BAYESIAN QUEUEING AND RELIABILITY MODELS: GENERAL ERLANG CASE

A. A. Kudriavtsev¹, V. S. Shorgin², and S. Ya. Shorgin³¹Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, nubigena@hotmail.ru²IPI RAN, vshorgin@ipiran.ru³IPI RAN, sshorgin@ipiran.ru

The paper is a next step in bayesian queueing and reliability models investigation. The method provides the randomization of system characteristics with regard to *a priori* distributions of input parameters. The new results are presented for two cases when both *a priori* distributions are Erlang distributions and when a pair of *a priori* distributions is the pair “Erlang distribution – degenerate distribution.”

Keywords: bayesian approach; queueing systems; reliability; mixed distributions; modeling; Erlang distribution

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE $E_r(t)|G|1$ QUEUEO. V. Petrova¹ and V. G. Ushakov²¹Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, o.petrova@inbox.ru²Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University; IPI RAN, ushakov@akado.ru

The single server queue with time-dependent Erlangian input is considered. The service times have general distribution. The asymptotic behavior of the queue length with traffic intensity less than 1 and with arrival rate weakly depending upon time is investigated.

Keywords: $E_r|G|1$ queue; time-dependent Erlangian input; asymptotic analysis

ASYMPTOTIC ESTIMATES OF THE ABSOLUTE CONSTANT IN THE BERRY–ESSEEN INEQUALITY FOR DISTRIBUTION WITH UNBOUNDED THIRD MOMENT

M. O. Gaponova¹ and I. G. Shevtsova²¹Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, margarita.gaponova@gmail.com²Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, ishevtsova@cs.msu.su

The Prawitz’ asymptotic estimates for the absolute constant in the Berry–Esseen inequality are sharpened for the case of independent identically distributed random variables with finite third moments. Similar estimates are constructed for the case of unbounded third absolute moment. Also, upper estimates of the asymptotically exact constants in the central limit theorem are presented.

Keywords: central limit theorem; normal approximation; convergence rate estimate; sum of independent random variables; Berry–Esseen inequality; Lyapounov fraction; asymptotically exact constant

LIMIT DISTRIBUTION OF RISK ESTIMATE OF WAVELET COEFFICIENT THRESHOLDING

A. V. Markin

Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, artem.v.markin@mail.ru

Asymptotic properties of risk estimate of wavelet coefficient thresholding are studied. Under certain conditions, there is a convergence of the difference of risk estimate and risk itself to normal distribution.

Keywords: wavelets; thresholding; risk estimate; limit distribution

TECHNOLOGY OF POORLY FORMALIZED DOCUMENTS STORAGE ON THE BASIS OF LEXICOLOGICAL SYNTHESIS

B. V. Chernikov

Limited Liability Company "ANT-Inform," bor-cher@yandex.ru

The technology of storage of poorly formalized documents that are created using lexicological synthesis is considered. The technology provides formation of the kept index sequences containing indexes of document forms and their substantial components. Additionally, thanks to simultaneous preparation of documents and creation of kept index sequences, the economy of time is provided. The experiments have shown the efficiency of the approach for the documents created for management of different kinds of activity.

Keywords: poorly formalized document; lexicological synthesis; index; index sequence; compression

SELF-ORGANIZATION OF INTELLIGENT AGENTS GROUPS SIMULATION DEPENDING ON DEGREE OF INTERACTION

I. A. Kirikov¹, A. V. Kolesnikov², and S. V. Listopad³

¹Kaliningrad branch of the IPI RAN, kfipiran@yandex.ru

²Kaliningrad branch of the IPI RAN, avkolesnikov@yandex.ru

³Kaliningrad branch of the IPI RAN, ser-list-post@yandex.ru

One of the approaches to the creation of self-organizing intellectual computer system for decision-making support based on an analysis of the experts' goals is considered. An algorithm for determining the type of multiagent system architecture based on the extent of interaction between agents is considered, that is relevant to determining the effectiveness of expert groups and to improving the quality of decision-making.

Keywords: decision support computer system; self-organizing multiagent system; similarity measure of agents' fuzzy goals; algorithm for determining the type of multiagent system architecture based on the extent of interaction between agents

TIME-DEPENDENT SEMIOTIC MODEL FOR COMPUTER CODING OF CONCEPTS, INFORMATION OBJECTS, AND DENOTATA

I. M. Zatsman

IPI RAN, iz_ipi@a170.ipi.ac.ru

The time-dependent semiotic model, which has been developed during research of problems of generation and evolution of goal-oriented knowledge systems in digital libraries and other kinds of information systems, is considered. These problems concern to the new direction of the researches, which have named "Cognitive Informatics." This model is positioned as theoretical foundations for computer coding of concepts, information objects, and denotata in view of their evolution in time.

Keywords: semiotic model; goal-oriented knowledge systems; denotata; concepts; information objects; computer codes; three-component coding; concept evolution trajectory

Об авторах

Агаларов Явер Мирзабекович (р. 1952) — кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник ИПИ РАН

Арутюнян Артём Рафаэлевич (р. 1980) — научный сотрудник Института проблем безопасного развития атомной энергетики (ИБРАЭ РАН)

Гапонова Маргарита Олеговна (р. 1987) — аспирантка факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Зацман Игорь Моисеевич (р. 1952) — кандидат технических наук, заведующий отделом ИПИ РАН

Кириков Игорь Александрович (р. 1955) — кандидат технических наук, директор Калининградского филиала ИПИ РАН

Колесников Александр Васильевич (р. 1948) — доктор технических наук, профессор кафедры компьютерного моделирования и информационных систем ФГОУ ВПО «Российский государственный университет им. Иммануила Канта», старший научный сотрудник Калининградского филиала ИПИ РАН

Кудрявцев Алексей Андреевич (р. 1978) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова

Листопад Сергей Викторович (р. 1984) — научный сотрудник Калининградского филиала ИПИ РАН

Маркин Артём Васильевич (р. 1985) — аспирант кафедры математической статистики факультета вы-

числительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова

Петрова Ольга Владимировна (р. 1984) — аспирантка факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова

Синицин Игорь Николаевич (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, заведующий отделом ИПИ РАН

Ушаков Владимир Георгиевич (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова

Ушмаев Олег Станиславович (р. 1981) — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник ИПИ РАН

Шевцова Ирина Геннадьевна (р. 1983) — кандидат физико-математических наук, ассистент факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Шоргин Всеволод Сергеевич (р. 1978) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник ИПИ РАН

Шоргин Сергей Яковлевич (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора ИПИ РАН

Черников Борис Васильевич (р. 1950) — кандидат технических наук, доцент, начальник отдела общественных решений ООО «АНТ-Информ», Москва

About Authors

Agalarov Yaver M. (b. 1952) — Candidate of Science (PhD) in technology, leading scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Arutyunyan Artem R. (b. 1980) — scientist, Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences

Chernikov Boris V. (b. 1950) — Candidate of Science (PhD) in technology, associate professor, Head of the Global System Decisions Department, Limited Liability Company “ANT-Inform,” Moscow

Gaponova Margarita O. (b. 1987) — PhD student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Kirikov Igor A. (b. 1955) — Candidate of Science (PhD) in technology, director, Kaliningrad Branch of the Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Kolesnikov Alexander V. (b. 1948) — Doctor of Science in technology, professor, Department of Computer Modeling and Information Systems, “Immanuel Kant Russian State University;” senior scientific associate, Kaliningrad Branch of the Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Kudriavtsev Alexei A. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Listopad Sergey V. (b. 1984) — scientist, Kaliningrad Branch of the Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Markin Artem V. (b. 1985) — PhD student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computa-

tional Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Petrova Olga V. (b. 1984) — PhD student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Shevtsova Irina G. (p. 1983) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics; assistant, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Shorgin Sergey Ya. (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Deputy Director, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Shorgin Vsevolod S. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in technology; senior researcher, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Sinityn Igor N. (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, honored scientist of RF, Head of Department, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Ushakov Vladimir G. (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University

Ushmaev Oleg S. (b. 1981) — Candidate of Science (PhD) in technology, leading scientist, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

Zatsman Igor M. (b. 1952) — Candidate of Science (PhD) in technology, Head of Department, Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ЗА 2009 г.

		Выпуск	Стр.
Агаларов Я. М. Алгоритм вычисления загруженности телекоммуникационной сети с повторными передачами	4		22
Агаларов Я. М. Приближенный метод вычисления характеристик узла телекоммуникационной сети с повторными передачами	2		34
Артюхов С. В. Оценки скорости сходимости распределений экстремумов обобщенных процессов Кокса с ненулевым средним к сдвиговым смесям нормальных законов	1		69
Арутюнян А. Р. см. Ушмаев О. С.			
Бенинг В. Е., Лямин О. О. О мощности критериев в случае обобщенного распределения Лапласа	3		79
Бородакий В. Ю. Вероятностная модель обслуживания трафика в системе сетевидного типа	3		35
Гапонова М. О., Шевцова И. Г. Асимптотические оценки абсолютной постоянной в неравенстве Бери–Эссеена для распределений, не имеющих третьего момента	4		41
Горькавый И. Н. см. Сухомлин В. А.			
Егоров В. Б. Вопросы реализации объединяющей среды в архитектуре децентрализованной пакетной коммутации	2		43
Егоров В. Б. Концепция создания отечественных интегрированных коммуникационных микроконтроллеров для пакетной коммутации	1		34
Зацман И. М. Нестационарная семиотическая модель компьютерного кодирования концептов, информационных объектов и денотатов	4		87
Зацман И. М. Семиотическая модель взаимосвязей концептов, информационных объектов и компьютерных кодов	2		65
Зейфман А. И., Сатин Я. А., Коротышева А. В., Терёшина Н. А. О предельных характеристиках системы обслуживания $M(t)/M(t)/S$ с катастрофами	3		16
Зейфман А. И., Сатин Я. А., Чегодаев А. В. О нестационарных системах обслуживания с катастрофами	1		47
Кириков И. А., Колесников А. В., Листопад С. В. Моделирование самоорганизации групп интеллектуальных агентов в зависимости от степени согласованности их взаимодействия	4		76
Козмидиadi В. А. Резервное копирование, использующее снимки	2		15
Колесников А. В. см. Кириков И. А.			
Королёв В. Ю. О распределении размеров частиц при дроблении	3		60
Королёв В. Ю. см. Соколов И. А.			
Коротышева А. В. см. Зейфман А. И.			
Крылов А. С. см. Насонов А. В.			
Кудрявцев А. А., Шоргин В. С., Шоргин С. Я. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: общий эрланговский случай	4		30
Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: экспоненциально-эрланговский случай	1		55
Кучеренко С. см. Темнов Г.			
Листопад С. В. см. Кириков И. А.			
Лямин О. О. см. Бенинг В. Е.			
Маркин А. В. Предельное распределение оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов	4		57
Морозов Е. В. Асимптотики вероятностей больших отклонений стационарной очереди	3		23

	Выпуск	Стр.
Насонов А. В., Крылов А. С., Урмаев О. С. Развитие методов повышения качества изображений лиц в видеопотоке	1	19
Петрова О. В., Ушаков В. Г. Асимптотический анализ системы массового обслуживания $E_r(t) G 1$	4	35
Печинкин А. В., Соколов И. А., Чаплыгин В. В. Многолинейная система массового обслуживания с групповым отказом приборов	3	4
Печинкин А. В., Френкель С. Л. Вероятностный анализ времени проявления неисправности в сети автоматов	2	2
Сатин Я. А. см. Зейфман А. И.		
Сатин Я. А. см. Зейфман А. И.		
Синицын И. Н. Вероятностные методы построения информационных моделей неравномерности вращения Земли	4	2
Синицын И. Н. Методы построения информационных моделей эрмитарных флуктуаций неравномерности вращения Земли	1	2
Соколов И. А., Королёв В. Ю. Предисловие	3	2
Соколов И. А. см. Печинкин А. В.		
Сухомлин В. А., Горькавый И. Н. Технологическая система для построения программных комплексов автоматизации обработки трехмерных данных лазерного сканирования	2	53
Темнов Г., Кучеренко С. Подход к актуарному моделированию на основе применения метода квази-Монте-Карло для случайных сумм, зависящих от стохастических факторов	3	40
Терёшина Н. А. см. Зейфман А. И.		
Торчигин А. В. Об одном подходе к формированию изображений без использования экрана	1	60
Ушаков В. Г., Шестаков О. В. Восстановление вероятностных характеристик случайных функций в задачах однофотонной эмиссионной томографии	1	29
Ушаков В. Г. см. Петрова О. В.		
Урмаев О. С. Адаптация биометрической системы к искажающим факторам на примере дактилоскопической идентификации	2	25
Урмаев О. С. Проблемы распараллеливания биометрических вычислений в крупномасштабных идентификационных системах	1	8
Урмаев О. С., Арутюнян А. Р. Влияние деформаций на качество биометрической идентификации по отпечаткам пальцев	4	12
Урмаев О. С. см. Насонов А. В.		
Френкель С. Л. см. Печинкин А. В.		
Хамдеев Б. И. см. Чупрунов А. Н.		
Чаплыгин В. В. см. Печинкин А. В.		
Чегодаев А. В. см. Зейфман А. И.		
Черников Б. В. Технология хранения слабоформализуемых документов на основе лексикологического синтеза	4	64
Чупрунов А. Н., Хамдеев Б. И. О вероятности исправления ошибок при помехоустойчивом кодировании, когда число ошибок принадлежит некоторому конечному множеству	3	52
Шевцова И. Г. Некоторые оценки для характеристических функций с применением к уточнению неравенства Мизеса	3	69
Шевцова И. Г. см. Гапонова М. О.		
Шестаков О. В. Об устойчивости реконструкции изображений в задачах эмиссионной томографии	3	47
Шестаков О. В. см. Ушаков В. Г.,		
Шоргин В. С. см. Кудрявцев А. А.		
Шоргин С. Я. см. Кудрявцев А. А.		
Шоргин С. Я. см. Кудрявцев А. А.		

2009 AUTHOR INDEX

	Issue	Page
Agalarov Ya. M. Approximate Method of Calculation of Node Characteristics in Telecommunication Network with Repetitive Transmissions	2	34
Agalarov Ya. M. Calculation Algorithm of Workload of Telecommunication Network with Repetitive Transmissions	4	22
Artyukhov S. V. Convergence Rate Estimates of Distributions of Extrema of Compound Cox Processes with Nonzero Means to Location Mixtures of Normal Laws.....	1	69
Arutyunyan A. R. see Ushmaev O. S.		
Bening V. E. and Lyamin O. O. On the Power of the Tests in the Case of Generalized Laplace Distribution	3	79
Borodakiy V. Y. Traffic-Level Probability Model for the Network Centric System.....	3	35
Chaplygin V. see Pechinkin A.		
Chegodayev A. V. see Zeifman A. I.		
Chernikov B. V. Technology of Poorly Formalized Documents Storage on the Basis of Lexicological Synthesis	4	64
Chuprunov A. N. and Khamdeyev B. I. On Probabilistic Aspects of Error Correction Codes When the Number of Errors Is a Random Set	3	52
Egorov V. B. A Design Concept of Domestic Integrated Communication Microcontrollers for Packet Switching	1	34
Egorov V. B. Some Implementation Aspects of the Connecting Medium in the Decentralized Packet Switching Architecture	2	43
Frenkel S. L. see Pechinkin A. V.		
Gaponova M. O. and Shevtsova I. G. Asymptotic Estimates of the Absolute Constant in the Berry–Esseen Inequality for Distribution with Unbounded Third Moment	4	41
Gorkavyy I. N. see Sukhomlin V. A.		
Khamdeyev B. I. see Chuprunov A. N.		
Kirikov I. A., Kolesnikov A. V., and Listopad S. V. Self-organization of Intelligent Agents Groups Simulation Depending on Degree of Interaction	4	76
Kolesnikov A. V. see Kirikov I. A.		
Korolev V. Y. On the Distribution of Particle Size Under Fracturing	3	60
Korotysheva A. V. see Zeifman A. I.		
Kozmidiady V. A. Backup Using Snapshots	2	15
Krylov A. S. see Nasonov A. V.		
Kucherenko S. see Temnov G.		
Kudriavtsev A. A. and Shorgin S. Ya. Bayesian Queuing and Reliability Models: An Exponential-Erlang Case.....	1	55
Kudriavtsev A. A., Shorgin V. S., and Shorgin S. Ya. Bayesian Queueing and Reliability Models: General Erlang Case	4	30
Listopad S. V. see Kirikov I. A.		
Lyamin O. O. see Bening V. E.		
Markin A. V. Limit Distribution of Risk Estimate of Wavelet Coefficient Thresholding	4	57
Morozov E. V. Large Deviation Asymptotics of Stationary Queues	3	23
Nasonov A. V., Krylov A. S., and Ushmaev O. S. Development of Superresolution-Based Face Video Enhancement	1	19

	Issue	Page
Pechinkin A. V. and Frenkel S. L. A Probabilistic Analysis of Fault Detection Latency in a Network of Finite State Machines.	2	2
Pechinkin A., Sokolov I., and Chaplygin V. Multichannel Queueing System with Refusals of Servers Groups.	3	4
Petrova O. V. and Ushakov V. G. Asymptotic Analysis of the $E_r(t) G 1$ Queue.	4	35
Satin Ya. A. see Zeifman A. I.		
Satin Ya. A. see Zeifman A. I.		
Shestakov O. V. On Stability of Image Reconstruction in the Problems of Emission Tomography	3	47
Shestakov O. V. see Ushakov V. G.		
Shevtsova I. G. Some Estimates for Characteristic Functions with an Application to Sharpening the Mises Inequality.	3	69
Shevtsova I. G. see Gaponova M. O.		
Shorgin S. Ya. see Kudriavtsev A. A.		
Shorgin S. Ya. see Kudriavtsev A. A.		
Shorgin V. S. see Kudriavtsev A. A.		
Sinitsyn I. N. Information Model Building Probabilistic Methods for the Earth Rotation Irregularity.	4	2
Sinitsyn I. N. Methods for Information Model Building for the Earth Tidal Hereditary Irregular Rotation.	1	2
Sokolov I. see Pechinkin A.		
Sukhomlin V. A. and Gorkavyi I. N. Technological System for Automatic Processing of Three-Dimensional Lidar Data.	2	53
Temnov G. and Kucherenko S. An Approach to Actuarial Modeling with Quasi-Monte Carlo: Simulation of Random Sums Depending on Stochastic Factors.	3	40
Tereshina N. A. see Zeifman A. I.		
Torchigin A. V. On One Approach to Image Production Without Screens.	1	60
Ushakov V. G. and Shestakov O. V. Reconstruction of Probabilistic Characteristics of Random Functions in Spect Problems.	1	29
Ushakov V. G. see Petrova O. V.		
Ushmaev O. S. Parallel Computing in Large-Scale Multimodal Biometric Systems.	1	8
Ushmaev O. S. Registration of Distortions in Automatic Fingerprint Identification.	2	25
Ushmaev O. S. and Arutyunyan A. R. Elastic Deformations Impact on Fingerprint Recognition Performance.	4	12
Ushmaev O. S. see Nasonov A. V.,		
Zatsman I. M. Semiotic Model for Computer Coding Concepts and Information Objects.	2	65
Zatsman I. M. Time-Dependent Semiotic Model for Computer Coding of Concepts, Information Objects, and Denotata.	4	87
Zeifman A. I., Satin Ya. A., and Chegodaev A. V. On Nonstationary Queueing Systems with Catastrophes.	1	47
Zeifman A. I., Satin Ya. A., Korotysheva A. V., and Tereshina N. A. On the Limiting Characteristics for $M(t)/M(t)/S$ Queue with Catastrophes.	3	16